

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Факультет

Кафедра

вычислительной техники
(наименование)

Высшая и прикладная математика
(наименование)

Направление подготовки 01.03.04 «Прикладная математика»
(код и наименование)

Профиль Математическое моделирование в экономике и технике
(код и наименование)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА
С ПЕРЕМЕННОЙ ЗАДЕРЖКОЙ

Студент 17ВБ1 Фрол 17.06.21 Фролов Е. С.
(группа) (подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Руководитель д.ф.-м.н., профессор И 17.06.21 Бойков И. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролер к.т.н., доцент Д 17.06.21 Тарасов Д. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 04.06.2021 № 10)

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., проф. И 17.06.21 Бойков И. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с отметкой отм. (протокол заседания ГЭК от 22.06.21 № 1)

Секретарь ГЭК к.пед.н., доцент З 22.06.21 Зверовщикова Н. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2021

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Политехнический институт

Факультет

Вычислительной техники
(наименование)

Кафедра

Высшая и прикладная математика
(наименование)

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой

 И. В. Бойков
(подпись, инициалы, фамилия)

«30» ноября 2020 г.

ЗАДАНИЕ

на бакалаврскую работу

1. Студент Фролов Евгений Сергеевич гр. 17ВБ1
(фамилия, имя, отчество)
факультета вычислительной техники

2. Тема работы Приближенные методы решения нелинейных
интегральных уравнений Вольтерра с переменной задержкой

Тема утверждена приказом по ПГУ № 0903_о от « 30 » ноября 2020 г.

3. Руководитель работы д. ф.-м. н., профессор Бойков И. В.

4. Задание на работу (назначение разработки, исходные данные и т.п.)

- 1 Рассмотреть задачу приближенного решения развивающихся систем
- 2 Изучить понятие, основные свойства и классы развивающихся систем
- 3 Изучить приближенные методы решения двухпродуктовых моделей раз-
вивающихся систем
- 4 Построить алгоритм нахождения приближенного решения двухпродукто-
вых моделей
- 5 С использованием разработанной программы провести анализ получен-
ных результатов

5. Перечень подлежащих разработке вопросов _____

1 Основные положения теории развивающихся систем _____

1.1 Основные характеристики и методы описания развивающихся систем _____

1.2 Сравнение интегрального и дифференциального подходов _____

2 Классы развивающихся систем: двухпродуктовые модели, n -продуктовые модели, континуальные модели _____

3 Численные методы решения двухпродуктовых моделей развивающихся систем _____

3.1 Модифицированный метод Ньютона – Канторовича _____

3.2 Альтернативный метод _____

6. Календарный график по выполнению проекта

Наименование этапов работы	Объем работы	Срок выполнения	Подпись руководителя
1. Обзор литературы	20 %	28.05.2021	
2. Исследование основных свойств и классов развивающихся систем	25 %	02.06.2021	
3. Разработка численных алгоритмов решения	20 %	07.06.2021	
4. Разработка программы	25 %	10.06.2021	
5. Оформление пояснительной записки	10 %	14.06.2021	

Дата выдачи задания «30» ноября 2020 г.

Руководитель бакалаврской работы _____  И. В. Бойков
(подпись, инициалы, фамилия)

Задание к исполнению принял студент _____  Е. С. Фролов
(подпись, инициалы, фамилия)

Работу к защите допустить
Декан факультета _____  Л. Р. Фионова
(подпись, инициалы, фамилия)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. РАЗВИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКИ	5
1.1. Отдельные характеристики развивающихся систем	5
1.2. Концепция развивающихся систем	8
1.3. Упрощение трудных моделей	9
1.4. Сопоставление интегрального и дифференциального подходов	11
2. МОДЕЛИ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ В СФЕРЕ ЭКОНОМИКИ	14
2.1. Макромодели экономического роста	14
2.2. Микромодели равновесия	14
2.3. Макромодели равновесия	15
2.4. Модели глобальной динамики	15
3. КЛАССЫ МОДЕЛЕЙ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ	16
3.1. Двухпродуктовые модели	16
3.2. n -продуктовые модели	28
3.3. Континуальные модели	31
4. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ МОДЕЛЕЙ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ	34
4.1. Модифицированный метод Ньютона – Канторовича	34
4.1.1. Постановка задачи	34
4.1.2. Описание метода	35
4.1.3. Теорема сходимости	37
4.2. Альтернатива методу Ньютона – Канторовича	40
4.2.1. Постановка задачи	40
4.2.2. Описание метода	41
4.2.3. Модельные примеры	42
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	45
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Листинг программы	47

ВВЕДЕНИЕ

Активное развитие математики и вычислительной техники позволяет решать все более сложные задачи с помощью электронно-вычислительных машин, или, как мы привыкли говорить, с помощью компьютера. Одной из таких является задача моделирования и описания развивающихся систем. Подобные системы окружают нас повсюду. Сам человек тоже по своей сути является развивающейся системой, ведь на протяжении своей жизни мы непрерывно развиваемся, у нас меняются взгляды, привычки, предпочтения. Те же экономические или экологические системы тоже можно отнести к развивающимся системам.

Идея развития имеет возможность охватывать практически все окружающие структуры. В каждом конкретном случае объектом развития может быть абсолютно любая сущность: материальный объект, процесс, понятие, и т. д. Все эти сущности объединяет то, что в процессе развития рассматриваются некоторые внутренние изменения, которые не меняют нашего представления об объекте. Следовательно такие объекты представляются в качестве особых динамических систем, которые отличаются от обычных, представленных в теории систем отношениями на множестве объектов, тем, что фактически представить это первичное множество объектов нельзя. Перемены в поведении системы могут быть вызваны адаптацией к неизвестным внешним факторам. Эти перемены представляемы моделью целенаправленного поведения, которая включает в себя предварительно заданную цель и условия ее достижения. В такой ситуации состояние системы описывается формальными правилами, соответствующими данным условиям. Впрочем, нередко цель поведения и условия ее достижения неизвестны. Суть функционирования подобных систем значителен в сохранении самих себя в реальных условиях окружения. Как раз системы подобного рода считаются развивающимися.

На данный момент как в нашей стране, так и за рубежом, известно огромное количество способов моделирования таких систем. Однако в связи с

постоянным прогрессом модели становятся все сложнее, а значит и методы моделирования должны соответствовать данному прогрессу.

Целью работы является реализация приближенного метода решения развивающихся систем.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть задачу нахождения приближенного решения развивающихся систем.

2. Изучить понятие, основные свойства и классы развивающихся систем.

3. Изучить приближенные методы решения двухпродуктовых моделей развивающихся систем.

4. Построить алгоритм нахождения приближенного решения двухпродуктовых моделей.

5. С использованием разработанной программы провести анализ полученного решения.

1. РАЗВИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

1.1. Отдельные характеристики развивающихся систем

Любое развитие требует наличия некоторых средств, которые на начальном этапе будут его поддерживать [1]. Другими словами, необходимо наличие первоначальных ресурсов. Для динамических систем в качестве таких ресурсов выступают: вещество, энергия, информация [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. При этом для развития в системе выделяется некоторая подсистема, ответственная за воспроизводство продуктов и совершенствование как всей системы, так и самой себя. Нельзя не учитывать окружающую среду, так как именно из-за контакта с ней система формирует и расходует продукты, она также позволяет выявлять устаревшие продукты, то есть выступает своеобразным фильтром, который помогает отсеивать ненужное. Из-за этого необходимо следить за износом методов воссоздания и создания продуктов. Ресурсы, поступающие в систему, делятся на две группы, первая используется для развития системы, вторая идет на выполнение внешних функций, причем две эти группы должны состоять в функциональной зависимости друг от друга. Между продуктами системы и ресурсами должен соблюдаться некий баланс, регламентирующийся определенными соотношениями [2, 10]. Для обеспечения неравновесных состояний системы необходимо поддержание обстановок кооперативного и конкурирующего поведения, которые, в частности, выступают своеобразным двигателем прогресса, который заставляет систему развиваться.

Рассмотрим два примера. Один экономический, а второй биологический.

Опишем макроэкономическую систему одного государства. Допустим, что необходимо каким-либо оптимальным способом разделить национальный доход на потребление и накопление. Обращая внимание на написанные выше свойства, можно увидеть, что необходимо наличие подсистемы воспроизводства и совершенствования. Выделим эту подсистему, для этого разделим всю экономику на две группы. Первая группа, назовем ее группой А, и будет выполнять роль этой

подсистемы. Говоря конкретнее, ее функция состоит в том, что она производит средства, направленные на дальнейшее производство, то есть на развитие системы. Для второй группы, назовем ее группой Б, ничего не остается, как взять на себя обязанность выполнять внешние функции, то есть производить предметы потребления.

Часто происходит так, что вся продукция определенной отрасли полностью относится либо к группе А, либо к группе Б. Но, если углубиться в подобную классификацию, то можно заметить, что она не совсем верна, некоторые отрасли группы А частично выполняют функции группы Б. Возьмем, к примеру, производство автомобилей. Некоторые автомобили создаются с целью дальнейшего участия в производстве, это различные служебные машины, в то время как остальная часть – автомобили личного пользования. Конечно, в случае служебных машин, они могут использоваться в уже другой сфере производства, но так как мы рассматриваем экономику целого государства, этот пример вполне уместен. Получается, что в первом случае мы обязаны отнести производство со всем промежуточным обеспечением, таким как металл, пластмассы, и т. п., к группе А, а во втором к группе Б. Тоже самое наблюдается в строительстве, где одна часть зданий, различные цеха, заводы, и т. д., создается для дальнейшего использования в производстве и относится к группе А, а другая часть, жилые дома, больницы, и т. д., – к группе Б.

Из написанного выше следует, что на высшем уровне агрегации экономика, с определенными допущениями, сводится практически к одной обобщенной отрасли, в которой одна часть производит средства производства, то есть работает в режиме группы А, а другая производит предметы потребления – режим группы Б. Причем должен быть шанс свободного переключения с режима А на режим Б, и наоборот. Именно это обстоятельство и составляет необходимое допущение, которое, к сожалению, в полной мере никогда не реализуется. Но для теоретических качественных исследований благодаря высокому уровню агрегации оно имеет место быть, особенно если учитывать, что обеспечивающим

отраслям, таким как машиностроение, строительство, практически не требуется переключаться с одного режима на другой.

Теперь опишем иммунную систему целостного организма, например, человека. По сути дела, иммунная система является подсистемой такой большой и многогранной развивающейся системы как человек. Причем она одна из тех, которые обеспечивают развитие как всей системе, так и самой себе. Вообще иммунная система предоставляет человеку естественную защиту от различных заболеваний, этот фактор в некоторой мере обеспечивает уникальность организма путем разрушения или мутации чуждых организму клеток, попавших в него через антигены вирусной или молекулярно-дисперсной природы. Сама иммунная система состоит из клеток иммунокомпетентных тканей, которые, как и клетки кроветворных тканей, берут свое начало от стволовых кроветворных клеток. Они также обеспечивают воспроизводство клеток иммунокомпетентных и кроветворных тканей.

В данном примере основной упор сделан на рассмотрении восстановления тканей, утилизации отдельных ресурсов, перераспределения ресурсов между внутренними и внешними функциями как организма, так и иммунной системы. Такой выбор обусловлен тем, что все эти процедуры наиболее наглядно показывают и определяют основополагающие кооперативные и конкурирующие характеристики.

Кооперативные характеристики включают в себя совместное действие разнообразных клеток как иммунокомпетентной, так и неиммунокомпетентной (например, кроветворной) тканей в иммунном ответе. Похоже, что слияние клонов в кооперацию, которая состоит из «позитивного» и «негативного» клонов, оба клона в то же время состоят из сложно взаимодействующих идиотип-антиидиотипических субпопуляций, реализуется с целью предоставления повышенной «производительности» создания клонов иммунной системы, а также предоставления «кинетического совершенства» [11] клона.

Конкурирующие характеристики включают в себя: сдерживание антигенов при иммунном ответе в момент попадания в организм ряда антигенов;

превосходство «негативного» клона над «позитивным» при иммунологической толерантности; поступательная интеграция идиотип-антиидиотипического сотрудничества в иммунном ответе [12] и др. Судя по всему, как конкурентная взаимосвязь клонов, так и узкоспециализированная связь клона с антигеном необходимо приписать к целенаправленному преобразованию характеристик любой развивающейся системы, к выделению в ее структуре двух подсистем, первая контролирует быстрые, а другая – медленные перемены среды, это необходимо для повышения эффективности связи организма со средой.

В целом развивающимся системам нельзя дать какого-то обобщенного математического понятия, причем это утверждение следует не из того, что данная задача не представляется возможной, она скорей не является целесообразной. Это следует из самих целей исследования, так как существует множество моделей, которые в той или иной степени описывают поведение отдельных свойств развивающихся систем.

1.2. Концепция развивающихся систем

Существует огромное количество разнообразных методов описания развивающихся систем. Каждый применяется в конкретном случае, отталкиваясь от целей изучения. В одном из них обширная группа динамических систем может быть описана как [1]

$$S(t) = \int_{-\infty}^t H(t, \tau) G(\tau) d\tau. \quad (1.1)$$

Здесь H – матрица импульсных переходных функций системы, G – вектор входных влияний, S – вектор состояний системы, t – время. В нелинейном случае переходные функции дополнительно зависят от G .

Прочие, наиболее известные средства составления динамических систем требуют применения дифференциальных уравнений. До сопоставления данных двух подходов, приведем главные итоги метода дифференциальных уравнений.

Опишем динамическую систему через систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$s'_i = f_i(s_1, \dots, s_m; \gamma_1, \dots, \gamma_k), \quad i = 1, \dots, m, \quad (1.2)$$

в данном случае $S = (s_1, \dots, s_m)$ – положение системы, γ_l – параметры системы.

Стационарное состояние определяется из уравнения

$$f_i(s_1, \dots, s_m; \gamma_1, \dots, \gamma_k) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.3)$$

Проблема устойчивости полученного стационарного состояния в конкретной точке $s_i = b_i$ ($i = 1, \dots, m$), которая является решением конечных уравнений (1.3), разрешается посредством решения соответствующего характеристического уравнения

$$L(\lambda) = \det \{ B_{ik} - \lambda \delta_{ik} \} = 0, \quad (1.4)$$

$$B_{ik} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial s_k} \right)_{s_k = b_k},$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Решая уравнение (1.4), можно заметить, что для устойчивости стационарного состояния необходимо выполнение условия $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, \dots, m$), где λ_i – корни уравнения (1.4). Если же в какой-то точке это условие не выполняется, то она называется экстремальной или критической.

1.3. Упрощение трудных моделей

Будем считать, что система дифференциальных уравнений (1.2) автономна, и несколько ее уравнений

$$s'_{i_1} = f_{i_1}(s_1, \dots, s_m; \gamma_1, \dots, \gamma_k), \quad i_1 = 1, \dots, i_1^0, \quad (1.5)$$

составляют систему медленных движений, а остальные

$$\varepsilon s'_{i_2} = \tilde{f}_{i_2}(s_1, \dots, s_m; \gamma_1, \dots, \gamma_k), \quad i_2 = i_1^0 + 1, \dots, m, \quad \varepsilon^{-1} \tilde{f}_{i_2} = f_{i_2}, \quad (1.6)$$

систему быстрых движений.

В случае $\varepsilon = 0$ системы (1.5), (1.6) сводятся к системе

$$s'_{i_1} = f_{i_1}(s_1, \dots, s_m; \gamma_1, \dots, \gamma_k),$$

$$0 = \tilde{f}_{i_2}(s_1, \dots, s_m; \gamma_1, \dots, \gamma_k). \quad (1.7)$$

Система (1.7) именуется вырожденной, а система (1.6) в свою очередь именуется присоединенной. Вместе с этим имеет место следующая теорема [13].

Теорема Тихонова. *Решение полной системы (1.5), (1.6) стремится к решению вырожденной системы (1.7) при $\varepsilon \rightarrow 0$, если*

а) решение $\bar{s}_{i_1+1}, \dots, \bar{s}_m$ системы $\tilde{f}_{i_2}(s_1, \dots, s_m; \gamma_1, \dots, \gamma_k) = 0$ ($i_2 = i_0^1 + 1, \dots, m$) $\dots, m$) – устойчивая изолированная точка системы (1.6) при всех значениях $s_1, \dots, s_{i_1+1}$;

б) начальные условия $s_{i_1+1}^0, \dots, s_m^0$ для системы (1.6) попадают в область влияния устойчивой особой точки;

в) решение полной системы и присоединенной системы (1.6) единственно и правые части этих систем непрерывны.

Главной целью является возможность практического изучения системы (1.2). Именно теорема Тихонова позволяет осуществить этот замысел, так как она предоставляет возможность понизить порядок системы (1.2). Для этого требуется совершить ряд действий, направленных на упрощение систем дифференциальных уравнений, он состоит в следующем:

1) следует сформировать блок-схему структурно-функциональной организации изучаемой системы;

2) с помощью этой блок-схемы построить подходящую математическую модель, из которой необходимо выделить системы быстрых и медленных движений, уменьшить порядок системы уравнений;

3) проверить систему на устойчивость, найти стационарные точки, и, при наличии экстремальных, проанализировать их характер;

4) подобрать параметры численного изучения модели, извлечь численные решения и отследить их согласно экспериментальным данным;

5) дать оценку области применимости модели, вероятный общественно-экономический результат от ее эксплуатации в фундаментальных и практических исследованиях.

1.4. Сопоставление интегрального и дифференциального подходов

Перед тем как начать рассмотрение плюсов и минусов этих двух подходов относительно друг друга, точно так же, как и для дифференциальных уравнений в п. 1.2., проанализируем проблему устойчивости представления (1.1). Всякой интегральной кривой системы вида (1.2) с начальным вектором $S_0 = S(t_0)$ должна отвечать в (1.1) вектор-функция [1]

$$S^0(t) = H(t_0, t, S_0)S^0, \quad H(t_0, t_0, S_0)S^0 = S_0. \quad (1.8)$$

Такая вектор-функция имеет место в том случае, если положить $G(\tau) = S^0\delta(\tau - t_0)$, где δ – функция Дирака. Выполнение указанного соответствия достигается путем выбора функции $H(t_0, t, S_0)$. Для получения уравнения интегральной кривой в фазовых переменных необходимо исключить t из соотношений (1.8).

Решениям системы (1.2) в случае отсутствия в правых частях в явном виде t отвечают такие $\bar{S}$ в пространстве фазовых переменных, которые удовлетворяют соотношению

$$\bar{S}'(t) = H'_t(\bar{t}, t)H^{-1}(\bar{t}, \bar{t})\bar{S} \equiv 0, \quad -\infty \leq t \leq \infty. \quad (1.9)$$

Стоит отметить, что именно системы, не содержащие в правой части в явном виде t , и называются автономными. Решение $\bar{S}$ будет устойчиво, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что

$$\|S_0 - \bar{S}\| < \sigma \Rightarrow \|S^0(t) - \bar{S}\| \leq \varepsilon. \quad (1.10)$$

Если же условие (1.10) не будет выполняться, то решение $\bar{S}$ будет неустойчиво.

Хотя проведенный в п. 1.2 анализ и позволяет судить об устойчивости стационарного состояния, он не относится к проблемам устойчивости $S(t)$ при малых возмущениях ΔG входных данных G , т. е. к изучению

$$\Delta S = \int_{-\infty}^t H_{G+\Delta G}(t, \tau)(G + \Delta G)(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t H_G(t, \tau)G(\tau) d\tau, \quad (1.11)$$

потому что малому возмущению ΔS_0 отвечает возмущение $\Delta y = \Delta S_0 \delta(\tau - t_0)$, принимающее при $\tau = t_0$ неограниченное значение. Здесь возможны две проблемы, возникающие из-за разных обстоятельств. Малые значения ΔS вызывают проблему устойчивости вынужденных преобразований системы, в то время как малые значения Δy вызывают проблему устойчивости собственных преобразований системы при возмущении ее исходных состояний.

Как и в случае дифференциальных уравнений мы приходим к теореме Тихонова. Из положений теоремы следует, что зависимость (1.10) принимает вид

$$\left\| \{s_{0i_2}\}_{i^0+1}^m - \{\bar{s}_{i_2}\}_{i^0+1}^m \right\| \leq \sigma \Rightarrow \left\| \{s_{i_2}^0(t)\}_{i^0+1}^m - \{s_{i_2}\}_{i^0+1}^m \right\| \leq \varepsilon. \quad (1.12)$$

Зависимость (1.12) соблюдается равномерно по $\{s_{i_1}\}_1^{i^0}$. Помимо этого, при определенных условиях в пределе можно исследовать только решение вырожденной системы. Данное обстоятельство достигается в том случае, когда из-за увеличения $s_{i_2}^0(t)$ второе неравенство в (1.12) выполняется при все больших σ и все быстрее, это в свою очередь может произойти благодаря росту t .

Окончательные результаты схожи с полученными с помощью дифференциальных уравнений. Этот аспект позволяет говорить о одинаковой эффективности обоих подходов. Поэтому на окончательный выбор того или иного аппарата может повлиять удобство и привычка его использования, сложность получения исходных функций f_i в (1.2) или $H(t, \tau)$ в (1.1), и подобное.

Однако, определенные теоретические а также практические преимущества интегральных уравнений выявляются благодаря большей компактности записи (1.1) и устойчивости процедуры интегрирования по отношению к процедуре

дифференцирования. Последнее обстоятельство дает возможность анализировать выражение (1.1), в котором $H(t, \tau)$ – любая кусочно-непрерывная функция, без особенных затруднений, в отличие от дифференциальных уравнений, для которых в данном стечении обстоятельств возникает проблема исследования дифференциальных уравнений неограниченного порядка и с разрывными правыми частями.

2. МОДЕЛИ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ В СФЕРЕ ЭКОНОМИКИ

2.1. Макромодели экономического роста

Одно- или многосекторные макромодели экономического роста включают в себя вполне подробное представление производственных, а также технологических возможностей и взаимосвязей в хозяйстве и их перемен с течением времени. Непроизводственная область и механизмы экономики, способные регулировать хозяйство, отображены в подобных моделях. Принято, что потребности общества в конечном продукте известны, они могут быть представлены как в явном виде, так и в неявном через так называемую функцию общественных предпочтений потребления. С помощью моделей роста может быть спроектирован осуществимый с технологической точки зрения план эксплуатации и роста экономики, способный как следует соответствовать потребностям общества. В то же время считается, что механизмы экономики таковы, что они должны гарантировать исполнение полученного плана.

2.2. Микромодели равновесия

Представление производственных и технологических способностей хозяйства, обзор непроизводственной сферы употребления выпускаемой продукции и отражение механизмов, стабилизирующих обмен и сбыт готовой продукции, осуществляется с помощью микромоделей равновесия. Российская литература трактует эти механизмы как устройства товарообмена в централизованном социалистическом хозяйстве, в то время как иностранная литература понимает их как рыночные в ситуации свободной конкуренции. Подобные модели могут обеспечить равновесное состояние хозяйства, однако это происходит только при определенных условиях. Хотя при этом данные модели не показывают изменение экономики и не обрисовывают механизмы, которые отвечают за развитие.

2.3. Макромодели равновесия

Макромодели равновесия обеспечивают представление капиталистической экономики, а также оценивают устойчивость всего хозяйства. Они учитывают механизмы распределения национального дохода как для потребления и сбережения, так и для потребления и инвестиций, а также определяют факт наличия баланса на различных уровнях занятости. Подобные модели никак не отражают рост производства и экономические механизмы, призванные управлять им. К данному классу моделей относятся также модели циклов, учитывающие колебания в распределении национального дохода и связанные с ними колебания самого дохода возле положения равновесия. Процессы расширения производства не учитываются.

2.4. Модели глобальной динамики

Модели глобальной динамики пытаются описать процесс расширения производства, связь этого процесса с процессами в непроизводственной области: преобразования потребления и уровня жизни, рождаемости и смертности жителей и их воздействие на среду обитания. Данные связи и устанавливают механизмы регулирования экономики. Впрочем, модели глобальной динамики не распознают однозначно ни чисто технологических, ни чисто экономических процессов. Помимо этого, в рамках модели также нельзя выделить механизмы регулирования, соответственно большинство взаимосвязей в моделях не поддаются удовлетворительной трактовке.

3. КЛАССЫ МОДЕЛЕЙ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

3.1. Двухпродуктовые модели

Несмотря на то, что практически все макроэкономические модели характеризуются негладкими и возможно даже разрывными функциями, традиционно они описывались с помощью систем дифференциальных уравнений [14], что, как было указано, приводит к большим проблемам. Помимо указанного, по дифференциальным уравнениям также нельзя судить о динамике сокращения и полного отказа от устаревших технологий производства.

Такие серьезные недостатки ведут к отысканию других способов анализа макроэкономических моделей. Самым релевантным выходом из данной ситуации служит использование интегральных уравнений, которые свободны от указанных недостатков. Конечно, подобные модели нередко описываются очень сложными системами уравнений, которые для своего решения требуют применения большого количества технических приемов [15, 16]. Поэтому для понимания принципа интегрального отображения опишем простую двухпродуктовую модель. Так как прежде всего ориентация идет на макроэкономическую модель экономики, то вся экономика делится на две группы. Первая группа, будем называть ее группой А, направлена на производства тех средств, которые затем используются в дальнейшем производстве. А вторая группа – группа Б – выполняет внешние функции, то есть производит предметы потребления.

Конкретизируем немного отрасли, относящиеся к группе Б. Сюда относятся не только предметы личного потребления, но и вся продукция, которая в дальнейшем больше не используется в производстве. К данной продукции можно отнести все виды массового обслуживания, например, пассажирский транспорт, телевидение, системы радиовещания, поликлиники и т. п., а также все виды вооружений.

Теперь подробнее поговорим про то, как происходит распределение отраслей по группам. Например, у нас есть производство автомобилей, если оно делает авто для личного пользования, то производство всех промежуточных

продуктов, используемых для создания авто, вместе с самим производством автомобилей будет относиться к группе Б. В противном случае, когда автомобиль идет для какого-либо служебного пользования в дальнейшем производстве, то все промежуточное производство вместе с главным будет относиться к группе А.

Здесь соответственно возникают ситуации, когда одно и тоже производство в одном случае относится к группе А, а другом к группе Б. Возьмем, к примеру, опять же производство легковых автомобилей со всеми промежуточными производствами. Согласно первому уточнению, все это относится к группе Б, но при этом производство промежуточного оборудования, использующегося в дальнейшем, естественно отнести к группе А.

Два этих уточнения приводят к тому, что в среднем трудность производства в обеих группах практически одинакова. Это очень важный качественный вывод, который помогает упростить модель.

Предположим, что в рассматриваемой модели в течение некоторого промежутка времени от 0 до какого-то конкретного $\bar{t}$ непрерывно или скачкообразно происходит научно-технический прогресс. Прогресс является своеобразным раздражителем, который заставляет появляться новые мощности с более высокими показателями производства. Сам же отсчет времени ведется с момента ввода в эксплуатацию в запланированный период $T = [\underline{t}, \bar{t}]$ самой старой из производственных мощностей.

У каждой группы соответственно должны быть свои показатели производства. Для группы А таким показателем является некоторая известная функция $\varphi(t, \tau)$, которая должна отображать число создаваемых в единицу времени рабочих мест в технологии m_t на одно усредненное рабочее место в технологии m_τ . Предполагается также, что в каждый момент времени t может существовать только одна новейшая технология m_t , которая используется во вводимой мощности. Стоит отметить, что благодаря вышеуказанному качественному выводу можно считать технологию m_t , принадлежащей к обоим группам А и Б. Таким образом, получаем первую заданную функцию

$$\varphi(t, \tau), 0 \leq \tau \leq t \leq \bar{t}.$$

Также выберем производственный показатель для группы Б. Это будет некоторая известная функция времени $\theta(t)$, она отображает величину выпуска предметов потребления в единицу времени на единицу уже имеющихся в группе Б производственных мощностей. В этом случае, как и в группе А, мощности измеряются в усредненных рабочих местах. Тем самым, получаем показатель, характеризующий группу Б

$$\theta(t), 0 < t \leq \bar{t}.$$

К сожалению, далеко не всегда новейшие технологии достаточно хороши, чтобы заменить уже имеющиеся. Поэтому действительно новейшей можно считать ту технологию, которая будет лучше, чем та, которая используется в данный момент, иначе нет никакого смысла менять технологию производства. Это очень важный аспект, который заранее должен учитываться при составлении функций $\varphi(t, \tau)$ и $\theta(t)$.

Для дальнейшего рассмотрения макроэкономических моделей с помощью интегральных уравнений необходимо ввести еще несколько функций. Первая функция

$$n(t), \underline{t} \leq t \leq \bar{t}$$

отображает число работников, которые уже имеются в системе к заданному моменту времени t , так называемый списочный состав. Вторая функция

$$r(t), \underline{t} \leq t \leq \bar{t}$$

отображает продолжительность рабочего дня в среднем, измеряемого в долях суток, здесь также учитываются выходные, отпуска, болезни и другие подобные ситуации. Третья и четвертая функции отображают то, насколько быстро увеличивается число рабочих мест в новейших технологиях в конкретный момент времени t в группах А и Б:

$$x(t), 0 \leq t \leq \bar{t},$$

$$y(t), 0 \leq t \leq \bar{t}.$$

Пятая и шестая функция отображают коэффициенты нагрузки мощностей в момент времени t , сформированных в момент времени τ , в группах А и Б:

$$v(t, \tau), \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad 0 \leq \tau \leq t,$$

$$\mu(t, \tau), \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad 0 \leq \tau \leq t.$$

После всего, для конкретного запланированного промежутка T укажем еще функцию, устанавливающую предпочтительный объем потребления (на запланированном промежутке T):

$$c(t), \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}.$$

Посредством указанных функций естественным образом выстраиваются интегральные уравнения, формирующие искомую модель. Первоначально, уравнение роста фондов

$$x(t) + y(t) = \int_0^t x(\tau) v(t, \tau) \varphi(t, \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}; \quad (3.1)$$

затем, уравнение потребления

$$c(t) = \int_0^t y(\tau) \mu(t, \tau) \theta(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}; \quad (3.2)$$

и наконец, уравнение баланса рабочей силы

$$n(t)r(t) = \int_0^t [x(\tau)v(t, \tau) + y(\tau)\mu(t, \tau)] d\tau, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}. \quad (3.3)$$

За счет выстроенной системы интегральных уравнений допускается сооружать многообразные задачи оптимизации. Минимизация затрат на рабочую силу для конкретного потребления $c(t)$ в течение определенного запланированного периода T является ярким примером естественной постановки задачи оптимизации. Проще говоря, требуется найти минимум интеграла

$$\int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left(\int_0^t [x(\tau)v(t, \tau) + y(\tau)\mu(t, \tau)] d\tau \right) dt,$$

который должен отвечать следующим требованиям

$$x(t) + y(t) = \int_0^t x(\tau) v(t, \tau) \varphi(t, \tau) d\tau,$$

$$c(t) = \int_0^t y(\tau) \mu(t, \tau) \theta(\tau) d\tau,$$

$$0 \leq v(t, \tau) \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \bar{t}, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad (3.4)$$

$$0 \leq \mu(t, \tau) \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \bar{t}, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad (3.5)$$

$$\int_0^t [x(\tau) v(t, \tau) + y(\tau) \mu(t, \tau)] d\tau \leq n(t) r(t), \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t} \quad (3.6)$$

$$x(t) > 0, \quad y(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}. \quad (3.7)$$

В выполнении условий (3.4) – (3.7) важную роль играют функции v , μ , x , y , их значения должны быть неотрицательны. Остальные неравенства вообще можно опустить при первой попытке решить задачу оптимизации. В повторных попытках увеличение $r(t)$, уменьшение $c(t)$, или выполнение обоих действий, может повлиять на выполнение условия (3.6) в положительную сторону. Неотрицательность оставшихся функций идет из их определения, это функции $\varphi(t, \tau)$, $\theta(t)$, $n(t)$, $r(t)$ и $c(t)$.

Как уже было сказано, бывают ситуации, когда новейшие технологии уступают в эффективности производства уже имеющимся. Это соответствует случаю $v > 1$ и $\mu > 1$, единственным выходом в данной ситуации является преобразование функций $\varphi(t, \tau)$ и $\theta(t)$, что подразумевает под собой изменение выбранной технической политики.

Вообще эти функции могут менять свои значения только тогда, когда внедряются новые технологии, или, говоря конкретнее, в какие-то определенные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_k$. Исходя из этого, можно заключить, что как $\varphi(t, \tau)$, так и $\theta(t)$ кусочно-постоянны. При этом, в случае неоптимальности технологии m_{t_i} , возникшей в момент времени t_i , темп разработки новых рабочих мест на сегменте $[t_i, t_{i+1}]$ по технологии m_{t_i} на самом то деле должен равняться нулю. Также

может оказаться, что для какой-либо более старой технологии m_{t_j} , $j < i$, найденное решение использует имеющиеся мощности сверх 100 %. Технология m_{t_j} в невырожденном случае единственна, поэтому именно ее и следует использовать для замены неоптимальной технологии m_{t_i} на сегменте $[t_i, t_{i+1}]$.

Подобная схема выбора оптимальных технологий также относится и к другим критериям линейной оптимизации, в частности, к максимизации функции $c(t)$ производства товаров потребления за какой-либо конкретный период времени. Помимо этого, решается проблема выбора оптимальных технологий в каждый момент возникновения новейших технологий.

Стоит подчеркнуть, что помимо задачи оптимизации выбора технических решений при новом строительстве описанная модель решает проблему оптимизации применения уже построенных мощностей.

Попробуем немного упростить модель путем ограничения класса функций, которому должны принадлежать функции загрузки мощностей v и μ . Пусть этот класс состоит из функций следующего вида

$$f(t, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq a(t), \\ 1, & a(t) < \tau < \bar{t}, \end{cases}$$

здесь $a(t)$ – какая-нибудь неизвестная функция времени, она должна соответствовать неравенству

$$0 \leq a(t) < t. \quad (3.8)$$

Такое ограничение дает возможность рассмотреть более простые частные случаи изначальной модели, делается это с целью показать ее сложность и необычность.

Из вида функции $f(t, \tau)$ можно заключить, что созданные до порогового значения $a(t) < t$ мощности фактически не используются в момент времени t , в то время как мощности, созданные после этого периода, используются на 100 %, для корректного выполнения этого условия функция $a(t)$ должна быть неубывающей.

Для дальнейших рассуждений удобно ввести следующие обозначения

$$x(t) + y(t) = m(t), \quad x(t) = \hat{y}(t)m(t), \quad y(t) = [1 - \hat{y}(t)]m(t),$$

здесь функция $m(t)$ неотрицательна, а $\hat{y}(t)$ удовлетворяет неравенству $0 \leq \hat{y}(t) \leq 1$. Теперь уравнения (3.1) – (3.3) можно записать в следующем виде

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \varphi(t, \tau) \hat{y}(\tau) m(\tau) d\tau, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t},$$

$$c(t) = \int_{a(t)}^t \theta(\tau) [1 - \hat{y}(\tau)] m(\tau) d\tau, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t},$$

$$n(t)r(t) = \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}.$$

Принимая во внимание еще два условия $\hat{y} = \text{const}$ и $n(t)r(t) = \text{const}$, все три уравнения переписываются следующим образом

$$m(t) = \hat{y} \int_{a(t)}^t \varphi(t, \tau) m(\tau) d\tau, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad (3.9)$$

$$c(t) = (1 - \hat{y}) \int_{a(t)}^t \theta(\tau) m(\tau) d\tau, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}, \quad (3.10)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{m(t)}{m(a(t))}, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}. \quad (3.11)$$

Неизвестными здесь являются функции $m(t)$, $a(t)$ и константа $\hat{y}$, которая удовлетворяет соотношению $0 \leq \hat{y} \leq 1$, в то время как $\alpha(\tau, t)$, $\beta(t)$, $c(t)$ известны. Для этой упрощенной задачи существует несколько постановок задачи оптимизации, одна из них определяется на интервале T при условии неотрицательности функции $m(t)$, выполнения соотношений (3.8) – (3.10) и ограничения $0 \leq \hat{y} \leq 1$ как

$$\max_{\underline{t}} \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \left(\int_{a(t)}^t \theta(\tau) m(\tau) d\tau \right) dt.$$

Уравнение (3.11) представляет собой дифференциально-разностное уравнение, которое, учитывая также присутствие двух уравнений с переменным нижним пределом, может вызвать несколько существенных затруднений в процессе вычисления. Поэтому вполне логичным выглядит замена соотношения (3.11) на более удобное, например, на

$$\int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau = nr = \text{const}, \quad \underline{t} \leq t \leq \bar{t}.$$

Таким образом, мы получили гораздо более простую постановку задачи.

Для дальнейшего обобщения полученной модели поделим все ее продукты на две группы. К продуктам первого рода будет относиться та часть обеспечения системы веществом, энергией и информацией, которая используется для поддержания внутренних функций системы, оставшиеся часть соответственно будет поддерживать внешние функции, это будут продукты второго рода.

Для описания всего процесса используем опять же экономику, которая, как и прежде, поделена на две составляющие, первая из них (группа А) создает средства производства, а вторая (группа Б) – товары потребления. Обе эти группы используют продукты первого рода для производства других продуктов, первая группа производит товары первого рода, а вторая соответственно товары второго рода.

Введем в рассмотрение скорости $m_1(t)$ и $m_2(t)$ изменения количества новых продуктов в группах А и Б соответственно, а также функции $p_1(t)$ и $p_2(t)$, которые отображают какие части продуктов первого рода задействованы соответственно в А и Б, они определяются соотношениями

$$p_1(t) = \int_0^t v(t, \tau) m_1(\tau) d\tau, \quad p_2(t) = \int_0^t \mu(t, \tau) m_2(\tau) d\tau.$$

В последних соотношениях $0 \leq v, \mu \leq 1$ выполняют роль коэффициентов интенсивности эксплуатации продуктов первого в момент времени t , которые были подготовлены в момент времени τ . Как и прежде, счет времени начинается в

момент ввода в эксплуатацию самого устаревшего продукта первого рода, задействованного в последующие моменты $t > t_0 > 0$, где t_0 – начало моделирования.

Также имеет место научно-технический прогресс, происходящий непрерывно или скачкообразно, он выражается в обновлении технологий создания продуктов первого и второго рода. Показателем эффективности каждой технологии может быть ее производительность, которую можно трактовать как удельную относительную скорость. Для продуктов первого рода – скорость формирования новых продуктов первого рода в момент времени t на единицу продуктов этого рода в момент времени τ , действующих в А, для продуктов второго рода – скорость формирования новых продуктов второго рода в момент времени t на единицу продуктов первого рода в момент времени τ , действующих в Б.

Предположим, что $m_1 = ym$, $m_2 = (1 - y)m$, $m = m_1 + m_2$, данное представление имеет место благодаря тому, что функции m_1 , m_2 , φ , θ неотрицательны, y – распределительная функция, удовлетворяющая неравенству $0 \leq y \leq 1$.

К этому моменту мы ввели все нужные нам функции, теперь перейдем к построению искомой модели, которая будет описываться несколькими интегральными уравнениями. Первое из них отображает реконструкцию основополагающих продуктов первого рода, которые в дальнейшем используются для поддержания внутренних функций объекта:

$$m(t) = \int_0^t \varphi(t, \tau) v(t, \tau) m_1(\tau) d\tau, \quad 0 < t_0 < t, \quad 0 \leq v(t, \tau) \leq 1. \quad (3.12)$$

Второе уравнение отображает реконструкцию продуктов второго рода, которые в дальнейшем используются для поддержания внешних функций объекта:

$$c(t) = \int_0^t \theta(t, \tau) \mu(t, \tau) m_2(\tau) d\tau, \quad t_0 < t, \quad 0 \leq \mu(t, \tau) \leq 1. \quad (3.13)$$

Третье и четвертое уравнения отвечают за баланс между продуктами системы и ресурсами, поступающими в систему:

$$P(t) = \int_0^t [v(t, \tau)m_1(\tau) + \mu(t, \tau)m_2(\tau)] d\tau,$$

$$m_1(\tau) + m_2(\tau) = m(\tau), \quad M(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau. \quad (3.14)$$

Здесь $P(t)$ – общий объем продуктов первого рода в момент времени t , использующихся как для создания продуктов первого рода, так и для создания продуктов второго рода.

Для того чтобы окончательно получить динамическую модель необходимо дополнить ее начальными данными, поэтому на отрезке времени $[0, t_0]$ функции $m(t)$, $m_1(t)$, $m_2(t)$, $c(t)$ считаются известными. Благодаря последнему предположению получаем динамическую модель (3.12) – (3.14) при $t > t_0$ с известной предысторией на сегменте $[0, t_0]$.

При этом, как уже было сказано, в любой такой систем происходит замещение старых технологий новыми, замененные технологии образуют так называемый отвал системы, который в зависимости от момента времени t может принимать различные значения. Эта зависимость отображается следующим образом

$$O(t) = \int_0^t [m(\tau) - v(t, \tau)m_1(\tau) - \mu(t, \tau)m_2(\tau)] d\tau = M(t) - P(t), \quad (3.15)$$

Также возможен случай, когда некоторая часть $O(t)$ может обратно вернуться в основное производство, тогда эта часть выполняет функцию запаса системы.

Здесь имеет место несколько важных частных случая соотношений (3.12) – (3.15), они получаются в зависимости от вида функций $v(t, \tau)$ и $\mu(t, \tau)$

$$v(t, \tau) = v(t - \tau), \quad \mu(t, \tau) = \mu(t - \tau), \quad (3.16)$$

$$v(t, \tau), \mu(t, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq a(t), \\ 1, & a(t) < \tau \leq t, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$v(t, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq a_1(t), \\ v(t - \tau), & a_1(t) < \tau \leq t, \end{cases} \quad \mu(t, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq a_2(t), \\ \mu(t - \tau), & a_2(t) < \tau \leq t. \end{cases} \quad (3.18)$$

Каждый из этих случаев соответствует определенной ситуации, (3.16) – стационарный коэффициент интенсивности, (3.17) – продукты, сделанные не позднее определенного срока $a(t) < t$, могут вовсе не использоваться в момент времени t , в то время как продукты, сделанные после этого срока используются на 100 %, (3.18) – обобщение (3.16) и (3.17).

В соответствии с указанными случаями соотношения (3.12) – (3.15) можно переписать следующими способами

$$\begin{aligned}
 m(t) &= \int_0^t \varphi(t, \tau) v(t - \tau) m_1(\tau) d\tau, \\
 c(t) &= \int_0^t \theta(t, \tau) \mu(t - \tau) m_2(\tau) d\tau, \quad 0 \leq v, \mu \leq 1, \\
 P(t) &= \int_0^t [v(t - \tau) m_1(\tau) + \mu(t - \tau) m_2(\tau)] d\tau, \\
 m(t) &= m_1 + m_2(t), \quad O(t) = M(t) - P(t), \quad 0 < t_0 < t;
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
 m(t) &= \int_{a(t)}^t \varphi(t, \tau) m_1(\tau) d\tau, \\
 c(t) &= \int_{a(t)}^t \theta(t, \tau) m_2(\tau) d\tau, \quad m_1(t) + m_2(t) = m(t), \\
 P(t) &= \int_{a(t)}^t m(\tau) d\tau, \quad O(t) = \int_0^{a(t)} m(\tau) d\tau, \quad 0 \leq a(t) < t, \quad 0 < t_0 < t;
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 m(t) &= \int_{a_1(t)}^t \varphi(t, \tau) v(t - \tau) m_1(\tau) d\tau, \\
 c(t) &= \int_{a_2(t)}^t \theta(t, \tau) \mu(t - \tau) [m(\tau) - m_1(\tau)] d\tau, \quad 0 \leq v, \mu \leq 1, \\
 P(t) &= \int_{a_1(t)}^t v(t - \tau) m_1(\tau) d\tau + \int_{a_2(t)}^t \mu(t - \tau) [m(\tau) - m_1(\tau)] d\tau, \\
 O(t) &= M(t) - P(t), \quad 0 \leq a_1(t), \quad a_2(t) < t, \quad 0 < t_0 < t.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Соотношения (3.20) можно немного преобразовать, для этого предположим, что функции $m(t)$ и $a(t)$ обладают необходимой гладкостью, а также $m(a) \neq 0$. Тогда, обозначая производную $P'(t)$ как $p(t)$, получим

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \varphi(t, \tau) m_1(\tau) d\tau, \quad c(t) = \int_{a(t)}^t \theta(t, \tau) [m(\tau) - m_1(\tau)] d\tau, \quad c(t) > 0,$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{m(t) - p(t)}{m(a)}, \quad 0 \leq a(t) < t, \quad 0 < t_0 < t. \quad (3.22)$$

Как и в одном из прошлых случаев, мы получили, что система (3.22), несмотря на более простую формулировку, вместе с двумя нелинейными уравнениями Вольтерра особого вида, т. е. с возможно неизвестной функций в нижнем пределе, содержит еще и нелинейное дифференциально-разностное уравнение. Конечно, это обстоятельство может вызвать некоторые затруднения в процессе вычисления.

Укажем также дискретные аналоги соотношений (3.12) – (3.22), их полезно использовать в случае некоторых уравнений:

$$m_k = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_{ik} v_{ik} m_{1i} \Delta \tau_i$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{k-1} \theta_{ik} \mu_{ik} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \quad 0 \leq v_{ik}, \mu_{ik} \leq 1, \quad (3.23)$$

$$P_k = \sum_{i=0}^{k-1} [v_{ik} m_{1i} + \mu_{ik} (m_i - m_{1i})] \Delta \tau_i,$$

$$O_k = M_k - P_k, \quad 0 < k_0 < k;$$

$$m_k = \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_{ik} v_{k-i} m_{1i} \Delta \tau_i,$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{k-1} \theta_{ik} \mu_{k-i} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \quad 0 \leq v_{k-i}, \mu_{k-i} \leq 1, \quad (3.24)$$

$$P_k = \sum_{i=0}^{k-1} [v_{k-i} m_{1i} + \mu_{k-i} (m_i - m_{1i})] \Delta \tau_i,$$

$$O_k = M_k - P_k, \quad 0 < k_0 < k;$$

$$\begin{aligned}
m_k &= \sum_{i=a_k}^{k-1} \varphi_{ik} m_{1i} \Delta \tau_i, \\
c_k &= \sum_{i=a_k}^{k-1} \theta_{ik} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \\
P_k &= \sum_{i=a_k}^{k-1} m_i \Delta \tau_i, \\
O_k &= \sum_{i=0}^{a_k-1} m_i \Delta \tau_k, \quad 0 \leq a_k < k, \quad 0 < k_0 < k;
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
m_k &= \sum_{i=a_k^{(1)}}^{k-1} \varphi_{ik} v_{k-i} m_{1i} \Delta \tau_i, \\
c_k &= \sum_{i=a_k^{(2)}}^{k-1} \theta_{ik} \mu_{k-i} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \quad 0 \leq v_{k-i}, \mu_{k-i} \leq 1, \\
P_k &= \sum_{i=a_k^{(1)}}^{k-1} v_{k-i} m_{1i} \Delta \tau_i + \sum_{i=a_k^{(2)}}^{k-1} \mu_{k-i} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \\
O_k &= M_k - P_k, \quad M_k = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \Delta \tau_i, \quad 0 < k_0 < k;
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
m_k &= \sum_{i=a_k}^{k-1} \varphi_{ik} m_{1i} \Delta \tau_i, \quad c_k = \sum_{i=a_k}^{k-1} \theta_{ik} (m_i - m_{1i}) \Delta \tau_i, \\
a_{k+1} - a_k &= \frac{m_k - p_k}{m_{a_k}} \Delta \tau_k, \quad 0 \leq a_k < k, \quad 0 < k_0 < k.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

При этом m_i и m_{1i} для $i = 0, \dots, k_0$ считаются известными.

Следует отметить, что, если интеграл трактуется в смысле Стильеса и подынтегральные функции берутся из достаточно широкого класса, соотношения (3.12) – (3.21) содержат в себе соотношения (3.23) – (3.26).

3.2. n -продуктовые модели

Опираясь на теоретические рассуждения, использованные при описании двухпродуктовых моделей, точно также опишем n -продуктовую модель

$$\begin{aligned}
m_i(t) &= \sum_{j=1}^r \int_0^t \varphi_{ij}(t, \tau) v_{ij}(t, \tau) m_{1ij}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, r, \\
c_l(t) &= \sum_{j=1}^r \int_0^t \theta_{lj}(t, \tau) \mu_{lj}(t, \tau) m_{2lj}(\tau) d\tau, \quad l = 1, \dots, s, \\
P_j(t) &= \int_0^t \left[\sum_{i=1}^r v_{ij}(t, \tau) m_{1ij}(\tau) + \sum_{l=1}^s \mu_{lj}(t, \tau) m_{2lj}(\tau) \right] d\tau, \\
c_l(t) &= \int_0^t c_l(\tau) d\tau > 0, \quad l = 1, \dots, s, \\
O_j(t) &= M_j(t) - P_j(t), \quad M_j(t) = \int_0^t m_j(\tau) d\tau, \\
\sum_{i=1}^r m_{1ij}(\tau) + \sum_{l=1}^s m_{2lj}(\tau) &= m_j(\tau), \quad j = 1, \dots, r, \quad P(t) = \sum_{j=1}^r P_j(t), \\
O(t) &= M(t) - P(t), \quad M(t) = \sum_{j=1}^r M_j(t), \\
0 \leq v_{ij}, \mu_{lj} &\leq 1, \quad 0 < t_0 < t, \quad n = r + s.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

В (3.28) m_i – скорость восстановления i -х новых продуктов первого рода, используемых для реализации внутренних функций и изменения объекта; c_l – скорость формирования l -х новых продуктов второго рода, используемых для осуществления внешних функций системы; m_{1ij} , m_{2lj} – аддитивные части скоростей j -х продуктов первого рода, использующихся для разработки i -х продуктов первого рода и l -х продуктов второго рода соответственно; φ_{ij} , θ_{lj} – производительности создания i -х продуктов первого рода и l -х продуктов второго рода за счет j -х продуктов первого рода; v_{ij} , μ_{lj} – коэффициенты интенсивности применения в момент времени t имеющихся продуктов первого рода возраста $t - \tau$, $P_j(t)$ – количество действующих в момент времени t j -х продуктов первого рода, $O_j(t)$ – отвал этих продуктов, считается, что на отрезке времени $[0, t_0]$ функции $m_i(\tau)$, $m_{1ij}(\tau)$, $m_{2ij}(\tau)$ известны.

Частными случаями (3.28) являются

$$\begin{aligned}
m_i(t) &= \sum_{j=1}^r \int_0^t \varphi_{ij}(t, \tau) v_{ij}(t - \tau) m_{1ij}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, r, \\
c_l(t) &= \sum_{j=1}^r \int_0^t \theta_{lj}(t, \tau) \mu_{lj}(t - \tau) m_{2lj}(\tau) d\tau, \quad l = 1, \dots, s, \\
P_j(t) &= \int_0^t \left[\sum_{i=1}^r v_{ij}(t - \tau) m_{1ij}(\tau) + \sum_{l=1}^s \mu_{lj}(t - \tau) m_{2lj}(\tau) \right] d\tau, \\
O_j(t) &= M_j(t) - P_j(t), \quad \sum_{i=1}^r m_{1ij}(\tau) + \sum_{l=1}^s m_{2lj}(\tau) = m_j(\tau), \\
j &= 1, \dots, r, \quad 0 < t_0 < t;
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
m_i(t) &= \sum_{j=1}^r \int_{a_j(t)}^t \varphi_{ij}(t, \tau) m_{1ij}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, r, \\
c_l(t) &= \sum_{j=1}^r \int_{a_j(t)}^t \theta_{lj}(t, \tau) m_{2lj}(\tau) d\tau, \quad l = 1, \dots, s, \\
P_j(t) &= \int_{a_j(t)}^t m_j(\tau) d\tau, \quad O_j(t) = \int_0^{a_j(t)} m_j(\tau) d\tau, \\
\sum_{i=1}^r m_{1ij}(\tau) + \sum_{l=1}^s m_{2lj}(\tau) &= m_j(\tau), \quad 0 \leq a_j(t) < t, \quad j = 1, \dots, r, \quad 0 < t_0 < t;
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
m_i(t) &= \sum_{j=1}^r \int_{a_{ij}^{(1)}(t)}^t \varphi_{ij}(t, \tau) v_{ij}(t - \tau) m_{1ij}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, r, \\
c_l(t) &= \sum_{j=1}^r \int_{a_{lj}^{(2)}(t)}^t \theta_{lj}(t, \tau) \mu_{lj}(t - \tau) m_{2lj}(\tau) d\tau, \quad l = 1, \dots, s, \\
P_j(t) &= \sum_{i=1}^r \int_{a_{ij}^{(1)}(t)}^t v_{ij}(t - \tau) m_{1ij}(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^s \int_{a_{lj}^{(2)}(t)}^t \mu_{lj}(t - \tau) m_{2lj}(\tau) d\tau, \\
O_j(t) &= M_j(t) - P_j(t), \quad \sum_{i=1}^r m_{1ij}(\tau) + \sum_{l=1}^s m_{2lj}(\tau) = 1, \quad j = 1, \dots, r, \\
0 &\leq a_{ij}^{(1)}, a_{lj}^{(2)} < t, \quad 0 \leq v_{ij}, \mu_{lj} \leq 1, \quad 0 < t_0 < t.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Важными также являются частные случаи, возникающие при

$$\varphi_{ij}(t, \tau) = \varphi_{ij}(t - \tau), \quad \theta_{lj}(t, \tau) = \theta_{lj}(t - \tau), \quad (3.32)$$

$$\varphi_{ij}(t, \tau) = \varphi_{ij}^{(1)}(t) \varphi_{ij}^{(2)}(\tau), \quad \theta_{lj}(t, \tau) = \theta_{lj}^{(1)}(t) \theta_{lj}^{(2)}(\tau), \quad (3.33)$$

$$\varphi_{ij}(t, \tau) = \sum_{k=1}^{s_{ij}} \varphi_{ijk}^{(1)}(t) \varphi_{ijk}^{(2)}(\tau), \quad \theta_{lj}(t, \tau) = \sum_{k=1}^{r_{lj}} \theta_{ljk}^{(1)}(t) \theta_{ljk}^{(2)}(\tau). \quad (3.34)$$

Понимая интегралы в (3.28) – (3.31) в смысле Стильеса, получаем соотношения, охватывающие как непрерывный, так и дискретный случай n -продуктовых моделей.

3.3. Континуальные модели

В случае больших s может быть так, что более удобной будет смешанная конечно-континуальная модель

$$\begin{aligned} m_i(t) &= \sum_{j=1}^r \int_0^t \varphi_{ij}(t, \tau) v_{ij}(t, \tau) m_{1ij}(\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, r, \\ c(t, v) &= \sum_{j=1}^r \int_0^t \theta_j(t, \tau, v) \mu_j(t, \tau, v) m_{2j}(\tau, v) d\tau, \quad v \in [0, 1], \\ P_j(t) &= \int_0^t \left[\sum_{i=1}^r v_{ij}(t, \tau) m_{1ij}(\tau) + \int_0^1 \mu_j(t, \tau, v) m_{2j}(\tau, v) dv \right] d\tau, \\ O_j(t) &= M_j(t) - P_j(t), \quad M_j(t) = \int_0^t m_j(\tau) d\tau, \\ \sum_{i=1}^r m_{1ij}(\tau) + \int_0^1 m_{2j}(\tau, v) dv &= m_j(\tau), \quad j = 1, \dots, r, \quad 0 < t_0 < t. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Здесь $c(t, v)$ – скорость изменения (по v) скорости создания (по t) v -х продуктов второй группы, которые представляют собой результат осуществления внешних функций изучаемого объекта, оставшиеся обозначения свой смысл не меняли. Обратим внимание, что $v = 0$ или $v = 1$ отвечают самым младшим или самым старшим номерам видов продуктов второй группы при данном подходе их организации.

Таким же образом, для достаточно больших r и s разумно изучать следующую континуальную модель:

$$\begin{aligned}
m(t, v) &= \int_0^1 \int_0^t \varphi(t, \tau, u, v) v(t, \tau, u, v) m_1(\tau, u, v) d\tau du, \quad v \in [0, 1], \\
c(t, v) &= \int_0^1 \int_0^t \theta(t, \tau, u, v) \mu(t, \tau, u, v) m_2(\tau, u, v) d\tau du, \quad v \in [0, 1], \\
P(t, u) &= \int_0^t \int_0^1 [v(t, \tau, u, v) m_1(\tau, u, v) + \mu(t, \tau, u, v) m_2(\tau, u, v)] dv d\tau > 0, \\
O(t, u) &= M(t, u) - P(t, u), \quad M(t, u) = \int_0^t m(\tau, u) d\tau, \\
\int_0^1 [m_1(\tau, t, v) + m_2(\tau, u, v)] dv &= m(\tau, u), \quad u \in [0, 1], \\
0 \leq v, \mu \leq 1, \quad 0 < t_0 < t,
\end{aligned} \tag{3.36}$$

где $m(\tau, u)$ – скорость изменения (по u) скорости воссоздания (по τ) u -х продуктов первой группы, рассчитанных на осуществление внутренних функций изучаемого объекта, оставшиеся обозначения остались без изменения.

Отметим, что с помощью распределения разнообразных скоплений индексов в n -продуктовой модели на разнообразные самостоятельные группы, можно подобным образом получить континуальные модели с интегралами любой кратности и с любым числом функций типа $m(t, v)$ и $c(t, v)$.

Также важно отметить, что индексы v можно интерпретировать как моменты первого появления нового v -го продукта через использование всех ранее полученных продуктов с временами выпуска $u \leq v$.

Тогда, в частности, модель (3.36) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
m(t, v) &= \int_0^v \int_0^t \varphi(t, \tau, u, v) v(t, \tau, u, v) m_1(\tau, u, v) d\tau du, \\
c(t, v) &= \int_0^v \int_0^t \theta(t, \tau, u, v) \mu(t, \tau, u, v) m_2(\tau, u, v) d\tau du,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
P(t, u) &= \int_0^t \int_0^t [\varphi(t, \tau, u, \upsilon) m_1(\tau, u, \upsilon) + \mu(t, \tau, u, \upsilon) m_2(\tau, u, \upsilon)] d\upsilon d\tau > 0, \\
O(t, u) &= M(t, u) - P(t, u), \quad M(t, u) = \int_0^t m(\tau, u) d\tau, \\
\int_0^{\upsilon} [m_1(\tau, u, \upsilon) + m_2(\tau, u, \upsilon)] d\upsilon &= m(\tau, \upsilon), \quad \tau, u \in [0, t], \\
0 \leq \upsilon, \mu \leq 1, \quad 0 < t_0 < t, \quad 0 < \upsilon_0 < \upsilon.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Запись вида (3.37), (3.38) выгодна для трактовки исходных структур $\varphi(t, \tau)$ и $\theta(t, \tau)$ двухпродуктовой модели в качестве продуктов континуальной модели. Также можно усложнить (3.38) так, чтобы все производительности $\varphi_{ij}(t, \tau)$ и $\theta_{ij}(t, \tau)$ n -продуктовой модели стали продуктами континуальной модели.

4. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ МОДЕЛЕЙ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

4.1. Модифицированный метод Ньютона – Канторовича

4.1.1. Постановка задачи

Проанализируем двухпродуктовую модель, представленную системой нелинейных интегральных уравнений [17]

$$\begin{aligned} x(t) - \int_{y(t)}^t h(t, \tau) g(\tau) x(\tau) d\tau &= 0, \\ \int_{y(t)}^t k(t, \tau) [1 - g(\tau)] x(\tau) d\tau &= f(t), \\ 0 < t_0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (4.1)$$

с неизвестными функциями $x(t) \in C_{[0, \infty]}$ и $y(t) \in C_{[t_0, \infty]}^1$, $0 \leq y(t) \leq t$, и данными на временном отрезке $[t_0, T]$ функциями $h(t, \tau), k(t, \tau) \in C_{[0, \infty] \times [t_0, \infty]}$, $f(t), g(t) \in C_{[t_0, \infty]}$, $0 < g(t) < 1$.

Чтобы построить приближенный метод решения системы (4.1) на отрезке $[t_0, T]$, запишем ее в виде

$$\begin{aligned} P_1(x(t), y(t)) &\equiv x(t) - \int_{y(t)}^t H(t, \tau) x(\tau) d\tau = 0, \\ P_2(x(t), y(t)) &\equiv f(t) - \int_{y(t)}^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau = 0, \quad 0 < t_0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

или в операторной форме

$$P(X) = (P_1(X), P_2(X)) = 0, \quad X = (x(t), y(t)). \quad (4.2)$$

Тут $H(t, \tau) = h(t, \tau)g(\tau)$, $K(t, \tau) = k(t, \tau)[1 - g(\tau)]$, к тому же функции $H(t, \tau)$ и $K(t, \tau)$ считаются равными нулю, если $\tau \notin [t_0, T]$.

4.1.2. Описание метода

Уравнение (4.2) можно решить с помощью модифицированного метода Ньютона – Канторовича, для этого выпишем приближенное уравнение

$$P'(X_0)(X - X_0) + P(X_0) = 0, \quad X_0 = (x_0(t), y_0(t)). \quad (4.3)$$

Несложно показать, что производная $P'(X_0)$ нелинейного оператора $P(X)$ в точке X_0 определяется следующей матрицей

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial P_1}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \\ \left. \frac{\partial P_2}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} & \left. \frac{\partial P_2}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \end{pmatrix}.$$

Вследствие этого, имеем

$$\left. \frac{\partial P_i}{\partial x(t)} \right|_{(x_0, y_0)} (\Delta x(t)) + \left. \frac{\partial P_i}{\partial y(t)} \right|_{(x_0, y_0)} (\Delta y(t)) = -P_i(x_0(t), y_0(t)), \quad i = 1, 2, \quad (4.4)$$

где $\Delta x(t) = x_1(t) - x_0(t)$, $\Delta y(t) = y_1(t) - y_0(t)$, $(x_0(t), y_0(t))$ – начальное приближение;

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_1(x_0 + sx, y_0) - P_1(x_0, y_0)}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(x_0(t) + sx(t) - \int_{y_0(t)}^t H(t, \tau) [x_0(\tau) + sx(\tau)] d\tau - x_0(t) + \int_{y_0(t)}^t H(t, \tau) x_0(\tau) d\tau \right) = \\ &= x(t) - \int_{y_0(t)}^t H(t, \tau) x(\tau) d\tau, \\ \left. \frac{\partial P_1}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P_1(x_0, y_0 + sy) - P_1(x_0, y_0)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_{y_0(t)}^{y_0(t) + sy(t)} H(t, \tau) x_0(\tau) d\tau = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sy(t) H(t, y_0(t) + \theta sy(t)) x_0(y_0(t) + \theta sy(t))}{s} = H(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) y(t), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

Таким же образом, имеем

$$\left. \frac{\partial P_2}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = - \int_{y_0(t)}^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad \left. \frac{\partial P_2}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = K(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) y(t).$$

В итоге система (4.4) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta x(t) - \int_{y_0(t)}^t H(t, \tau) \Delta x(\tau) d\tau + H(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) \Delta y(t) = \\ = \int_{y_0(t)}^t H(t, \tau) x_0(\tau) d\tau - x_0(t), \\ - \int_{y_0(t)}^t K(t, \tau) \Delta x(\tau) d\tau + K(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) \Delta y(t) = \\ = \int_{y_0(t)}^t K(t, \tau) x_0(\tau) d\tau - f(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Система (4.5) линейна, поэтому, решив ее относительно $\Delta x(t)$ и $\Delta y(t)$, можем найти $(x_1(t), y_1(t))$.

Последующее решение систем

$$\begin{aligned} \Delta x_m(t) - \int_{y_0(t)}^t H(t, \tau) \Delta x_m(\tau) d\tau + H(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) \Delta y_m(t) = \\ = \int_{y_{m-1}(t)}^t H(t, \tau) x_{m-1}(\tau) d\tau - x_{m-1}(t), \\ - \int_{y_0(t)}^t K(t, \tau) \Delta x_m(\tau) d\tau + K(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) \Delta y_m(t) = \\ = \int_{y_{m-1}(t)}^t K(t, \tau) x_{m-1}(\tau) d\tau - f(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

позволяет получить последовательность приближенных решений $(x_m(t), y_m(t))$,

где $\Delta x_m(t) = x_m(t) - x_{m-1}(t)$, $\Delta y_m(t) = y_m(t) - y_{m-1}(t)$, $m = 2, 3, \dots$

Стало быть, для того чтобы найти каждое следующее приближение необходимо решить систему двух линейных интегральных уравнений Вольтерра. В то же время ядра уравнений в левых частях не меняются на каждом этапе.

4.1.3. Теорема сходимости

Что касается сходимости процесса, изложенного в пункте 4. 1. 2., в векторном пространстве $\bar{C} = \left\{ X = \{x(t), y(r)\} : x(t), y(t) \in C_{[t_0, T]} \right\}$ с нормой $\|X\|_{\bar{C}} = \max \left\{ \|x\|_{C_{[t_0, T]}}, \|y\|_{C_{[t_0, T]}} \right\}$, то на базе общих теорем сходимости метода Ньютона-Канторовича можно изложить следующую теорему.

Теорема 4.1. [17] Пусть оператор P имеет непрерывную вторую производную в сфере Ω_0 ($\|X - X_0\| \leq r$) и выполняются следующие условия:

- 1) система (4.5) имеет в области $[t_0, T]$ единственное решение, т. е. существует $\Gamma_0 = [P'(X_0)]^{-1}$;
- 2) $\|\Delta X\| = \max \left\{ \|\Delta x\|_{C_{[t_0, T]}}, \|\Delta y\|_{C_{[t_0, T]}} \right\} \leq \eta$;
- 3) $\|\Gamma_0 P''(X)\| \leq L$ в Ω_0 .

Тогда если $h = L\eta < 1/2$ и $(1 - \sqrt{1 - 2h})\eta/h \leq r \leq (1 + \sqrt{1 - 2h})\eta/h$, то уравнение (4.1) имеет в сфере Ω_0 единственное решение X^* , к которому сходится процесс (4.6), при этом скорость сходимости оценивается неравенством $\|X^* - X_m\| \leq (\eta/h)(1 - \sqrt{1 - 2h})^{m+1}$, $m = 0, 1, \dots$

Чтобы доказать теорему, достаточно убедиться в выполнении условия 1) и определить форму второй производной, требующийся для оценки константы L в условии 3).

Допустим, что на отрезке $[t_0, T]$ функции $H(t, y_0(t))$ и $K(t, y_0(t))$ не имеют точек, в которых они равны нулю (если это условие не выполняется, доказательство претерпевает небольшую модификацию). Соблюдение требования

$x_0(y_0(t)) \neq 0$, $t \in [t_0, T]$, гарантируется подбором начального приближения $(x_0(t), y_0(t))$. Исключим из (4.5) $\Delta y(t)$:

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= \frac{1}{H(t, y_0(t))x_0(y_0(t))} \left[\int_{y_0(t)}^t H(t, \tau) [\Delta x(\tau) + x_0(\tau)] d\tau - [\Delta x(t) + x_0(t)] \right], \\ G(t) \left[\int_{y_0(t)}^t H(t, \tau) [\Delta x(\tau) + x_0(\tau)] d\tau - [\Delta x(t) + x_0(t)] \right] &= \\ &= \int_{y_0(t)}^t K(t, \tau) \Delta x(\tau) d\tau + \int_{y_0(t)}^t K(t, \tau) x_0(\tau) d\tau - f(t), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $G(t) = K(t, y_0(t)) / H(t, y_0(t))$. Перепишем второе уравнение из (4.7) следующим образом

$$\begin{aligned} G(t) \Delta x(t) - \int_{y_0(t)}^t [K(t, \tau) - G(t)H(t, \tau)] \Delta x(\tau) d\tau &= \\ = \int_{y_0(t)}^t [G(t)H(t, \tau) - K(t, \tau)] x_0(\tau) d\tau + f(t) - G(t)x_0(t). \end{aligned}$$

Считая $F_0(t) = \int_{y_0(t)}^t [H(t, \tau) - K(t, \tau)/G(t)] x_0(\tau) d\tau + f(t)/G(t) - x_0(t)$, полу-

чаем

$$\Delta x(t) - \int_{y_0(t)}^t \left[\frac{K(t, \tau)}{G(t)} - H(t, \tau) \right] \Delta x(\tau) d\tau = F_0(t). \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) представляет собой линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывными коэффициентами. Благодаря этому, поскольку $t_0 \leq y_0(t) \leq t$, уравнение (4.8) имеет единственное решение, получающееся при помощи метода последовательных приближений. После всего функция $\Delta y(t)$ однозначно определяется из (4.7).

Тем самым, система (4.5) имеет единственное решение, т.е. выполняется условие 1) теоремы.

Вторая производная $P''(X_0)(X)$ определяется с помощью следующих равенств:

$$\left. \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} \right|_{(x_0, y_0)} = 0, \quad i = 1, 2,$$

так как $\partial P_i / \partial x|_{(x_0, y_0)}$ не зависят от $x_0(t)$, $i = 1, 2$;

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P'_{1_x}(x_0, y_0 + s\bar{y})(x, y) - P'_{1_x}(x_0, y_0)(x, y)}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[x(t) - \int_{y_0(t) + s\bar{y}(t)}^t H(t, \tau) x(\tau) d\tau - x(t) + \int_{y_0(t)}^t H(t, \tau) x(\tau) d\tau \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \int_{y_0(t)}^{y_0(t) + s\bar{y}(t)} H(t, \tau) x(\tau) d\tau = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (s\bar{y}(t) H(t, y_0(t) + \theta s\bar{y}(t)) x(y_0(t) + \theta s\bar{y}(t))) = \\ &= H(t, y_0(t)) x(y_0(t)) \bar{y}(t), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{aligned}$$

Подобным образом

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial y} \right|_{(x_0, y_0)} &= -K(t, y_0(t)) x(y_0(t)) \bar{y}(t); \\ \left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P'_{1_y}(x_0, y_0 + s\bar{y})(x, y) - P'_{1_y}(x_0, y_0)(x, y)}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[H(t, y_0(t) + s\bar{y}(t)) x_0(y_0(t) + s\bar{y}(t)) - H(t, y_0(t)) x_0(y_0(t))]}{s} y(t) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} y(t) [H(t, y_0(t) + s\bar{y}(t)) x_0(y_0(t) + s\bar{y}(t)) - H(t, y_0(t)) x_0(y_0(t) + s\bar{y}(t)) + \\ &\quad + H(t, y_0(t)) x_0(y_0(t) + s\bar{y}(t)) - H(t, y_0(t)) x_0(y_0(t))]/s = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} y(t) [H'_\tau(t, y_0(t) + s\theta\bar{y}(t)) x_0(y_0(t) + s\bar{y}(t)) + H(t, y_0(t)) x'_0(y_0(t) + s\theta\bar{y}(t))] = \\ &= [H'_\tau(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) + H(t, y_0(t)) x'_0(y_0(t))] y(t), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (4.9) \end{aligned}$$

По аналогии

$$\left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right|_{(x_0, y_0)} = \left[K'_\tau(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) + K(t, y_0(t)) x'_0(y_0(t)) \right] y(t) \quad (4.10)$$

(формулы (4.9) и (4.10) имеют место благодаря ограниченности $\bar{y}(t)$);

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 P_1}{\partial y \partial x} \right|_{(x_0, y_0)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{H(t, y_0(t)) x_0(y_0(t) + s \bar{x}(y_0(t))) y(t) - H(t, y_0(t)) x_0(y_0(t)) y(t)}{s} = \\ &= H(t, y_0(t)) y(t) \bar{x}(y_0(t)); \\ \left. \frac{\partial^2 P_2}{\partial y \partial x} \right|_{(x_0, y_0)} &= -K(t, y_0(t)) y(t) \bar{x}(y_0(t)). \end{aligned}$$

Стало быть, для ограниченности производных (4.9) и (4.10) придется также гарантировать дифференцируемость начального приближения $x_0(t)$.

Чтобы оценить скорость сходимости, допускается использование альтернативной теоремы, которая не требует существования второй производной.

Теорема 4.2. [17] Пусть $\|\Delta X\| = \max \left\{ \|\Delta x\|_{C[t_0, T]}, \|\Delta y\|_{C[t_0, T]} \right\} \leq B_0, \|P(X_0)\| = \eta_0$; в сфере $\Omega = \{X : \|X - X_0\| \leq B_0 \eta_0 / (1 - q)\}$ ($q < 1$) выполняется условие $\|P'(X_1) - P'(X_2)\| \leq q/B_0$. Тогда уравнение (4.2) имеет в Ω единственное решение X^* , к которому сходятся приближения (4.6) и справедлива оценка $\|X^* - X_m\| \leq q^m \eta_0 B_0 / (1 - q)$.

4.2. Альтернатива методу Ньютона – Канторовича

4.2.1. Постановка задачи

Метод Ньютона – Канторовича требует знания начальных приближений, близких к точному решению. Этот аспект сильно влияет на сходимость метода, поэтому значительный интерес представляют методы, свободные от вышеупомянутых недостатков [18].

Рассмотрим следующую двухпродуктовую модель

$$\begin{aligned}
x(t) + \int_{y(t)}^t h_1(t, \tau) x(\tau) d\tau &= f_1(t), \\
\lambda x(t) + \int_{y(t)}^t h_2(t, \tau) x(\tau) d\tau &= f_2(t), \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq T,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

где $x(t) \in C_{[0, \infty]}$ и $y(t) \in C_{[0, \infty]}^1$ – искомые функции, причем $y(t)$ является неубывающей на отрезке $[t_0, T]$ и $0 \leq y(t) \leq t$, $h_1(t, \tau), h_2(t, \tau) \in C_{[0, \infty] \times [0, \infty]}$ и $f_1(t), f_2(t) \in C_{[0, \infty]}$ – известные функции, λ – некоторое число.

4.2.2. Описание метода

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на n сегментов $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, где $t_k = t_0 + \frac{T-t_0}{n} \cdot k$, $k = \overline{0, n}$, тем самым получим равномерную сетку узлов. Будем последовательно решать следующие задачи

$$\begin{aligned}
\alpha_i + \int_{\beta_i}^{t_i} h_1(t_i, \tau) \cdot \alpha_i d\tau &= f_1(t_i), \\
\lambda \alpha_i + \int_{\beta_i}^{t_i} h_2(t_i, \tau) \cdot \alpha_i d\tau &= f_2(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Из решения которых можно найти коэффициенты α_i и β_i , которые соответственно отвечают значениям функций $x(t)$ и $y(t)$ в узлах сетки.

Приближенное решение системы (4.11) будем строить в виде кусочно-постоянных функций

$$\begin{aligned}
x_n(t) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \psi_k(t), \quad y_n(t) = \sum_{k=0}^n \beta_k \psi_k(t), \\
\psi_k(t) &= \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \in [t_0, T] \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = 0, \dots, n.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.2.3. Модельные примеры

Пусть $\lambda = 1$, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} x(t) + \int_{y(t)}^t t\tau \cdot x(\tau) d\tau &= \frac{t^4}{3} - \frac{t \sin^3 t}{3} + \frac{t^3}{2} - \frac{t \sin^2 t}{2} + t + 1, \\ x(t) + \int_{y(t)}^t \tau \cdot x(\tau) d\tau &= \frac{t^3}{3} - \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{\sin^2 t}{2} + t + 1, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$0 \leq y(t) \leq t, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

Точным решением которой являются функции $x^*(t) = t + 1$, $y^*(t) = \sin t$. Для решения данной системы разобьем отрезок $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ на $n = 100$ сегментов

$\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $t_k = \frac{k}{2n}$, $k = \overline{0, n}$. Результаты применения приближенного метода для системы (4.14) представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты приближенного решения задачи (4.14)

t_i	$ x_n(t_i) - x^*(t_i) $	$ y_n(t_i) - y^*(t_i) $
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
0.0500000000	0.0000000360	0.0000000144
0.1000000000	0.0000000235	0.0000000204
0.1500000000	0.00000005561	0.00000001405
0.2000000000	0.00000007338	0.00000007370
0.2500000000	0.00000040796	0.00000027116
0.3000000000	0.00000069812	0.00000077545
0.3500000000	0.0000353453	0.0000188096
0.4000000000	0.0000514118	0.0000403541
0.4500000000	0.0000820955	0.0000788368
0.5000000000	0.0001107128	0.0001430981

Анализируя полученные результаты, можно сказать, что метод хорошо справляется с задачей отыскания приближенных значений как функции $x(t)$, так и функции $y(t)$.

Посмотрим, как метод покажет себя, если одно из интегральных уравнений Вольтерра системы будет не второго рода, а первого, то есть пусть $\lambda = 0$. Для этого приближенно решим следующую задачу

$$\begin{aligned} x(t) - \int_{y(t)}^t t\tau \cdot x(\tau) d\tau &= 0, \\ \int_{y(t)}^t \tau \cdot x(\tau) d\tau &= 6, \\ 0 \leq y(t) \leq t, \quad 10 \leq t \leq 15. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Точное решение – функции $x^*(t) = 6t$, $y^*(t) = \sqrt[3]{t^3 - 3}$. Разобьем отрезок $[10, 15]$ на $n = 100$ сегментов $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $t_k = 10 + \frac{5}{n} \cdot k$, $k = \overline{0, n}$. Результаты применения приближенного метода для системы (4.15) представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты приближенного решения задачи (4.15)

t_i	$ x_n(t_i) - x^*(t_i) $	$ y_n(t_i) - y^*(t_i) $
10.0000000000	0.0000005588	0.0000050123
10.5000000000	0.0000093354	0.0000039202
11.0000000000	0.0000027716	0.0000031107
11.5000000000	0.0000038637	0.0000024902
12.0000000000	0.0000036202	0.0000020205
12.5000000000	0.0000046117	0.0000016409
13.0000000000	0.0000061389	0.0000013501
13.5000000000	0.0000081501	0.0000011204
14.0000000000	0.0000005218	0.0000009306
14.5000000000	0.0000004819	0.0000007801
15.0000000000	0.0000009186	0.0000006600

Смотря на результаты для обоих примеров, можно сказать, что метод вполне хорошо справляется с решением обеих задач, то есть ему не важно – оба уравнения системы второго рода или только одно. Сама погрешность гораздо больше зависит от свойств функции $y(t)$, которая согласно теории развивающихся систем отвечает довольно-таки серьезным условиям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатами данной работы являются:

1. Рассмотрена задача нахождения приближенного решения развивающихся систем.
2. Изучены понятия, основные свойства и классы развивающихся систем, приведено несколько примеров таких систем.
3. Рассмотрено два приближенных метода решения подобных систем, проведено их сравнение, выявлены плюсы и минусы относительно друг друга.
4. Построен алгоритм нахождения приближенного решения двухпродуктовых моделей.
5. Проведен анализ результатов решения, который показал, что точность метода во многом зависит от свойств искомых функций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Глушков, В. М. Моделирование развивающихся систем / В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 354 с.
2. Глушков, В. М. Методологические вопросы применения математических методов в биологии / В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко. – Киев : Изд. ИК АН УССР, 1979. – 65 с.
3. Глушков, В. М. О средствах моделирования развивающихся систем / В. М. Глушков, В. В. Иванов, В. М. Яненко. – Киев : Изд. ИК АН УССР, 1980. – 58 с.
4. Жаботинский, А. М. Концентрационные автоколебания / А. М. Жаботинский. – Москва : Наука, 1974. – 178 с.
5. Николис, Г. Самоорганизация в неравновесных системах / Г. Николис, И. Пригожин, под ред. Ю. А. Чизмаджева. – Москва : Мир, 1979. – 512 с.
6. Реутов, А. П. Системная модель как отношение обобщенных качеств – упорядоченности, надежности и эффективности / А. П. Реутов, Р. Г. Савченко, Р. М. Суслов // Вопросы кибернетики (управление развитием систем) / Под ред. А. П. Реутова, Р. М. Сулова. – Москва, 1979. – с. 5–35.
7. Романовский, Ю. М. Проблемы математической биофизики / Ю. М. Романовский. – Москва : Изд-во МГУ, 1981. – 36 с.
8. Романовский, Ю. М. Процессы самоорганизации в физике, химии и биологии / Ю. М. Романовский. – Москва : Знание, 1981. – 48 с.
9. Романовский, Ю. М. Математическое моделирование в биофизике / Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский. – Москва : Наука, 1975. – 343 с.
10. Глушков, В. М. Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС / В. М. Глушков. – Москва : Статистика, 1975. – 160 с.
11. Шноль, С. Э. Физико-химические факторы биологической эволюции / Э. С. Шноль. – Москва : Наука, 1979. – 263 с.

12. Нестеренко, В. Г. Иммунологическая регуляция дифференцировки соматических клеток / В. Г. Нестеренко. – УСБ, 1980. – с. 214–220.
13. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильев, А. Г. Свешников. – Москва : Наука, 1980. – 232 с.
14. Леонтьев, В. Исследование структуры американской экономики. Теоретический и эмпирический анализ по схеме затраты – выпуск / В. Леонтьев. – Москва : Госстатиздат, 1959. – 640 с.
15. Сидоров, Д. Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения : монография / Д. Н. Сидоров. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. – 293 с.
16. Brunner, H. Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications / H. Brunner. – Cambridge University Press, 2017. – 388.
17. Бойков, И. В. Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений теории развивающихся систем / И. В. Бойков, А. Н. Тында // Дифференциальные уравнения, том 39, номер 9, 2003. – с. 1214–1223.
18. Бойков, И. В. Приближенное решение систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра / И. В. Бойков, И. В. Жукова // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сборник статей I Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов / Под. ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2007. – с. 9–12.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг программы

(обязательное)

Программа написана с использованием математического пакета Maple 2017 и предназначена для приближенного решения двухпродуктовых моделей развивающихся систем. Поддерживается решение как систем, состоящих из двух уравнений Вольтерра второго рода, так и систем, в которых одно уравнение второго рода, а другое первого рода. Данная программа может быть запущена на персональных компьютерах с помощью математического пакета Maple, версия пакета может быть любой, начиная с 2010.

Задание временного отрезка задачи, коэффициента λ , количества узлов, а также вычисление узлов:

```
> a := 0; b := 1/2; lambda := 1; n := 100; h := (b-a)/n; dots := evalf([seq(a + h*k, k = 0 .. n)]);
```

Задание ядер $h_1(t, \tau)$, $h_2(t, \tau)$ и правых частей $f_1(t)$, $f_2(t)$:

```
> h1 := (t, tau) -> t*tau;
> h2 := (t, tau) -> tau;
> f1 := t -> -sin(t)^3*t/3 + t^4/3 - sin(t)^2*t/2 + t^3/2 + t + 1;
> f2 := t -> t + 1 + t^3/3 - sin(t)^3/3 + t^2/2 - sin(t)^2/2;
```

Вычисление коэффициентов α_i и β_i :

```
>
alpha := [ ] :
beta := [ ] :
for i from 1 to nops(dots) do
temp := evalf(solve({c1 + int(h1(dots[i], tau)*c1, tau = c2 .. dots[i]) = f1(dots[i]), lambda
*c1 + int(h2(dots[i], tau)*c1, tau = c2 .. dots[i]) = f2(dots[i])}, {c1, c2}));
try
if subs(c1 = dots[i], rhs(temp[1][1])) > 0 then
alpha := [op(alpha), subs(c1 = dots[i], rhs(temp[1][1]))];
else
alpha := [op(alpha), subs(c1 = dots[i], rhs(temp[2][1]))];
fi;
catch "invalid input" :
alpha := [op(alpha), subs(c1 = dots[i], rhs(temp[1]))];
end try;
try
if subs(c2 = dots[i], rhs(temp[1][2])) > 0 then
beta := [op(beta), subs(c2 = dots[i], rhs(temp[1][2]))];
```

```

else
beta := [op(beta), subs(c2 = dots[i], rhs(temp[2][2]))];
fi;
catch "invalid input" :
beta := [op(beta), subs(c2 = dots[i], rhs(temp[2]))];
end try;
od:

```

Задание кусочно-постоянных функций:

>

```

x_approx := proc(t)
local result, i;
result := 0;
for i from 1 to nops(alpha) - 1 do
if t ≥ dots[i] and t ≤ dots[i + 1] then
if t = dots[i + 1] then
result := alpha[i + 1];
else
result := alpha[i];
fi;
fi;
od;
return result;
end proc:

```

>

```

y_approx := proc(t)
local result, i;
result := 0;
for i from 1 to nops(beta) - 1 do
if t ≥ dots[i] and t ≤ dots[i + 1] then
if t = dots[i + 1] then
result := beta[i + 1];
else
result := beta[i];
fi;
fi;
od;
return result;
end proc:

```

Вычисление погрешности:

>

```

x := t → t + 1; y := t → sin(t);

```

>

```

x_exact := evalf([seq(x(dots[i]), i = 1 .. nops(dots))]);

```

>

```

y_exact := evalf([seq(y(dots[i]), i = 1 .. nops(dots))]);

```

>

```

x_error := [ ] :
y_error := [ ] :
for i from 1 to nops(x_exact) do
x_error := [op(x_error), abs(x_exact[i] - x_approx(dots[i]))];
y_error := [op(y_error), abs(y_exact[i] - y_approx(dots[i]))];
od:

```