**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНО УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет вычислительной техники

# КУРСОВАЯ РАБОТА

**По дисциплине** «Математический анализ»

**на тему:** «Несобственные двойные интегралы»

**Выполнила:** студентка 2 курса,

группы 13ФМ1

Арефьева Т.А.

**Руководитель:**

доцент Куприянова С.Н.

**Пенза 2015**

# Содержание

**§1. Несобственные двойные интегралы……3**

1. Интегралы, распространенные на неограниченную область……3

2. Теорема от абсолютной сходимости несобственного двойного интеграла..6

**Список литературы……9**

# §1. Несобственные двойные интегралы.

## 1. Интегралы, распространенные на неограниченную область.

Понятие двойного интеграла обобщается на случай неограниченной, т.е. простирающейся в бесконечность области, или на случай неограниченной функции, подобно тому как это сделано в главе тринадцатой по отношению к простым интегралам.

Остановимся сначала на случае неограниченной области $(P)$.

Примером такой области может служить вся плоскость или часть её, лежащая вне некоторого круга или другой ограниченной плоской фигуры, какой-либо угол и т.п. Что касается границы этой области, то она предполагается имеющей площадь 0 (например, состоящей з кусочно-гладких кривых) в каждой ограниченной своей частью. Пусть в области $(P)$ задана некоторая функция $f(x, y)$, которую будем предполагать интегрируемой в обычном смысле слова в каждой ограниченной и квадрируемой части области $(P)$.

Проведя вспомогательную кривую $(K')$ ( тоже с площадью 0), осечем от области $(P)$ ограниченную и связную её часть $(P')$, в которой интеграл

$$\iint_{(P')} f(x, y)dxdy \tag{1}$$

по предложению существует. Станем теперь удалять кривую $(K)$ всеми её точками в бесконечность, так, чтобы наименьшее расстояние $R$ от начала до точек этой кривой возрастало до бесконечности. Тогда отсекаемая ею переменная область $(P')$ постепенно будет охватывать все точки области $(P)$: каждая точка из $(P)$ будет принадлежать $(P')$ при достаточно большом $R$.

*Предел (конечный или бесконечный) интеграла (1) при $R \to \infty$ называют (несобственным) интегралом от функции $f(x, y)$ в неограниченной области* $(P)$ и обозначается символом

$$\iint_{(P')} f(x, y)dxdy = \lim_{R\to\infty} \iint_{(P')} f(x, y)dxdy \tag{2}$$

В случае существования конечного предела интеграл (2) называется *сходящимся*, в противном случае-*расходящимся*. Функция, для которого интеграл (2) сходится, называется *интегрируемой* (в несобственном смысле) в области $(P)$.

В случае положительной функции $f(x,y)$ достаточно рассмотреть какую-нибудь определенную последовательность удаляющихся в бесконечность кривых

$$K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$$

и отсекаемых ими областей

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots,$$

Предположить существование конечной границы

$$I = sup_n \left\{ \iint_{(P_n)} f(x,y)dxdy \right\},$$

чтобы отсюда уже вытекала сходимость интеграла (2).

Действительно, какую бы область $(P')$ ни отделить кривой $(K')$ от $(P')$, при достаточно большом $n$ эта область целиком будет содержать в $(P_n)$, так что

$$\iint_{(P')} f(x,y)dxdy \le \iint_{(P_n)} f(x,y)dxdy$$

И, тем более

$$\iint_{(P')} f(x,y)dxdy \le I. \qquad (3)$$

С Другой стороны, по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $n_0$, чтобы было

$$\iint\limits_{(P_{n_0})} f(x,y)dxdy > I - \varepsilon.$$

При достаточно большом $R^*$, в свою очередь, область $(P')$ охватит $(P_{n_0})$ следовательно, и подавно

$$\iint_{(P')} f(x,y)dxdy \le I - \partial. \qquad (4)$$

Неравенства (3) и (4) в совокупности доказывают, что число $I$ удовлетворяет определению двойного интеграла.

С помощью этого соображения легко доказывается теорема о сравнении интегралов. Далее, если сохранить относительно функции $f(x,y)$ прежнее предположения, то *из сходимости интеграла от* $|f(x,y)|$*, распространенного на неограниченную область* $(P)$*, вытекает сходимость подобного же интеграла для функции* $f(x,y)$.

Для доказательства этого рассмотрим две неотрицательные функции:

$$f_+(x,y)=\frac{|f(x,y)|+f(x,y)}{2}, f_-(x,y)=\frac{|f(x,y)|-f(x,y)}{2};$$

очевидно,

$$f_+(x,y)=\begin{cases} f(x,y), \text{если } f(x,y)\geq 0, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$f_-(x,y)=\begin{cases} -f(x,y), \text{если } f(x,y)\leq 0, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Из интегрируемости функции $|f(x,y)|$ вытекает сходимость интегралов для функции

$$f_+(x,y)\leq|f(x,y)| \text{ и } f_-(x,y)\leq|f(x,y)|,$$

а следовательно, и для функции

$$f(x,y)=f_+(x,y)-f_-(x,y).$$

Весьма замечателен тот факт, что и обратно: *из сходимости интеграла от функции* $f(x,y)$*, распространенного на неограниченную область* $(P)$*, вытекает сходимость интеграла и для* $f(x,y)$. Этому предложению нет аналога в теории простых несобственных интегралов: мы знаем, что там могли существовать и не абсолютно сходящиеся интегралы.

Доказательство мы дадим в следующем $n^0$.

## 2. Теорема от абсолютной сходимости несобственного двойного интеграла.

*Каждый сходящийся интеграл*

$$\iint_{(P)} f(x,y)dxdy. \tag{5}$$

*необходимо и абсолютно сходится,* т.е. одновременно с ним сходится и интеграл

$$\iint_{(P)} |f(x,y)|dxdy. \tag{6}$$

Допустим противное. Взяв последовательность областей $\{(P_n)\}$, так, чтобы они, расширяясь, постепенно охватывали всю область $(P)$, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{(P_n)} |f(x,y)|dxdy = +\infty.$$

Не умаляя общность, мы можем допустить, что при каждом значении $n$ выполняется неравенство

$$\iint_{(P_{n+1})} |f(x,y)|dxdy > 3 \iint_{(P_n)} |f(x,y)|dxdy + 2n.$$

Этого можно достигнуть, разрежая (в случае надобности) последовательность $\{(P_n)\}$, т.е. извлекая из неё частичную последовательность и заново нумеруя её.

Обозначая через $(p_n)$ разность областей $(P_{n+1})$ и $(P_n)$, очевидно, будем иметь

$$\iint_{(p_n)} |f(x,y)|dxdy > 2 \iint_{(P_n)} |f(x,y)|dxdy + 2n.$$

Но

$$|f(x,y)| = f_+(x,y) + f_-(x,y),$$

так что

$$\iint\limits_{(p_n)} |f(x,y)|dxdy = \iint\limits_{(p_n)} f_+(x,y)dxdy + \iint\limits_{(p_n)} f_-(x,y)dxdy.$$

Пусть из двух интегралов справа большими будет, например, первый.

Тогда

$$\iint_{(p_n)} f_+(x,y)dxdy \geq \iint_{(P_n)} |f(x,y)|dxdy + n.$$

Заменяя двойной интеграл слева достаточно близкой к нему нижней суммой Дарбу, сохраним неравенство

$$\sum_i m_n^{(i)} p_n^{(i)} > \iint_{(P_n)} |f(x,y)|dxdy + n.$$

Можно в этой сумме оставить лишь те слагаемые, которым отвечают $m_n^{(i)} > 0$; обозначив совокупность соответствующих элементов $(p_n^{(i)})$ через $\widetilde{p_n}$, получим, тем более,

$$\iint_{(\widetilde{p_n})} f(x,y)dxdy = \iint_{(\widetilde{p_n})} f_+(x,y)dxdy > \iint_{(P_n)} |f(x,y)|dxdy + n.$$

Обозначим через $(\widetilde{P_n})$ область, составленную из $(P_n)$ и $(\widetilde{p_n})$; так как

$$\iint_{(P_n)} f(x,y)dxdy \geq -\iint_{(P_n)} |f(x,y)|\, dxdy,$$

то, складывая почленно это неравенство с предыдущим, найдем

$$\iint_{(\widetilde{P_n})} f(x,y)dxdy > n.$$

Область $(\widetilde{p_n})$, а с нею и $(\widetilde{P_n})$, можно деформировать так, чтобы из последней получилось связная область $(P_n')$, и притом по площади столь мало разнящаяся от $(\widetilde{P_n})$, что все же сохраняется неравенство

$$\iint_{(P_n')} f(x,y)dxdy > n.$$

Этого легко достигнуть, соединяя оторванные части области узкими «коридорами» с произвольно малой общей площадью.

Отсюда уже ясно, что интеграл (5) сходиться не может, вопреки предположению; это противоречие и доказывает теорему.

Заметим, что принципиальная разница между одномерным и двумерным случаями связана именно с заключительной частью проведенного рассуждения. Несвязную линейную область, состоящую из отдельных промежутков, уже нельзя произвольно малой деформацией превратить в связную (т.е. в цельный промежуток).

Доказанная теорема вместе с замечаниями предыдущего $n^0$ сводит вопрос о сходимости и вычислении несобственного интеграла от произвольной функции к такому же вопросу для положительной (неотрицательной) функции.

# Список литературы

1. Г.М. Фихтенгольц «Курс дифференциального и интегрального исчисления» В трех томах. Том 3. Издательство Лань, 1997.-672 с.