

На правах рукописи



Мартынова Валерия Юрьевна

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ И
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В
НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Пенза – 2021

Работа выполнена на кафедре «Математика и суперкомпьютерное моделирование» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пензенский государственный университет»

Научный руководитель:	Смирнов Юрий Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (г. Пенза)
Официальные оппоненты:	Ильинский Анатолий Серафимович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической физики, заведующий лабораторией вычислительной электродинамики факультета вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (г. Москва) Клюев Дмитрий Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой радиоэлектронных систем ФГБОУ ВО «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (г. Самара)
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет» (г. Казань)

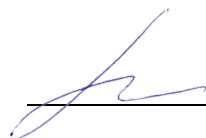
Защита диссертации состоится «1» июня 2021 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.131.03 при «МИРЭА – Российский технологический университет» (РТУ МИРЭА) по адресу 119454, г. Москва, пр-т Вернадского, 78, ауд. Г-412.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке РТУ МИРЭА и на официальном сайте РТУ МИРЭА www.mirea.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью, просим направлять по адресу: 119454, Москва, пр-т Вернадского, д. 78, диссертационный совет Д 212.131.03, ученому секретарю Андриановой Е.Г.

Автореферат разослан «29» апреля 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат технических наук, доцент



Е.Г. Андрианова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория распространения электромагнитных волн в линейных диэлектрических волноводах различного поперечного сечения нашла широкое применение в технике СВЧ и при расчете и конструировании оптических устройств. Математическая теория задач о собственных волнах линейных волноведущих структур развита достаточно полно и имеет многочисленные приложения^{1 2}.

После создания лазеров и экспериментов с ними были обнаружены нелинейные эффекты в твердых телах, жидкостях и газах. Это привлекло внимание исследователей к изучению задач о распространении электромагнитных волн в нелинейных средах. К таким задачам относятся: распространение и дифракция электромагнитных волн в средах с самовоздействием (самофокусировка, дефокусировка), генерация высших гармоник (в первую очередь второй и третьей), рамановское рассеяние и т.д.³

Задачи дифракции и распространения электромагнитных волн в нелинейных средах остаются актуальными и в настоящее время. Это связано с несколькими обстоятельствами. Прежде всего, такие задачи описывают различные физические явления в электродинамике. Нелинейные эффекты, возникающие при дифракции и распространении электромагнитных волн в веществе, находят частое применение, например, в физике плазмы, нелинейной оптике, лазерной технике и микроэлектронике. Несмотря на многочисленные исследования в этой области на протяжении последних двух десятилетий остаются неизученными свойства симметричных гибридных и связанных нелинейных волн, а также свойства решений задач дифракции электромагнитной волны на нелинейном слое. Особый интерес представляет исследование нелинейных свойств новых материалов. Таким образом, изучение перечисленных выше задач является актуальным.

С другой стороны, задачи дифракции и распространения электромагнитных волн в нелинейных средах представляют интерес с математической точки зрения. Задачи распространения электромагнитных волн в нелинейных средах приводят к нелинейным задачам на собственные значения, причем как к однопараметрическим (распространение поляризованной ТЕ-волны), так и к многопараметрическим (распространение связанных ТЕ-ТЕ волн). Кроме того, задача о распространении нелинейных симметричных гибридных волн

¹Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. – М.: Мир, 1984. – 512 с.

²Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.

³Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны, нелинейные импульсы и пучки. – М.: Физматлит, 2003. – 304 с.

сводится к новому типу двухпараметрических задач, в котором только один из параметров является спектральным, а второй выбирается таким образом, чтобы существовало нетривиальное решение задачи. Общая теория решения нелинейных задач на собственные значения развита недостаточно полно. В связи с этим возникает необходимость в развитии аналитических и численных методов решения подобных задач.

Наиболее полные результаты удалось получить в задачах о распространении поляризованных монохроматических электромагнитных волн в плоско-слоистых волноводах и цилиндрических диэлектрических волноводах с круглым сечением, заполненных средой, диэлектрическая проницаемость которой зависит от квадрата модуля интенсивности электрического поля. Первые строгие постановки таких задач были предложены в работах Елеонского П.Н., Оганесьянца Л.Г. и Силина В.П. Задачи о распространении ТЕ- и ТМ-поляризованных электромагнитных волн в плоских нелинейных волноводах изучались в работах Boardman A.D., Schürmann H.W., Серова В.С., Шестопалова Ю.В., где были получены первые результаты решения данных задач⁴, Смирнова Ю.Г., Валовика Д.В., где для исследования данных задач был предложен метод интегральных дисперсионных уравнений. Изучение процессов распространения ТЕ- и ТМ-волн привело к появлению новых постановок задач о распространении волн и, как следствие, открытию новых режимов распространения электромагнитных волн в нелинейных средах⁵. Таким образом, разработка новых аналитических и численных методов для изучения связанных и симметричных гибридных нелинейных волн, а также задач дифракции электромагнитной волны на нелинейном слое является актуальной.

Целью работы является исследование математических моделей дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением, и распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, для задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

⁴Schürmann, H.W. Serov V.S., Shestopalov Yu.V. Solutions to the Helmholtz equation for TE-guided waves in a three-layer structure with Kerr-type nonlinearity // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2002. – V. 35. – № 50. – P. 10789–10801.

⁵Smirnov Yu.G., Valovik D.V. Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity // Journal of Mathematical Physics. – 2012. – V. 53. – № 12. – P. 123530.

1. Разработка аналитических методов исследования математических моделей дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением, распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.
2. Разработка и обоснование численных методов и вычислительных алгоритмов приближенного решения задачи дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.
3. Разработка на языке C/C++ и тестирование программно-вычислительного комплекса для численного решения задач дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, а также получение и анализ численных результатов решения указанных задач.

Методика исследования. Основные теоретические результаты диссертационной работы получены с использованием методов математического моделирования, разделов классической электродинамики, теории дифференциальных и интегральных уравнений, теории краевых задач для уравнений Максвелла.

Для разработки алгоритмов применялись численные методы и методы информационных технологий.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1. Получены результаты о разрешимости задач дифракции электромагнитных монохроматических поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных немагнитной средой с нелинейностью Керра и нелинейностью

с эффектом насыщения. В случае нелинейности с насыщением найдены условия на коэффициенты нелинейности, при которых задача имеет единственное решение. В случае нелинейности Керра доказано существование бесконечного числа волн даже при малых значениях нелинейности. Для задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, найдены условия существования и единственности волны. Исследован новый тип двухпараметрических задач, в которых только один из параметров спектральный, а второй подбирается таким образом, чтобы существовало нетривиальное решение задачи и доказано существование симметричной гибридной электромагнитной волны в слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.

2. Для задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения, разработан и обоснован численный (итерационный) метод приближенного нахождения касательной компоненты электрического поля и амплитуд отраженной и прошедшей волн для заданной амплитуды падающей волны. Для задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, разработан и обоснован численный метод нахождения приближенных связанных собственных значений и собственных функций. Для задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, разработан и обоснован численный метод нахождения приближенных собственных значений и собственных функций.
3. Разработан комплекс программ, позволяющий находить приближенные решения задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением.

Научно-практическая значимость результатов, полученных в диссертации, заключается в разработанных новых аналитических и численных методах и возможности их использования для обнаружения новых нелинейных эффектов в линзах и других оптических устройствах. Предложенные в

работе методы могут быть применены для решения задач, возникающих в теории оптических волноводов.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Результаты о разрешимости задачи дифракции электромагнитных ТЕ-волн на нелинейных слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и с нелинейностью с насыщением, условие единственности решения нелинейной задачи дифракции в случае нелинейности с насыщением; результаты о разрешимости задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, условие единственности решения задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением; условие единственности решения для задачи распространения симметричной гибридной электромагнитной волны в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением.
2. Численный (итерационный) метод приближенного нахождения касательной компоненты электрического поля и амплитуды отраженной волны для заданной амплитуды падающей волны для задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения, оценка скорости сходимости итерационного метода; численный (итерационный) метод приближенного нахождения связанных собственных значений и собственных функций для задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, теоремы о существовании и сходимости приближенных связанных собственных значений к точным; численный (итерационный) метод приближенного нахождения собственных значений и собственных функций для задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, теоремы о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным.
3. Комплекс программ, позволяющий находить приближенные решения задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением; анализ результатов расчетов.

Достоверность результатов и выводов диссертационной работы обеспечивается корректным использованием математических методов и сопоставлением теоретических утверждений с результатами численных расчетов.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались на международных и всероссийских научных конференциях, в их числе доклады и статьи для международных научных конференций «Days on Diffraction» (г. Санкт-Петербург, 2018, 2019), «Progress in Electromagnetics Research Symposium» (г. Санкт-Петербург, 2017), «Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения» (г. Пенза, 2019).

Публикации по теме диссертации. Основные научные результаты диссертации отражены в 14 научных работах, из них в изданиях, входящих в базы WOS/Scopus, – 9, в изданиях, рекомендованных ВАК, – 7, в изданиях, входящих в базу РИНЦ, – 14.

Зарегистрировано 4 программы для ЭВМ №2018665405 и №2018660595 от 4 декабря 2018 г., №2019616693 от 29 мая 2019 г., №2019667550 от 25 декабря 2019 г.

Личный вклад автора. Постановка задачи принадлежит проф., д. физ.-мат. наук Смирнову Ю. Г. Все изложенные в диссертации основные результаты получены автором лично. Программная реализация численных методов и расчеты также выполнены автором самостоятельно. Вклад соискателя в опубликованные работы, вошедшие в диссертацию, является решающим.

Структура и объем диссертации. Работа содержит 180 страниц и состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обоснование актуальности и научной новизны диссертации, цели и задачи исследования, основные результаты и научно-практическую значимость диссертации, апробацию работы, личный вклад автора.

В **главе 1** изучены математические модели дифракции электромагнитных ТЕ-волн на нелинейных слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и с нелинейностью с эффектом насыщения, и распространения связанной ТЕ-ТЕ и нелинейной симметричной гибридной волн в нелинейных слоях, заполненных средой с нелинейностью с эффектом насыщения.

В первом параграфе главы 1 описана постановка задачи дифракции электромагнитных ТЕ-волн на нелинейном слое. В случае, когда слой заполнен средой с нелинейностью с насыщением найдены условия на коэффициенты нелинейности, при которых задача имеет единственное решение. В случае нелинейности Керра доказано существование бесконечного числа решений задачи дифракции.

Пусть $\Sigma_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ – слой в $\mathbb{R}^3$, где $h > 0$. Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$, где относительная диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x > h, \\ \varepsilon_2 + \tilde{\alpha}f(|\mathbf{E}|^2), & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_3, & x < 0, \end{cases}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \tilde{\alpha} > 0$ – вещественные постоянные, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mathbf{E}$ – электрическая составляющая электромагнитного поля, функция $f \in C^1(-\infty, +\infty)$. Считаем, что $\varepsilon_2 > \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$ и $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} \geq 1$.

В качестве источника поля рассмотрим следующую функцию $\tilde{\mathbf{j}}^{\text{ст}} = \mathbf{j}^{\text{ст}}e^{-i\omega t}$, где ω – круговая частота, $\mathbf{j}^{\text{ст}} = \mathbf{e}_y i A e^{i\gamma z} \delta(x - x_0)$, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, A – известная вещественная амплитуда источника, $x_0 > h$ – известная вещественная постоянная, характеризующая положение источника.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$ на слое Σ_1 . Поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ удовлетворяет уравнениям Максвелла в полупространстве $x > h$ вида

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ст}}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \quad (1)$$

в слое Σ_1 и в полупространстве $x < 0$ вида

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}. \quad (2)$$

Комплексные амплитуды монохроматической ТЕ-волны $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ имеют вид

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^\top, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^\top. \quad (3)$$

Решение ищем в виде бегущей волны вдоль координаты z

$$E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}, \quad (4)$$

где $\gamma \in (\sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}}, \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_2})$ – известная (вещественная) постоянная распространения волны, E_y, H_x, H_z – неизвестные функции.

Введем обозначение $[v]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} v(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} v(x)$.

Задача дифракции: требуется найти нетривиальное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ вида (3), (4), удовлетворяющее уравнениям Максвелла (1) в полупространстве $x > h$, (2) в слое Σ_1 и в полупространстве $x < 0$, условиям непрерывности касательных компонент

$$[E_y]|_{x=0} = 0, \quad [H_z]|_{x=0} = 0, \quad [E_y]|_{x=h} = 0, \quad [H_z]|_{x=h} = 0$$

и экспоненциально затухающее при $|x| \rightarrow \infty$ в полупространствах $x < 0$ и $x > h$.

Подставляя комплексные амплитуды (3) с компонентами (4) в уравнения Максвелла (1), (2) получаем

$$H_x = -\frac{\gamma}{\omega\mu_0}E_y, \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu_0}E'_y.$$

Пусть $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$, $\kappa_1 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2\varepsilon_1}$, $\kappa_2 = \sqrt{k_0^2\varepsilon_2 - \gamma^2}$, $\kappa_3 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2\varepsilon_3}$, $\alpha = k_0^2\tilde{\alpha}$, F_R – амплитуда отраженного поля, а $F_I = A\omega\mu_0(2\kappa_1)^{-1}e^{-\kappa_1(x_0-h)}$ – амплитуда падающего поля в точке $x = h$, F_T – амплитуда прошедшего поля. Сформулируем задачу дифракции для вещественной функции $u := E_y$.

Определение 1. Задача P_1 заключается в нахождении вещественной нетривиальной функции

$$u(x) \in C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty),$$

которая в слое $0 < x < h$ является решением уравнения

$$u'' + \kappa_2^2 u = -\alpha f(u^2)u \quad (5)$$

и удовлетворяет условиям

$$u(0) = F_T, \quad u'(0) = \kappa_3 F_T, \quad u(h) = F_R - F_I, \quad u'(h) = -\kappa_1(F_R + F_I). \quad (6)$$

Задача дифракции эквивалентно сводится к задаче P_1 .

Рассмотрим случай нелинейности с насыщением, когда $f(u^2) = \frac{u^2}{1+\beta u^2}$, где $\beta > 0$ – вещественная постоянная. Задачу P_1 с такой нелинейностью будем обозначать через $P_{1\beta}$.

Перепишем уравнение (5) в форме

$$Lu = -\frac{\alpha u^3}{1 + \beta u^2}, \quad L = \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2^2.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$LG = -\delta(x - s), \quad G'|_{x=0} = G'|_{x=h} = 0.$$

Функция Грина этой задачи имеет вид

$$G_1(x, s) = \begin{cases} -\frac{\cos(\kappa_2 x) \cos(\kappa_2 (s-h))}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\cos(\kappa_2 (x-h)) \cos(\kappa_2 s)}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & s < x \leq h. \end{cases}$$

Используя вторую формулу Грина, граничные условия (6), получаем

$$u(s) = \alpha \int_0^h Q_1(x, s) \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx + q_2(s), \quad (7)$$

где $Q_1(x, s) = G_1(x, s) + F(x, s)$, $F(x, s) \in \mathbf{C}[0, h]$, $\mathbf{C}[0, h] = C[0, h] \times C[0, h]$, $q_2(s) \in C[0, h]$. Явный вид функций $Q_1(x, s)$, $q_2(s)$ определен в диссертации.

Теорема 1. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_1 < 1$, где

$$q_1 = \frac{3\alpha}{2\beta} \max_{0 \leq s \leq h} \int_0^h |Q_1(x, s)| dx. \quad (8)$$

Тогда задача P_{1s} (a , следовательно, и задача дифракции в случае нелинейности с насыщением) имеет единственное решение.

Рассмотрим случай нелинейности Керра, когда $f(u^2) = u^2$. Задачу P_1 с такой нелинейностью будем обозначать через P_{1k} .

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$ и F_I известны. Существует $h^* > 0$ такой, что для любого положительного $h \leq h^*$ задача P_{1k} (a , следовательно, и задача дифракции в случае нелинейности Керра) имеет бесконечное число решений.

Во втором параграфе главы 1 описана постановка задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения. Найдены условия существования и единственности решения данной задачи.

Рассмотрим ТЕ-ТЕ-волну $\mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}$, $\mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}$, где ω_1 , ω_2 – круговые частоты и

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= e^{i\gamma_1 z} (0, E_{1y}(x), 0)^\top, & \mathbf{E}_2 &= e^{i\gamma_2 y} (0, 0, E_{2z}(x))^\top, \\ \mathbf{H}_1 &= e^{i\gamma_1 z} (H_{1x}(x), 0, H_{1z}(x))^\top, & \mathbf{H}_2 &= e^{i\gamma_2 y} (H_{2x}(x), H_{2y}(x), 0)^\top, \end{aligned} \quad (9)$$

γ_1, γ_2 – неизвестные вещественные постоянные, $E_{1y}, H_{1x}, H_{1z}, E_{2z}, H_{2x}, H_{2y}$ – неизвестные функции.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ можно записать в виде

$$\begin{cases} \text{rot}(\mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}) = -i\omega_1 \varepsilon \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} - i\omega_2 \varepsilon \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}, \\ \text{rot}(\mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}) = i\omega_1 \mu_0 \mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + i\omega_2 \mu_0 \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, комплексные амплитуды удовлетворяют $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ системе (10) и условиям излучения на бесконечности, где электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в полупространствах $x > h$ и $x < 0$; кроме того, $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяют условиям непрерывности для касательных компонент поля на границах $x = 0$ и $x = h$.

Пусть $\Sigma_2 = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ – слой в $\mathbb{R}^3$, где $h > 0$. Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} \varepsilon_0$, где относительная диэлектрическая проницаемость имеет вид

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x > h, \\ \varepsilon_2 + \frac{\alpha |\mathbf{E}|^2}{1 + \beta |\mathbf{E}|^2}, & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_3, & x < 0, \end{cases}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \tilde{\alpha} > 0$ – вещественные постоянные. Считаем, что $\varepsilon_2 > \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$ и $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} \geq 1$.

Подставляя комплексные амплитуды с компонентами (9) в уравнения Максвелла (10), получаем

$$H_{1x} = -\frac{\gamma_1}{\omega_1 \mu_0} E_{1y}, \quad H_{1z} = -\frac{i}{\omega_1 \mu_0} E'_{1y}, \quad H_{2x} = \frac{\gamma_2}{\omega_2 \mu_0} E_{2z}, \quad H_{2y} = \frac{i}{\omega_2 \mu_0} E'_{2z}.$$

Пусть $k_j^2 = \omega_j^2 \mu_0 \varepsilon_0$, $\kappa_{j1} = \sqrt{\gamma_j^2 - k_j^2 \varepsilon_1}$, $\kappa_{j3} = \sqrt{\gamma_j^2 - k_j^2 \varepsilon_3}$,
 $\kappa_j = \sqrt{k_j^2 \varepsilon_2 - \gamma_j^2}$, $\alpha_j = k_j^2 \alpha$, $j = 1, 2$, $f(u, v) = \frac{(u^2 + v^2)}{1 + \beta(u^2 + v^2)}$.

Сформулируем задачу для вещественных функций $u := E_{1y}$, $v := E_{2z}$.

Определение 2. Задача P_2 заключается в нахождении вещественной пары (γ_1, γ_2) такой, что для заданных значений A_1, A_2 существуют нетривиальные функции u, v , такие что для $0 \leq x \leq h$ функции u, v являются решениями системы

$$u'' + \kappa_1^2 u = -\alpha_1 f(u, v) u, \quad v'' + \kappa_2^2 v = -\alpha_2 f(u, v) v, \quad (11)$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} u(0) &= B_1, \quad u'(0) = \kappa_{13}B_1, \quad u(h) = A_1, \quad u'(h) = -\kappa_{11}A_1. \\ v(0) &= B_2, \quad v'(0) = \kappa_{23}B_2, \quad v(h) = A_2, \quad v'(h) = -\kappa_{21}A_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Перепишем уравнения из системы (11) в форме

$$L_1 u = -\alpha_1 f(u, v)u, \quad L_2 v = -\alpha_2 f(u, v)v,$$

где $L_1 = \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_1^2$, $L_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2^2$. Рассмотрим краевые задачи

$$\begin{cases} L_1 G_1 = -\delta(x-s), \\ G_1'|_{x=0} = G_1'|_{x=h} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_2 G_2 = -\delta(x-s), \\ G_2'|_{x=0} = G_2'|_{x=h} = 0. \end{cases}$$

Функции Грина таких задач имеют вид

$$G_{2j}(x, s) = \begin{cases} -\frac{\cos(\kappa_j x) \cos(\kappa_j (s-h))}{\kappa_j \sin(\kappa_j h)}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\cos(\kappa_j (x-h)) \cos(\kappa_j s)}{\kappa_j \sin(\kappa_j h)}, & s < x \leq h. \end{cases} \quad (13)$$

Используя вторую формулу Грина, граничные условия (12) и значения функций (13) в точках $s = 0, h$, получаем систему дисперсионных уравнений

$$A_1 g_1(\gamma_1) = k_1 \alpha \frac{Q_1(\gamma_1, \gamma_2)}{\sin(\kappa_1 h)}, \quad A_2 g_2(\gamma_2) = k_2 \alpha \frac{Q_2(\gamma_1, \gamma_2)}{\sin(\kappa_2 h)}, \quad (14)$$

где явный вид функций $Q_1(\gamma_1, \gamma_2)$, $g_1(\gamma_1)$, $Q_2(\gamma_1, \gamma_2)$, $g_2(\gamma_2)$ определен в диссертации.

Таким образом, вопрос о разрешимости задачи P_2 удалось свести к вопросу о разрешимости системы дисперсионных уравнений (14), где функции u и v могут быть найдены как решения операторного уравнения

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{N}_1 \left(\frac{|\mathbf{w}|^2 \mathbf{w}}{1 + \beta |\mathbf{w}|^2} \right) + \mathbf{h}, \quad (15)$$

$\mathbf{w} = (u, v)^\top \in \mathbf{C}[0, h]$, $|\mathbf{w}|^2 = u^2 + v^2$, явный вид операторов $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{h}$ определен в диссертации.

Пусть

$$q_2 = \frac{13\alpha}{4\beta} \|\mathbf{N}_1\|. \quad (16)$$

Для уравнения (15) справедливо следующее

Утверждение 1. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_2 < 1$. Тогда уравнение (15) имеет единственное решение $\mathbf{w} = \mathbf{w}^* \in \mathbf{C}[0, h]$.

Теорема 3. Пусть $\varepsilon_2 > \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$. Существует $\alpha^*(\beta) > 0$ такое, что для любого положительного $\alpha \leq \alpha^*(\beta)$ система (14) имеет по крайней мере $l_1 l_2$ собственных значений $(\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)})$, $i = \overline{1, l_1 l_2}$.

В третьем параграфе главы 1 описана постановка задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения. Найдены условия на коэффициенты нелинейности, при которых данная задача имеет единственное решение.

Рассмотрим распространение электромагнитной волны $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, где

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= e^{i\gamma z} (E_x(x), E_y(x), E_z(x))^\top, \\ \mathbf{H} &= e^{i\gamma z} (H_x(x), H_y(x), H_z(x))^\top,\end{aligned}$$

γ – неизвестный вещественный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны), $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ – неизвестные функции, в плоском диэлектрическом волноводе $\Sigma_3 := \{(x, y, z) : 0 < x < h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

Волновод Σ_3 расположен в декартовой системе координат $Oxyz$. На границе $x = 0$ волновода Σ_3 расположен бесконечно тонкий абсолютно проводящий экран. Слой заполнен изотропной немагнитной средой. Полупространство $x > h$ заполнено изотропной немагнитной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_0$. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$.

Диэлектрическая проницаемость внутри волновода Σ_3 имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_0 \alpha |\mathbf{E}|^2}{1 + \beta |\mathbf{E}|^2}$, где $\varepsilon_2, \alpha, \beta > 0$ – вещественные постоянные, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \geq 1$.

Поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла (2), условиям непрерывности касательных компонент поля на границе $x = h$; касательные компоненты $\mathbf{E}$ обращаются в нуль на границе $x = 0$; условиям излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально убывает при $x \rightarrow \infty$ в полупространстве $x > h$.

Подставляя поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ в уравнения Максвелла (2), получаем $H_x = -\gamma(\omega\mu_0)^{-1}E_y$, $H_y = (i\omega\mu_0)^{-1}(i\gamma E_x - E'_z)$, $H_z = (i\omega\mu_0)^{-1}E'_y$.

Сформулируем задачу для вещественных функций $u_1(x) := E_x(x)$, $u_2(x) := E_y(x)$, $u_3(x) := iE_z(x)$.

Пусть $|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$, $f(|\mathbf{u}|^2) = \frac{|\mathbf{u}|^2}{1 + \beta |\mathbf{u}|^2}$, $C_1 = C \sin \theta$, $C_2 = C \cos \theta$, где $C > 0$ – известная вещественная постоянная, $\theta \in [0, 2\pi]$ – неизвестный вещественный параметр.

Определение 3. Задача P_3 – найти вещественные значения γ , для которых при заданном значении $C > 0$, существуют параметр θ и функции u_1 ,

u_2 и u_3 такие, что $|\mathbf{u}|^2 \neq 0$, при $0 \leq x \leq h$ являются решением системы

$$\begin{cases} \gamma^2 u_1 + \gamma u'_3 = k_0^2 \varepsilon_2 u_1 + k_0^2 \alpha f(|\mathbf{u}|^2) u_1, \\ u''_2 - \gamma^2 u_2 = -k_0^2 \varepsilon_2 u_2 - k_0^2 \alpha f(|\mathbf{u}|^2) u_2, \\ \gamma u'_1 + u''_3 = -k_0^2 \varepsilon_2 u_3 - k_0^2 \alpha f(|\mathbf{u}|^2) u_3, \end{cases} \quad (17)$$

при $x > h$ определяются формулами

$$\begin{cases} u_1(x; \gamma) = \gamma \kappa_1^{-1} C_1 e^{-\kappa_1(x-h)}, \\ u_2(x; \gamma) = C_2 e^{-\kappa_1(x-h)}, \\ u_3(x; \gamma) = C_1 e^{-\kappa_1(x-h)}, \end{cases}$$

удовлетворяют условиям сопряжения

$$u_2|_{x=0} = 0, \quad u_3|_{x=0} = 0, \quad [\tilde{\varepsilon} u_1]|_{x=h} = 0, \quad [u_2]|_{x=h} = 0, \quad [u'_2]|_{x=h} = 0, \quad [u_3]|_{x=h} = 0.$$

Перепишем систему (17) в следующем виде

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha k_0^2 \kappa_2^{-2} f(|\mathbf{u}|^2) u_1 + \gamma \kappa_2^{-2} u'_3, \\ u''_2 + \kappa_2^2 u_2 = -\alpha k_0^2 f(|\mathbf{u}|^2) u_2, \\ u''_3 + \kappa_2^2 u_3 = \alpha \varepsilon_2^{-1} \left(\gamma (f(|\mathbf{u}|^2) u_1)' - \kappa_2^2 f(|\mathbf{u}|^2) u_3 \right). \end{cases} \quad (18)$$

Пусть $L := \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2^2$. Тогда второе и третье уравнения в (18) могут быть записаны как

$$L u_2 = -\alpha k_0^2 f(|\mathbf{u}|^2) u_2, \quad L u_3 = \alpha \varepsilon_2^{-1} \left(\gamma (f(|\mathbf{u}|^2) u_1)' - \kappa_2^2 f(|\mathbf{u}|^2) u_3 \right).$$

Рассмотрим краевую задачу

$$L G = -\delta(x-s), \quad G|_{x=0} = G|_{x=h} = 0, \quad 0 < s < h.$$

Функция Грина указанной краевой задачи имеет вид

$$G_3(x, s) = \begin{cases} -\frac{\sin(\kappa_2 x) \sin(\kappa_2(s-h))}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\sin(\kappa_2(x-h)) \sin(\kappa_2 s)}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & s < x \leq h. \end{cases} \quad (19)$$

Используя вторую формулу Грина, граничные условия и (19), получаем систему дисперсионных уравнений

$$C \sin \theta = \alpha \frac{Q_M(\gamma, \theta)}{g_M(\gamma)}, \quad C \cos \theta = \alpha \frac{Q_E(\gamma, \theta)}{g_E(\gamma)},$$

где явный вид функций $Q_M(\gamma, \theta)$, $g_M(\gamma)$, $Q_E(\gamma, \theta)$, $g_E(\gamma)$ определен в диссертации. Функции u_1 , u_2 , u_3 могут быть найдены как решения операторного уравнения

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{N}_1(f(|\mathbf{u}|^2) \mathbf{u}) + C \mathbf{h}_1, \quad (20)$$

где явный вид операторов $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{h}_1$ определен в диссертации. Определим $\mathbf{C}[0, h] = C[0, h] \times C[0, h] \times C[0, h]$ с нормой $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}}^2 = \|u_1\|_C^2 + \|u_2\|_C^2 + \|u_3\|_C^2$, где $\|u\|_C = \max_{x \in [0, h]} |u(x)|$.

Пусть

$$q_3 = \frac{13\alpha}{4\beta} \|\mathbf{N}_1\|. \quad (21)$$

Для уравнения (20) справедливо следующее

Утверждение 2. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_3 < 1$. Тогда уравнение (20) имеет единственное решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \in \mathbf{C}[0, h]$.

В главе 2 обоснованы численные методы приближенного решения задач дифракции электромагнитных ТЕ-волн на слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения, распространения связанной ТЕ-ТЕ и нелинейной симметричной гибридной волн в нелинейных слоях, заполненных средой с нелинейностью с эффектом насыщения.

В первом параграфе главы 2 найдена оценка скорости сходимости численного метода приближенного решения задачи дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением.

Приближенные решения $u^{(n)}(s)$, $s \in [0, h]$ интегрального уравнения (7) и, следовательно, задачи P_{1s} могут быть вычислены с помощью итерационного процесса

$$u^{(n+1)}(s) = \alpha \int_0^h Q_1(x, s) \frac{(u^{(n)}(x))^3}{1 + \beta(u^{(n)}(x))^2} dx + q_2(s). \quad (22)$$

Утверждение 3. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_1 < 1$, где q_1 определяется формулой (8). Тогда существует и единственно решение $u \in C[0, h]$ уравнения (7), и последовательность приближенных решений $u^{(n)} \in C[0, h]$ уравнения (7), определяемых посредством итерационного алгоритма (22), сходится в норме пространства $C[0, h]$ к (единственному) точному решению $u \in C[0, h]$ уравнения (7) при любом начальном приближении $u^{(0)} \in C[0, h]$ со скоростью геометрической прогрессии с показателем q . При $u^{(0)}(s) = 0$ верна оценка скорости сходимости:

$$\|u - u^{(n)}\| \leq \frac{q_1^n}{1 - q_1} \|\mathbf{h}\|, \quad n \rightarrow \infty,$$

где q_1 – коэффициент сжатия отображения.

Во втором параграфе главы 2 доказана теорема о сходимости численного метода приближенного решения задачи о распространении связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и найдена оценка его скорости сходимости. Доказаны теоремы о существовании и сходимости приближенных связанных собственных значений и собственных функций к точным.

Приближенные решения $\mathbf{w}^{(n)}(s) = (u^{(n)}(s), v^{(n)}(s))^T$, $s \in [0, h]$ уравнения (15) могут быть вычислены с помощью итерационного алгоритма

$$\mathbf{w}^{n+1} = \alpha \mathbf{N} \left(\frac{|\mathbf{w}^{(n)}|^2 \mathbf{w}^{(n)}}{1 + \beta |\mathbf{w}^{(n)}|^2} \right) + \mathbf{h}. \quad (23)$$

Утверждение 4. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_2 < 1$, где q_2 определяется формулой (16). Тогда существует и единственно решение $\mathbf{w} \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (15), и последовательность приближенных решений $\mathbf{w}^{(n)} \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (15), определяемых посредством итерационного алгоритма (23), сходится в норме пространства $\mathbf{C}[0, h]$ к (единственному) точному решению $\mathbf{w} \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (15) при любом начальном приближении $\mathbf{w}^{(0)} \in \mathbf{C}[0, h]$ со скоростью геометрической прогрессии с показателем q_2 .

Следующая теорема утверждает существование и сходимость приближенных собственных значений к точным.

Теорема 4. Пусть $\varepsilon_2 > \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$. Существует $\alpha^*(\beta) > 0$ такое, что для любого положительного $\alpha \leq \alpha^*(\beta)$, для всех $n \geq 0$ уравнение (14) при $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(n)}$ имеет по крайней мере $l_1 l_2$ собственных значений $(\gamma_1^{(i,n)}, \gamma_2^{(i,n)})$ и $|\gamma_1^{(i)} - \gamma_1^{(i,n)}| \rightarrow 0$, $|\gamma_2^{(i)} - \gamma_2^{(i,n)}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где пары $(\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)})$ и $(\gamma_1^{(i,n)}, \gamma_2^{(i,n)})$ – соответственно пары точных и приближенных собственных значений задачи P_2 , $i = \overline{1, l_1 l_2}$, $l_1 \geq 1$, $l_2 \geq 1$.

В третьем параграфе главы 2 доказана теорема о сходимости численного метода приближенного решения задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и найдена оценка его скорости сходимости. Доказана теорема о существовании и сходимости приближенных собственных значений и собственных функций к точным.

Приближенные решения $\mathbf{u}^{(n)}(s) = (u_1^{(n)}(s), u_2^{(n)}(s), u_3^{(n)}(s))^T$, $s \in [0, h]$ уравнения (20) могут быть вычислены с помощью итерационного алгоритма

$$\mathbf{u}^{n+1} = \alpha \mathbf{N}_1(|\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n) + C \mathbf{h}_1. \quad (24)$$

Утверждение 5. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_3 < 1$, где q_3 определяется формулой (21). Тогда существует и единственно решение $\mathbf{u} \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (20), и последовательность приближенных решений $\mathbf{u}^n \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (20), определяемых посредством итерационного алгоритма (24), сходится в норме пространства $\mathbf{C}[0, h]$ к (единственному) точному решению $\mathbf{u} \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (20) при любом начальном приближении $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{C}[0, h]$ со скоростью геометрической прогрессии с показателем q_3 .

Теорема 5. Пусть $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \geq 1$, $q_3 < 1$, $(\gamma^{(i)}, \theta^{(i)})$ – пара точных решений задачи P_3 . Тогда при достаточно больших n существует пара приближенных решений задачи P_3 $(\gamma^{(i,n)}, \theta^{(i,n)})$ и $|\gamma^{(i)} - \gamma^{(i,n)}| \rightarrow 0$, $|\theta^{(i)} - \theta^{(i,n)}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В главе 3 описан комплекс программ для численного решения задач дифракции и распространения электромагнитных волн в нелинейном слое, представлены и проанализированы результаты расчетов.

В первом параграфе главы 3 описан программно-вычислительного комплекс для численного решения задачи дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.

На основе обоснованных в данной работе итерационных методов разработан программный комплекс, вычисляющий для задачи P_{1s} приближенные значения функции u в точках разбиения отрезка $[0, h]$ и амплитуд F_R , F_T для заданных значений амплитуды F_I , для задачи P_2 приближенные значения собственных функции u и v в точках разбиения отрезка $[0, h]$ и связанных собственных значений (γ_1, γ_2) , а для задачи P_3 приближенные значения собственных функции u_1 , u_2 , u_3 в точках разбиения отрезка $[0, h]$ и пары решений (γ, θ) . Программный комплекс реализован на языке C/C++.

Блок-схема алгоритма приближенного решения задач P_{1s} , P_2 , P_3 представлена на рис. 1.

На вход подается значение n , где n – номер решаемой задачи ($n = 1, 2, 3$).

Во втором параграфе главы 3 представлены результаты расчетов для задачи дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью с насыщением и с нелиней-

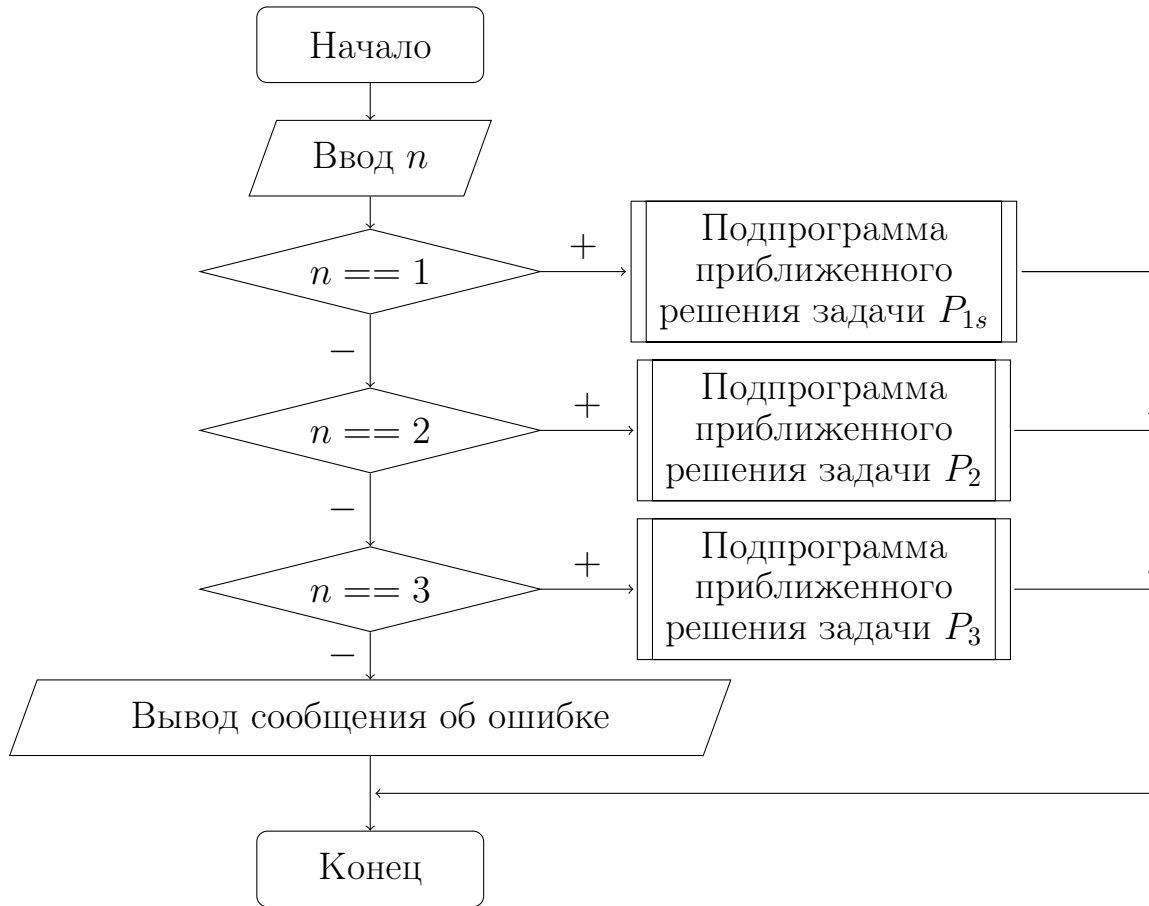


Рисунок 1. Блок-схема комплекса программ приближенного решения задач P_{1s} , P_2 , P_3 .

ностью Керра. Предложен критерий восстановления единственности решения задачи дифракции поляризованной ТЕ-волны на слое, заполненном средой с нелинейностью Керра.

При построении рис. 2, 3 использовались следующие параметры: толщина слоя Σ_1 $h = 3$ мм, $x_0 = 4$ мм, круговая частота $\omega = 1$ ГГц, относительные диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3$, $\varepsilon_3 = 1$, $\alpha = 0.01$ мм²/В².

Графики построены для двух широко используемых типов нелинейностей³. Кроме того, представлено сравнение нелинейного и линейного случаев для каждого типа нелинейности.

На рис. 2 представлен случай нелинейности с насыщением вида $f(|\mathbf{u}|^2) = \frac{u^2}{1+\beta u^2}$ при $\beta = 0.005$ мм²/В² и выполняется условие теоремы 1 на коэффициенты нелинейности α и β $q_1 < 1$, где q_1 определяется формулой (8). На рис. 2 видно, что каждому фиксированному значению F_I соответствует единственное значение F_R , что согласуется с утверждением теоремы 1.

На рис. 3 представлен случай нелинейности Керра вида $f(|\mathbf{u}|^2) = |\mathbf{u}|^2$. Видно, что фиксированному значению $F_I = 15$ В/мм соответствует множе-

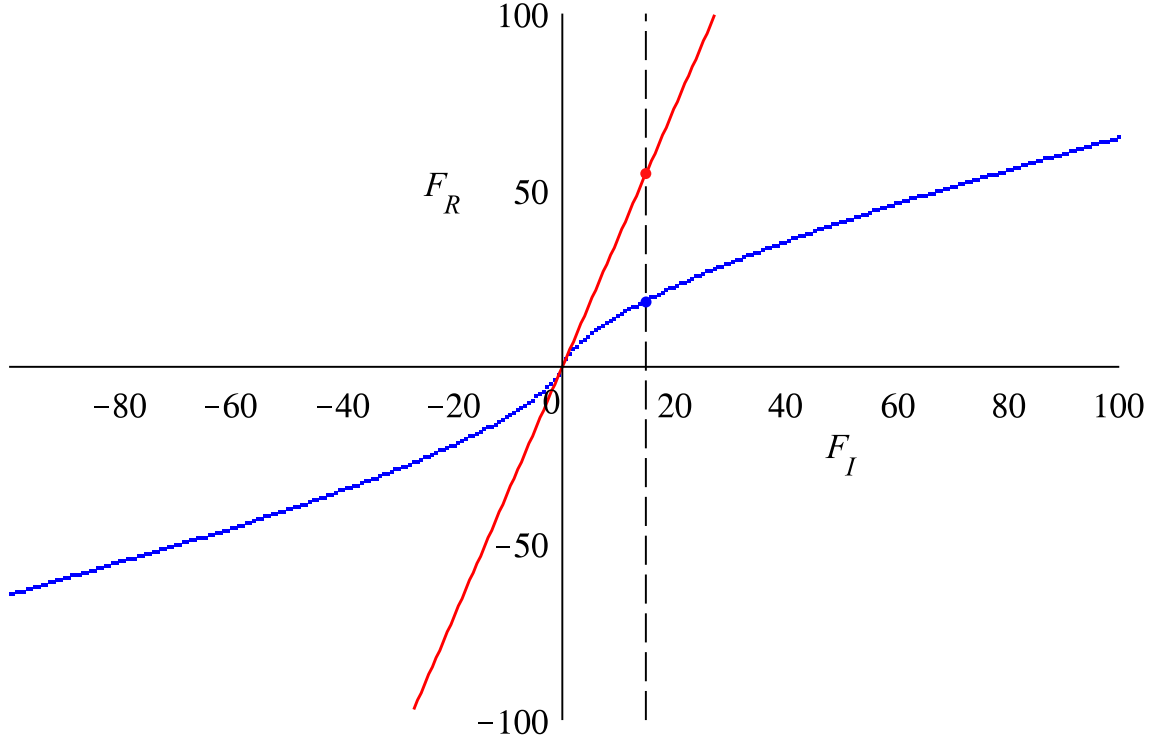


Рисунок 2. График зависимости амплитуды отраженного поля от амплитуды падающего поля для случая нелинейности с насыщением (задача P_{1s}).

ство значений F_R (вообще говоря, бесконечное в силу теоремы 2), часть из них можно видеть на рис. 3. Синим цветом для каждого значения F_I выделены значения F_R , при которых энергия

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^h \left(0.5\alpha u^4 + \frac{2\gamma^2 u^2}{\omega^2 \mu_0} \right) dx + \\ + \frac{h}{8\pi\omega^2 \mu_0} \left(\kappa_1^2 (F_R + F_I)^2 + \kappa_2^2 (F_R - F_I)^2 + 0.5\alpha (F_R - F_I)^4 \right)$$

имеет минимальное значение.

В **третьем параграфе главы 3** представлены результаты расчетов для задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения. Численно обнаружены нелинейные связанные ТЕ-ТЕ-волны, которым не соответствуют пары линейных поляризованных ТЕ-волн.

При построении рис. 4, 5 использовались следующие параметры: толщина слоя Σ_2 $h = 5$ мм, относительные диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 1$, $k_1 = 1$ мм⁻¹, $k_2 = \sqrt{1.5}$ мм⁻¹, $A_1 = 1$ В/мм, $A_2 = 2$ В/мм, коэффициенты нелинейности $\alpha = 0.01$ мм²/В², $\beta = 0.8$ мм²/В², $n = 50$.

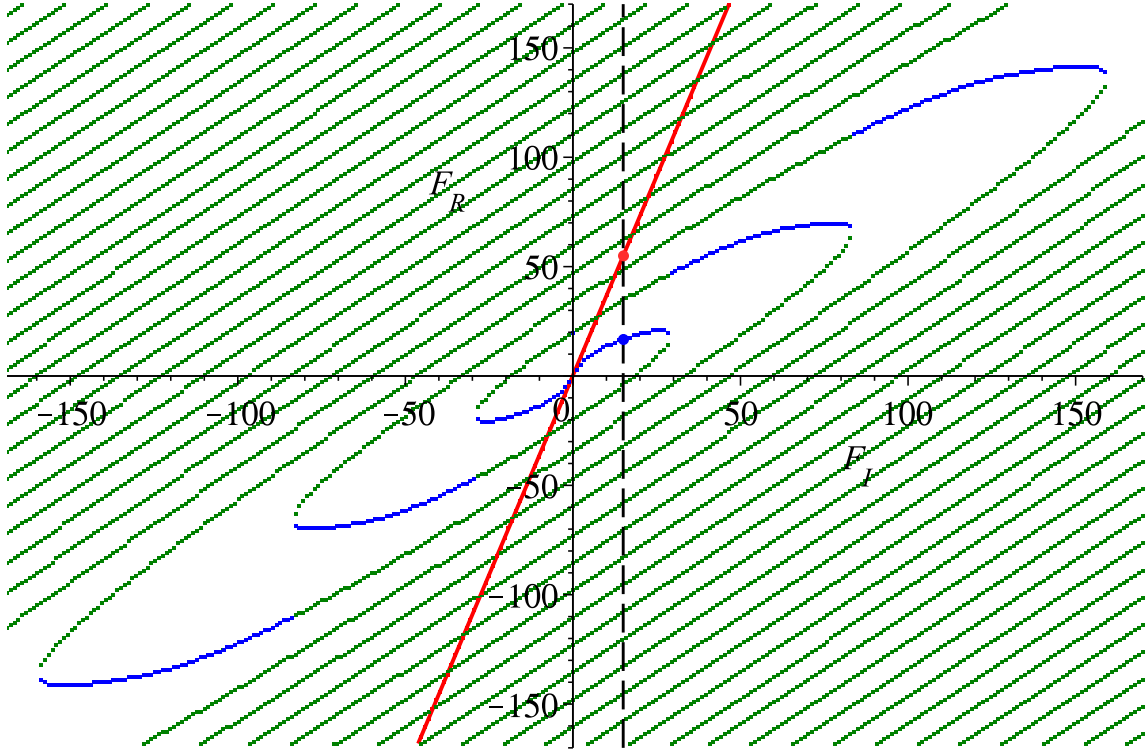


Рисунок 3. График зависимости амплитуды отраженного поля от амплитуды падающего поля для случая нелинейности Керра (задача P_{1k}).

При $\alpha = 0 \text{ мм}^2/\text{В}^2$ получаем две независимые линейные задачи. При указанных выше параметрах первая линейная задача имеет 3 решения, а вторая – 4 решения.

На рис. 4–5 построены графики связанных собственных значений. Красные точки пересечений зеленых и синих кривых – приближенные связанные собственные значения задачи P_2 . Красные пунктирные линии определяют область $\tilde{\Gamma} = (k_1 \sqrt{\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}}, k_1 \sqrt{\varepsilon_2}) \times (k_2 \sqrt{\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}}, k_2 \sqrt{\varepsilon_2})$. Все пары собственных значений, отвечающих линейным задачам, существуют только в области $\tilde{\Gamma}$.

На рис. 4 выполняется условие $q_2 < 1$ утверждения 1, и каждой паре собственных значений, отвечающих линейным задачам, $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$ соответствует только одно связанное собственное значение (γ_1, γ_2) . Кроме того, связанные собственные значения лежат близко к соответствующим парам решений линейных задач.

На рис. 5 условие $q_2 < 1$ не выполняется, существуют нелинейные связанные собственные значения, которые не соответствуют парам линейных собственных значений, и только 4 связанных собственных значения лежат в области $\tilde{\Gamma}$.

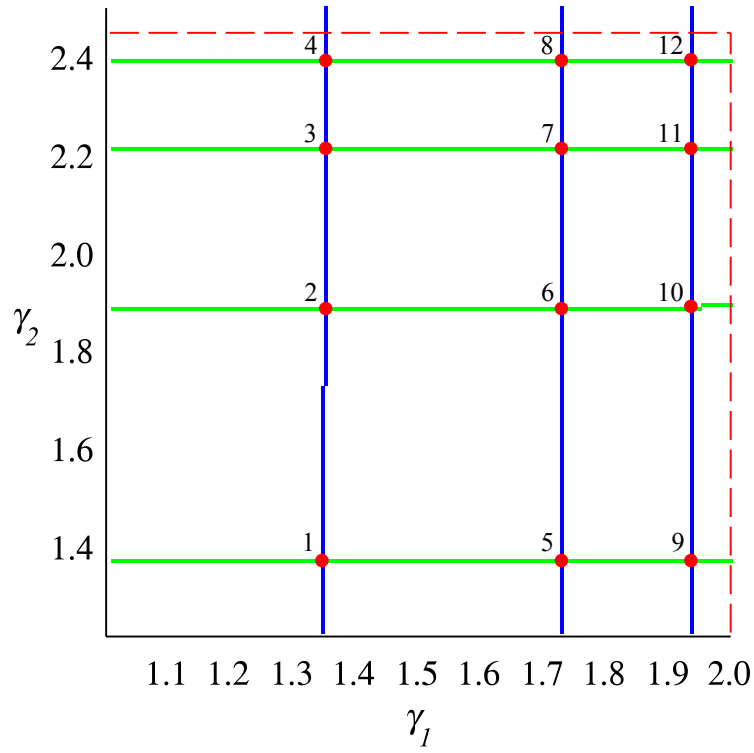


Рисунок 4. Связанные собственные значения задачи P_2 . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\max_{i=\overline{1,12}} q_2^{(i)} \approx 0.824$.

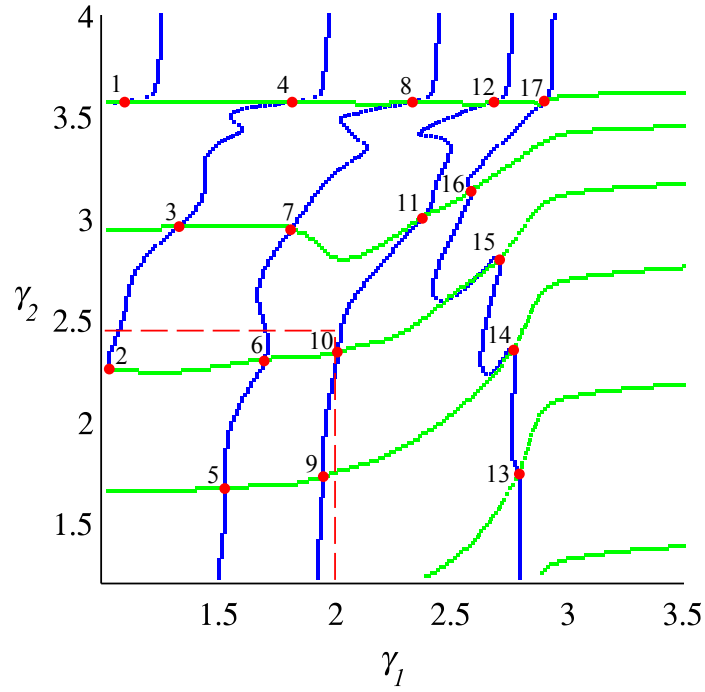


Рисунок 5. Связанные собственные значения задачи P_2 . $\alpha = 0.2 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.04 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\min_{i=\overline{1,17}} q_2^{(i)} \approx 12.032$.

В четвертом параграфе главы 3 представлены результаты расчетов для задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения. Численно обнаружены симметричные гибридные волны в слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения.

При построении рис. 6 использовались следующие параметры: толщина слоя $\Sigma_3 h = 5$ мм, относительные диэлектрические проницаемости $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$, $C = 25$ В/мм, коэффициенты нелинейности $\alpha = 0.3$ мм²/В², $\beta = 0.001$ мм²/В².

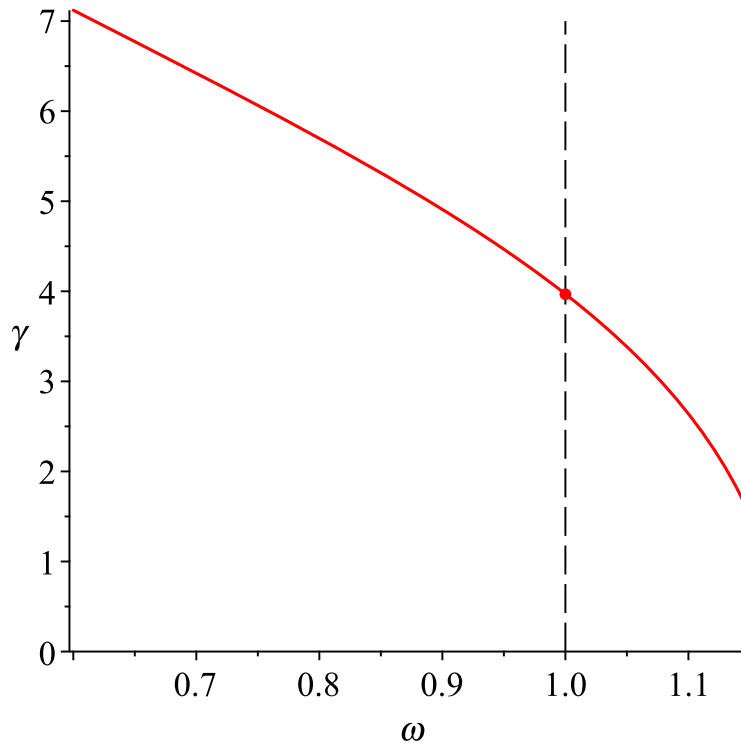


Рисунок 6. Дисперсионная кривая. Отмеченное собственное значение задачи P_3 : $\gamma \approx 3.989$ мм⁻¹, $\theta \approx 0.801$.

На рис. 6 представлен график зависимости собственного значения γ от круговой частоты ω . Данная зависимость называется дисперсионной кривой. Точка пересечения вертикальной пунктирной линии с дисперсионной кривой является собственным значением задачи P_3 (постоянной распространения симметричной гибридной волны).

В заключении сформулированы основные результаты и выводы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В данной работе получены результаты о разрешимости задачи дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением. Найдены условия на коэффициенты нелинейности, при которых задача дифракции имеет единственное решение в случае нелинейности с насыщением. Разработан и обоснован численный (итерационный) метод приближенного нахождения касательной компоненты электрического поля и амплитуды отраженной волны для заданной амплитуды падающей волны, получена оценка скорости сходимости данного метода.

Получены результаты о разрешимости задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения. Найдены условия существования и единственности решения для задачи. Установлено соотношение для коэффициентов нелинейности, при котором удастся обосновать численный (итерационный) метод нахождения приближенных связанных собственных значений и собственных функций задачи, точнее, получить результат о сходимости приближенных связанных собственных значений и собственных функций к точным. Найдены новые режимы распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн, которые могут существовать только в нелинейной среде.

Получены результаты о разрешимости задачи распространения симметричной гибридной электромагнитной волны в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением. Найдены условия на коэффициенты нелинейности, при которых задача имеет единственное решение. Разработан и обоснован численный (итерационный) метод приближенного нахождения собственных значений и собственных функций, доказаны теоремы о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным. Найдены новые режимы распространения симметричных гибридных волн, которые могут существовать только в нелинейной среде.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Работы, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования РФ

1. Smirnov Yu.G., Smolkin E., Kurseeva (Martynova) V.Yu. Diffraction of TE polarized electromagnetic waves by a nonlinear layer: saturated and Kerr nonlinearities // *Applicable Analysis*. – 2020. – V. 99. – № 15. – P. 2692–2706.
2. Smirnov Yu.G., Smolkin E., Kurseeva (Martynova) V. The new type of non-polarized symmetric electromagnetic waves in planar nonlinear waveguide // *Applicable Analysis*. – 2019. – V. 98. – № 3. – P. 483–498.
3. Курсеева (Мартынова) В.Ю., Смирнов Ю.Г., Смолькин Е.Ю. О разрешимости задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на слое, заполненном нелинейной средой // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2019. – Т. 59. – № 4. – P. 684–698.
4. Martynova V.Yu., Smirnov Yu.G. Coupled electromagnetic TE-TE wave propagation in nonlinear layer with saturated nonlinearity // *Journal of Modern Optics*. – 2019. – V. 66. – № 21. – P. 2099–2113.
5. Kurseeva (Martynova) V.Yu., Smirnov Yu.G. Problem of Coupled Electromagnetic TE-TE Wave Propagation in a Layer Filled with Nonlinear Medium with Saturation // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2019. – V. 40. – № 10. – P. 1673–1684.
6. Kurseeva (Martynova) V.Yu. Electromagnetic non-polarized symmetric hybrid wave propagation in a plane waveguide with nonlinear anisotropic permittivity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2018. – V. 39. – № 8. – P. 1075–1089.
7. Курсеева (Мартынова) В.Ю. Численное исследование задачи о распространении симметричных гибридных волн в плоском неоднородном нелинейном волноводе // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. – 2017. – № 4(44). – С. 96–105.
Другие работы, опубликованные автором по теме диссертации
8. Smirnov Yu.G., Smolkin E., Kurseeva (Martynova) V. Diffraction of TE polarized electromagnetic waves by a layer with a nonlinear medium // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*. – 2018. – V. 243. – P. 39–53.
9. Kurseeva (Martynova) V.Yu. Electromagnetic non-polarized symmetric hybrid wave propagation in nonlinear media with saturation // *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction*. – 2018. – № 8553516. – P. 198–203.
10. Kurseeva (Martynova) V.Yu., Valovik D.V. Electromagnetic wave propagation in nonlinear media with saturation // *Progress in Electromagnetics Research Symposium*. – 2017. – P. 359–364.
11. Курсеева (Мартынова) В.Ю. Об одной задаче распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском нелинейном вол-

новоде // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XII Международной научно-технической конференции. – 2017. – С. 140–146.

12. Снегур М.О., Курсеева (Мартынова) В.Ю. Об одной задаче распространения гибридных нелинейных азимутально-симметричных волн в экранированном волноводе с нелинейным неоднородным заполнением // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XIII Международной научно-технической конференции. Под редакцией И.В. Бойкова. – 2018. – С. 11–16.

13. Мартынова В.Ю. Распространение симметричных гибридных волн в плоском волноводе с произвольной нелинейностью с эффектом насыщения // Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения: тезисы докладов Международной научной конференции. под ред. Ю.Г. Смирнова. – 2019. – С. 68–69.

14. Сидоров В.М., Мартынова В.Ю. Задача дифракции электромагнитной ТЕ-волны на слое, заполненном нелинейной средой // Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения: тезисы докладов Международной научной конференции. под ред. Ю.Г. Смирнова. – 2019. – С. 27–29.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

1. Курсеева (Мартынова) В.Ю., Смолькин Е.Ю., Снегур М.О. Вычислительный комплекс «Симметричные гибридные нелинейные волны в плоском волноводе» (св. №2018665405, 04.12.2018).

2. Валовик Д.В., Курсеева (Мартынова) В.Ю., Москалева М.А. Вычислительный комплекс «ТЕ волны в экранированном слое, заполненном нелинейной средой» (св. №2018665331, 04.12.2018).

3. Зарембо Е.В., Москалева М.А., Курсеева (Мартынова) В.Ю., Валовик Д.В. Вычислительный комплекс «ТЕ волны в открытом слое, заполненном нелинейной средой» (св. №2019616693, 29.05.2019).

4. Мартынова В.Ю., Смолькин Е.Ю., Снегур М.О. Вычислительный комплекс «Симметричные гибридные нелинейные волны в плоском волноводе с произвольной нелинейностью с эффектом насыщения» (св. №2019667550, 25.12.2019).