МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Развитие познавательной самостоятельности обучающихся при решении задач с параметрами»

Студент _____ (подпись) Килячина Анна Ивановна (ФИО полностью)

Руководитель _____ 23.06.20 (подпись) Монахова О.А. (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр _____ 01.07.20. (подпись) Сурина О.П. (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 15.06.2020 № 10)

Заведующий кафедрой _____ (подпись, дата) Паньженский В.И. (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хор. (протокол заседания ГЭК от 8.07.20 № 5)

Секретарь ГЭК _____ (подпись, дата) Сурина О.П. (фамилия, инициалы)

8.07.20

Пенза 2020

Оглавление

Введение 3

Глава 1. Теоретические основы развития познавательной самостоятельности школьников 6

1.1. История становления познавательной самостоятельности 6

1.2. Терминологическая интерпретация понятия «познавательная самостоятельность» 8

1.3. Структурные компоненты познавательной самостоятельности 10

1.4. Уровни познавательной самостоятельности школьников 13

1.5. Развитие познавательной самостоятельности школьников при решении задач с параметрами 21

Глава 2. Разработка учебного пособия «Решение задач с параметрами при подготовке к ОГЭ» 24

2.1. Руководство учителю 24

2.2. Классификация задач с параметрами, встречающихся в основном государственном экзамене 25

2.3. Схема определения типа задачи 25

2.4. Основные методы решения задач, содержащих параметр 26

2.5. Модуль 1. Линейная и квадратичная функции 28

2.6. Модуль 2. Дробно-рациональные функции 48

2.7. Модуль 3. Кусочно-заданные функции 62

2.8. Модуль 4. Функции, содержащие модуль 74

Заключение 85

Список литературы 87

Введение

Жизнь человека — это движение по пути познания. Каждый день наполняет нас новой информацией. Стремительное развитие человеческой цивилизации, научно-технический прогресс и связанные с этим перемены в обществе - создали потребность в подготовке активного, думающего человека, способного определять направление своего развития, хорошо ориентированного на знания и использование новых технологий, способного творчески подходить к решению задач, умеющего рационально использовать свое время и планировать свое будущее, ответственного за результат своей деятельности.

Самой актуальной задачей, для образовательных учреждений в современных условиях является – развитие у обучаемых самостоятельной познавательной деятельности. По требованиям ФГОС нового поколения технологии обучения должны быть направлены на развитие у школьников управляемой самостоятельности, где ключевым фактором при организации учебного процесса – является познавательная самостоятельность школьников. Формирование нового типа человека, творческого, инициативного, способного ставить перед собой цели и планировать ход их выполнения, ориентированного в своих мнениях и действиях на диалог сотрудничества и взаимопонимания - основное в образовательном процессе. Меняются требования к качеству образовательной подготовки учащихся. Процесс обучения теперь не только усвоение и накопление системы знаний, умений и навыков, но и процесс развития личности. Личностное, социальное, познавательное развитие обучающихся определяется характером организации их деятельности, в первую очередь учебной.

Развитие активности, самостоятельности, инициативы, творческого отношения к делу - это направление, в котором следует совершенствовать учебно-воспитательный процесс. Основной процесс образовательного взаимодействия учителя и ученика - это урок. Перед учителем ставится задача:

совершенствование всех сторон обучения, совершенствование урока. От уровня развития самостоятельности мышления зависит способность принимать обдуманные и взвешенные решения, возможность формировать стратегию жизнедеятельности, ориентироваться в ситуациях, прогнозировать будущее. Поэтому развитие самостоятельности мышления становится одной из основных задач обучения. Подготовить учеников к жизни - вооружить их знаниями, умениями, навыками, развивать в них потребность учиться, развивать умственные способности, научить планировать свою работу, экономить время, ставить цель и выбирать средства ее достижения, воспитать всесторонне развитую, гармоничную личность невозможно без развития в ней такого качества, как познавательная самостоятельность.

Все вышесказанное определяет *актуальность* выпускной квалификационной работы.

Объект исследования: процесс развития познавательной самостоятельности при обучении математике в школе.

Предмет исследования: методика преподавания решения задач с параметрами для развития познавательной самостоятельности в школе.

Цель исследования: изучить понятие познавательной самостоятельности и разработать учебное пособие для развития познавательной самостоятельности при решении задач с параметрами.

Для достижения поставленной цели необходимо *решение следующих задач*:

- изучить психолого–педагогическую и методическую литературу по проблеме исследования;
- проанализировать современное состояние проблемы развития познавательной самостоятельности школьников;
- проанализировать содержание основного государственного экзамена по математике и составить классификацию задач с параметрами;
- рассмотреть различные методы решения задач с параметрами;

- разработать учебное пособие (учебный практикум) по теме: «Решение задач с параметрами», направленное на развитие познавательной самостоятельности школьников.

Гипотеза: учебное пособие "Решение задач с параметрами при подготовке к ОГЭ" поможет учителю математики развивать познавательную самостоятельность школьников при обучении решению задач с параметрами.

Практическая значимость данного исследования состоит в том, что разработанное учебное пособие может быть использовано в практической работе учителями математики.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во введении обоснована актуальность, представлены объект и предмет исследования, определены цели и задачи.

В первой главе содержатся теоретические основы по теме исследования. Рассматривается понятие познавательной самостоятельности и ее структурные компоненты.

Во второй главе представлена разработка учебного пособия "Решение задач с параметрами при подготовке к ОГЭ", направленного на развитие познавательной самостоятельности школьников. Выполнен анализ задач с параметрами из открытого банка ОГЭ, проведена их классификация, описаны основные методы решения задач с параметрами, сформирована уникальная система упражнений, позволяющая развивать самостоятельную познавательность, а также составлено руководство учителю по применению данного пособия.

В заключении обобщены результаты работы, сделаны выводы. Список литературы включает 18 источников.

Глава 1. Теоретические основы развития познавательной самостоятельности школьников

1.1. История становления познавательной самостоятельности

В педагогической науке формирование и развитие познавательной самостоятельности имеет глубокие исторические корни. Античные философы (Сократ, Аристотель, Платон) считали, что развитие мышления и способностей детей наиболее эффективно в условиях самостоятельного познания, хотя еще в Средневековье образовательная система рассматривала образование, как репродуктивную деятельность. Сократ одним из первых в практику обучения внедрял методы способствующие развитию познавательной самостоятельности - метод сократических бесед, позднее переименованных в частично-поисковый метод. Идеи развития познавательной самостоятельности волновали и представителей просветительской педагогики России 18 века. Ф.С. Салтыков рассматривал идеи развития познавательной самостоятельности через обогащение содержания, выделяя множество дисциплин. М.В. Ломоносов считал основой обучения познавательный интерес, творческое усвоение учебного материала и развитие у обучаемых исследовательских устремлений. Теорию естественного, свободного воспитания в педагогике можно считать началом нового этапа развития интереса к исследовательским способностям и исследовательскому обучению, формирования и развития познавательной самостоятельности. Французский просветитель Ж.-Ж. Руссо был родоначальником теории свободного воспитания, он считал главными умениями, приобретенными с помощью образования, - умение искать, думать, включаться в решение проблем. Эти умения непосредственным образом оказывают влияние на развитие познавательной самостоятельности. А.И Герцен, Н.Г Чернышевский высказывались о важности самодеятельности, самостоятельности учения и познавательной самостоятельности в учебном процессе. Идеи К.Д. Ушинского максимально близки основным современным представлениям об исследовательской деятельности. К средствам активизации

познавательной самостоятельности он относил сократический и эвристический методы, средства наглядности, своевременность и постепенность в обучении. Общественно - педагогическое движение 19 века отводило особую роль познавательной самостоятельности, рассматривая ее как эффективный путь освоения знаний. В конце 19 – начале 20 века происходит развитие исследовательского обучения и формирования познавательной самостоятельности в учебно-исследовательской деятельности. Самая популярная в мире альтернативная классно - урочной системе стала система, разработанная американской учительницей Хеленой Паркхерст - «дальтон-план», в основу которой были заложены самостоятельность и самодеятельность ребенка. « …беседа учителя с учеником на тему любого школьного предмета влияет на него гораздо сильнее, чем сказанное на уроке.». В России была разработана своя система, во многом схожая с «дальтон-план» - форма организации учебной деятельности – студийная система, идея организации работы по студиям была выдвинута П.П. Блонским. Проблема познавательной самостоятельности начала 20 века оформилась как фундаментальная идея новой школы, которая отвечала потребностям и интересам ребенка. В 60-х годах 20 века, когда в условиях научно-технического прогресса формирование познавательной самостоятельности приобрело особую значимость, перед отечественной педагогикой встал вопрос изучения проблемы развития познавательной самостоятельности и непрерывного повышение уровня познавательной самостоятельности. В последнее десятилетие 20 века, в рамках модернизации педагогических технологий наметился ориентир на вовлечение учащихся в активную самостоятельную учебно-познавательную деятельность, направленную на решение таких задач, как обеспечение достижения самостоятельной позиции в обучении, придание личностного смысла усвоению знаний.

1.2. Терминологическая интерпретация понятия «познавательная самостоятельность»

Понятие «познавательная самостоятельность» складывается из содержания ключевых понятий «познание» и «самостоятельность».

Познание – это процесс отражения и воспроизведения действительности в мышлении человека, результатом которого является новое знание о мире (т.е. творческая деятельность). Учебная деятельность - это особая форма познания.

Понятия «самостоятельность» рассматривается учеными по-разному:

- как интеллектуальные способности ученика и его умения, позволяющие ему самостоятельно учиться;
- как готовность учащегося своими силами продвигаться в овладении знаниями;
- как свойство личности, проявляющееся в желании своими силами овладеть знаниями и способами действий без посторонней помощи.

К.Д. Ушинский говорил: "самостоятельные же мысли вытекают только из самостоятельно приобретенных знаний". Говоря о проблеме самостоятельной познавательной деятельности в трактовке понятия "самостоятельность", одни педагоги такие, как Л.П. Аристова, Б.П. Есипов, Р.А. Низамов и др., имеют в виду любую деятельность учащихся, лишь бы он осуществлял ее сам, без посторонней помощи. Другие педагоги считают, что самостоятельность - это деятельность преобразующего характера (Н.Г. Дайри, М.А. Данилов, И.Я. Лернер и др.). Мало иметь творческий характер для поиска новых знаний, ученик должен уметь ориентироваться в новой ситуации, задать вопрос и найти на него ответ, иметь опорный багаж знаний, владеть методами познавательной деятельности, усвоить их школьник может только в процессе разнообразной деятельности, как творческой, так и воспроизводящей.

Психологи, говоря о самостоятельности, разделились на две группы:

- первая группа ученых (В.А. Артемов, Н.Д. Левитов, В.А. Крутецкий, П.И. и др.) указывают на самостоятельность как на волевую черту характера;

- вторая группа ученых рассматривает самостоятельность как стержневое качество личности (Ш.И. Ганелин, Е.Я. Голант, А.Г. Ковалев, И.Я. Лернер, Н.А. Половникова, С.Л. Рубинштейн, и др.).

В новых государственных стандартах говорится об увеличении всех видов самостоятельных работ в школе, как одной из главных составляющих понятия познавательная самостоятельность.

Самостоятельная работа:

- для одних — это форма и метод организации учения;
- для других — специальные задания, предназначенные для самостоятельного выполнения;
- для третьих — деятельность учащихся, которая протекает без непосредственного участия учителя.

Развитие познавательной самостоятельности невозможно без системы различных видов самостоятельных работ. Для выполнения самостоятельной работы требуются активные умственные способности учащихся. Самостоятельная работа всегда связана с поиском наиболее рациональных способов выполнения познавательных задач, с анализом результата работы, направляется и контролируется учителем. Важно вооружить ученика навыками и умениями организации умственного труда и дать метод для организации приобретения знаний, т.е. умением ставить цель, выбирать средство ее достижения, анализировать и выстраивать в систему закономерностей изучаемый материал для последующего использования в учебной, учебно-поисковой и другой деятельности, планировать работу по времени. Главным признаком самостоятельной деятельности является то, что цель деятельности ученика несет в себе одновременно и функцию управления этой деятельностью.

Формирование целостной и гармоничной личности, вовлечение учащихся в самостоятельную познавательную деятельность невозможно без систематического их участия в самостоятельной деятельности, которая в

процессе особого вида учебных заданий – системы самостоятельных работ - приобретает характер проблемно-поисковой деятельности.

Самостоятельность - это качество личности, которое формируется под руководством учителя при непосредственном усилии самого школьника в достижении образовательных целей. Это медленный и требующий терпения процесс. В научных трудах встречаются различные определения познавательной самостоятельности.

Одними учеными познавательная самостоятельность рассматривается как качество личности, другими – как свойство. Одни рассматривают данную категорию, отдавая предпочтение деятельностной стороне, другие - психологическим аспектам. Важно, что их объединяет общее - познавательная самостоятельность определяется как характеристика деятельности в процессе познания ученика без непосредственного участия учителя. Как черта личности, характеризующаяся двумя компонентами - мотивационными (стремление потребность к познанию) и процессуальным (готовностью - наличием опорных знаний и владением способами познавательной деятельности), познавательная самостоятельность - это единство двух сторон личности: способности к учению (обучаемости) и организованности в учении (Рабунский Е.С.).

1.3. Структурные компоненты познавательной самостоятельности

В педагогике познавательная самостоятельность рассматривается, как качество личности, которое основано на собственной познавательной активности и способности вести целенаправленную познавательную деятельность по приобретению, применению и преобразованию знаний, умений и навыков, которые можно использовать самостоятельно без посторонней помощи при решении новых познавательных задач и совершенствовании учебных знаний и умений. Для развития познавательной самостоятельности в процессе обучения школьники должны быть задействованы на всех этапах образовательной деятельности: совместного планирования учебной деятельности, ее осуществления, совместного анализа, оценки и коррекции.

Необходимо создавать условия, способствующие свободе выбора школьником форм и методов работы, самостоятельному принятию решений, но при этом предоставлять четкие данные о ситуации и перспективах ее развития, о способах выполнения ключевых учебных задач. Способность к самостоятельности в познании определяется владением необходимыми опорными знаниями и методами ведения процесса установления новых знаний. Стремление к самостоятельности в познании определяется наличием соответствующих мотивов. По словам академика П.И. Пидкасистого, познавательная самостоятельность представляет собой систему, содержащую в себе следующие основные компоненты:

- содержательную сторону (знания, выраженные в понятиях или образах восприятий и представлений);
- оперативную (разнообразные действия, оперирование умениями, приемами, как во внешнем, так и во внутреннем плане действий);
- результативную сторону (новые знания, способы решений; новый социальный опыт, идеи, взгляды, способности и качества личности).

Ее развитие возможно только при взаимодействии учителя и ученика и при объединении трех компонентов.

Уровень знаний, сложившийся к определенному моменту времени, составляет содержательную сторону познавательной самостоятельности; набор умений по самостоятельному овладению знаниями выражает ее процессуальный (операционный) компонент; стремления проявляются через определяемое мотивами желание учиться (самосовершенствоваться) и направлены на достижение некоторой цели; способности характеризуют природные задатки.

При всем многообразии подходов решения проблемы большинство авторов прямо или косвенно выделяют три наиболее существенных структурных компонента познавательной самостоятельности: содержательно-

операционного, мотивационного и волевого и подчеркивают их взаимосвязь и взаимообусловленность.

Содержательно-операционный компонент включает в себя владение учеником системой ведущих (опорных) знаний, методов, приемов и способов познавательной деятельности. Приобретение новых знаний и умений собственными силами возможно только при усвоении учеником опорных знаний на уровне свободного владения ими, но для самостоятельности в учении мало только владения знаниями. Опорные знания являются первоосновой способности школьника к самостоятельному познанию. Успешное течение познавательного процесса возможно только при владении методами, способами и приемами мыслительной деятельности, а для этого ученик должен уметь анализировать наблюдаемое явление, сравнивать, выделять главное, устанавливать связи, находить общее в предметах, явлениях; самому грамотно ставить вопрос и отыскивать на него ответ; систематизировать факты на новом уровне; осуществлять перенос усвоенных знаний и способов деятельности в новые условия, значит владеть большим количеством мыслительных операций. Воспроизвести опорные знания и методы познавательной деятельности, которые нужны для переработки этих знаний возможно только при условии самостоятельного овладения этими знаниями.

Второй компонент познавательной самостоятельности - мотивационный. Он определяется как осознанные внутренние побуждения, интерес к процессу познания, потребность в самоконтроле, стремление познавать. Познавательный интерес проявляется на разных уровнях: сначала - пытливость, любознательность, а далее - стремление расширить и углубить знания по заинтересовавшим темам.

Третий компонент познавательной самостоятельности - волевой. Для достижения поставленной цели одного стремления мало, необходимо приложить волевые усилия для преодоления познавательного затруднения. Волевой компонент органически связан с деятельностью.

В качестве признаков познавательной самостоятельности школьников Ю.К. Бабанский, Б. П. Есипов, П. И. Пидкасистый, М. А.Федорова выделяют инициативность, настойчивость, независимость, уверенность, самокритичность, ответственность, умение анализировать информацию, организовывать свою деятельность, доводить работу до логического завершения, исправлять ошибки, делать выводы. Признаками познавательной самостоятельности считают качества личности, связанные с мотивацией и волевыми усилиями, а также различными умениями, направленными на организацию познавательной деятельности.

Развитие познавательной самостоятельности возможно только через вовлечение учащихся в активную самостоятельную познавательную деятельность, а для старшеклассников требует комплексного подхода к проблеме учета социальной, психологической и дидактических сторон. В качестве критериев познавательной самостоятельности школьника ряд ученых (Д. Б. Богоявленская, В. К. Лебедева, И. Л. Менчинская, Г. И. Вергелес) выделяют:

- способность ориентироваться в цели полученного задания;
- умение выбрать способы действий, адекватные поставленной задаче, и реализовать их на практике;
- способность корректировать содержание и способы работы.

Таким образом, познавательная самостоятельность - это качество личности объединяющее в себе умение при минимальной посторонней помощи или без нее определять ближайшие цели и задачи деятельности, находить пути их реализации. На более высоком уровне развития самостоятельности школьника ему оказывается доступным контролирование хода деятельности, а также анализ, оценка, при необходимости коррекция результатов.

1.4. Уровни познавательной самостоятельности школьников

Различные исследователи предлагают различные пути формирования и развития познавательной самостоятельности обучающихся**:**

1. организация самостоятельной работы, решение учебных задач;
2. формирование умений применять основные формы и методы познавательной деятельности;
3. использование обобщённых знаний, составляющих ориентировочную основу деятельности;
4. введение в содержание обучения методологических знаний;
5. осуществление самоконтроля учебной деятельности и др.

Учеными была предложена система развития познавательной самостоятельности - она состоит из этапов учебной работы, направленных на формирование трёх уровней познавательной самостоятельности обучаемых.

Первоначальный этап – доведение образцов основных форм познавательной деятельности до учащихся – это выход на первый уровень развития – приобретение качества копирующей самостоятельности.

Основной этап – формирование основных методов познавательной деятельности. Овладев им, обучаемый приобретает общий подход к решению познавательных задач соответствующего типа и выходит на второй уровень познавательной самостоятельности – приобретает воспроизводяще - выборочную самостоятельность.

Высший этап системы учебной работы по развитию познавательной самостоятельности обучаемых предполагает главной задачей учителя-упражнения для учеников в творческом применении усвоенных способов, приёмов и умений познавательной деятельности и их дальнейшее совершенствование. Овладев этой способностью, учащийся приобретает творческую самостоятельность.

Умения, приёмы и способы познавательной деятельности, характерные для одного предмета, являются частными методами. Но, при дальнейшем их обобщении, они слагаются в общие методы учебной деятельности. Это в основном и характеризует самостоятельность обучаемого в познании, его умственное развитие. Создатели теории развития познавательной

самостоятельности, задаваясь вопросом оценивания уровня познавательной самостоятельности у школьников, в своих трудах описали критерии уровней познавательной самостоятельности. Существует несколько подходов к определению критериев уровня познавательной самостоятельности, рассмотрим некоторые из них:

И.Я. Лернер рассматривает познавательную самостоятельность – с точки зрения сформированности у обучаемых стремления и умения познавать в процессе целенаправленного творческого поиска:

- 1 уровень. Учащиеся самостоятельно и доказательно строят один или несколько непосредственных выводов из одного исходного;
- 2 уровень. Умение доказательно прийти к нескольким параллельным и изолированным друг от друга непосредственным выводам на основе нескольких различных данных;
- 3 уровень. Умение сделать доказательно один или несколько опосредованных выводов из одного или нескольких данных условия, при этом все выводы должны быть изолированы друг от друга;
- 4 уровень. Умение делать опосредованные выводы на основе выявления связи между различными данными условия.

В. А. Козаков, основываясь на степени осознанности и мотивации учащихся в любой деятельности, тоже выделяет несколько уровней развития познавательной самостоятельности, описывая их таким образом:

- начальный уровень развития познавательной самостоятельности характеризуется поверхностным знанием предмета, изучение материала не вызывает положительных эмоций, отсутствием навыков обработки и поиска информации, стремление к самостоятельным действиям незначительно, отсутствуют волевые усилия в познавательной самостоятельной деятельности и т.д.;
- репродуктивный уровень отличается бессистемным знанием учебного материала, интерес к изучению предмета проявляется, однако цели

познавательной самостоятельной деятельности ставятся редко, действия неосмысленны, эмоции не выражены;

- продуктивный уровень характеризуется целостным знанием учебного материала, наличием навыков использования его для саморазвития; проявляются интерес к учению, мотивы и согласуемые с ними цели познавательной самостоятельной деятельности ставятся сознательно;
- творческий уровень характеризуется глубиной, целостностью знаний, получаемых систематично; устойчивым стремлением к выполнению интеллектуальных творческих заданий; четко выражены мотивы учения в интеллектуальной деятельности, ставятся цели; проявляется интерес к познанию сложных теоретических вопросов.

По Н.А. Половниковой познавательная самостоятельность – ученики проявляют готовность (способность и стремление) вести целенаправленную познавательную деятельность самостоятельно:

- уровень копирующая самостоятельность - учащийся овладевает образцами всех типичных для его класса форм познавательной деятельности по предмету. В основном, здесь подразумевается овладение алгоритмическими действиями (по аналогии, по заранее представленному плану и т.п.), ведущими всех учащихся при одинаковых исходных данных к определенному, одинаковому результату;
- уровень воспроизводяще-выборочная самостоятельность - обучаемый может самостоятельно воспроизвести основные методы, соответствующие ступени его обучения, умеет выбрать и использовать нужный метод;
- уровень творческая самостоятельность - заключается в уяснении конструктивного подхода к творчеству. Новые методы познавательной самостоятельности создается на основе уже усвоенных методов.

по Т.И. Шамовой Познавательная самостоятельность – одно из основных качеств личности, связанное с «воспитанием положительных мотивов

к учению, формированием системы знаний и способов деятельности по их применению и приобретению новых знаний»:

- репродуктивная самостоятельность (низкий уровень – познавательные мотивы неустойчивы, преобладают копирующие действия по образцу). Для школьника существует общее представление необходимости образования, владеет алгоритмическими действиями, умением выполнять задания по аналогии и по заранее представленному плану;
- частично-поисковая самостоятельность (средний уровень – четкая познавательная потребность, элементы творчества, различные средства поиска информации, неадекватное оценивание своих ошибок). Самостоятельное познание проявляется на уровне любознательности. Знания школьника характеризуются единством, взаимосвязью существенных признаков объектов, которые обеспечивают целостность образа, целостность представления о мире. На основе известного может строить собственный план действий;
- исследовательская самостоятельность (высокий уровень – устойчивая мотивация высокая ответственность, творческий подход, корректировка ошибок). Учащийся основой личного благополучия в жизни считает знания, изучая все учебные предметы, проявляет большое желание к самостоятельной познавательной деятельности. Рассчитывает на свои силы в решении поставленных задач, может выбрать наиболее рациональный метод решения задачи, умеет проводить анализ работы исправлять ошибки и делает вывод.

Независимо от того, какие компоненты положены в основу определения уровней познавательной самостоятельности, рассматривать ее нужно как сложный поэтапный процесс, от более простых уровней, носящих в основном воспроизводящий характер, к сложной творческой и исследовательской деятельности.

Пути развития познавательной самостоятельности:

- обучение деятельности (давать алгоритм каждого действия);
- организация самостоятельной работы, решение учебных задач;
- формирование умений применять основные формы и методы познавательной деятельности;
- включение в разнообразную познавательную деятельность;
- использование обобщенных знаний, составляющих ориентировочную основу деятельности;
- введение в содержание обучения методологических знаний;
- осуществление самоконтроля деятельности.

Цели развития познавательной самостоятельности:

- выработать на основе полученных знаний прочные умения и навыки;
- применять их в дальнейшей познавательной работе и жизненной практике;
- способствовать развитию интереса учащихся к математике и индивидуальных склонностей;
- развить умение прогнозировать результат и возможные последствия различных вариантов решения;
- умение устанавливать причинно следственные связи;
- воспитывать ответственное отношение к учебе.

Формирование у школьников познавательной самостоятельности предполагает две тесно связанные между собой задачи:

- первая предназначена развивать у учащихся самостоятельность в познавательной деятельности, учить самостоятельно, овладевать знаниями;
- вторая в том, чтобы научить их самостоятельно применять имеющиеся знания в учении и практической деятельности.

Условия формирования познавательной самостоятельности:

1. Создание ситуаций, побуждающих школьников к самостоятельным решениям и действиям: к поиску различных путей решения заданий, к творческой деятельности, к самопроверке и самоанализу – стимулирует развитие самостоятельной деятельности.

2. Использование в учебной и внеурочной деятельности школьников творческого подхода: игры загадки, игры путешествия – приобщает к решению практических задач, стимулирует активность.

3. Создание ситуаций, в которых ученик определяет цель своих действий: «Для чего я это делаю? Что я хочу узнать? Что должен получить? и т.д.».- стимулирует процесс осмысления своей деятельности.

4. Использование при организации самостоятельной деятельности школьников различных инструкций, памяток, схем, образцов рассуждений - позволяет научить планировать свою деятельность при овладении новым приемом получения знаний, стимулирует самостоятельные действия.

5. Включение ученика в самостоятельную деятельность через использование приемов:

- групповой формы организации обучения;
- систему дифференцированных заданий;
- совместного решения проблемных ситуаций.

Формируют умение контролировать свою деятельность такие качества самостоятельной деятельности как ответственность и организованность.

Проблема развития познавательной самостоятельности является актуальной для учителей всех школьных предметов. Познавательная самостоятельность школьника не является врожденным качеством личности, а формируется и развивается в процессе обучения, представляя собой постепенный переход от действий, производимых только под руководством педагога, к познавательной деятельности, основанной на самостоятельном, творческом подходе к поставленной учебной задаче. Познавательная самостоятельность - это способность учащегося принимать мотивированные

решения, с минимальной посторонней помощью, для решения им задач, поставленных перед ним учителем в учебном процессе. Познавательная самостоятельность школьников - это сложная система. В нее входят: умение анализировать и выстроить в систему закономерностей изучаемый материал для последующего использования в учебной и других деятельностях, т.е. владение учеником системой ведущих (опорных) знаний, методов, приемов и способов познавательной деятельности, осознанные внутренние побуждения, которые обуславливают целенаправленную деятельность на овладение знаниями и способами действий, волевые усилия ребенка. Каждая из этих составляющих требует от педагога использования особых приемов и методов обучения. Важно поэтапно работать над формированием познавательной самостоятельности, учитывая уровни сформированности познавательной самостоятельности у каждого ученика. Для успешного овладения современным содержанием школьного образования необходимо повысить эффективность процесса обучения в направлении самостоятельности учебно-познавательной деятельности учащихся. Нужно четко определить систему умений и навыков, овладение которыми приводит к самостоятельному выполнению работ различного характера. Формирования умений и навыков самостоятельной работы при обучении – это сложный поэтапный процесс. Только согласованное взаимодействие учителя и обучающихся, направленное на совершенствование форм, методов, приемов и средств обучения и самообучения, повышения активности и самостоятельности обучающихся в познавательной деятельности, мотивирование познавательного интереса, усвоение знаний, формирование умений, навыков и применение их на практике, дает возможность формирования « новой» привычки современного человека: привычки учиться. Познавательная самостоятельность проявляется в самостоятельной познавательной деятельности, одной из форм проявления данного качества личности является решение учащимися познавательной задачи приводящих его к новым для него знаниям и способам действия.

1.5. Развитие познавательной самостоятельности школьников при решении задач с параметрами

Одна из важнейших задач обучения математике – проблема управления самостоятельной мыслительной деятельностью обучающихся в процессе изучения понятий, решения задач и доказательства теорем. Поиск решения математических задач требует самостоятельной мыслительной деятельности для построения плана решения, самопроверки полученного результата, умений самостоятельно пользоваться правилами и алгоритмами, а также умений применять систему обобщенных знаний, следовательно уроки математики наиболее благоприятствуют развитию познавательной самостоятельности у школьников. Практические методы обучения основаны на практической деятельности учащихся и формируют практические умения и навыки. К практическим методам относятся упражнения, практические и самостоятельные работы. Индивидуальная самостоятельная работа строго учитывает индивидуальные особенности ученика: темп, способности по предмету. Важным фактором развития познавательной самостоятельности является организация работы с учениками на уроке. Один из вариантов – использование заданий с различной степенью сложности, которые предусматривают постепенное сокращение помощи учителя и развития познавательной самостоятельности каждого отдельного ученика или группы обучаемых. Например: для сильных учащихся можно предложить задание: решить задачу, составить и решить обратную задачу, для других учащихся такое задание непосильно и им необходима помощь и соответственно задания легче, например, с планом решения задачи или с готовым решением, но с заданием — объяснить каждое действие задачи.

По характеру учебной самостоятельной деятельности на занятиях по математике (алгебре и геометрии) целесообразно выделить три уровня самостоятельности и распределить всех учеников класса по соответствующим уровням развития познавательной самостоятельности:

- низкий уровень. Ученик не способен самостоятельно проанализировать содержание задачи. Он может выделить условия, вопрос задачи только при помощи наводящих вопросов учителя. Соответственно, он не может самостоятельно наметить и составить план решения, а значит, не способен самостоятельно решить задачу и найти ответ;
- средний уровень. Ученик может самостоятельно выделить условия и вопрос задачи, определить, что в задаче известно и что нужно найти. Намечает, не всегда правильно, план решения задачи. Далеко не всегда доводит его до конца;
- высокий уровень. Ученик быстро и правильно анализирует задачу, составляет план решения, записывает решение и ответ. Проводит проверку ответа задачи, тем самым проявляя самоконтроль.

Важным условием в процессе развития познавательной самостоятельности учащихся является так же личность учителя, его ведущая организаторская роль. Учитель должен быть не просто источником готовых образцов знаний, а организатором самостоятельной поисковой деятельности учащихся по созданию новых знаниевых образцов. От учителя требуется большее доверие к учащимся, большая опора на их собственные наблюдения, личный опыт, интуиции, фантазии, инициативу

Задачи с параметрами – один из труднейших разделов школьного курса математики, кроме использования определенных алгоритмов решения уравнений и неравенств, приходится обдумывать, по какому признаку нужно разбить множество значений параметра на классы, следить за тем, чтобы не пропустить какие – либо тонкости. Здесь основным является понимание смысла конкретной задачи.

Решение задач с параметрами требует наличия определенной математической культуры. С решением задач с параметрами приходится сталкиваться не только в математике. Очень многие законы и закономерности из физики, экономики и других областей описываются уравнениями и

неравенствами с параметрами. Фактически, решая задачи по физике, химии, экономике и некоторым другим школьным дисциплинам, ученик имеет дело с параметрами.

Функции познавательных задач многообразны – они позволяют творчески применить знания, формировать опыт творческого мышления, закреплять материал. Задачи применяются в различных звеньях учебного процесса – при постановке цели, изучения нового, его закрепления и для домашних заданий. Отсюда можно заключить, что «задачи с параметрами» способствуют формированию и совершенствованию умений и навыков, тем самым, содействуют развитию познавательной самостоятельность. Следовательно, один из путей развития познавательной самостоятельности — использование в учебно-воспитательном процессе задач, которые требуют от учащихся не стандартных подходов к решению.

Глава 2. Разработка учебного пособия «Решение задач с параметрами при подготовке к ОГЭ»

2.1. Руководство учителю

Учебное пособие содержит в себе 4 модуля. В ходе изучения каждого модуля ученику предлагается:

1. Система упражнений, направленная на актуализацию и применение знаний, полученных на уроках. Формируются базовые умения, необходимые для изучения задач с параметрами.

2. Если у ученика возникают трудности при выполнении заданий, он может обратиться к вспомогательным вопросам. Они составлены таким образом, чтобы показать ученику направление решения задания, либо то, какие знания ему необходимо восполнить.

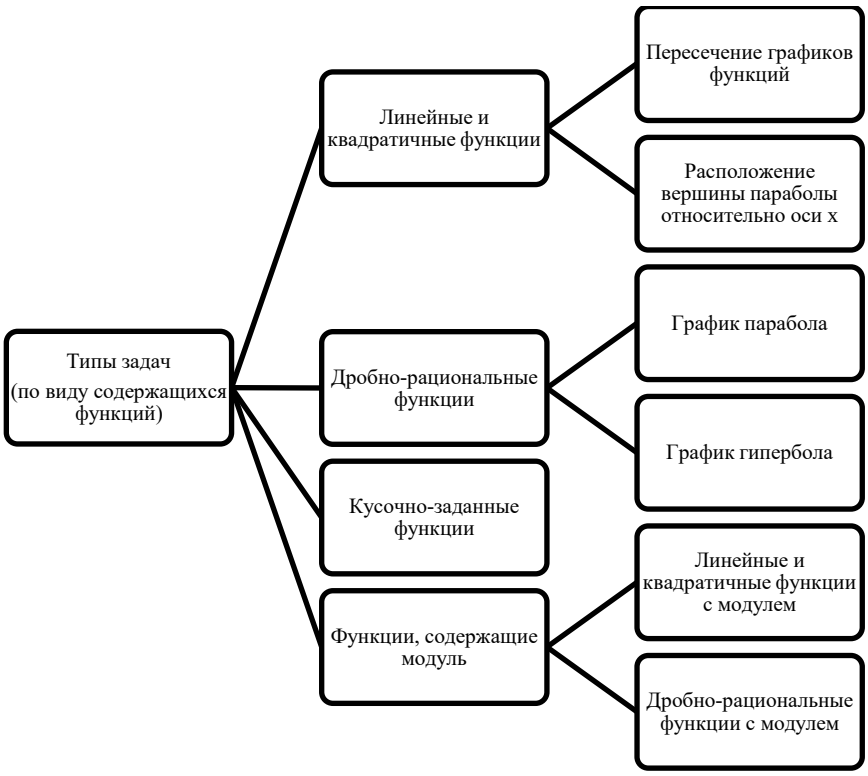
3. Подробный разбор решения задач с параметрами данного типа на примерах из открытого банка ФИПИ.

4. На основе разобранных примеров составлен пошаговый алгоритм решения данного типа задач.

5. Подборка заданий для самостоятельной отработки, полученных знаний.

После каждого модуля ученику предлагается проверочная работа, чтобы оценить уровень усвоения материала. После её выполнения ученик производит самопроверку по предложенным ответам и с результатами обращается к учителю. Если ученик успешно выполнил не менее 50% заданий, учитель допускает его к следующему модулю. В противном случае ученику рекомендуется пройти данный модуль повторно более внимательно.

2.2. Классификация задач с параметрами, встречающихся в основном государственном экзамене



2.3. Схема определения типа задачи

Как глядя на задачу понять, к какому типу она относится?

2.4. Основные методы решения задач, содержащих параметр

1. Аналитический метод

Аналитический — это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Считается, что аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Выделим класс задач, где за счет параметра на переменную накладывается какие-либо ограничения. Для таких задач характерны следующие формулировки: «При каком значении параметра уравнение имеет одно решение, два решения, бесконечно много, ни одного»;

Пример: При каком значении p прямая $y = 4x$ имеет с параболой $y = x^2 + p$ ровно одну общую точку?

Решение.

Найдём абсциссы точек пересечения, для этого приравняем правые части обеих функций:

$$x^2 + p = 4x,\ x^2 - 4x + p = 0$$

Графики функций, будут иметь ровно одну точку пересечения, если это уравнение имеет ровно одно решение. То есть, если дискриминант этого квадратного уравнения будет равен нулю.

$$16 - 4p = 0, p = 4$$

Ответ: 4.

2. Графический метод

Для применения графических методов требуется умение выполнять дополнительное построение различных графиков, вести графические исследования, соответствующие данным значениям параметра. Уравнения с параметром вызывают серьезные трудности логического характера. Каждое такое уравнение — это, по существу, краткая запись семейства уравнений. Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства невозможно,

но, тем не менее, каждое из них должно быть решено. Легче всего это сделать с помощью графического представления.

Исключительная наглядность и красота графического способа решения задач с параметром настолько увлекает изучающих тему «Задачи с параметром», что они начинают игнорировать другие способы решения, забывая общеизвестный факт: для любого класса задач их авторы могут сформулировать такую, которая блестяще решается данным способом и с колоссальными трудностями — остальными способами.

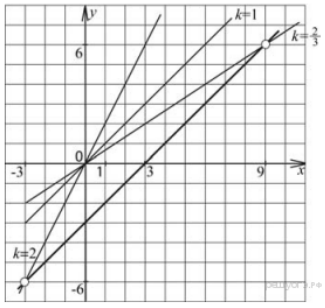
Решить графически — это значит построить графики двух заданных функции на одной координатной плоскости и найти их точки пересечения, а затем сделать вывод о значении параметра в этих точках.

Пример: Постройте график функции $y = \frac{(x-9)(x^2-9)}{x^2-6x-27}$ и определите, при каких значениях k построенный график не будет иметь общих точек с прямой $y = kx$.

Решение.

Преобразуем функцию: $y = \frac{(x-9)(x-3)(x+3)}{(x-9)(x+3)} = x - 3$ при $x \neq -3$ и $x \neq 9$. График — прямая $y = x - 3$ без двух точек $(-3; -6)$ и $(9; 6)$.

Прямая $y = kx$ не будет иметь с построенной прямой общих точек, если она будет ей параллельна, т. е. при $k = 1$, и если она будет проходить через выколотые точки. Через первую из этих точек прямая $y = kx$ проходит, если $k = 2$, а через вторую — если $k = \frac{2}{3}$.



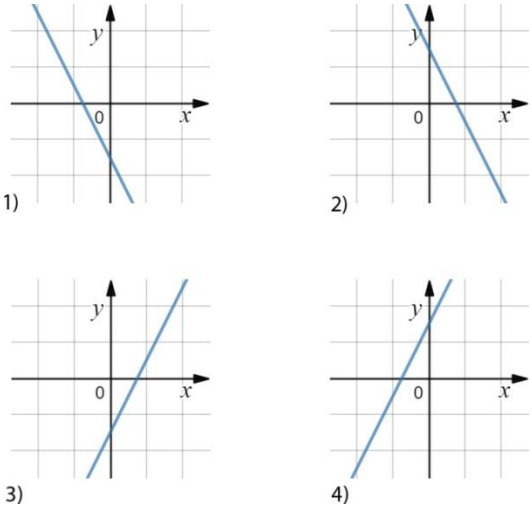
Ответ: $\frac{2}{3}; 1; 2$.

2.5. Модуль 1. Линейная и квадратичная функции

1. Линейная функция

Задание 1.

Дана функция $y = kx + b$. Известно, что $b > 0. k > 0$. На каком рисунке изображен график этой функции?



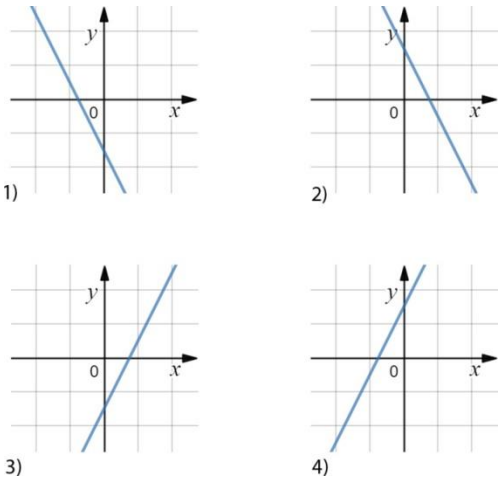
Вспомогательные вопросы:

1. Если $k > 0$, график возрастает или убывает?

2. Если $b > 0$, график пересекает ось у в верхней полуплоскости или в нижней?

Задание 2.

Дана функция $y = kx + b$. Известно, что $b < 0. k > 0$. На каком рисунке изображен график этой функции?



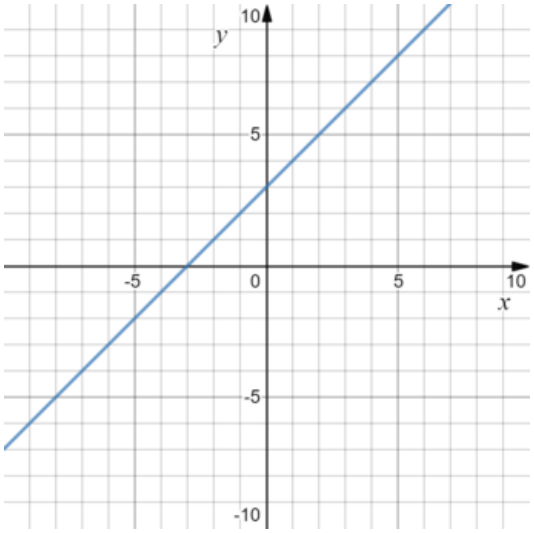
Вспомогательные вопросы:

1. Если $k > 0$, график возрастает или убывает?

2. Если $b < 0$, график пересекает ось у в верхней полуплоскости или в нижней?

Задание 3.

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = -x + 3$ 2) $y = -x - 3$ 3) $y = x + 3$ 4) $y = x - 3$

Вспомогательные вопросы:

1. Прямая на графике возрастает или убывает?

2. Какое значение k этому соответствует: $k > 0$ или $k < 0$?

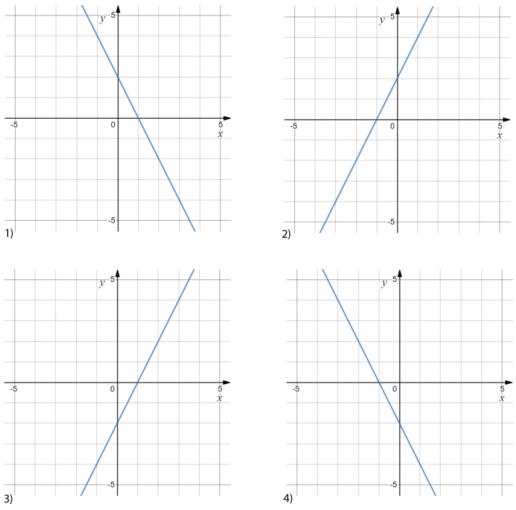
3. В какой полуплоскости график пересекает ось y?

4. Какое значение b этому соответствует: $b > 0$ или $b < 0$?

5. Оценив значения коэффициентов, выберите из предложенных функций ту, которая соответствует данному графику.

Задание 4.

На каком рисунке изображен график функции $y = -\frac{1}{5}x$?



Вспомогательные вопросы:

1. В заданной функции $k > 0$ или $k < 0$?

2. Как должен вести себя график в этом случае: возрастать или убывать?

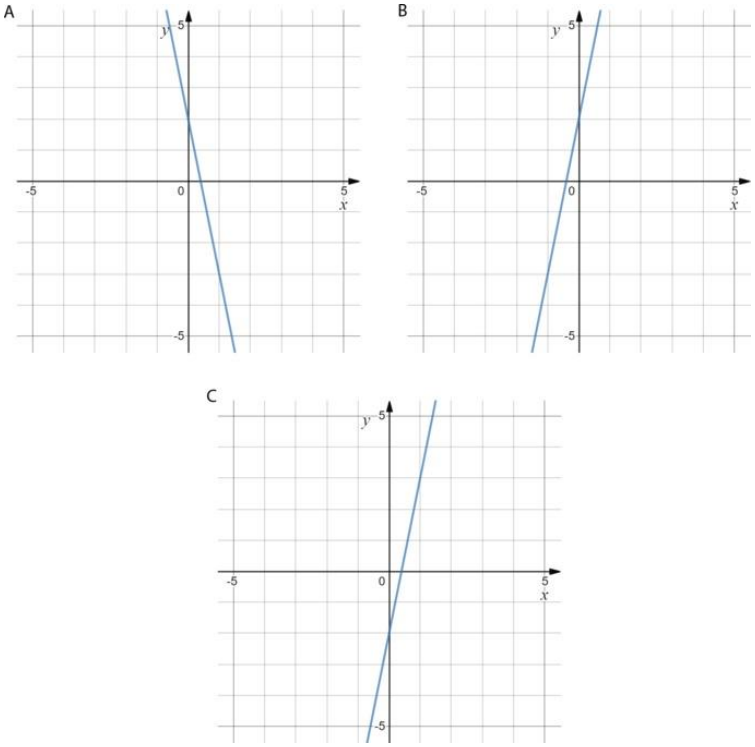
3. В заданной функции $b > 0$ или $b < 0$?

4. В какой полуплоскости график должен пересечь ось у в этом случае: верхней или нижней?

5. Оценив значения коэффициентов, выберите из предложенных графиков верный.

Задание 5.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



Формулы:

1) $y = 5x + 2$ 2) $y = 5x - 2$ 3) $y = -5x + 2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C

Вспомогательные вопросы:

Проделайте следующий алгоритм для каждого из предложенных графиков:

1. Прямая на графике возрастает или убывает?

2. Какое значение k этому соответствует: $k > 0$ или $k < 0$?

3. В какой полуплоскости график пересекает ось y?

4. Какое значение b этому соответствует: $b > 0$ или $b < 0$?

5. Оценив значения коэффициентов, выберите из предложенных функций ту, которая соответствует данному графику.

Задание 6.

Выясните, проходит ли график линейной функции $y = 3{,}2x - 5$ через точку:

А) $A\ (3;\ 4{,}6)$ Б) $B(1{,}2;\ 0)$

Вспомогательные вопросы:

1. Удовлетворяют ли координаты точки уравнению заданной функции?

Задание 7.

Докажите, что прямые $5x + 11y = 8$ и $10x - 7y = 74$ пересекаются в точке $A\ (6; -2)$

Вспомогательные вопросы:

1. Удовлетворяют ли координаты точки уравнению первой функции?

2. Удовлетворяют ли координаты точки уравнению второй функции?

3. Если и первая, и вторая функции проходят через данную точку, пересекаются ли они в ней?

Задание 8.

Найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций

А) $y = x + 4$ и $y = 2x$

Б) $y = -2x + 3$ и $y = 2x - 5$

Вспомогательные вопросы:

1. Если графики пересекаются в точке, значит ли это, что оба графика через неё проходят?

2. Если график проходит через точку, её координаты удовлетворяют уравнению функции, задающей график?

3. Как найти решение, которое одновременно будет удовлетворять и уравнению первой функции, и уравнению второй функции?

Задание 9.

Найдите значение k, если известно, что график линейной функции $y = kx + 4$ проходит через точку:

А) $C\ (3; 5)$ Б) $E\ (-6;\ -8)$

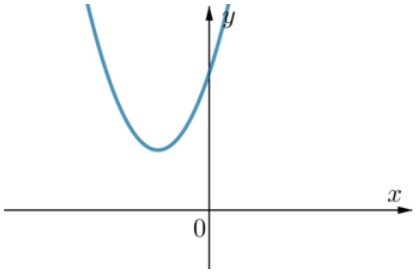
Вспомогательные вопросы:

1. Если известно, что график проходит через точку, её координаты будут удовлетворять уравнению заданной функции?

2. Квадратичная функция.

Задание 1.

На рисунке изображен график функции $y = ax^2 + bx + c$.



Каковы знаки коэффициентов a и c?

1) $a < 0, c > 0$ 2) $a < 0, c < 0$ 3) $a > 0, c < 0$ 4) $a > 0, c > 0$

Вспомогательные вопросы:

1. Ветви параболы направлены вверх или вниз?

2. Какое значение коэффициента a этому соответствует: $a > 0$ или $a < 0$?

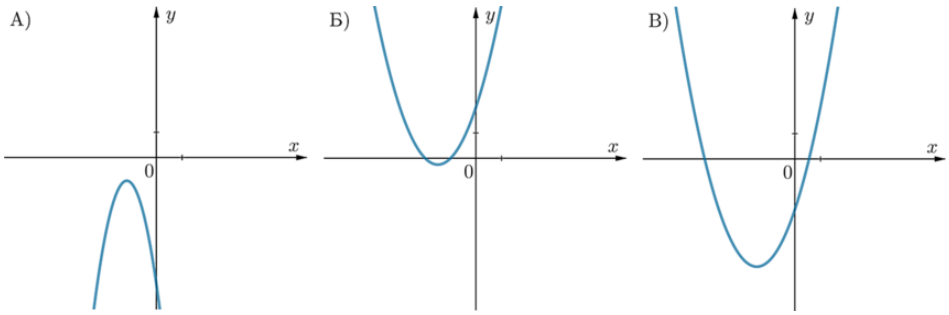
3. В какой полуплоскости график пересекает ось y?

4. Какое значение коэффициента c этому соответствует: $c > 0$ или $c < 0$?

Задание 2.

На рисунке изображены графики функций вида $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов a, c.

ГРАФИКИ:



КОЭФФИЦИЕНТЫ:

1) $a > 0, c > 0$ 2) $a > 0, c < 0$ 3) $a < 0, c < 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C

Вспомогательные вопросы:

Выполните следующий алгоритм для каждого из предложенных графиков:

1. Ветви параболы направлены вверх или вниз?

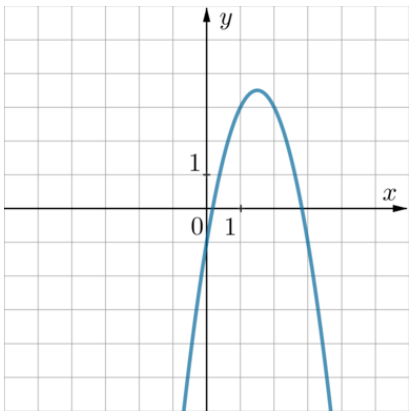
2. Какое значение коэффициента а этому соответствует: $a > 0$ или $a < 0$?

3. В какой полуплоскости график пересекает ось y?

4. Какое значение коэффициента с этому соответствует: $c > 0$ или $c < 0$?

Задание 3.

Найдите значение c по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенному на рисунке.



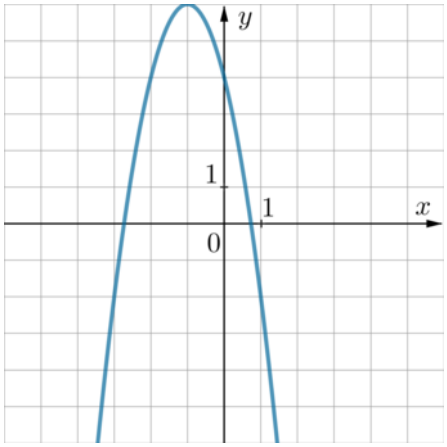
Вспомогательные вопросы:

1. Коэффициент с отвечает за пересечение параболы с осью х или с осью у?

2. В какой точке данная парабола пересекает эту ось?

Задание 4.

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = -2x^2 - 4x + 4$ 2) $y = -2x^2 + 4x + 4$ 3) $y = 2x^2 - 4x - 4$

4) $y = 2x^2 + 4x - 4$

Вспомогательные вопросы:

1. Ветви параболы направлены вверх или вниз?

2. Какое значение коэффициента а этому соответствует: $a > 0$ или $a < 0$?

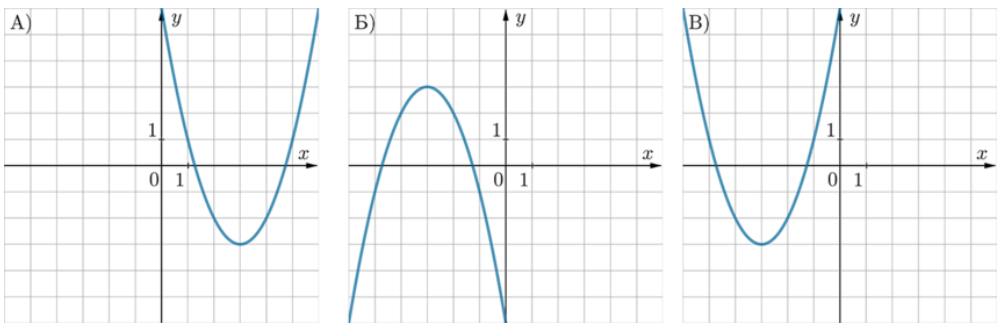
3. В какой полуплоскости график пересекает ось у?

4. Какое значение коэффициента с этому соответствует: $c > 0$ или $c < 0$?

5. Оценив значения коэффициентов, выберите из предложенных функций ту, которая соответствует данному графику.

Задание 5.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



ФОРМУЛЫ:

1) $y = -x^2 - 6x - 6$ 2) $y = x^2 + 6x + 6$ 3) $y = x^2 - 6x + 6$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C

Вспомогательные вопросы:

Выполните следующий алгоритм для каждого из предложенных графиков:

1. Ветви параболы направлены вверх или вниз?

2. Какое значение коэффициента а этому соответствует: $a > 0$ или $a < 0$?

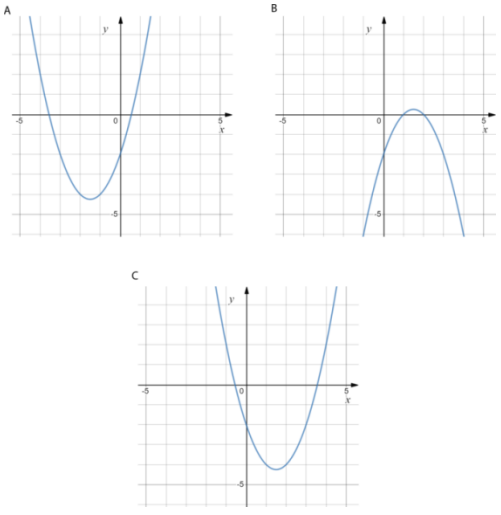
3. В какой полуплоскости график пересекает ось у?

4. Какое значение коэффициента с этому соответствует: $c > 0$ или $c < 0$?

5. Оценив значения коэффициентов, выберите из предложенных функций ту, которая соответствует данному графику.

Задание 6.

Установите соответствие между графиком функции, формулой и координатами вершины параболы



Формулы:

1) $y = x^2 + 3x - 2$ 2) $y = -x^2 + 3x - 2$ 3) $y = x^2 - 3x - 2$

Координаты вершины:

К) $(1{,}5; 0{,}25)$ Л) $(1{,}5; -4{,}25)$ М) $(-1{,}5; -4{,}25)$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер и букву.

A	B	C

Вспомогательные вопросы:

Выполните следующий алгоритм для каждого из предложенных графиков:

1. Ветви параболы направлены вверх или вниз?

2. Какое значение коэффициента а этому соответствует: $a > 0$ или $a < 0$?

3. В какой полуплоскости график пересекает ось у?

4. Какое значение коэффициента с этому соответствует: $c > 0$ или $c < 0$?

5. Оценив значения коэффициентов, выберите из предложенных функций ту, которая соответствует данному графику.

6. Для выбранной функции найдите координаты вершины параболы.

Задание 7.

Определите число корней уравнения:

А) $-x^2 + 4x + 5 = 0$ Б) $2x^2 - 6x + 1 = x - 2$

Вспомогательные вопросы:

1. От чего зависит число корней квадратного уравнения?

2. Каким должен быть дискриминант, чтобы уравнение имело: 2 корня; 1 корень; не имело корней?

Задание 8.

Найдите координаты вершины параболы:

А) $y = 4x^2 + 8x - 1$ Б) $y = -3x^2 - 6x + 2$

Вспомогательные вопросы:

1. По какой формуле находится координата x вершины параболы?

2. Куда нужно подставить полученную координату x, чтобы найти координату y вершины параболы?

3. Пересечение параболы и прямой

Прежде, чем переходить к решению задач, рассмотрим условия количества общих точек у прямой и параболы.

Замечание: если точка принадлежит области определения функции, то она не выколотая.

Если не принадлежит области определения функции, то она выколотая.

	Прямая $y = a$	Прямая $y = kx$	На языке алгебры: уравнение $ax^2 + bx + c = 0$
Не имеют общих точек	Прямая не пересекает параболу ни в одной из точек, либо все точки пересечения выколотые.		Не имеет корней, т.е. $D < 0$.
Имеют 1 общую точку	Прямая проходит через вершину параболы (и она не выколотая), либо пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая.	Прямая является касательной к параболе (и точка касания не является выколотой), либо пересекает параболу в двух точках, одна из которых — выколотая.	Имеет один корень, т.е. $D = 0$.
Имеют 2 общие точки	Прямая пересекает параболу в двух точках, обе из которых не выколотые.		Имеет два корня, т.е. $D > 0$.

4. Задачи с параметром из открытого банка ОГЭ (1-ый тип)

А) пересечение графиков функций

Пример 1. При каком значении p прямая $y = 2x + p$ имеет с параболой $y = x^2 - 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p.

Решение.

Приравняем правые части обеих функций, чтобы найти абсциссы точек пересечения:

$$2x + p = x^2 - 2x,\ x^2 - 4x - p = 0$$

Графики функций будут иметь ровно одну точку пересечения, если получившееся уравнение имеет ровно одно решение. Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда его дискриминант равен нулю.

$$16 + 4p = 0, p = -4$$

Найдём координату x точки пересечения этих функций, подставив параметр p в уравнение:

$$x^2 - 4x + 4 = 0,\ (x-2)^2 = 0,\ x = 2$$

Подставив полученную координату x в любое из уравнений, найдем координату y. Например, подставим x в первое уравнение:

$$y = 2 \cdot 2 - 4 = 0$$

Получаем, что графики данных функций пересекаются в точке с координатами $(2; 0)$ при $p = -4$.

Теперь, зная p, построим графики обеих функций.

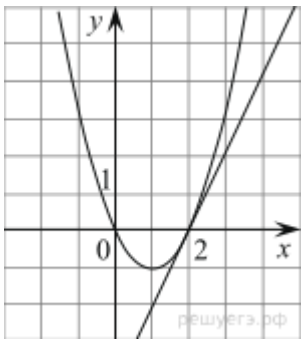
График функции $y = -2x - 4$ — прямая — строится по точкам.

График функции $y = x^2 - 2x$ — парабола с ветвями, направленными вверх.

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1$$

Следовательно, график данной функции получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на $(-1;\ -1)$.



Ответ: $p = -4$, координаты точки $(2; 0)$.

Пример 2. При каких положительных значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2 - 3x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и постройте данные графики в одной системе координат.

Решение.

Приравняем правые части обеих функций, чтобы найти абсциссы точек пересечения:

$$x^2 - 3x = kx - 4,\ x^2 - (3 + k)x + 4 = 0$$

Графики функций, будут иметь ровно одну точку пересечения, если это уравнение имеет ровно одно решение. Квадратное уравнение имеет только одно решение, когда его дискриминант равен нулю.

$$(3 + k)^2 - 16 = 0,\ 3 + k = -4 \text{ и } 3 + k = 4,\ k = -7 \text{ и } k = 1$$

В условии говорится о положительных k, т.е. $k > 0$, поэтому $k = -7$ исключаем.

Найдём координату x точки пересечения этих функций, подставив параметр $k = 1$ в уравнение:

$$x^2 - 4x + 4 = 0,\ (x - 2)^2 = 0,\ x = 2$$

Подставив полученную координату x в любое из уравнений, найдем координату y. Например, подставим x в первое уравнение:

$$y = 2 - 4 = -2$$

Получаем, что графики данных функций пересекаются в точке с координатами $(2; -2)$ при $k = 1$.

Теперь, зная k, построим графики обеих функций.

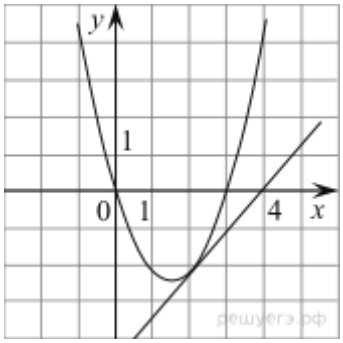
График функции $y = x - 4$ — прямая — строится по точкам.

График функции $y = x^2 - 3x$ — парабола с ветвями, направленными вверх.

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 - 3x = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Следовательно, график функции $y = x^2 - 3x$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на $(1{,}5;\ -2{,}25)$.



Ответ: $k = 1$, координаты точки: $(2;\ -2)$.

Алгоритм решения 1го типа задач с параметром, заданных линейной и квадратичной функциями:

1. Найти абсциссы точек пересечения, для этого приравнять правые части обеих функций.
2. Графики функций будут иметь ровно одну точку пересечения, если это уравнение имеет ровно одно решение. То есть, если дискриминант этого квадратного уравнения будет равен нулю.
3. Определить искомое значение параметра, исключив значения противоречащие условию.
4. Найти x координату точки пересечения этих функций, подставив параметр p в квадратное уравнение. Координата y находится путём подстановки координаты x в любую из функций.
5. Определить вид каждой функции и найти необходимые точки для построения графика.
6. Построить графики обеих функций в одной координатной плоскости

7. Записать ответ.

Задания для самостоятельного закрепления

1. При каком значении p прямая $y = -2x + p$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p .

2. Известно, что графики функций $y = x^2 + p$ и $y = -2x - 2$ имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.

3. При каких отрицательных значениях k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и постройте данные графики в одной системе координат.

Б) расположение вершины параболы относительно оси x

Пример 3. При каких значениях p вершины парабол $y = x^2 - 2px - 1$ и $y = -x^2 + 4px + p$ расположены по разные стороны от оси x?

Решение.

Найдем вершины параболы для каждой из заданных функций.

Координата x вершины параболы находится по формуле $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$.

Координата y вершины параболы находится подстановкой $x_{\text{в}}$ в уравнение параболы.

Для параболы $y = x^2 - 2px - 1$:

$x_{\text{в}} = -\frac{-2p}{2} = p$; $y_{\text{в}} = p^2 - 2p^2 - 1 = -(p^2 + 1)$

Для параболы $y = -x^2 + 4px + p$:

$x_{\text{в}} = -\frac{4p}{-2} = 2p$; $y_{\text{в}} = -4p^2 + 8p^2 + p = 4p^2 + 2$

Вершины парабол находятся по разные стороны от оси абсцисс, если ординаты их вершин имеют разные знаки.

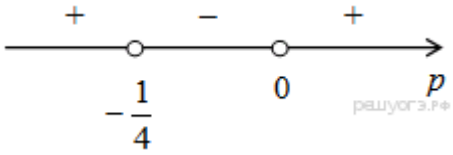
Два множителя имеют разные знаки тогда и только тогда, когда их произведение отрицательно.

Составим и решим неравенство, используя значения ординат вершин парабол:

$$-(p^2+1)(4p^2+p)<0.$$

Разделим неравенство на первый множитель, изменив знак неравенства на противоположный, т.к. выражение $-(p^2+1)$ меньше нуля при любых значениях p.

$$4p^2+p>0,\ 4p(p+\tfrac{1}{4})>0$$



Произведение двух сомножителей больше нуля, если они имеют один и тот же знак. Таким образом:

$$p\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\ \cup(0;\ +\infty)$$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\ \cup(0;\ +\infty)$.

Пример 4. При каких значениях m вершины парабол $y=-x^2-6mx+m$ и $y=x^2-4mx-2$ расположены по одну сторону от оси x?

Решение.

Найдем вершины параболы для каждой из заданных функций.

Координата x вершины параболы находится по формуле $x_{\text{в}}=-\frac{b}{2a}$.

Координата y вершины параболы находится подстановкой $x_{\text{в}}$ в уравнение параболы.

Для параболы $y=-x^2-6mx+m$:

$x_{\text{в}}=-\frac{-6m}{-2}=-3m$; $y_{\text{в}}=\ -9m^2+18m^2+m$

Для параболы $y=x^2-4mx-2$:

$x_{\text{в}}=-\frac{-4m}{2}=2m$; $y_{\text{в}}=\ 4m^2-8m^2-2$

Вершины парабол будут находиться по одну сторону от оси x, если координаты их вершин имеют одинаковые знаки.

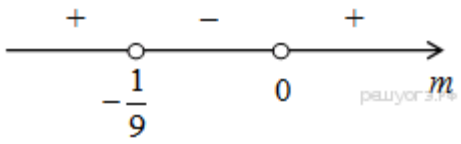
Два сомножителя имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда их произведение положительно.

Составим и решим неравенство, используя значения ординат вершин парабол:

$$(-9m^2+18m^2+m)(4m^2-8m^2-2)>0,\ (9m^2+m)(-4m^2-2)>0$$

Разделим неравенство на второй множитель, изменив знак неравенства на противоположный, т.к. выражение $(-4m^2-2)$ меньше нуля при любых значениях m.

$$9m\left(m+\tfrac{1}{9}\right)<0,\ m\left(m+\tfrac{1}{9}\right)<0$$



Произведение двух сомножителей будет меньше нуля, если сомножители имеют разный знак. Таким образом:

$$-\frac{1}{9}<m<0$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{9};0\right)$.

Алгоритм решения 2го типа задач с параметром, заданных линейной и квадратичной функциями:

1. Найти координаты вершины параболы для каждой из заданных функций.
2. Вершины парабол находятся по разные стороны от оси абсцисс, если ординаты их вершин имеют разные знаки. Вершины парабол будут находиться по одну сторону от оси x, если координаты их вершин имеют одинаковые знаки.
3. Два множителя имеют разные знаки тогда и только тогда, когда их произведение отрицательно.

Два сомножителя имеют одинаковый знак тогда и только тогда, когда их произведение положительно.

4. Составить и решить неравенство. Определить искомое значение параметра.
5. Записать ответ.

Задания для самостоятельного закрепления

4. При каких значениях p вершины парабол $y = -x^2 + 2px + 3$ и $y = x^2 - 6px + p$ расположены по разные стороны от оси x?

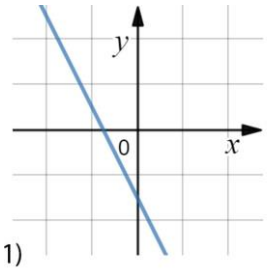
5. При каких значениях m вершины парабол $y = x^2 - 4mx + m$ и $y = -x^2 + 8mx + 4$ расположены по одну сторону от оси x?

6. При каких значениях m вершины парабол $y = -x^2 + 4mx - m$ и $y = x^2 + 2mx - 2$ расположены по одну сторону от оси x?

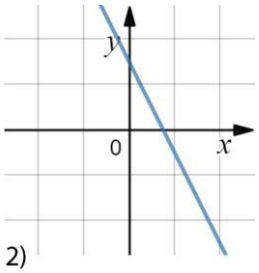
Проверочная работа по итогам 1-го модуля.

Задание 1.

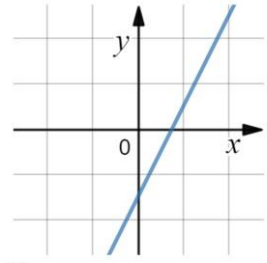
Дана функция $y = kx + b$. Известно, что $b < 0. k < 0$. На каком рисунке изображен график этой функции?



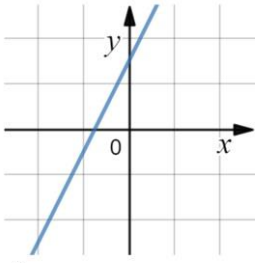
1)



2)



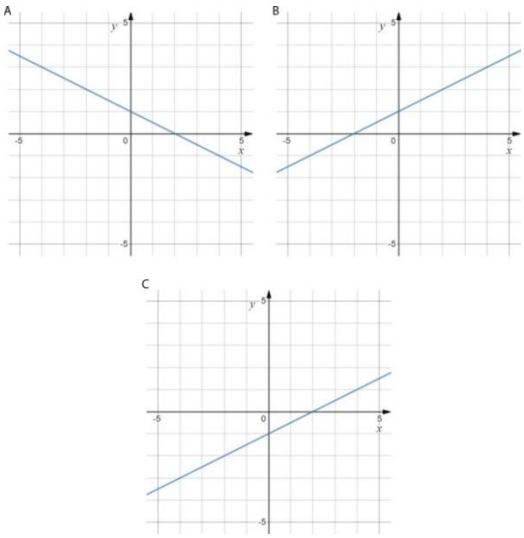
3)



4)

Задание 2.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



1) $y = 1 + 0{,}5x$ 2) $y = 1 - 0{,}5x$ 3) $y = -1 + 0{,}5x$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C

Задание 3.

Выясните, проходит ли график линейной функции $y = 3{,}2x - 5$ через точку:

А) $C\ (7{,}5;\ 4)$ Б) $D\ (2{,}2;\ 2{,}04)$

Задание 4.

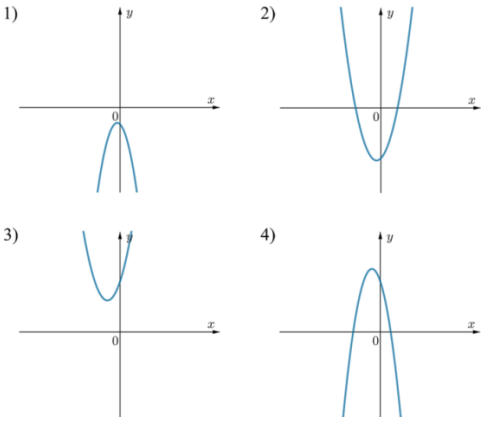
Найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций

А) $y = -x$ и $y = 3x - 4$

Б) $y = 3x + 2$ и $y = -0{,}5x - 5$

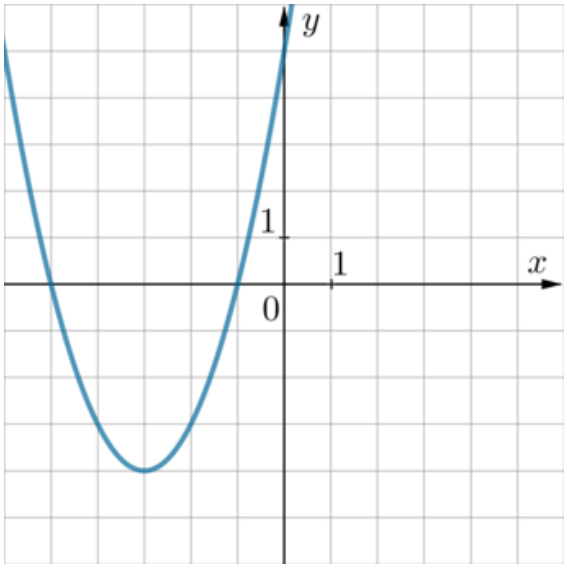
Задание 5.

Дана функция $y = ax^2 + bx + c$. На каком из рисунков изображен график этой функции, если известно, что $a > 0, c > 0$?



Задание 6.

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?

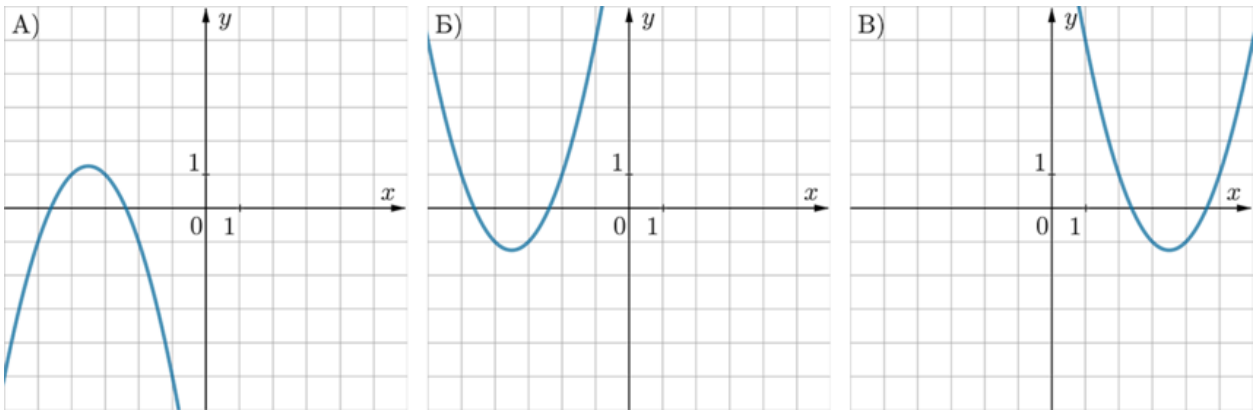


1) $y = -x^2 - 6x - 5$ 2) $y = x^2 + 6x + 5$ 3) $y = x^2 - 6x + 5$

4) $y = -x^2 + 6x - 5$

Задание 7.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



ФОРМУЛЫ:

1) $y = -x^2 - 7x - 11$ 2) $y = x^2 + 7x + 11$ 3) $y = x^2 - 7x + 11$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C

Задание 8.

Найдите координаты вершины параболы:

А) $y = -x^2 + x - 1$ Б) $y = 5x^2 - 10x + 4$

Задание 9.

При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Найдите координаты этой точки и постройте данные графики в одной системе координат

Задание 10.

При каких значениях m вершины парабол $y = x^2 + 4mx + 2m$ и $y = -x^2 + 2mx + 4$ расположены по одну сторону от оси x?

Ответы для самопроверки:

Задание 1- 1

Задание 2- 213

Задание 3- а) нет; б) да

Задание 4- а) 1; б) -2

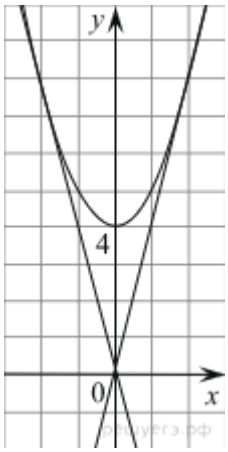
Задание 5- 3

Задание 6- 2

Задание 7- 123

Задание 8- а) (0,5; -0,75); б) (1; -1)

Задание 9- −4; 4.



Задание 10- (0; 0,5)

2.6. Модуль 2. Дробно-рациональные функции

1. Разложение на множители

Задание 1.

Разложите на множители

1) $7-14x$ 2) $36-x^2$ 3) $2x^2-8$ 4) $x^3+3x^2+5x+15$

Вспомогательные вопросы:

1. Есть ли у слагаемых в выражении общий множитель? Если он есть, что с ним можно сделать?

2. Присутствуют ли в выражении формулы сокращенного умножения?

3. Есть ли слагаемые, которые можно сгруппировать и выделить общий множитель?

Задание 2.

Разложите квадратный трехчлен на множители $x^2+3x-4=0$

Вспомогательные вопросы:

1. Воспользуйтесь формулой разложения квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

2. Что из этой формулы нам пока неизвестно и нужно найти?

3. Как мы можем это найти?

Задание 3.

Разложите квадратный трехчлен на множители $x^2+7x-18=0$

Вспомогательные вопросы:

1. Воспользуйтесь формулой разложения квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

2. Что из этой формулы нам пока неизвестно и нужно найти?

3. Как найти корни квадратного трехчлена?

Задание 4.

Квадратный трёхчлен разложен на множители: $x^2+x-27=(x+9)(x-a)$. Найдите a.

Вспомогательные вопросы:

1. Чем в данном разложении является a для квадратного трехчлена?

2. Как найти корни квадратного трехчлена?

Задание 5.

Квадратный трёхчлен разложен на множители: $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - a)$. Найдите a.

Вспомогательные вопросы:

1. Чем в данном разложении является a для квадратного трехчлена?

2. Как найти корни квадратного трехчлена?

2. Алгебраические выражения

Задание 1.

Упростите выражение $\frac{x^2-6x+9}{x-3}$

1) $x - 3$ 2) $\frac{x+3}{x-3}$ 3) 1 4) $x - 2$

Вспомогательные вопросы:

1. Присутствуют ли в выражении формулы сокращенного умножения?

2. Можно ли сократить дробь после разложения ФСУ?

Задание 2.

Упростите выражение $\frac{x+2}{x^2-4}$.

1) $\frac{1}{x-2}$ 2) $x - 2$ 3) $2(x + 2)$ 4) $\frac{2}{x-2}$

Вспомогательные вопросы:

1. Присутствуют ли в выражении формулы сокращенного умножения?

2. Можно ли сократить дробь после разложения ФСУ?

Задание 3.

Упростите выражение $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$

1) $\frac{(x+2)^2}{x}$ 2) $\frac{1}{x}$ 3) $\frac{x-2}{x+2}$ 4) $\frac{1}{x+2}$

Вспомогательные вопросы:

1. Присутствуют ли в выражении формулы сокращенного умножения?

2. Можно ли сократить дробь после разложения ФСУ?

Задание 4.

Упростите выражение $\frac{x^2-25}{2x+10}$

1) $\frac{x-5}{2}$ 2) $\frac{x+5}{2x}$ 3) $\frac{x+5}{2}$ 4) $\frac{x-5}{x+5}$

Вспомогательные вопросы:

1. Присутствуют ли в выражении формулы сокращенного умножения?

2. Можно ли сократить дробь после разложения ФСУ?

Задание 5.

Упростите выражение $\frac{10x}{2x-3} - 5x$

1) $\frac{20x-5x^2}{x-3}$ 2) $\frac{25x-10x^2}{2x-3}$ 3) $3x-3$ 4) $\frac{5x}{2x-3}$

Вспомогательные вопросы:

1. Как из обыкновенной дроби вычесть целое число?

2. Как вычесть дроби с разными знаменателями?

3. Область определения функции

Задание 1.

Найдите область допустимых значений выражения $\frac{18}{x}$:

1) $x \neq 18$ 2) $x \neq 0$ 3) $x -$ любое число 4) $x \neq -18$

Задание 2.

Найдите область допустимых значений выражения $\frac{19}{x+5}$:

1) $x \neq 5$ 2) $x \neq 19$ 3) $x -$ любое число 4) $x \neq -5$

Задание 3.

При каких значениях переменной имеет смысл выражение $\frac{x}{9-x^2}$:

1) $x -$ любое число 2) $x \neq \pm 9$ 3) $x \neq 0$ 4) $x \neq \pm 3$

Задание 4.

Найдите область определения функции $y = \frac{x+4}{x(x-6)}$:

1) $x \neq 0$ 2) $x \neq 6$ $x \neq 0$ и $x \neq 6$ $x \neq \pm 6$

Задание 5.

Найдите область определения функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$:

1) $x \neq -2$ 2) $x \neq -0{,}5$ 3) $x \neq 0$ 4) $x \neq 0$ и $x \neq -0{,}5$

Задание 6.

Найдите область определения функции $y = \frac{x^2-x-2}{x^2+5x+4}$:

1) $x \neq 1$ и $x \neq 4$ 2) $x \neq -1$ и $x \neq 2$ $x \neq -1$ и $x \neq -4$ $x \neq 0$

Вспомогательные вопросы:

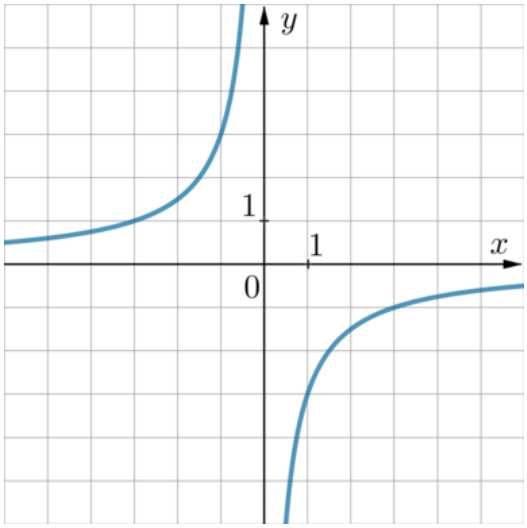
1. Если функция задана дробно-рациональным выражением, какое условие накладывается на знаменатель дроби?

2. Какие значения в таком случае не может принимать переменная x?

4. Функция обратной пропорциональности

Задание 1.

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = \frac{3}{x}$ 2) $y = -\frac{1}{3x}$ 3) $y = \frac{1}{3x}$ 4) $y = -\frac{3}{x}$

Вспомогательные вопросы:

1. В каких четвертях находится график функции?

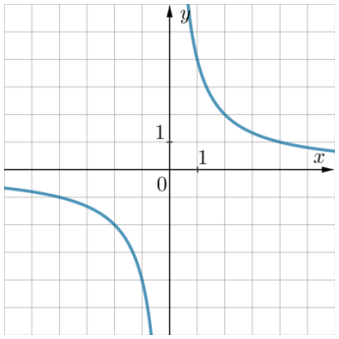
2. Какое значение k этому соответствует: $k > 0$ или $k < 0$?

3. Выберите на графике любую точку с целыми координатами, через которую проходит данная гипербола.

4. Какой из предложенных функций удовлетворяют координаты выбранной точки?

Задание 2.

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1) $y = \frac{4}{x}$ 2) $y = -\frac{1}{4x}$ 3) $y = -\frac{4}{x}$ 4) $y = \frac{1}{4x}$

Вспомогательные вопросы:

1. В каких четвертях находится график функции?

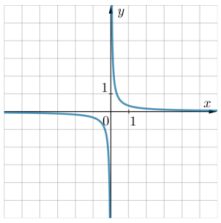
2. Какое значение k этому соответствует: $k > 0$ или $k < 0$?

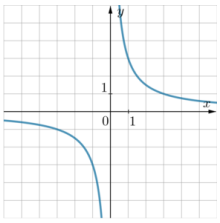
3. Выберите на графике любую точку с целыми координатами, через которую проходит данная гипербола.

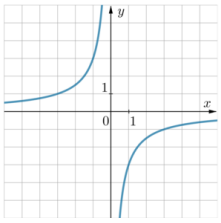
4. Какой из предложенных функций удовлетворяют координаты выбранной точки?

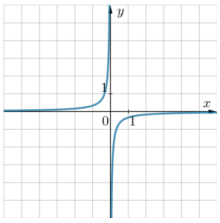
Задание 3.

На одном из рисунков изображен график функции $y = \frac{3}{x}$. Укажите номер этого рисунка.

1)


2)


3)


4)


Вспомогательные вопросы:

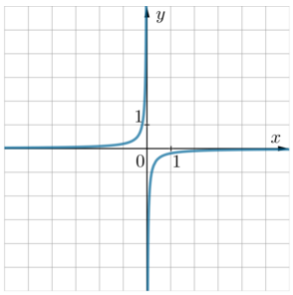
1. Если в уравнении гиперболы коэффициент $k > 0$, то она находится в 1 и 3 четвертях или во 2 и 4?

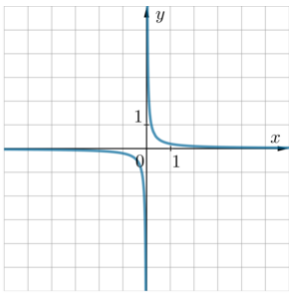
2. Воспользовавшись уравнением, которым задана функция, найдите точку, через которую должен проходить график данной функции.

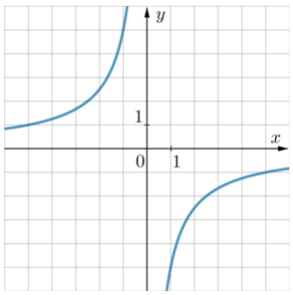
3. На каком из графиков гипербола проходит через найденную точку?

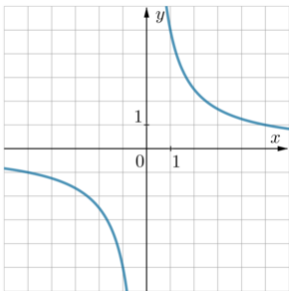
Задание 4.

На одном из рисунков изображен график функции $y = -\frac{5}{x}$. Укажите номер этого рисунка.

1) 

2) 

3) 

4) 

Вспомогательные вопросы:

1. Если в уравнении гиперболы коэффициент $k > 0$, то она находится в 1 и 3 четвертях или во 2 и 4?

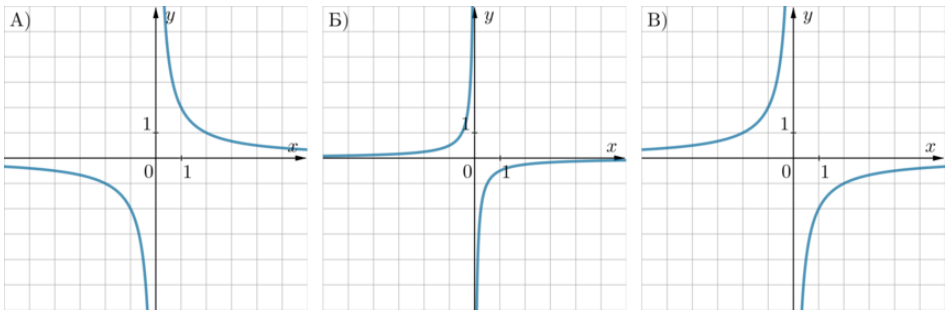
2. Воспользовавшись уравнением, которым задана функция, найдите точку, через которую должен проходить график данной функции.

3. На каком из графиков гипербола проходит через найденную точку?

Задание 5.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ:



ФОРМУЛЫ:

1) $y = -\frac{2}{x}$ 2) $y = \frac{2}{x}$ 3) $y = -\frac{1}{2x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C

Вспомогательные вопросы:

Проделайте следующий алгоритм для каждого из предложенных графиков:

1. В каких четвертях находится график функции?

2. Какое значение k этому соответствует: $k > 0$ или $k < 0$?

3. Выберите на графике любую точку с целыми координатами, через которую проходит данная гипербола.

4. Какой из предложенных функций удовлетворяют координаты выбранной точки?

5. Задачи с параметром из открытого банка ОГЭ (2-ой тип)

А) график парабола

Пример 1. Постройте график функции $y = \frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}$. И определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

ОДЗ: $x + 1 \neq 0,\ x \neq -1$

Разложим квадратный трехчлен на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Для этого найдем корни квадратного уравнения $x^2 + 3x + 2 = 0$. Они равны: $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$.

Тогда получаем: $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$.

Упростим выражение:

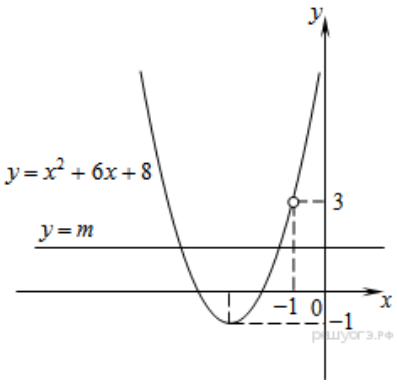
$$y=\frac{(x+4)(x^2+3x+2)}{x+1}=\frac{(x+4)(x+1)(x+2)}{x+1}=x^2+6x+8\,,x\neq -1$$

График исходной функции сводится к графику параболы $y=x^2+6x+8$ с ветвями, направленными вверх, и выколотой точкой $(-1;3)$

Выделим полный квадрат:

$$y=x^2+6x+8=x^2+6x+8+1-1=(x+3)^2-1$$

Следовательно, график функции получается из графика функции $y=x^2$ сдвигом на $(-3;\ -1)$.



По графику можно увидеть, что прямая $y=m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m=-1$ и $m=3$.

Ответ: $-1;3$.

Пример 2. Постройте график функции $y=\frac{(x^2+2{,}25)(x-1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

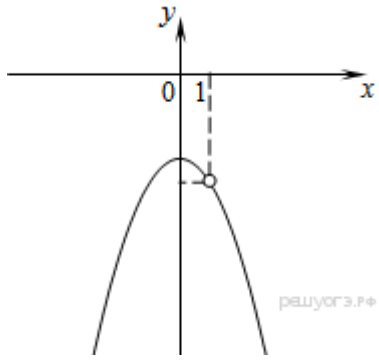
ОДЗ: $1-x\neq 0,\quad -x\neq -1,\ x\neq 1$

Упростим выражение:

$$y=\frac{(x^2+2{,}25)(x-1)}{1-x}=-\frac{(x^2+2{,}25)(1-x)}{1-x}=-x^2-2{,}25\ ,\qquad x\neq 1$$

График исходной функции сводится к графику параболы $y=-x^2-2{,}25$ с ветвями, направленными вниз, и выколотой точкой $(1;\ -3{,}25)$

График функции $y = -x^2 - 2{,}25$ получается из графика функции $y = -x^2$ сдвигом на $(0;\ -2{,}25)$



Чтобы прямая $y = kx$ имела с построенным графиком одну общую точку, нужно чтобы:

прямая $y = kx$ либо была касательной к графику $y = -x^2 - 2{,}25$ (и точка касания не равна 1), либо пересекала график $y = -x^2 - 2{,}25$ в точке $x = 1$ и в какой-то второй точке.

Прямая будет являться касательной, если дискриминант квадратного уравнения $-x^2 - 2{,}25 = kx$ равен нулю.

$k^2 - 9 = 0,\ k = \pm 3$

Если $k = -3$, точка касания $x = 1{,}5$, а если $k = 3$, точка касания $x = -1{,}5$.

Рассмотрим второй случай, подставив $x = 1$ в уравнение $-x^2 - 2{,}25 = kx$. Получим $k = -3{,}25$. При этом дискриминант этого уравнения будет больше нуля, значит, еще одно решение точно есть, т.е. есть еще одна точка пересечения.

Ответ: $-3{,}25;\ -3{,}3$.

Алгоритм решения задач с параметром, заданных дробно-рациональной функцией:

1. Записать ОДЗ.
2. Упростить выражение, которым задана функция.
3. Построить график функции, учитывая ОДЗ.

4. Построить прямую $y = c$, параллельную оси абсцисс/ прямую $y = kx$, так, чтобы она имела с графиком параболы заданное в условии количество общих точек.
5. Определить искомое значение параметра.
6. Записать ответ.

Задания для самостоятельного закрепления

1. Постройте график функции $y = \frac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

2. Постройте график функции $y = \frac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

3. Постройте график функции $y = -2 - \frac{x^4-x^3}{x^2-x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Б) График гипербола

Пример 3. Постройте график функции $y = 3 - \frac{x+5}{x^2+5x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

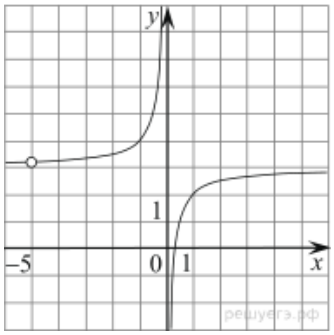
ОДЗ: $x^2 + 5x \neq 0,\ x(x+5) \neq 0,\ x \neq 0$ и $x \neq -5$

Упростим выражение:

$3 - \frac{x+5}{x^2+5x} = 3 - \frac{x+5}{x(x+5)} = 3 - \frac{1}{x}$, (при $x \neq -5$ и $x \neq 0$)

График исходной функции сводится к графику функции $y = 3 - \frac{1}{x}$ - гипербола, расположенная во 2 и 4 четвертях, с выколотой точкой $(-5; 2{,}8)$

График данной функции получается из графика функции $y = -\frac{1}{x}$ сдвигом на $(0; 3)$.



Прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки при $m = 3$ и $m = \frac{16}{5}$

Ответ: $3; \frac{16}{5}$.

Пример 4. Постройте график функции $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

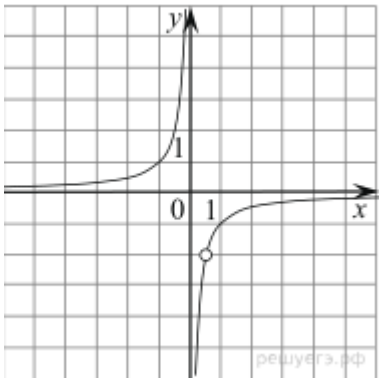
Решение.

ОДЗ: $2x^2 - x \neq 0,\ x(2x-1) \neq 0, x \neq 0$ и $x \neq 0{,}5$

Упростим выражение:

$y = \frac{1-2x}{2x^2-x} = -\frac{1-2x}{x(1-2x)} = -\frac{1}{x}$, (при $x \neq 0$ и $x \neq 0{,}5$)

График исходной функции сводится к графику функции $y = -\frac{1}{x}$ - гипербола, расположенная во 2 и 4 четвертях, с выколотой точкой $(0{,}5;\ -2)$



Прямая $y = kx$ будет иметь с графиком функции ровно одну общую точку, если будет проходить через выколотую точку $(0{,}5;\ -2)$. Подставим координаты этой точки в уравнение прямой и найдём коэффициент k .

$-2 = 0{,}5k,\ k = -4$

Ответ: -4.

Алгоритм решения задач с параметром, заданных дробно-рациональной функцией:

1. Записать ОДЗ.
2. Упростить выражение, которым задана функция.
3. Построить график функции, учитывая ОДЗ.
4. Построить прямую $y = c$, параллельную оси абсцисс/ прямую $y = kx$, так, чтобы она имела с графиком гиперболы заданное в условии количество общих точек.
5. Определить искомое значение параметра.
6. Записать ответ.

Задания для самостоятельного закрепления

1. Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

2. Постройте график функции $y = \frac{x+2}{x^2+2x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком одну общую точку.

3. Постройте график функции $y = \frac{x-2}{2x-x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Проверочная работа по итогам 2-го модуля

Задание 1.

Разложите квадратный трехчлен на множители $x^2 - 2x - 8 = 0$

Задание 2.

Квадратный трёхчлен разложен на множители:

$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - a)$. Найдите a.

Задание 3.

Упростите выражение $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$

1) $x - 1$ 2) $\frac{x-1}{x+1}$ 3) 2 4) $x + 1$

Задание 4.

Упростите выражение $\frac{3x-15}{x^2-25}$:

1) $\frac{3}{x-5}$ 2) $3(x+5)$ 3) $\frac{3}{5}$ 4) $\frac{3}{x+5}$

Задание 5.

Найдите область определения функции $y=\frac{x^2}{(x-3)(x+5)}$:

1) $x \neq 0$ 2) $x \neq 3$ 3) $x \neq 3$ и $x \neq -5$ 4) $x \neq -3$ и $x \neq 5$

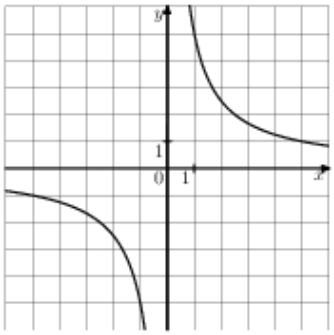
Задание 6.

Найдите область определения функции $y=\frac{x-6}{x^2-4x-12}$:

1) $x \neq 6$ 2) $x \neq 0$ 3) $x \neq 6$ и $x \neq -2$ 4) $x \neq -2$

Задание 7.

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?

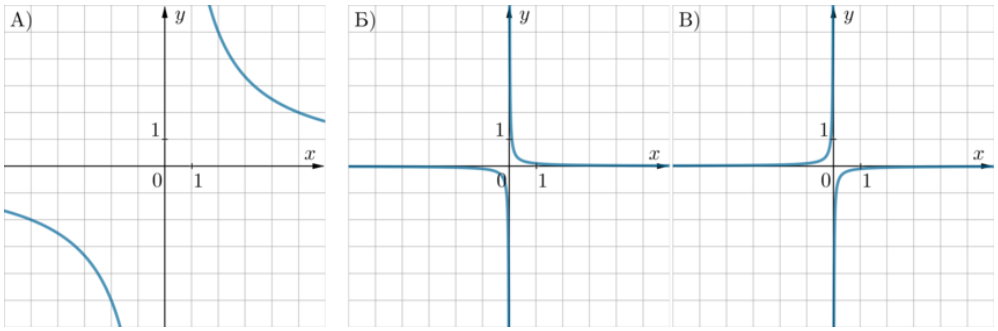


1) $y=-\frac{5}{x}$ 2) $y=-\frac{1}{5x}$ 3) $y=\frac{5}{x}$ 4) $y=\frac{1}{5x}$

Задание 8.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ:



ФОРМУЛЫ:

1) $y = \frac{1}{10x}$ 2) $y = -\frac{1}{10x}$ 3) $y = \frac{10}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

A	B	C

Задание 9.

Постройте график функции $y = \frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x-3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Задание 10.

Постройте график функции $y = 4 - \frac{x+1}{x^2+x}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Ответы для самопроверки:

Задание 1- $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

Задание 2- 1

Задание 3- 1

Задание 4- 4

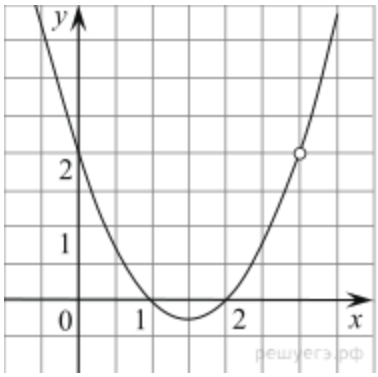
Задание 5- 3

Задание 6- 3

Задание 7- 3

Задание 8- 312

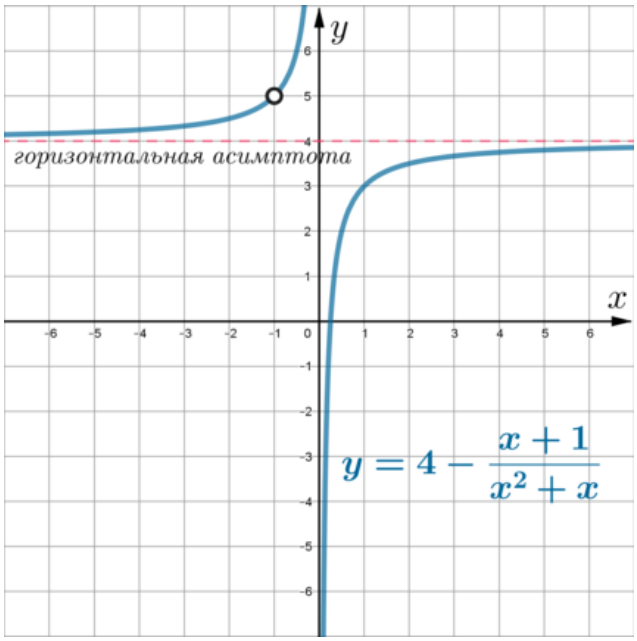
Задание 9



Прямая $y = m$ имеет с графиком одну общую точку, если $y = 2$ или $y = -0{,}25$

Ответ: -0,25; 2

Задание 10



Прямая $y = m$ не имеет с графиком у общих точек, когда либо совпадает с горизонтальной асимптотой, либо проходит через точку $(-1;5)$. Следовательно, это либо $y = 4$, либо $y = 5$.

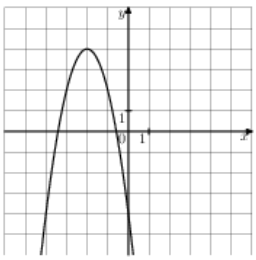
Ответ: 4; 5

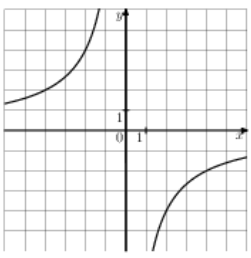
2.7. Модуль 3. Кусочно-заданные функции

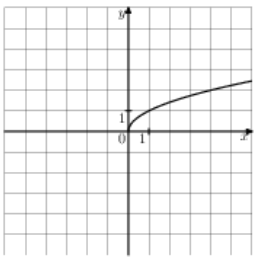
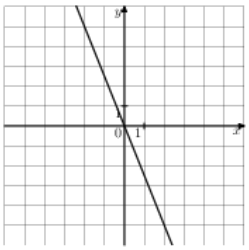
1. Кусочно-заданная функция

Задание 1.

На одном из рисунков изображена гипербола. Укажите номер этого рисунка.

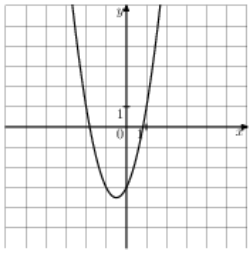
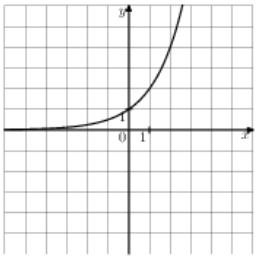
1) 

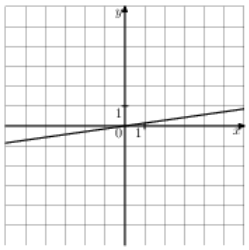
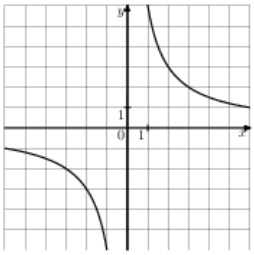
2) 

3)  4) 

Задание 2.

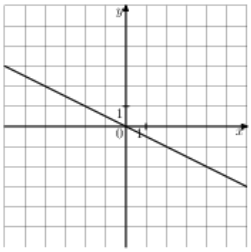
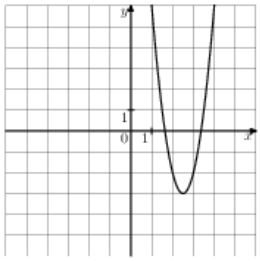
На одном из рисунков изображена парабола. Укажите номер этого рисунка.

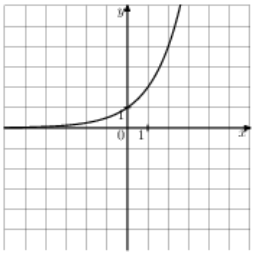
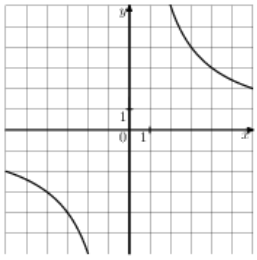
1)  2) 

3)  4) 

Задание 3.

На одном из рисунков изображен график функции $y = \frac{12}{x}$. Укажите номер этого рисунка.

1)  2) 

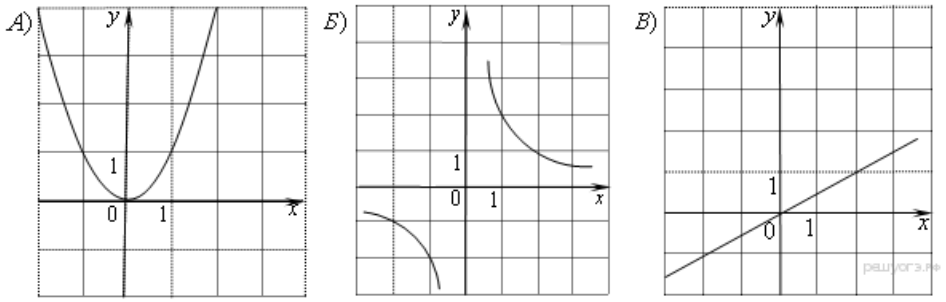
3)  4) 

Вспомогательные вопросы:

1. Что является графиком функции обратной пропорциональности?

Задание 4.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



1) $y = x^2$ 2) $y = \frac{x}{2}$ 3) $y = \sqrt{x}$ 4) $y = \frac{2}{x}$

Вспомогательные вопросы:

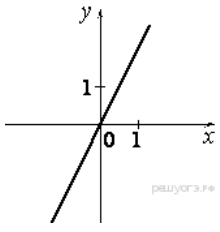
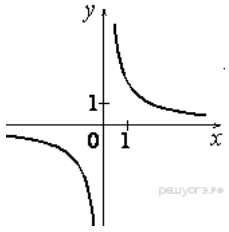
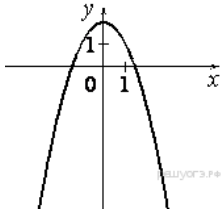
1. Графиком какой функции является парабола?

2. Графиком какой функции является гипербола?

3. Графиком какой функции является прямая?

Задание 5.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

А)	Б)	В)
		

1) $y = \frac{2}{x}$ 2) $y = x^2 - 2$ 3) $y = 2x$ 4) $y = 2 - x^2$

Вспомогательные вопросы:

1. Что является графиком функции обратной пропорциональности?

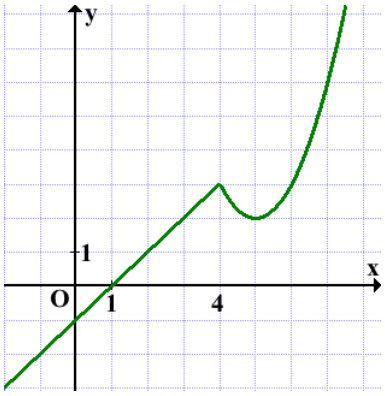
2. Что является графиком квадратичной функции с коэффициентом $a > 0$?

3. Что является графиком линейной функции?

4. Что является графиком квадратичной функции с коэффициентом $a < 0$?

Задание 6.

Из каких функций состоят кусочно-заданные функции, изображенные на графике? В ответе укажите количество промежутков и название функции на каждом из них



Вспомогательные вопросы:

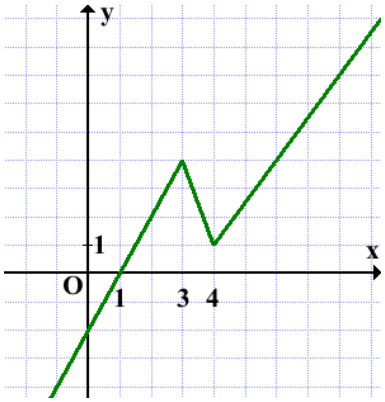
1. Сколько граничных точек на графике, где меняется формула, которой задана функция?

2. На сколько промежутков эти точки поделили координатную плоскость?

3. График какой функции представлен на первом промежутке? На втором?

Задание 7.

Из каких функций состоят кусочно-заданные функции, изображенные на графике? В ответе укажите количество промежутков и название функции на каждом из них



Вспомогательные вопросы:

1. Сколько граничных точек на графике, где меняется формула, которой задана функция?

2. На сколько промежутков эти точки поделили координатную плоскость?

3. График какой функции представлен на первом промежутке? На втором? На третьем?

Задание 8.

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -3x, \text{ если } -10 \le x \le 0 \\ -\frac{1}{3}x^2, \text{ если } 0 < x \le 6 \end{cases}$.

Найти $f(6)$.

Вспомогательные вопросы:

1. Какому из заданных промежутков принадлежит $x = 6$?

2. В какую формулу нужно подставить $x = 6$, чтобы найти $f(6)$?

Задание 9.

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } 0 < x < 1 \\ 2x + 3, \text{ если } x \ge 1 \end{cases}$.

Найти $f(0{,}5)$.

Вспомогательные вопросы:

1. Какому из заданных промежутков принадлежит $x = 0{,}5$?

2. В какую формулу нужно подставить $x = 0{,}5$, чтобы найти $f(0{,}5)$?

2. Задачи с параметром из открытого банка ОГЭ (3-ий тип)

Пример 1. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, & \text{если } x \ge 1 \\ x + 1, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

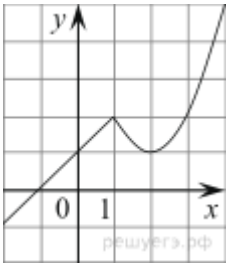
Построим график функции $y = x^2 - 4x + 5$ – парабола с ветвями, направленными вверх (при $x \ge 1$)

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$$

График функции $y = x^2 - 4x + 5$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на $(2; 1)$.

Построим график функции $y = x + 1$–прямая, стоится по точкам (при $x < 1$)



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершину параболы или через точку $(1; 2)$. Получаем, что $m = 1$ или $m = 2$.

Ответ: $1; 2$.

Пример 2. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x^2, |x| \le 1, \\ -\dfrac{1}{x}, \ |x| > 1. \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ будет иметь с графиком единственную общую точку.

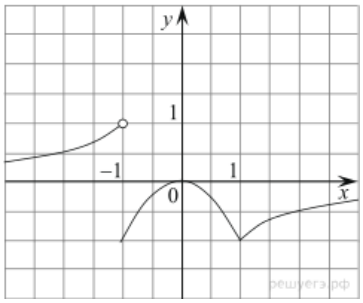
Решение.

Раскроем модуль неравенства $|x| \le 1$. Получим $-1 \le x \le 1$).

Построим график функции $y = -x^2$ – парабола с ветвями, направленными вниз (при $-1 \le x \le 1$).

Раскроем модуль неравенства $|x| > 1$. Получим $x < 1$ и $x > 1$)

Построим график функции $y = -\frac{1}{x}$ – гипербола, расположенная во 2 и 4 четвертях (при $x < 1$ и $x > 1$)



Прямая $y = c$ будет иметь с графиком функции единственную точку пересечения, если будет пересекать график только с ветвью гиперболы, расположенной во 2 четверти, т.е. при c, принадлежащем множеству $[0; 1)$

Ответ: $[0; 1)$.

Алгоритм решения задач с параметром, заданных кусочно-заданной функцией:

1. Определить вид функции на каждом промежутке и найти необходимые точки для построения графика.
2. Построить график функции для каждого промежутка на одной координатной плоскости.
3. Построить в той же координатной плоскости прямую $y = c$, параллельную оси абсцисс так, чтобы она имела с графиком функции заданное в условии количество общих точек.
4. Определить искомое значение параметра.
5. Записать ответ.

Задания для самостоятельного закрепления

1. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \le 1, \\ -\dfrac{1}{x}, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях параметра c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

2. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x < 0, \\ -1{,}5x + 1, & \text{если } 0 \le x < 2, \\ x - 4, & \text{если } x \ge 2 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях прямая $y = c$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -\dfrac{5}{x}, & \text{если } x \le -1, \\ x^2 - 4x, & \text{если } x > -1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ будет пересекать построенный график в трёх точках.

4. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x^2 + 6x - 3, & \text{если } x \ge 2, \\ -x + 7, & \text{если } x < 2 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

5. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, & \text{если } x \ge -4, \\ -\dfrac{16}{x}, & \text{если } x < -4 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

6. Постройте график функции

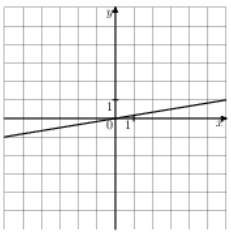
$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 13, & \text{если } x \ge 2, \\ 2{,}5x, & \text{если } x < 2 \end{cases}$$

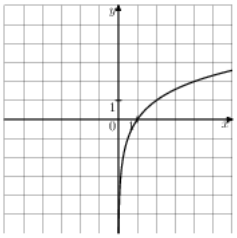
и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

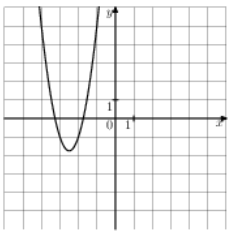
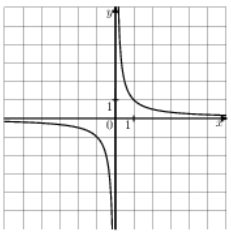
Проверочная работа по итогам 3-го модуля.

Задание 1.

На одном из рисунков изображен график функции $y = 3x^2 + 15x + 17$. Укажите номер этого рисунка.

1) 

2) 

3)  4) 

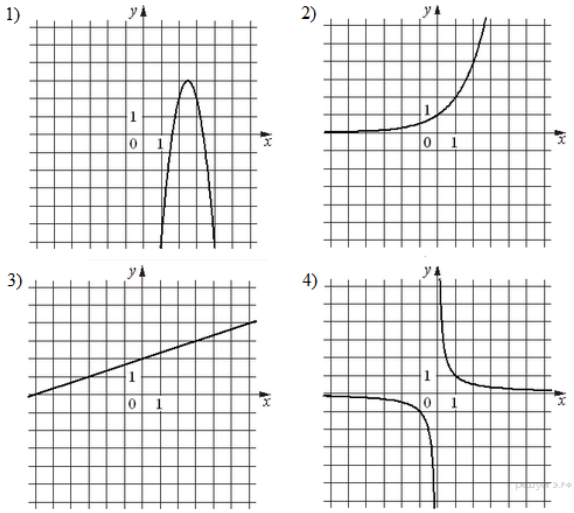
Задание 2.

Установите соответствие между функциями и их графиками.

Функции

А) $y = \frac{1}{3}x + 2$ Б) $y = -4x^2 + 20x - 22$ В) $y = \frac{1}{x}$

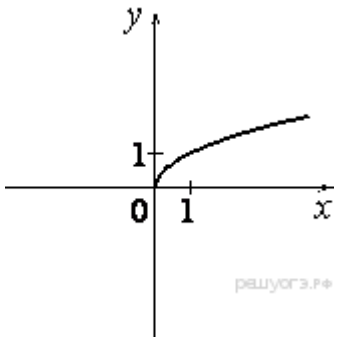
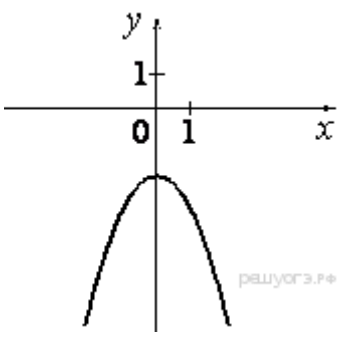
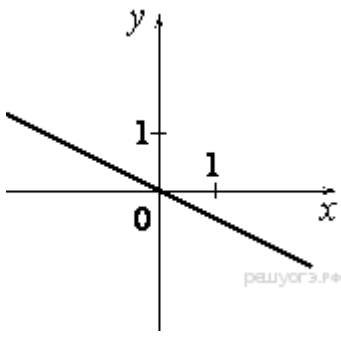
Графики



Задание 3.

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

Графики

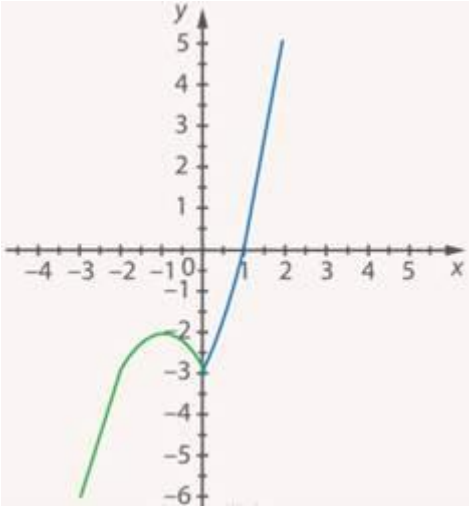
А)	Б)	В)
		

Формулы

1) $y = -\frac{1}{2}x$ 2) $y = -\frac{1}{x}$ 3) $y = -x^2 - 2$ 4) $y = \sqrt{x}$

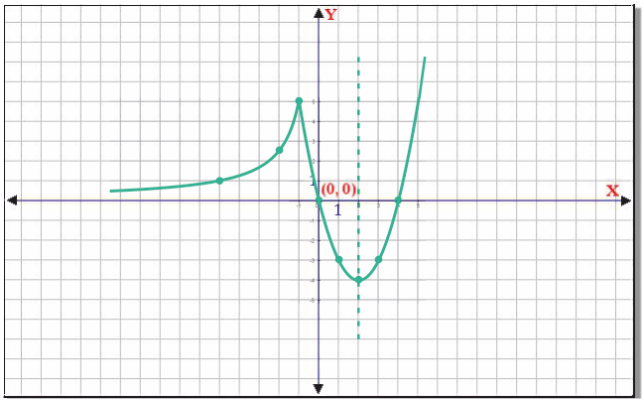
Задание 4.

Из каких функций состоят кусочно-заданные функции, изображенные на графике? В ответе укажите количество промежутков и название функции на каждом из них



Задание 5.

Из каких функций состоят кусочно-заданные функции, изображенные на графике? В ответе укажите количество промежутков и название функции на каждом из них



Задание 6.

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x}, & \text{если } x \le -1 \\ x^2, & \text{если } -1 < x \le 1 \end{cases}$.

Найти $f(-0{,}2)$.

Задание 7.

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } -3 \le x < 2 \\ -x + 2, \text{ если } 2 \le x \le 6 \end{cases}$.

Найти $f(2)$.

Задание 8.

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} \dfrac{5}{x}, & \text{если } x \le -1, \\ -x^2 + 4x, & \text{если } x > -1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ будет пересекать построенный график в трёх точках.

Задание 9.

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 10x + 27, & \text{если } x \ge 4, \\ x - 1, & \text{если } x < 4 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Задание 10.

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x - 0{,}5, & \text{если } x < -2, \\ -2x - 6{,}5, & \text{если } -2 \le x \le -1, \\ x - 3{,}5, & \text{если } x > -1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответы для самопроверки:

Задание 1- 3

Задание 2- 314

Задание 3- 431

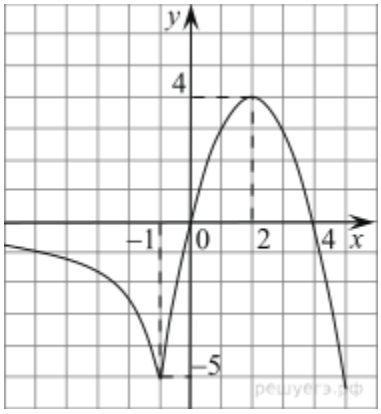
Задание 4- 2 промежутка; на 1-ом промежутке - парабола с ветвями, направленными вверх; на 2-ом промежутке- парабола с ветвями, направленными вниз;

Задание 5- 2 промежутка; на 1-ом промежутке - гипербола, расположенная во 2 и 4 четвертях; на 2-ом промежутке- парабола с ветвями, направленными вверх;

Задание 6- 0,04

Задание 7- 0

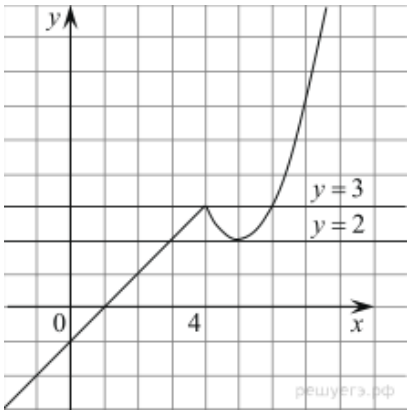
Задание 8-



Прямая $y = c$ будет иметь с графиком функции ровно три точки пересечения при c, принадлежащем множеству: $(-5; 0)$.

Ответ: $(-5; 0)$.

Задание 9.



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = 2$ и $m = 3$.

Ответ: 2; 3.

Задание 10.

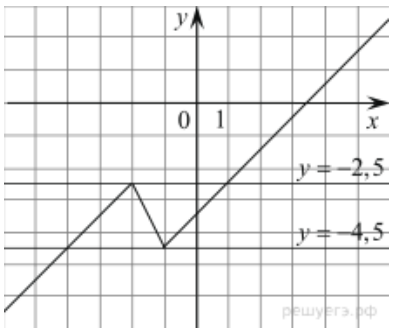


График имеет ровно две общих точки с горизонтальными прямыми $y = -2{,}5$ и $y = -4{,}5$.

Ответ: -4,5; −2,5.

2.8. Модуль 4. Функции, содержащие модуль

1. Модуль числа

Задание 1.

Из данных чисел выберите то, которое имеет наибольший модуль:

1) $4{,}349;\ -4{,}1;\ -4{,}4;\ 4{,}1;$ 2) $-\frac{23}{56};\ -\frac{5}{14};\ \frac{13}{28};\ \frac{3}{7};$

Вспомогательные вопросы:

1. Что является модулем положительного числа? Что является модулем отрицательного числа?

Задание 2.

Из данных чисел выберите то, которое имеет наименьший модуль:

1) $3{,}7;\ -3{,}156;\ -3{,}48;$ 2) $\frac{17}{5};\ -\frac{16}{7};\ \frac{35}{9};\ -\frac{9}{5};$

Вспомогательные вопросы:

1. Что является модулем положительного числа? Что является модулем отрицательного числа?

Задание 3.

Найдите значение выражения $|x + 1| - 3$ при $x = 1{,}1$

Вспомогательные вопросы:

1. Если после подстановки выражение под модулем становится положительным, то чем равен модуль этого выражения?

2. Чему равен модуль отрицательного числа?

Задание 4.

Найдите значение выражения $5x + |1 + 8x|$ при $x = -1{,}4$

Вспомогательные вопросы:

1. Если после подстановки выражение под модулем становится отрицательным, то чем равен модуль этого выражения?

Задание 5.

Найдите значение выражения $\left|3x - 2|4 + x|\right|$ при $x = -5$

Вспомогательные вопросы:

1. Какой из модулей будет раскрываться первым: внутренний или внешний?
2. Если после подстановки выражение под модулем становится отрицательным, то чем равен модуль этого выражения?

Задание 6.

Раскройте модуль функции $y = |x|$

Задание 7.

Раскройте модуль функции $y = |x - 2| + 1$

Задание 8.

Раскройте модуль функции $y = -|x - 5| + 2$

Задание 9.

Раскройте модуль функции $y = x|x - 2| - 3$

Задание 10.

Раскройте модуль функции $y = 2x|3 - x| - 2x - 4$

Вспомогательные вопросы (для заданий 6-10):

1. По какому правилу раскрывается модуль? $\left(|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}\right)$
2. Как найти граничную точку, в которой произойдет смена формулы, задающей функцию, если под модулем стоит выражение, содержащее переменную?

2. Задачи с параметром из открытого банка ОГЭ (4-ый и 5-ый тип)

А) Линейные и квадратичные функции с модулем

Пример 1. Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| - x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком три общие точки.

Решение.

Раскроем модуль:

$$y = x^2 - 3|x| - x = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 0, \\ x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases}$$

1. Построим график функции $y = x^2 - 4x$ – парабола с ветвями, направленными вверх (при $x \geq 0$)

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 4$$

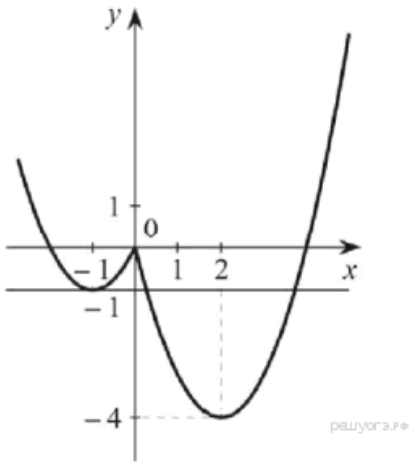
График функции $y = x^2 - 4x$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на $(2; -4)$; точки пересечения с осями координат: $(0; 0), (4; 0)$.

2. Построим график функции $y = x^2 + 2x -$ парабола с ветвями, направленными вверх (при $x < 0$).

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1$$

График функции $y = x^2 + 2x$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на $(-1; -1)$; точки пересечения с осями координат: $(0; 0), (-2; 0)$.



Прямая $y = c$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $c = 0$ и при $c = -1$.

Ответ: $c = 0$ и $c = -1$.

Пример 2. Постройте график функции $y = x^2 - 5x + 10 - 3|x - 2|$ и найдите все значения a, при которых он имеет ровно три общие точки с прямой $y = a + 3$.

Решение.

Раскроем модуль:

$$y = x^2 - 5x + 10 - 3|x - 2| =$$

$$= \begin{cases} x^2 - 5x + 10 - 3x + 6, & x < 2, \\ x^2 - 5x + 10 - 6 + 3x, & x \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, & x < 2, \\ x^2 - 8x + 16, & x \geq 2 \end{cases}$$

1. Построим график функции $y = x^2 - 2x + 4 -$ парабола с ветвями, направленными вверх (при $x < 2$)

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x - 1)^2 + 3$$

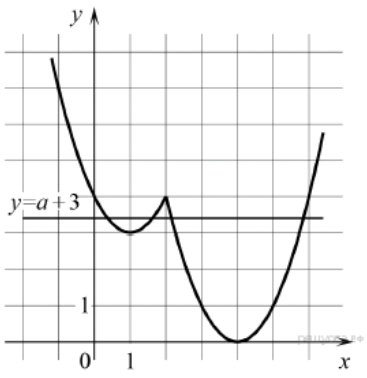
График функции $y = x^2 - 2x + 4 -$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на $(1; -3)$;

2. Построим график функции $y = x^2 - 8x + 16$ парабола с ветвями, направленными вверх (при $x \geq 2$)

Выделим полный квадрат:

$$y = x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

График функции $y = x^2 - 8x + 16$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом на $(4; 0)$;



Прямая $y = a + 3$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ: 0; 1.

Пример 3. Постройте график функции $y = |x - 3| - |x + 3|$ и найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

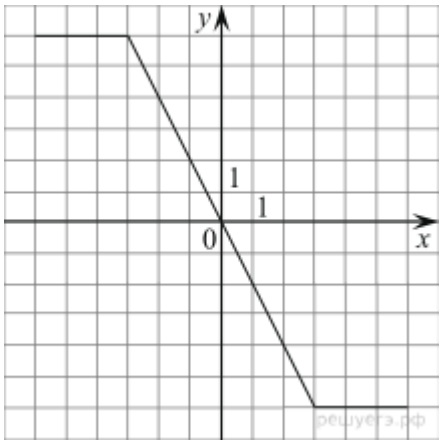
Решение.

Раскроем модули:

$$y = |x - 3| - |x + 3| =$$

$$= \begin{cases} x - 3 - x - 3, & x \geq 3, \\ 3 - x - x - 3, & -3 < x < 3, \\ 3 - x + x + 3, & x \leq -3. \end{cases} = \begin{cases} -6, & x \geq 3, \\ -2x, & -3 < x < 3, \\ 6, & x \leq -3. \end{cases}$$

1. Построим график функции $y = -6$ – прямая, параллельная оси y (при $x \geq 3$);
2. Построим график функции $y = -2x$ – прямая, проходящая через начало координат, строится по точкам (при $-3 < x < 3$);
3. Построим график функции $y = 6$ – прямая, параллельная оси y (при $x \leq -3$);



Прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку при $k \in (-\infty;\ -2) \cup\ [0;\ +\infty)$.

Ответ: $k \in (-\infty;\ -2) \cup\ [0;\ +\infty)$.

Алгоритм решения задач с параметром, заданных линейной и квадратичной функциями, содержащими модуль:

1. Раскрыть модуль и представить в виде кусочно-заданной функции.
2. Определить вид функции на каждом промежутке и найти необходимые точки для построения графика.
3. Построить график функции для каждого промежутка на одной координатной плоскости.
4. Построить в той же координатной плоскости прямую $y = c$, параллельную оси абсцисс так, чтобы она имела с графиком функции заданное в условии количество общих точек.
5. Определить искомое значение параметра.
6. Записать ответ.

Задания для самостоятельного закрепления

1. Постройте график функции $y = x + 3|x| - x^2$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки.

2. Постройте график функции $y = |x|(x + 1) - 6x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3. Постройте график функции $y = |x|x + |x| - 6x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4. Постройте график функции $y = 4|x + 6| - x^2 - 11x - 30$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

5. Постройте график функции $y = x^2 - 8x - 4|x - 3| + 15$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

6. Постройте график функции $y = |x - 2| - |x + 1| + x - 2$ и найдите значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с ним ровно две общие точки.

Б) Дробно-рациональные функции с модулем

Пример 4. Постройте график функции $y=\frac{|x|-4}{x^2-4|x|}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не будет иметь с построенным графиком ни одной общей точки.

Решение.

ОДЗ: $x^2-4|x|\neq 0,\ |x|^2-4|x|\neq 0,\ |x|(|x|-4)\neq 0,$

$$|x|\neq 0 \text{ и } |x|-4\neq 0, \qquad x\neq 0, x\neq 4, x\neq -4$$

Упростить выражение:

$\frac{|x|-4}{x^2-4|x|}=\frac{|x|-4}{|x|(|x|-4)}=\frac{1}{|x|}$, при $x\neq 0, x\neq 4, x\neq -4$

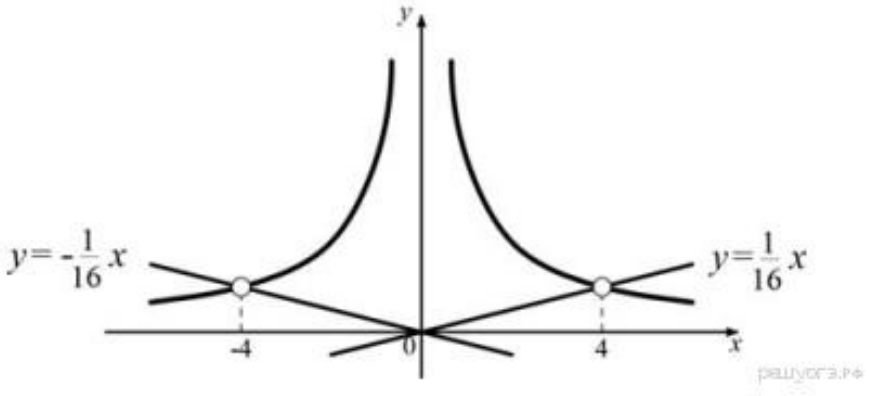
Построение графика заданной функции сводится к построению графика функции $y=\frac{1}{|x|}$.

Раскроем модуль:

$$y=\frac{1}{|x|}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{если } x>0, x\neq 4,\\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x<0,\ x\neq 4\end{cases}$$

1. При $x>0$ построим график функции $y=\frac{1}{x}$ – ветвь гиперболы, расположенная в 1 четверти с выколотой точкой $\left(4;\frac{1}{4}\right)$.

2. При $x<0$ построим график функции $y=\frac{1}{x}$ – ветвь гиперболы, расположенная во 2 четверти с выколотой точкой $\left(-4;\frac{1}{4}\right)$



Прямая $y = kx$ не имеет с построенным графиком общих точек, если она совпадает с осью x, либо проходит через одну из выколотых точек, т.е. при $k = 0,\ k = -\frac{1}{16}$ и $k = \frac{1}{16}$.

Ответ: . $0, -\frac{1}{16}, \frac{1}{16}$.

Алгоритм решения задач с параметром, заданных дробно-рациональной функцией, содержащей модуль:

1. Записать ОДЗ.
2. Упростить выражение, которым задана функция.
3. Раскрыть модуль и представить в виде кусочно-заданной функции.
4. Определить вид функции на каждом промежутке и найти необходимые точки для построения графика.
5. Построить график функции для каждого промежутка на одной координатной плоскости, учитывая ОДЗ.
6. Построить в той же координатной плоскости прямую $y = c$, параллельную оси абсцисс так, чтобы она имела с графиком функции заданное в условии количество общих точек.
7. Определить искомое значение параметра.
8. Записать ответ.

Задания для самостоятельного закрепления

1. Постройте график функции $y = \frac{(x^2+3x)|x|}{x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

2. Постройте график функции $y = \frac{(0{,}5x^2-2x)|x|}{x-4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

3. Постройте график функции $y = \frac{3|x|-1}{|x|-3x^2}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек. Показать решение

Проверочная работа по итогам 4-го модуля

Задание 1.

Из двух чисел выберите то, у которого больше модуль: $-13{,}8$ и -13.7

Задание 2.

Из двух чисел выберите то, у которого меньше модуль: $\frac{5}{8}$ и $-\frac{2}{3}$

Задание 3.

Запишите числа в порядке возрастания их модулей: $11{,}75;\ -11{,}85;\ -10{,}89;\ -11{,}76;\ 10{,}98$

Задание 4.

Найдите значение выражения $|-x|-|1{,}4-5x|$ при $x=0{,}3$

Задание 5.

Найдите значение выражения $\big|2x-3|5+x|\big|$ при $x=-3$

Задание 6.

Раскройте модуль функции $y=|x+1|+x-3$

Задание 7.

Раскройте модуль функции $y=x|2-x|-4-x$

Задание 8.

Постройте график функции $y=|x|x+3|x|-5x$. Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Задание 9.

Постройте график функции $y=x^2-|4x+3|$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки

Задание 10.

Постройте график функции $y=\frac{(0{,}75x^2-0{,}75x)|x|}{x-1}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Ответы для самопроверки:

Задание 1- $-13{,}8$

Задание 2- $\frac{5}{8}$

Задание 3- $-10{,}89;\ 10{,}98;\ 11{,}75;\ -11{,}76;\ -11{,}85;$

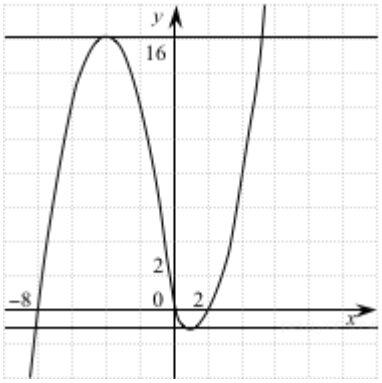
Задание 4- 0,2

Задание 5- 12

Задание 6- $y = \begin{cases} 2x - 2, & \text{если } x \geq -1 \\ -4, & \text{если } x < -1 \end{cases}$

Задание 7- $y = \begin{cases} -x^2 + x - 4, & \text{если } x \leq 2 \\ x^2 - 3x - 4, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

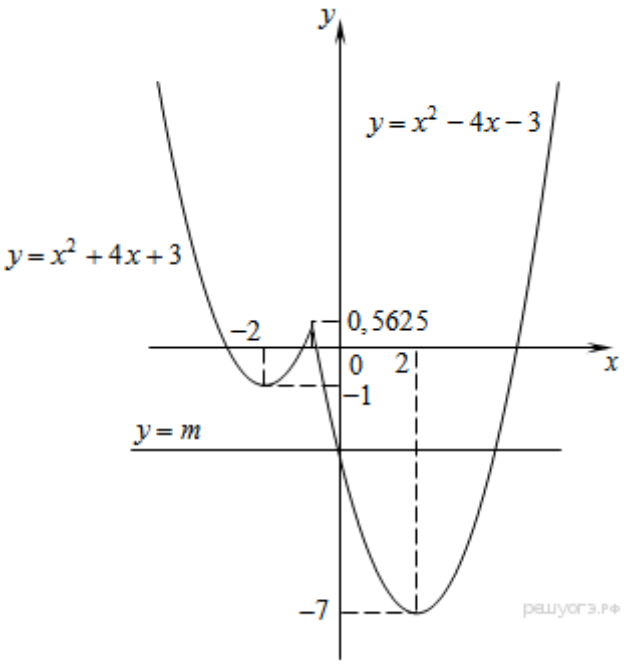
Задание 8-



Из графика видно, что прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно две общие точки при $m = 16$ и $m = -1$.

Ответ: 16; −1.

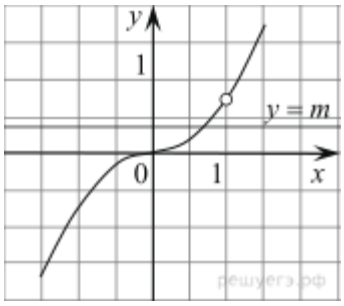
Задание 9-



Прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно три общие точки при $m = -1$ и $m = 0{,}5625$.

Ответ: −1; 0,5625.

Задание 10-



Прямая $y = m$ не имеет с графиком функции ни одной общей точки при $m = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

Заключение

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы были решены все поставленные задачи и получены следующие результаты.

На основе анализа учебной и методической литературы, можно сделать вывод, что познавательная самостоятельность формируется и развивается под воздействием как внешних, так и внутренних факторов, влияющих друг на друга.

Внутренние факторы – личностные качества учащегося (природные способности и задатки, воля, темперамент и др.) и сложившиеся, усвоенные в процессе жизнедеятельности, в том числе учебной работы, знания и методы их получения.

Внешние факторы – весь социум, окружающий школьника, социальная среда, в которой он находился и находится, влияние учебно - воспитательного процесса.

Познавательная самостоятельность как качество личности проявляется в самостоятельной познавательной деятельности. Активная самостоятельная познавательная деятельность учащихся лежит в основе всего разнообразия приемов и методов. Активизация такой деятельности учащихся является ключевым фактором развития познавательной самостоятельности, важнейшим условием реализации поставленных целей, источником и способом саморазвития учащихся.

Развитие познавательной самостоятельности - это и есть активизация самостоятельной познавательной деятельности. Именно многообразие педагогических приемов развития познавательной самостоятельности, предлагаемых педагогами и психологами, свидетельствует о сложности данного феномена и о незавершенности процесса исследования влияния различных факторов на развитие познавательной самостоятельности. Что в свою очередь говорит о возможности разработки новых и совершенствования существующих путей и средств развития данного качества личности.

В результате проведённого исследования разработано учебное пособие «Решение задач с параметрами при подготовке к ОГЭ», которое поможет учителю математики развивать познавательную самостоятельность школьников при обучении решению задач с параметрами, а также расширить возможности самостоятельной деятельности обучающихся.

Навык самостоятельной познавательной деятельности, формируемый в процессе работы с данным пособием, позволит учащимся самостоятельно подготовиться к решению задач с параметрами на ОГЭ по математике.

Разработанное учебное пособие может быть использовано учителем в качестве дополнительного учебного материала на уроках математики или при составлении факультативов для школьников.

Список литературы

1. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович [и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. 17-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2013. 271 с.

2. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович [и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. 12-е изд., испр. и доп. М.: Мнемозина, 2009. 255 с.

3. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович [и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. 12-е изд., испр. М.: Мнемозина, 2010. 223 с.

4. Болотова А.И. Развитие познавательной самостоятельности младших школьников средствами математики // Начальная школа. 2009. №6. С.17-19.

5. Горнштейн П.И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметрами: учебное пособие. 3-е изд., доп. и перераб. М.: Илекса; Харьков: Гимназия, 2005. 328 с.

6. Григорьева Л.Г. Особенности формирования и развития познавательной самостоятельности младших школьников // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2011. №3. Ч.2. С.15-17.

7. Демидова С.И., Денищева Л.О. Самостоятельность учащихся при обучении математике. М.: Просвещение, 1985. 191с.

8. Дорофеев Г. В., Затакавай В. В. Решение задач, содержащих параметры. М.: Науч. - пед. об-ние «Перспектива», 1990. Ч.2. 38с.

9. Козаков В. А. Самостоятельная работа студентов и ее информационно-методическое обеспечение: учеб. пособие для ФПК по дисциплине «Педагогика и психология высш. шк.». Киев: Выща шк., 1990. 246 с.

10. Лях Ю. А. Формирование познавательной самостоятельности школьников в воспитательно-образовательном процессе гимназии: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Кемеров. гос. ун-т. Кемерово, 2004. 251 с.

11. Микельсон Р.М. О самостоятельной работе учащихся в процессе обучения. М.: Учпедгиз, 1940. - 95с.

12. Половникова Н.А. Метод познавательной деятельности – средство и результат воспитания познавательной самостоятельности школьников. Казань: Тат. кн. изд-во, 1968. 202 с.

13. Пустовойтов В.Н. Развитие познавательной самостоятельности учащихся старших классов на уроках математики и информатики: Монография. Брянск: Издательство БГУ, 2002. 120 с.

14. Сдам ГИА: Решу ОГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика. Каталог заданий. URL: https://oge.sdamgia.ru

15. ФГБНУ «ФИПИ». Открытый банк заданий ОГЭ. Математика. URL: http://oge.fipi.ru/os/xmodules/qprint/index.php?proj=DE0E276E497AB3784C3FC4CC20248DC0

16. Цукерман Г.А., Венгер А.Л. Развитие учебной самостоятельности средствами школьного образования // Психологическая наука и образование. 2010. Том 15. № 4. С. 77–90.

17. Щукина Г.И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе: учеб. пособие. М.: Просвещение, 1979. 160 с.

18. Ястребинецкий Г. А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры: пособие для учителей. М.: Просвещение, 1972. 128 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» августа 2019 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Килячиной Анны Ивановны
(ФИО полностью)

Тема работы «Развитие познавательной самостоятельности обучающихся при решении задач с параметрами»

Утверждена приказом по Университету от «29» октября 2019 г. № 1183 а/о

Срок сдачи студентом законченной работы «23» июня 2020 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение психолого–педагогической и методической литературы по проблеме исследования	Октябрь-ноябрь, 2019	Выполнено
2.	Анализ современного состояния проблемы развития познавательной самостоятельности школьников	Декабрь, 2019	Выполнено
3.	Анализ содержания основного государственного экзамена по математике и составление классификации задач с параметрами	Январь-февраль, 2020	Выполнено
4.	Рассмотрение различных методов решения задач с параметрами	Март, 2020	Выполнено
5.	Разработка учебного пособия по теме: «Решение задач с параметрами», направленное на развитие познавательной самостоятельности школьников	Апрель-май, 2020	Выполнено
6.	Оформление текста работы.	Июнь 2020	Выполнено
7.	Подготовка презентации и выступления	Июнь 2020	Выполнено

Дата выдачи задания «23» сентября 2019 г.

Руководитель _____ Монахова О.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Килячина А.И_____
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Килячиной Анны Ивановны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Килячина Анна Ивановна,
Ф.И.О. студента
студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Развитие познавательной самостоятельности обучающихся при решении задач с параметрами», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись
10.06.2020
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 23.06.2020
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР _____ О.А. Монахова
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»

выпускной квалификационной работы на тему: «Развитие познавательной самостоятельности обучающихся при решении задач с параметрами»

студентки 4 курса Килячиной Анны Ивановны направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Монахова Оксана Александровна

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: Килячина Анна Ивановна kilyachina.anna@mail.ru / ID: 2603
Проверяющий: Монахова Оксана Александровна (oxmonakh@mail.ru / ID: 428)
Организация: Пензенский государственный университет

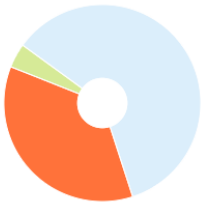
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- http://pnzgu.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 27
Начало загрузки: 29.06.2020 22:35:40
Длительность загрузки: 00:00:32
Имя исходного файла: ВКР Килячина 29.06.docx
Название документа: ВКР Килячина 29.06
Размер текста: 1 кБ
Символов в тексте: 94499
Слов в тексте: 11968
Число предложений: 769

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 29.06.2020 22:36:13
Длительность проверки: 00:00:22
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска перефразирований Интернет, Модуль поиска общеупотребительных выражений, Модуль поиска "ПГУ", Коллекция РГБ, Коллекция eLIBRARY.RU, Коллекция Медицина, Модуль поиска перефразирований eLIBRARY.RU, Цитирование, Кольцо вузов, Сводная коллекция ЭБС, Модуль выделения библиографических записей, Модуль поиска ИПС "Адилет", Модуль поиска переводных заимствований, Модуль поиска переводных заимствований по elibrary (EnRu), Модуль поиска переводных заимствований по интернет (EnRu), Коллекция ГАРАНТ, Коллекция Патенты



ЗАИМСТВОВАНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
35,69%	0%	3,83%	60,48%

Дата 29.06.2020 Монахова О.А. _____
(ФИО руководителя ВКР) (подпись)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Развитие познавательной самостоятельности обучающихся при решении задач с параметрами» студентки Килячиной Анны Ивановны факультета физико-математических и естественных наук направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика», гр. 16ФПМ1

Работа Килячиной А.И. посвящена раскрытию сущности понятия «познавательная самостоятельность». От уровня развития самостоятельности мышления человека зависит его способность принимать обдуманные и взвешенные решения, возможность формировать стратегию жизнедеятельности, ориентироваться в ситуациях, прогнозировать будущее. Поэтому развитие самостоятельности мышления обучающихся становится одной из основных задач обучения.

Перед студенткой ставилась задача разработать систему упражнений на основе задач с параметрами для развития познавательной самостоятельности школьников.

Навык самостоятельной познавательной деятельности, формируемый в процессе работы с разработанной системой упражнений, позволит учащимся готовиться к решению задач с параметрами. Предложенная система упражнений может быть использована учителем в качестве дополнительного учебного материала на уроках математики и на факультативных занятиях со школьниками.

Считаю, что Килячина А.И. справилась с поставленной задачей, работа заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР
Монахова Оксана Александровна,
доцент кафедры «Математическое образование»,
доцент, к.ф.-м. н.