

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Факультет

Кафедра

вычислительной техники

(наименование)

Высшая и прикладная математика

(наименование)

Направление подготовки

01.03.04 «Прикладная математика»

(код и наименование)

Профиль

Математическое моделирование в экономике и технике

(код и наименование)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ

ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

Студент 17ВБ1

(группа)

Чекунов А. А.
(подпись, дата)

Чекунов А. А.

(фамилия, инициалы)

Руководитель д.ф.-м.н., профессор

Бойков И. В.
(подпись, дата)

Бойков И. В.

(фамилия, инициалы)

Нормоконтролер к.т.н., доцент

Тарасов Д. В.
(подпись, дата)

Тарасов Д. В.

(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 04.06.2021 № 10)

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., проф.

Бойков И. В.
(подпись, дата)

Бойков И. В.

(фамилия, инициалы)

Работа защищена с отметкой отм. (протокол заседания ГЭК от 22.06.21 № 5)

Секретарь ГЭК к.пед.н., доцент

Зверовщикова Н. В.
(подпись, дата)

Зверовщикова Н. В.

(фамилия, инициалы)

Пенза 2021

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Политехнический институт

Факультет

Вычислительной техники
(наименование)

Кафедра

Высшая и прикладная математика
(наименование)

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой

 И. В. Бойков
(подпись, инициалы, фамилия)

«20» ноября 2020 г.

ЗАДАНИЕ

на бакалаврскую работу

1. Студент Чекунов Александр Андреевич гр. 17ВБ1
(фамилия, имя, отчество)
факультета вычислительной техники

2. Тема работы Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений с особенностями третьего и четвертого порядков

Тема утверждена приказом по ПГУ № 131/о от «20» февраля 2021 г.

3. Руководитель работы д.ф.-м.н., профессор. Бойков И. В.

4. Задание на работу (назначение разработки, исходные данные и т.п.)

1 Рассмотреть задачи, приводящие к гиперсингулярным интегральным уравнениям второго рода с особенностями третьего и четвертого порядков

2 Изучить теорию гиперсингулярного интегрального исчисления, классы функций, на которых исследуются гиперсингулярные интегралы, а также вспомогательные утверждения и определения

3 Изучить методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений

4 Привести алгоритмы приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений для программной реализации

5 С использованием разработанных программ привести оценку решения гиперсингулярных интегральных уравнений

5. Перечень подлежащих разработке вопросов

1 Основные положения теории гиперсингулярных интегральных уравнений

1.1 Понятие гиперсингулярных интегралов

1.2 Подходы к решению гиперсингулярных интегральных уравнений

2 Численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений

2.1 Метод сведения к интегро-дифференциальным уравнениям

2.2 Методы сплайн-коллокации

2.3 Метод решения с использованием многочленов Чебышева

3 Решение гиперсингулярных интегральных уравнений

3.1 Интерпретация данных решения модельных примеров

3.2 Интерпретация данных решения задач, возникающих в теории упругости

6. Календарный график по выполнению проекта

Наименование этапов работы	Объем работы	Срок выполнения	Подпись руководителя
1. Изучение теории гиперсингулярных интегральных уравнений. Обзор литературы	20 %	28.05.2021	
2. Исследование методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений	25 %	02.06.2021	
3. Разработка численных алгоритмов решения и программ	25 %	07.06.2021	

4. Анализ результатов решения модельной задачи	20 %	10.06.2021	
5. Оформление пояснительной записки	10 %	14.06.2021	

Дата выдачи задания «20» ноября 2020 г.

Руководитель бакалаврской работы  И. В. Бойков
(подпись, инициалы, фамилия)

Задание к исполнению принял студент  А. А. Чекунов
(подпись, инициалы, фамилия)

Работу к защите допустить
Декан факультета  Л. Р. Фионова
(подпись, инициалы, фамилия)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ	6
1.1. Классы функций.....	6
1.2. Определения гиперсингулярных интегралов.....	7
1.3. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений	9
1.4. Некоторые сведения о многочленах Чебышева первого и второго рода	14
2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	16
2.1. Аналитический метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода	16
2.2. Приближенный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода с особенностью третьего порядка	18
2.3. Приближенный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода с особенностью четвертого порядка	22
2.4. Приложение многочленов Чебышева для решения некоторого класса гиперсингулярных интегральных уравнений	26
2.4.1. Уравнение с особенностью третьего порядка.....	26
2.4.2. Уравнение с особенностью четвертого порядка	27
3. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	29
3.1. Модельные задачи	28
3.1.1. Аналитическое решение гиперсингулярного интегрального уравнения.....	29
3.1.2. Уравнение с особенностью третьего порядка.....	30
3.1.3. Уравнение с особенностью четвертого порядка	32
3.2. Анализ результатов численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения.....	34

ЗАКЛЮЧЕНИЕ	38
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	40
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Листинг программы поиска приближенного решения гиперсингулярного интегрального уравнения второго рода с особенностью третьего порядка	42

ВВЕДЕНИЕ

Теория гиперсингулярного интегрального исчисления зародилась в начале 20-го века в работах Жака Адамара [1, 2]. Позднее в связи с интенсивным развитием науки и техники в качестве методов математического моделирования в механике и физике стали применяться гиперсингулярные интегральные уравнения (ГИУ) [3].

В настоящее время приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов достаточно хорошо исследованы [4], чего нельзя сказать о методах решения ГИУ. Точное решение ГИУ возможно лишь в исключительных случаях [5], и основным аппаратом в прикладных задачах являются приближенные методы. В этом направлении предложен ряд численных алгоритмов для некоторых классов ГИУ, как прямых, так и основанных на сведении к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям.

В работе [6] приводится сплайн - коллокационный метод для получения приближенных решений класса ГИУ, которые используются при моделировании электрических вибраторов. Численные схемы, основанные на сплайн-коллокационном методе, также были применены и для решения более широкого класса ГИУ [7].

При решении ГИУ применяется непрерывный метод, предложенный в работе [8], он основан на теории устойчивости Ляпунова. Особенностью метода является то, что он не накладывает сильные требования к нелинейному оператору в окрестности решения и поэтому метод применим как к линейным, так и к нелинейным операторным уравнениям. Примеры приложения непрерывного метода для решения ГИУ приводятся в работах [9–12].

Отдельно отметим работу [10], в которой приведен обзор основных направлений в методах решения ГИУ. В работе рассматриваются ГИУ на замкнутых и разомкнутых контурах, полигиперсингулярные и многомерные интегральные уравнения, приводится исследование устойчивости, дается

доказательство сходимости приближенного решения к точному, а также оценки величины погрешности и скорости сходимости.

В настоящей работе исследуются приближенные методы решения ГИУ второго рода с особенностями третьего и четвертого порядков вида

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{-1}^1 h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad p=3,4,$$

поскольку ГИУ с особенностью третьего и четвертого порядков находят применения в многочисленных задачах механики [13].

Работа состоит из трех глав. В первой вводятся основные классы функций на которых исследуются ГИУ, даются определения гиперсингулярных интегралов и ГИУ, приводится непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений и некоторые вспомогательные сведения о многочленах Чебышева.

Во второй главе рассматривается аналитический метод сведения ГИУ второго рода к интегро-дифференциальному уравнению, приводится вычислительная схема для решения ГИУ второго рода с особенностью третьего порядка, численная схема решения ГИУ второго рода с особенностью четвертого порядка, использующая непрерывный метод [8], а также схема, применимая к классу ГИУ, у которого на функцию решения накладываются особые условия.

Третья глава посвящена практической части: приводятся примеры ГИУ второго рода с особенностями третьего и четвертого порядков, используемые в задачах теории упругости, выводятся соотношения для получения решения таких ГИУ, приводится модельная задача и результаты численных экспериментов по применению метода решения ГИУ, анализируются результаты вычислений.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

1.1. Классы функций

В этом разделе представлены классы функций, на которых исследуются гиперсингулярные интегральные уравнения. Классом функций будем называть множество всех функций, удовлетворяющих заданному признаку, например, неравенству или свойству.

Пусть $A = [a, b]$ или $A = \gamma$, где γ – единичная окружность с центром в начале координат комплексной плоскости.

Определение 1. Если для функции $f(x)$, определенной на A , в любых двух точках этого множества $x_1, x_2 \in A$ выполняется неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|^\alpha, \text{ где } 0 < \alpha \leq 1, M > 0, \quad (1)$$

то говорят, что эта функция принадлежит классу Гельдера или $f(x) \in H_\alpha(M; A)$.

Замечание 1. Неравенство (1) называется условием Гельдера или условием Липшица порядка α , в качестве примера функции, удовлетворяющей этому условию, можно привести $f(x) = \sqrt{x}$, с показателем $\alpha = \frac{1}{2}$ [14].

Замечание 2. В случае, когда из текста ясно на каком множестве рассматриваются функции, вместо $H_\alpha(M; A)$ будем писать H_α . Это замечание относится и к другим рассматриваемым классам функций.

Определение 2. Если функция $f(x)$, определенная на A , непрерывна, имеет непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную p -го порядка, для которой выполняется неравенство

$$|f^{(p)}(x)| \leq M,$$

то говорят, что эта функция принадлежит классу W^p или $f(x) \in W^p(M; A)$.

Определение 3. Если функция $f(x)$ принадлежит классу W^p , и ее производная p -го порядка удовлетворяет условию Гельдера, то есть

$$f^{(p)}(x) \in H_\alpha(M; A),$$

то говорят, что эта функция принадлежит классу $W^p H_\alpha$ или $f(x) \in W^p H_\alpha(M; A)$.

1.2. Определения гиперсингулярных интегралов

Классическое определение гиперсингулярного интеграла было дано Ж. Адамаром [2]. Некоторое время такие интегралы называли интегралами Адамара.

Определение 4. Интеграл вида

$$\int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$$

при $p \in \Gamma$ и $0 < \alpha < 1$ определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла как предел при $x \rightarrow b$ суммы

$$\int_a^b \frac{\varphi(x) dx}{(b-x)^{p+\alpha}} = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^b \frac{\varphi(t) dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{f(x) dt}{(b-x)^{p+\alpha-1}}, \quad (2)$$

где $\varphi(x) \in W^p(M)$, а $f(x)$ – функция, удовлетворяющая следующим двум условиям:

- 1) рассматриваемый предел (2) существует;
- 2) $f(x) \in W^p$.

Определение гиперсингулярного интеграла в смысле главного значения Коши-Адамара на случай, когда особая точка лежит внутри интервала $[a, b]$ было сформулировано следующим образом [15].

Определение 5. Интегралом

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p}$$

при $a < c < b$ в смысле главного значения Коши-Адамара называется предел суммы

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right], \quad (3)$$

где $\varphi(\tau) \in W^{p-1} H_\alpha(M)$, а $\xi(v) \in W^{p-1}(M)$ – некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел (3) существовал.

Определение 6. Интегралом

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - a)^p}$$

называется предел суммы

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - a)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v) \ln|v| \right], \quad (4)$$

где $\varphi(\tau) \in W^p(M)$, а $\xi(v)$ – функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка, удовлетворяющие условию Дини-Липшица, $\xi_1(v)$ – некоторая функция, удовлетворяющие условию Дини-Липшица в окрестности от нуля. Функции $\xi(v)$, $\xi_1(v)$ – выбираются так, чтобы указанный предел (4) существовал.

Гиперсингулярными интегральными уравнениями принято называть уравнения, в которых неизвестная функция содержится под знаком гиперсингулярного интеграла. Приведем, следуя [3], определения ГИУ.

Определение 7. Уравнение с неизвестной функцией $x(\tau)$ вида

$$\int_a^b \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} = f(t)$$

называют гиперсингулярным интегральным уравнением первого рода. Здесь $f(t)$ – известная функция.

Определение 8. Гиперсингулярным интегральным уравнением второго рода с особенностью p -го порядка называют следующее уравнение

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{-1}^1 h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (5)$$

где $-1 < t < 1$, $p = 2, 3, \dots$ и $a(t)$, $b(t)$, $h(t, \tau)$, $f(t)$ – известные функции.

Замечание 3. В работе рассматриваются уравнения вида (5) с особенностями 3-го и 4-го порядков, то есть при $p = 3, 4$.

1.3. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

В ряде вычислительных схем для решения ГИУ используется непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений, основанный на методах теории устойчивости решений дифференциальных уравнений. Его особенностью является то, что он не требует построения обратных операторов при реализации и демонстрирует сходимость в случае, когда производная Фреше оператора является вырожденной. Приведём его краткое описание.

Ниже будем использовать следующие обозначения:

$$R(a, r) = \{z \in B : \|z - a\| \leq r\};$$

$$S(a, r) = \{z \in B : \|z - a\| = r\};$$

$$\Re K = K_R = \frac{(K + K^*)}{2};$$

$$\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{(\|I + hK\| - 1)}{h},$$

где за B обозначено банахово пространство, $a \in B$, под K понимается линейный оператор (K^* – сопряженный к K оператор), действующий из B в B , I – тождественный оператор, $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма оператора K , в определении которой символ $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

Для матриц в часто используемых на практике пространствах логарифмические нормы известны, приведем их примеры.

Пусть $A = \{a_{ij}\}$ – вещественная матрица размера $n \times n$, заданная в n -мерном пространстве R_n векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с нормой:

$$1) \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|;$$

$$2) \|x\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|;$$

$$3) \|x\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2};$$

$$4) \|x\|_4 = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\alpha_i}, \quad \forall \alpha_i > 0;$$

$$5) \|x\|_5 = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i|}{\alpha_i}, \quad \forall \alpha_i > 0;$$

$$6) \|x\|_6 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\alpha_i}}, \quad \forall \alpha_i > 0.$$

Тогда логарифмическая норма матрицы A , соответственно, равна:

$$1) \Lambda_1(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \left(a_{jj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \right);$$

$$2) \Lambda_2(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right);$$

$$3) \Lambda_3(A) = \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^*}{2} \right),$$

где A^* – матрица, сопряженная к A ;

$$4) \Lambda_4(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\alpha_j a_{jj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \alpha_i |a_{ij}| \right);$$

$$5) \Lambda_2(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\alpha_i a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j |a_{ij}| \right);$$

$$6) \Lambda_6(A) = \lambda_{\max} \left(\frac{B + B^*}{2} \right),$$

где B – матрица, состоящая из элементов $b_{ij} = \alpha_j a_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (6)$$

где $A: X \rightarrow X$ – нелинейный оператор, действующий из банахова пространства X в X .

В работе [8] доказана

Теорема 1. Решение задачи Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad x(0) = x_0 \quad (7)$$

сходится к решению операторного уравнения (6) при любом $x_0 \in S$, если выполняются следующие условия:

1) в банаховом пространстве X существует шар $S = R(x^*, r)$, $r > 0$, в котором уравнение (6) имеет единственное решение x^* ;

2) в каждой точке $x \in S$ существует производная Фреше (или Гато) $A'(x)$ оператора $A(x)$;

3) для любых двух точек x_1 и x_2 шара S выполняется неравенство

$$\|A'(x_1) - A'(x_2)\| \leq L;$$

4) для любого $x \in S$ справедливо неравенство

$$\Lambda(A'(x)) \leq \alpha, \quad \alpha > 0;$$

5) справедливо неравенство $\alpha > L$.

Замечание 4. В гильбертовом пространстве H справедливы утверждения, аналогичные утверждениям теоремы 1 при замене в условиях теоремы логарифмической нормы оператора $A'(x)$ на $\sigma(\Re(A'(x)))$. Здесь $\sigma(A)$ – спектр оператора A .

Отметим, что теорема 1 накладывает жесткие условия на оператор A уравнения (6). В работе [8] также приведены условия глобальной сходимости решения задачи Коши (7) к решению операторного уравнения (6). Следующие утверждения заметно ослабляют требования, предъявляемые к оператору A .

Рассмотрим в банаховом пространстве B задачу Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (8)$$

Будем считать, что нелинейный оператор A имеет непрерывную производную Гато; $A(0) = 0$.

Теорема 2. Тривиальное решение уравнения (8) устойчиво (асимптотически устойчиво), если на любой дифференцируемой кривой $\varphi(t)$, расположенной в шаре $B(0, r)$ достаточно малого радиуса r (а также $r = \infty$),

интеграл $\int_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))) d\tau$ не положителен (отрицателен и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))) d\tau = -\alpha, \quad \alpha > 0).$$

Пусть $x^*(t)$ – решение задачи (6). Произведем в уравнении (6) следующую замену

$$x = x^* + u,$$

тогда само уравнение примет вид

$$A(x^* + u) - A(x^*) = 0.$$

Аналогичная замена $x(t) = x^* + u(t)$ для задачи Коши (8) приводит к уравнению вида

$$\frac{du(t)}{dt} = A(x^* + u(t)) - A(x^*), \quad v(0) = x_0 - x^*. \quad (9)$$

Если тривиальное решение уравнения (9) асимптотически устойчиво, то и решение задачи Коши (7) стремится к x^* независимо от начального значения. Таким образом, справедлива

Теорема 3. Пусть уравнение (6) имеет решение x^* и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в банаховом пространстве B , справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))) d\tau = -\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Тогда решение задачи Коши (7) сходится к решению x^* уравнения (6) при любом начальном приближении.

Аналогичным способом доказывается теорема [8], результат которой не накладывает жесткие требования на оператор уравнения (6).

Теорема 4. Решение задачи Коши (7) сходится к решению x^* уравнения (6), если на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $R(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

1) при $t > 0$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))) d\tau \leq 0;$$

2) справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))) d\tau \leq -\alpha, \quad \alpha_g > 0.$$

1.4. Некоторые сведения о многочленах Чебышева первого и второго рода

Многочлены Чебышева – это ортогональные полиномы, используемые в теории приближения. Свойства многочленов Чебышева позволяют использовать их при решении класса ГИУ, в котором функция решения $x(t)$ представима в виде $x(t) = \varphi(t)(1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}$, $m=0,1,2,\dots$. Конкретное значение m определяется порядком особенности (сингулярности).

Многочлены Чебышева первого рода – это полиномы вида

$$T_n(t) = \cos(n \arccos(t)), \quad n=0,1,2,\dots \quad (10)$$

Полиномы Чебышева (10) ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весовой функцией

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Многочлены Чебышева второго рода – это полиномы вида

$$U_n(t) = \frac{\sin((n+1)\arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (11)$$

Полиномы Чебышева (11) ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весовой функцией

$$h(t) = \sqrt{1-t^2}.$$

Приведем некоторые свойства полиномов Чебышева, которые будут использоваться далее в п. 2.4.

Для многочленов Чебышева первого рода (10) справедливо рекуррентное соотношение

$$tT_n(t) = \frac{T_{n+1}(t) - T_{n-1}(t)}{2}, \quad n=1,2,3,\dots;$$

полиномы первого рода также рекуррентно выражаются через (11)

$$T_n(t) = \frac{U_n(t) - U_{n-2}(t)}{2}, \quad n=2,3,4,\dots$$

Для многочленов Чебышева второго рода (11) справедливы рекуррентные соотношения

$$tU_n(t) = \frac{U_{n+1}(t) - U_{n-1}(t)}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

или через полиномы первого рода

$$U_n(t)(1-t^2) = tT_{n+1}(t) - T_{n-2}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$U_n(t) = \frac{T_n(t) - T_{n+2}(t)}{2(1-t^2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

а также используемые в приложениях к ГИУ соотношения

$$U_n(t)\sqrt{(1-t^2)^3} = \frac{\sqrt{1-t^2}(T_n(t) - T_{n+2}(t))}{2},$$

$$U_n(t)\sqrt{(1-t^2)^3} = -\frac{\sqrt{1-t^2}(U_{n+2}(t) - 2U_n(t) + U_{n-2}(t))}{4}.$$

Производные полиномов Чебышева имеют вид

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = nU_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots;$$

$$\frac{dU_n(t)}{dt} = \frac{(n+2)U_{n-1}(t) - nU_{n+1}(t)}{2(1-t^2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Аналитический метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода

В этом разделе, следуя [5] излагается метод сведения ГИУ к интегро-дифференциальным уравнениям.

Рассматривается ГИУ вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} + \int_{\gamma} h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad (12)$$

где, для определенности, γ – единичная окружность с центром в начале координат комплексной плоскости, $p = 3, 4$, функция $b(t)$ не обращается в ноль на контуре γ .

Введем некоторые дополнительные обозначения. Под D^+ будем понимать внутреннюю область, ограниченную контуром γ , а под D^- – внешнюю. Через $\overline{D}^+$ обозначим замыкание внутренней области D^+ , а через G – открытую область, такую что $\overline{D}^+ \subset G$.

Будем искать решение $x^*(z)$, $z \in \overline{D}^+$ уравнения (12), аналитическое в D^+ и, кроме того, принадлежащее введенному ранее классу функций $x(z) \in H = W^{p-1} H_{\alpha}(M, \gamma)$.

Будем также считать, что выполняются следующие условия для известных функций $a(z)$, $b(z)$ и $f(z)$:

- 1) функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ являются аналитическими в G ;
- 2) $a(z) \neq 0$, $z \in D^+$.

С учетом этих условия получаем

$$x^*(t) = \frac{f(t)}{a(t)} - \frac{b(t)}{a(t)\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} - \frac{1}{a(t)} \int_{\gamma} h(t, \tau) x^*(\tau) d\tau,$$

что по определению гиперсингулярных интегралов эквивалентно выражению

$$x^*(t) = \frac{f(t)}{a(t)} - \frac{b(t)}{a(t)\pi i(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{x^{*(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau - t} - \frac{1}{a(t)} \int_{\gamma} h(t, \tau) x^*(\tau) d\tau.$$

Функция

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau - z)^p} = \frac{1}{\pi i(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{x^{*(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

аналитическая при $z \notin \gamma$. Таким образом, функция

$$x^*(z) = \frac{f(z)}{a(z)} - \frac{b(z)}{a(z)\pi i(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{x^{*(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{a(z)} \int_{\gamma} h(z, \tau) x^*(\tau) d\tau$$

аналитическая в D^+ .

Следовательно, $x^*(t)$ – краевое значение аналитической функции

$$\begin{aligned} & \frac{f(z)}{a(z)} - \frac{b(z)}{a(z)\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau - z)^p} - \frac{1}{a(z)} \int_{\gamma} h(z, \tau) x^*(\tau) d\tau = \\ & = \frac{f(z)}{a(z)} - \frac{b(z)}{a(z)\pi i(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{x^{*(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{a(z)} \int_{\gamma} h(z, \tau) x^*(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

которое может быть продолжено на область D^+ , таким образом

$$x^*(z) = \frac{f(z)}{a(z)} - \frac{b(z)}{a(z)\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau - z)^p} - \frac{1}{a(z)} \int_{\gamma} h(z, \tau) x^*(\tau) d\tau$$

Согласно условиям, наложенным на решение $x^*(t)$ получаем

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} = \frac{1}{\pi i(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{\tau - t}$$

Для функции $x^*(t)$, аналитической в D^+ и принадлежащей классу

Гельдера справедливо [14]

$$x^*(t) = \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{\tau - t},$$

следовательно,

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} x^*(t).$$

Таким образом, решение $x(t)$ ГИУ (12) удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} x(t) + (p-1)! \frac{a(t)}{b(t)} x(t) + \frac{(p-1)!}{b(t)} \int_{\gamma} h(t, \tau) x(\tau) d\tau = \frac{(p-1)!}{b(t)} f(t) \quad (13)$$

Замечание 7. Уравнение (13) является частным случаем интегро-дифференциального уравнения Фредгольма 2-го рода [16].

2.2. Приближенный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода с особенностью третьего порядка

Рассмотрим ГИУ второго рода с особенностью третьего порядка

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^3} + \int_{-1}^1 h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad (14)$$

где $b(t)$ не обращается в ноль на сегменте $[-1, 1]$.

Разобьем отрезок $[-1, 1]$ на N сегментов

$$\Delta_i = [t_i, t_{i+1}), \quad \Delta_{N-1} = [t_{N-1}, 1],$$

где

$$t_i = -1 + i \frac{2}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (15)$$

Введем еще одну систему узлов с половинным шагом от (15)

$$\bar{t}_i = t_i + \frac{i}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Приближенное решение уравнения (14) будет определяться в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \varphi_i(t),$$

где

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 1, t \in \Delta_i, \\ 0, t \notin \Delta_i, \end{cases}$$

а коэффициенты λ_i определяются из СЛАУ

$$a(\bar{t}_i)\lambda_i + b(\bar{t}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-2 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i+1}}^{N-1} \lambda_j \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} + \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(\bar{t}_i, \bar{t}_j) \lambda_j = f(\bar{t}_i), \quad (16)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Перепишем СЛАУ (16) в матричном виде

$$CX = F,$$

где элементы $X = \{x_i\}$, $F = \{f_i\}$, $C = \{c_{ij}\}$ имеют соответствующий СЛАУ (16) вид.

Оценим диагональные элементы матрицы левой части СЛАУ (16). Гиперсингулярные интегралы по сегментам при $i = j$ по определению вычисляются следующим образом

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} = -\frac{N^2}{8}.$$

Теорема Адамара об обратимости квадратных матриц. Квадратная матрица A является невырожденной, если справедливы неравенства

$$|c_{ii}| > \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N |c_{ij}|, \quad i = 0, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим частный случай, когда $\text{sgn}(a(\bar{t}_i)) \neq \text{sgn}(b(\bar{t}_i))$. При достаточно большом N диагональные элементы матрицы СЛАУ (16) оцениваются неравенствами

$$|c_{ii}| = \left| a(\bar{t}_i) + b(\bar{t}_i) \int_{\Delta_i} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} + \frac{2}{N} h(\bar{t}_i, \bar{t}_i) \right| \geq$$

$$\begin{aligned}
& \geq \left\| a(\bar{t}_i) - \frac{N^2}{8} b(\bar{t}_i) - \frac{2}{N} h(\bar{t}_i, \bar{t}_i) \right\| \geq \\
& \geq \left| a(\bar{t}_i) \right| + \frac{N^2}{8} \left| b(\bar{t}_i) \right| - \frac{2}{N} \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Сумму модулей недиагональных элементов i -й строки матрицы левой части СЛАУ (16) обозначим s_i . Для этого же случая оценим элементы s_i неравенством

$$s_i \leq \left| b(\bar{t}_i) \right| \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-2 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i \\ j \neq i+1}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(t - \bar{t}_i)^3} \right| + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|.$$

В частности, при достаточно большом N и $0, 1, 2 < i < N-3, N-2, N-1$ получим оценки для суммы модулей гиперсингулярных интегралов

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-2 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i \\ j \neq i+1}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(t - \bar{t}_i)^3} \right| = \sum_{j=0}^{i-3} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| + \sum_{j=i+2}^{N-1} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| = \\
& = \left| \sum_{j=0}^{i-3} \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| + \left| \sum_{j=i+2}^{N-1} \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| = \left| \int_{-1}^{t_{i-3}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| + \left| \int_{t_{i+2}}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| \leq \\
& \leq \left| \frac{N^2}{16} - \frac{1}{2(1+t_i)^2} - \frac{1}{2(1-t_i)^2} \right| = N^2 \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{8i^2} - \frac{1}{8(N-i)^2} \right], \quad (17)
\end{aligned}$$

максимум выражения (17) достигается при $i = \frac{N}{2}$, таким образом, полагая, что

$N = 2k, \quad k = 1, 2, \dots$ получаем оценку суммы модулей гиперсингулярных интегралов

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-2 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i \\ j \neq i+1}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(t - \bar{t}_i)^3} \right| \leq \frac{N^2}{16} - 1.$$

При $i = 0, N-1$ (и аналогично при $i = 1, 2, N-3, N-2$) получаем

$$\sum_{j=2}^{N-1} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_0)^3} \right| = \frac{N^2}{32} - \frac{1}{8};$$

$$\sum_{j=0}^{N-4} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{N-1})^3} \right| = \left| \int_{-1}^{\bar{t}_{N-3}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_{N-1})^3} \right| \leq \frac{N^2}{32} - \frac{1}{8}.$$

Таким образом, оценки сумм модулей недиагональных элементов имеют вид

$$s_i \leq \left| b(\bar{t}_i) \right| \left(\frac{N^2}{16} - 1 \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad i = 3, 4, \dots, N-4; \quad (18)$$

$$s_i \leq \left| b(\bar{t}_0) \right| \left(\frac{N^2}{32} - \frac{1}{8} \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad i = 0, 1, 2; \quad (19)$$

$$s_i \leq \left| b(\bar{t}_{N-1}) \right| \left(\frac{N^2}{32} - \frac{1}{8} \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad i = N-3, N-2, N-1. \quad (20)$$

Сопоставив (18)-(20), приходим к выводу, что если выполняются неравенства

$$\left| a(\bar{t}_i) \right| + \frac{N^2}{8} \left| b(\bar{t}_i) \right| - \frac{2}{N} \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| > \left| b(\bar{t}_0) \right| \left(\frac{N^2}{32} - \frac{1}{8} \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad (21)$$

$$i = 0, 1, 2.$$

$$\left| a(\bar{t}_i) \right| + \frac{N^2}{8} \left| b(\bar{t}_i) \right| - \frac{2}{N} \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| > \left| b(\bar{t}_i) \right| \left(\frac{N^2}{16} - 1 \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad (22)$$

$$i = 3, 4, \dots, N-4,$$

$$\left|a(\bar{t}_i)\right| + \frac{N^2}{8} \left|b(\bar{t}_i)\right| - \frac{2}{N} \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| > \left|b(\bar{t}_{N-1})\right| \left(\frac{N^2}{32} - \frac{1}{8} \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, (23)$$

$$i = N-3, N-2, N-1.$$

то для матрицы левой части СЛАУ (16) выполняется теорема Адамара об обратимости квадратных матриц, следовательно определитель матрицы отличен от нуля и СЛАУ (16) – однозначно разрешима.

Упростив неравенства (21)-(23), получаем

$$\left|a(\bar{t}_i)\right| > \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| \left(2 + \frac{2}{N} \right) - \left|b(\bar{t}_i)\right| \left(\frac{N^2}{16} + 1 \right), \quad 3 \leq i \leq N-4,$$

$$\left|a(\bar{t}_i)\right| > \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| \left(2 + \frac{2}{N} \right) - \left|b(\bar{t}_i)\right| \left(\frac{3N^2}{32} + \frac{1}{8} \right),$$

$$0 \leq i \leq 2, \quad N-3 \leq i \leq N-1.$$

Аналогичным образом доказывается разрешимость СЛАУ (16) в случае $\text{sgn}(a(\bar{t}_i)) = \text{sgn}(b(\bar{t}_i))$.

Пример применения данного метода для решения модельного ГИУ, а также результаты численного решения даются в п. 3.1.1 и п. 3.2.

2.3. Приближенный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода с особенностью четвертого порядка

Рассмотрим ГИУ второго рода с особенностью четвертого порядка

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^4} + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad (24)$$

где $b(t)$ не обращается в ноль на сегменте $[-1, 1]$.

Введем дополнительные обозначения. Разобьем, аналогично п. 2.2, отрезок $[-1, 1]$ на N сегментов

$$\Delta_i = [t_i, t_{i+1}), \quad \Delta_{N-1} = [\bar{t}_{N-1}, 1],$$

где

$$t_i = -1 + i \frac{2}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Зададим сетку из N узлов

$$\bar{t}_i = t_i + \frac{1}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (25)$$

Приближенное решение уравнения (24) будет определяться, как кусочно-постоянная функция вида

$$x_N(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \Phi_i(t),$$

где

$$\Phi_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_i, \\ 0, & t \notin \Delta_i, \end{cases}$$

а коэффициенты λ_i определяются из СЛАУ

$$a(\bar{t}_i) \lambda_i + b(\bar{t}_i) \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^4} + \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j h(\bar{t}_i, \bar{t}_j) = f(\bar{t}_i), \quad (26)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Используя определение гиперсингулярного интеграла, имеем

$$\int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^4} = -\frac{N^3}{3} \left(\frac{1}{(2j - 2i + 1)^3} - \frac{1}{(2j - 2i - 1)^3} \right),$$

где $i, j = 0, 1, \dots, N-1, \quad i \neq j$.

Таким образом, СЛАУ (26) может быть переписана в виде

$$a(\bar{t}_i) \lambda_i - \frac{N^3}{3} b(\bar{t}_i) \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \left(\frac{1}{(2j - 2i + 1)^3} - \frac{1}{(2j - 2i - 1)^3} \right) +$$

$$+ \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j h(\bar{t}_i, \bar{t}_j) = f(\bar{t}_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (27)$$

СЛАУ (27) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\left(b(\bar{t}_i)\right) & \left(a(\bar{t}_i) \lambda_i - \frac{N^3}{3} b(\bar{t}_i) \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \left(\frac{1}{(2j-2i+1)^3} - \frac{1}{(2j-2i-1)^3} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j h(\bar{t}_i, \bar{t}_j) \right) = \operatorname{sgn}\left(b(\bar{t}_i)\right) f(\bar{t}_i), \quad i=0,1,\dots,N-1 \end{aligned} \quad (28)$$

или в матричной форме

$$CX = F,$$

где $C = \{c_{ij}\}$, $i, j = 0, 1, \dots, N-1$, $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$, $F = \{f_0, f_1, \dots, f_{N-1}\}$, и сами элементы c_{ij} , x_i , f_i , $i, j = 0, 1, \dots, N-1$ принимают соответствующие значения СЛАУ (28).

Для использования результатов непрерывного метода п. 1.3 оценим одну из логарифмических норм для матрицы C

$$\Lambda_2(C) = \max_{0 \leq i \leq N-1} \left(c_{ii} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} |c_{ij}| \right)$$

Для диагональных элементов справедливо

$$c_{ii} = \operatorname{sgn}\left(b(\bar{t}_i)\right) a(\bar{t}_i) - |b(\bar{t}_i)| \frac{2N^2}{3} + \frac{2}{N} \operatorname{sgn}\left(b(\bar{t}_i)\right) h(\bar{t}_i, \bar{t}_i), \quad i=0,1,\dots,N-1. \quad (29)$$

Сумму модулей недиагональных элементов обозначим s_i и дадим следующую оценку

$$\begin{aligned} s_i &= \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} \left| b(\bar{t}_i) \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^4} + \frac{2}{N} h(\bar{t}_i, \bar{t}_j) \right| \leq \\ &\leq |b(\bar{t}_i)| \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^4} + \frac{2}{N} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} |h(\bar{t}_i, \bar{t}_j)| = \\ &= |b(\bar{t}_i)| \left[\int_{-1}^{\bar{t}_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^4} + \int_{\bar{t}_j}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^4} \right] + \frac{2}{N} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} |h(\bar{t}_i, \bar{t}_j)| = \end{aligned}$$

$$= |b(\bar{t}_i)| \frac{N^2}{3} \left[2 - \frac{1}{(2j-2i+1)^3} - \frac{1}{(2j-2i-1)^3} \right] + \frac{2}{N} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} |h(\bar{t}_i, \bar{t}_j)|, \quad (30)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Объединив (29)-(30) получаем оценку

$$\begin{aligned} \Lambda_2(C) &= \max_{0 \leq i \leq N-1} \left(c_{ii} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} |c_{ij}| \right) \leq \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq N-1} \left(\operatorname{sgn}(b(\bar{t}_i)) a(\bar{t}_i) - |b(\bar{t}_i)| \frac{2N^2}{3} + \right. \\ &\quad \left. + |b(\bar{t}_i)| \frac{N^2}{3} \left[2 - \frac{1}{(2j-2i+1)^3} - \frac{1}{(2j-2i-1)^3} \right] + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{N} \left[\operatorname{sgn}(b(\bar{t}_i)) h(\bar{t}_i, \bar{t}_i) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} |h(\bar{t}_i, \bar{t}_j)| \right] \right) = \\ &= \max_{0 \leq i \leq N-1} \left(\operatorname{sgn}(b(\bar{t}_i)) a(\bar{t}_i) + |b(\bar{t}_i)| \frac{N^2}{3} \left[\frac{1}{(2j-2i+1)^3} - \frac{1}{(2j-2i-1)^3} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{N} \left[\operatorname{sgn}(b(\bar{t}_i)) h(\bar{t}_i, \bar{t}_i) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} |h(\bar{t}_i, \bar{t}_j)| \right] \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Lambda'_2(C) &= \max_{0 \leq i \leq N-1} \left(\operatorname{sgn}(b(\bar{t}_i)) a(\bar{t}_i) + |b(\bar{t}_i)| \frac{N^2}{3} \left[\frac{1}{(2j-2i+1)^3} - \frac{1}{(2j-2i-1)^3} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{N} \left[\operatorname{sgn}(b(\bar{t}_i)) h(\bar{t}_i, \bar{t}_i) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} |h(\bar{t}_i, \bar{t}_j)| \right] \right). \end{aligned}$$

Т.к. $\Lambda_2(C) \leq \Lambda'_2(C)$, то согласно п. 1.3 при $\Lambda'_2(C) < 0$ СЛАУ (28) однозначно разрешима и решение можно определить из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_i(t)}{dt} = & \operatorname{sgn}\left(b(\bar{t}_i)\right)\left(a(\bar{t}_i)\lambda_i(t) - N^2 b(\bar{t}_i)\lambda_i(t) - \right. \\ & - \frac{N^2}{2} b(\bar{t}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} \lambda_j(t) \left(\frac{1}{(2j-2i+1)^2} - \frac{1}{(2j-2i-1)^2} \right) + \\ & \left. + \frac{2}{N} \left(h(\bar{t}_i, \bar{t}_i) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{N-1} |h(\bar{t}_i, \bar{t}_j)| \right) - f(\bar{t}_i) \right), \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$.

2.4. Приложение многочленов Чебышева для решения некоторого класса гиперсингулярных интегральных уравнений

2.4.1. Уравнение с особенностью третьего порядка

Пусть решение $x(t)$ уравнения (14) представимо в виде

$$x(t) = \varphi(t) \sqrt{1-t^2}$$

где

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i U_i(t).$$

Подставив сумму с многочленами Чебышева второго рода в уравнение (14), получим

$$\begin{aligned} a(t) \sqrt{1-t^2} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i U_i(t) + b(t) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 \frac{U_i(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau}{(\tau-t)^3} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 h(t, \tau) U_i(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau = f(t), \end{aligned}$$

где коэффициенты λ_i могут быть определены, например, аналогичным п. 2.3 методом сплайн-коллокации. При определении коэффициентов λ_i основной задачей является вычисление гиперсингулярных интегралов вида

$$\int_{-1}^1 \frac{U_i(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau}{(\tau-t)^3}, \quad (31)$$

поэтому приведем, следуя [13], формулы для вычисления гиперсингулярных интегралов (31)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{U_i(\tau) \sqrt{1-\tau^2} d\tau}{(\tau-t)^3} = \frac{\pi}{4(1-t^2)} \Big[& -(i^2 + 3i + 2)U_{i-1}(t) + \\ & + (i^2 + i)U_{i+1}(t) \Big], \quad i=1,2,3,\dots \end{aligned}$$

2.4.2. Уравнение с особенностью четвертого порядка

Аналогичным п. 2.4.1 образом получаются формулы для ГИУ (24), если на функцию решения накладывается условие

$$x(t) = \varphi(t) \sqrt{(1-t^2)^3},$$

и $\varphi(t)$ представима в виде суммы

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i U_i(t).$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} a(t) \sqrt{(1-t^2)^3} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i U_i(t) + b(t) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 \frac{U_i(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3} d\tau}{(\tau-t)^4} + \\ + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 h(t, \tau) U_i(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3} d\tau = f(t). \end{aligned}$$

Проблему вычисления гиперсингулярных интегралов в данном случае решает формула [13]

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{U_i(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3} d\tau}{(\tau-t)^4} &= \frac{\pi}{96(1-t^2)^2} \left[(i^3 + 6i^2 + 11i + 6) U_{i+4}(t) - \right. \\
&\quad - (4i^3 + 18i^2 + 44i + 30) U_{i+2}(t) + \\
&\quad + (6i^3 + 18i^2 + 54i + 42) U_i(t) - \\
&\quad \left. - (4i^3 + 6i^2 + 20i + 18) U_{i-2}(t) + (i^3 - i) U_{i-4}(t) \right], \quad i = 4, 5, 6, \dots
\end{aligned}$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Модельные задачи

3.1.1. Аналитическое решение гиперсингулярного интегрального уравнения

Рассмотрим ГИУ с особенностью третьего порядка вида

$$\begin{aligned} -3x(t) + \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(\tau)d\tau = \frac{e^{3t} + e^{-2t}}{2} + \\ + \frac{4e^3 - 45e^2 - 20e^{-3} + 9e^{-2} + 52}{360}, \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a(t) = -3, \quad b(t) = 1, \quad h(t, \tau) = \frac{1}{2}, \\ f(t) = \frac{e^{3t} + e^{-2t}}{2} + \frac{4e^3 - 45e^2 - 20e^{-3} + 9e^{-2} + 52}{360}, \end{aligned}$$

а точное решение

$$x(t) = \frac{1}{3} \left(e^{3t} + \frac{e^3 - 1}{15} \right) - \frac{1}{2} \left(e^{-2t} + \frac{1 - e^{-2}}{10} \right). \quad (33)$$

Следуя методу п. 2.1, установим

$$\int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} = \frac{1}{2} x''(t),$$

таким образом, решение уравнения (32) эквивалентно решению интегро-дифференциального уравнения вида

$$x''(t) - 6x(t) + \int_{-1}^1 x(\tau)d\tau = e^{3t} + e^{-2t} + \frac{4e^3 - 45e^2 - 20e^{-3} + 9e^{-2} + 52}{180}. \quad (34)$$

Решение уравнения (34) находится аналитически методами теории решения интегро-дифференциальных уравнений с помощью разрешающего интегрального уравнения [16].

Подстановкой решения (33) уравнения (32) получаем правую часть интегро-дифференциального уравнения (34).

3.1.2. Уравнение с особенностью третьего порядка

Рассмотрим ГИУ вида

$$\frac{G}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{-2l^2}{(\tau-t)^3} + \frac{1 - \left(\frac{l'}{2l}\right)^2}{\tau-t} + k_1(t, \tau) \right) x(\tau) d\tau - \frac{Gl'}{2} x'(t) = f(t), \quad (35)$$

которое используется при моделировании процесса образования трещин в теории упругости [13], здесь $-1 < t < 1$, G , l , l' – физические величины, которые, для примера, могут быть подобраны удобным образом, решение удовлетворяет краевому условию

$$x(-1) = x(1) = 0,$$

а несингулярное ядро $k_1(t, \tau)$ выражается следующим образом

$$k_1(t, \tau) = \int_0^\infty K_1(\xi, l, l') \sin(\xi(\tau - t)) d\xi,$$

где

$$K_1(\xi, l, l') = \frac{\left(\frac{l'\xi}{2}\right) \left(\sqrt{l^2\xi^2 + 1} - l\xi\right) - \left(\frac{l'}{2l}\right)^2 \left(\sqrt{l^2\xi^2 + 1} - l\xi\right) + \frac{\left(\frac{l'}{l}\right)^3}{4}}{\frac{l'}{l} - \left(\sqrt{l^2\xi^2 + 1} + l\xi\right)}.$$

Пусть для удобства

$$G = \pi, \quad l = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad l' = 0,$$

в таком случае

$$x(t) = \varphi(t) \sqrt{1-t^2},$$

$$K_1(\xi, l, l') = 0,$$

$$k_1(t, \tau) = C_1.$$

Уравнение (35) примет вид

$$-\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-t)^3} d\tau + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t} d\tau + C_1 \int_{-1}^1 \varphi(\tau)\sqrt{1-\tau^2} d\tau = f(t). \quad (36)$$

К (36) можно применить рассуждения п. 2.4.1 Второе слагаемое представляет собой интеграл с ядром Коши и вычисляется как аналитически, так и численно согласно [13, 14]

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 \frac{U_i(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{(\tau-t)^3} d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 \frac{U_i(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t} d\tau + \\ + C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 U_i(\tau)\sqrt{1-\tau^2} d\tau = f(t) \end{aligned}$$

Используя результаты п. 2.4.1 перепишем данные выражения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4(1-t^2)} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \left[-(i^2 + 3i + 2)U_{i-1}(t) + (i^2 + i)U_{i+1}(t) \right] - \\ - \pi \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i T_{i+1}(t) + C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 U_i(\tau)\sqrt{1-\tau^2} d\tau = f(t), \end{aligned}$$

для вычисления регулярного интеграла можно воспользоваться классическими квадратурными формулами.

Будем использовать следующую сетку узлов

$$t_i = -1 + i \frac{2}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

таким образом, получим систему, решив которую, определим значения коэффициентов λ_i

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4(1-t_k^2)} \sum_{i=0}^N \lambda_i \left[-(i^2 + 3i + 2)U_{i-1}(t_k) + (i^2 + i)U_{i+1}(t_k) \right] - \\ - \pi \sum_{i=0}^N \lambda_i T_{i+1}(t_k) + C_1 \sum_{i=0}^N \lambda_i \int_{-1}^1 U_i(\tau)\sqrt{1-\tau^2} d\tau = f(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

3.1.3. Уравнение с особенностью четвертого порядка

Рассмотрим ГИУ вида

$$\begin{aligned} \frac{G}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{-6l^2}{(\tau-t)^4} + \frac{1 - \left(\frac{l'}{2l}\right)^2}{(\tau-t)^2} + k_2(t, \tau) \right) x(\tau) d\tau - \frac{Gl'}{2} x''(t) + \\ + \frac{Gl'}{8l^2} \left(1 + \left(\frac{l^2}{l}\right)^2 \right) x(t) = f(t), \quad -1 < t < 1 \end{aligned} \quad (37)$$

где G , l и l' имеют аналогичный п. 3.1.1 смысл.

Ядро $k_2(t, \tau)$ имеет вид

$$k_2(t, \tau) = \int_0^\infty K_2(\xi, l, l') \cos(\xi(\tau - t)) d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} K_2(\xi, l, l') = l' \left(\frac{2ll'^3\xi \left(\sqrt{l^2\xi^2 + 1} + l\xi \right) - l^2(3l^2 + l'^2)\xi}{-8l^4 \left(l^2\xi + l\sqrt{l^2\xi^2 + 1} - l' \right) \left(l\xi + l\sqrt{l^2\xi^2 + 1} \right)} - \right. \\ \left. - \frac{l(l^2 + l'^2)\sqrt{l^2\xi^2 + 1} + l'(l^2 + l'^2)}{-8l^4 \left(l^2\xi + l\sqrt{l^2\xi^2 + 1} - l' \right) \left(l\xi + l\sqrt{l^2\xi^2 + 1} \right)} \right). \end{aligned}$$

Пусть

$$G = \pi, \quad l = \frac{\sqrt{6}}{6}, \quad l' = 0,$$

$$x(t) = \varphi(t) \sqrt{(1-t^2)^3},$$

тогда

$$K_2(\xi, l, l') = 0,$$

$$k_2(t, \tau) = C_2.$$

Таким образом, уравнение (37) примет вид

$$\begin{aligned} & - \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3}}{(\tau-t)^4} d\tau + \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3}}{(\tau-t)^2} d\tau + \\ & + C_2 \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3} d\tau = f(t). \end{aligned} \quad (38)$$

Перепишем (38) согласно п. 2.4.2 в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 \frac{U_i(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3}}{(\tau-t)^4} d\tau + \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 \frac{U_i(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3}}{(\tau-t)^2} d\tau + \\ & + C_2 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \int_{-1}^1 U_i(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3} d\tau = f(t), \end{aligned}$$

При решении уравнения (38) используются формулы п. 2.4.2, а при вычислении гиперсингулярного интеграла с особенностью второго порядка можно использовать следующее выражение [13]

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{U_n(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3}}{(\tau-t)^2} d\tau = \frac{\pi}{4} \left[(n-1)U_{n-2}(t) - 2(n+1)U_n(t) + (n+3)U_{n+2}(t) \right], \\ & n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, используя сетку узлов,

$$t_i = -1 + i \frac{2}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

получаем систему уравнений относительно коэффициентов λ_i

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{96(1-t^2)^2} \sum_{i=0}^N \lambda_i \left[(i^3 + 6i^2 + 11i + 6)U_{i+4}(t) + \right. \\ & \left. - (4i^3 + 18i^2 + 44i + 30)U_{i+2}(t) + \right. \\ & \left. + (6i^3 + 18i^2 + 54i + 42)U_i(t) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(4i^3 + 6i^2 + 20i + 18\right)U_{i-2}(t) + \\
& -\left(i^3 - i\right)U_{i-4}(t)\Big] + \\
& + \frac{\pi}{4} \sum_{i=0}^N \lambda_i \left[(n-1)U_{n-2}(t) - 2(n+1)U_n(t) + (n+3)U_{n+2}(t) \right] + \\
& + C_2 \sum_{i=0}^N \lambda_i \int_{-1}^1 U_i(\tau) \sqrt{(1-\tau^2)^3} d\tau = f(t),
\end{aligned}$$

решение которой позволяет составить соотношения для определения неизвестной функции.

3.2. Анализ результатов численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения

Для получения численных результатов применим вычислительную схему п. 2.2 к уравнению вида (32). В качестве разбиения интервала $[-1,1]$ используем сетку узлов (15).

Полученные результаты будем сравнивать в промежуточных контрольных точках разбиения (25). Для сравнения используем значения N равные 5, 20, 30 и 50.

Все перечисленные данные приводятся в табл. 1-4 и визуализируются на рис. 1-4. Данные результаты были получены с помощью программы, исходный код которой приведен в приложении А.

Таблица 1 – Результаты приближенного решения при $N = 5$

$\bar{t}_i$	$x(\bar{t}_i)$	$x_N(\bar{t}_i)$	$ x(\bar{t}_i) - x_N(\bar{t}_i) $
-0,80000	-2,06539	-2,02383	0,04156
-0,40000	-0,63148	-0,51700	0,11448
0,00000	0,21422	0,22734	0,01312
0,40000	1,26293	1,07881	0,18412
0,80000	3,95433	3,72950	0,22483

Таблица 2 – Результаты приближенного решения при $N = 20$

$\bar{t}_i$	$x(\bar{t}_i)$	$x_N(\bar{t}_i)$	$ x(\bar{t}_i) - x_N(\bar{t}_i) $
-0,95000	-2,94278	-3,08341	0,14063
-0,85000	-2,33006	-2,42332	0,09326
-0,75000	-1,82482	-1,85340	0,02857
...			
-0,05000	0,11521	0,11545	0,00024
0,05000	0,31575	0,31057	0,00518
...			
0,75000	3,43190	3,45358	0,02168
0,85000	4,55858	4,43164	0,12694
0,95000	6,06870	6,07926	0,01056

Таблица 3 – Результаты приближенного решения при $N = 30$

$\bar{t}_i$	$x(\bar{t}_i)$	$x_N(\bar{t}_i)$	$ x(\bar{t}_i) - x_N(\bar{t}_i) $
-0,96667	-3,05703	-3,01397	0,04306
-0,90000	-2,62153	-2,70047	0,07894
-0,83333	-2,23899	-2,18964	0,04936
...			
-0,03333	0,14803	0,15256	0,00452
0,03333	0,28153	0,28643	0,00490
...			
0,83333	4,34728	4,27137	0,07592
0,90000	5,25815	5,13271	0,12544
0,96667	6,36661	6,57837	0,21177

Таблица 4 – Результаты приближенного решения при $N = 50$

$\bar{t}_i$	$x(\bar{t}_i)$	$x_N(\bar{t}_i)$	$ x(\bar{t}_i) - x_N(\bar{t}_i) $
-0,98000	-3,15115	-3,11031	0,04084
-0,94000	-2,87599	-2,85660	0,01939
-0,90000	-2,62153	-2,60365	0,01789
...			
-0,02000	0,17441	0,17479	0,00039
0,02000	0,25444	0,25937	0,00493
...			
0,90000	5,25815	5,26617	0,00802
0,94000	5,89688	5,99231	0,09543
0,98000	6,61574	6,60647	0,00927

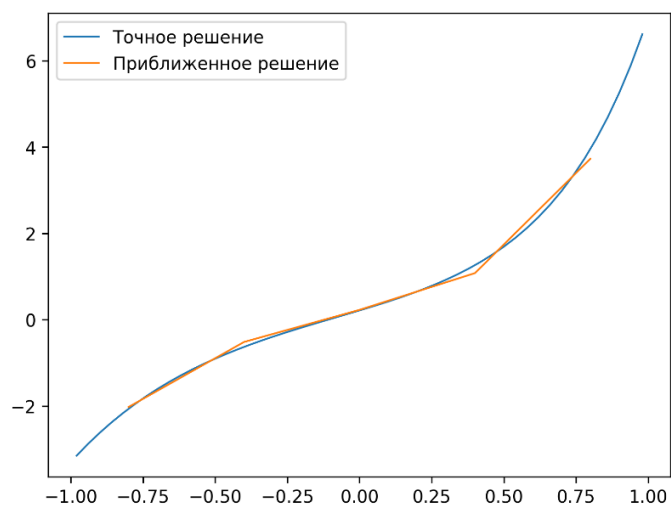


Рисунок 1 – Графики точного и приближенного решений при $N = 5$

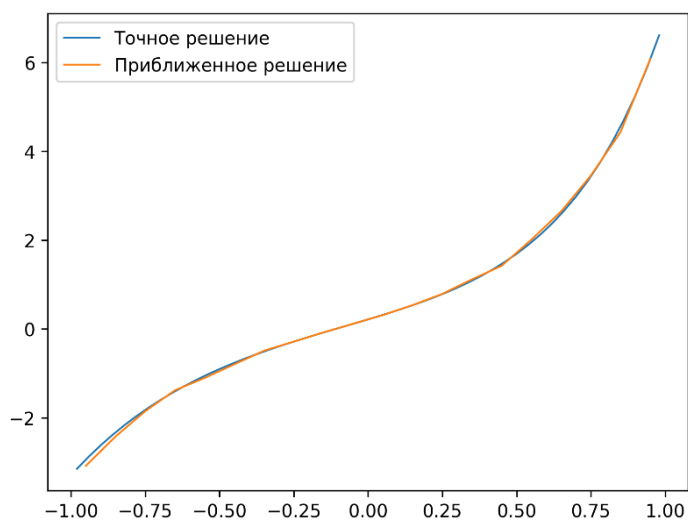


Рисунок 2 – Графики точного и приближенного решений при $N = 20$

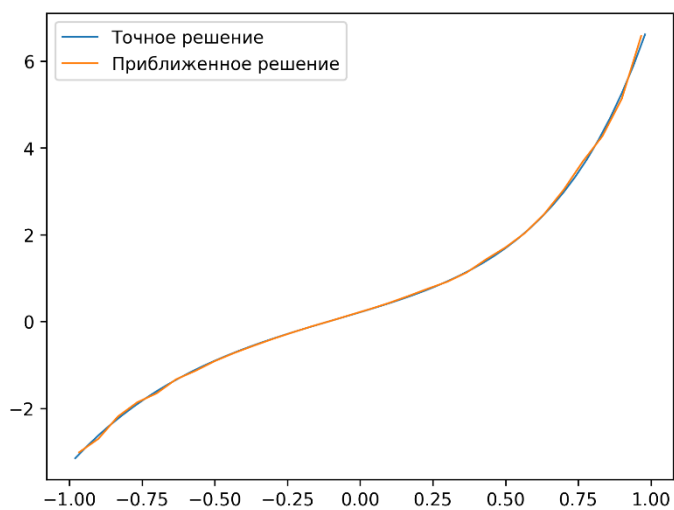


Рисунок 3 – Графики точного и приближенного решений при $N = 30$

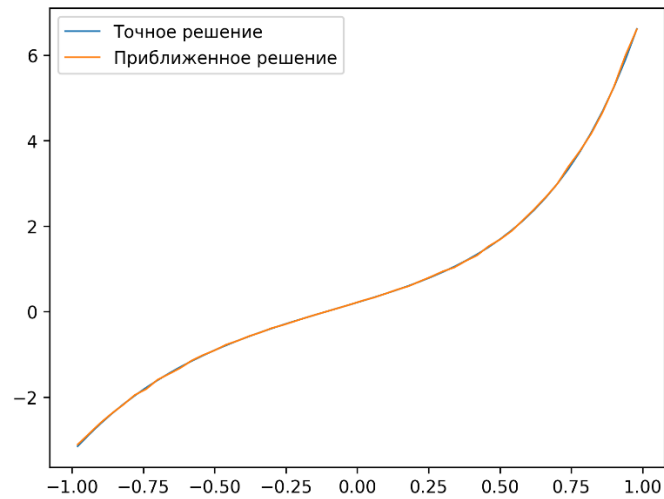


Рисунок 4 – Графики точного и приближенного решений при $N = 50$

Таким образом, численные результаты демонстрируют сходимость схемы п. 2.2, а также подтверждают решение, полученное аналитическим методом п. 2.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью работы было изучение приближенных методов решения ГИУ второго рода с особенностями третьего и четвертого порядков

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} + \int_{-1}^1 h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad p=3,4.$$

В рамках данной работы рассмотрены: аналитический метод сведения ГИУ к интегро-дифференциальному уравнению, приближенный метод решения ГИУ с особенностью третьего порядка, приближенный метод решения ГИУ с особенностью четвертого порядка, использующий непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений, приведено доказательство однозначной разрешимости систем, к которым сводится решение ГИУ в данных методах. Представлены приближенные схемы решения класса ГИУ, с решением $x(t)$, представимым в виде

$$x(t) = \varphi(t)\sqrt{1-t^2}$$

или

$$x(t) = \varphi(t)\sqrt{(1-t^2)^3},$$

где функция $\varphi(t)$ аппроксимируется полиномами Чебышева первого и второго рода.

В п. 3.1 рассмотрены конкретные модельные примеры ГИУ. Для одного из них получено аналитическое решение путем сведения к интегро-дифференциальному уравнению Фредгольма. Два других примера – это ГИУ, используемые в теории упругости для моделирования процесса образования трещин [16], для них выведена система уравнений с многочленами Чебышева, решение которой позволяет определить коэффициенты разложения точного решения.

В п. 3.2 были даны результаты численного решения ГИУ второго рода с особенностью третьего порядка при различных значениях параметрах, в котором

решение представляется в виде кусочно-постоянной функции. Приближенное решение задачи в контрольных точках получено с помощью программы, реализующий метод п. 2.2. Данное решение сходится к точному при числе узлов $N \geq 20$ (и размере системы уравнений). При этом точное решение модельной задачи получено аналитическим методом п. 2.1.

Таким образом, показано, что приближенное решение ГИУ может быть получено как с помощью специализированных численных схем, применимых только к ГИУ, так и с помощью методов решения интегро-дифференциальных уравнений, после процесса аналитического сведения заданных ГИУ к таковым, а также с помощью представления функции решения в виде суммы многочленов Чебышева первого или второго рода с некоторыми коэффициентами, определяемых путем решения системы линейных уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hadamard, J. Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique. / A. Herman J. Hadamard. – Paris. 1903. 375 p.
2. Адамар, Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука, 1978, 352 с.
3. Lifanov, I. K. Hypersingular Integral Equations and their application / I. K. Lifanov, L. N. Poltavskii, G. M. Vainikko. – London. New York. Washington. : CRC Press, 2004. 396 p.
4. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов: Монография. Часть вторая. Гиперсингулярные интегралы / Монография / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. – 252 с.
5. Boykov, I. V. Analytical methods for solution of hypersingular and polyhypersingular integral equations / I. V. Boykov, A. I. Boykova. – arXiv:1901.04880v1 [math.NA] 15 Janury 2019, 22 p.
6. Бойков, И. В. Приближенное решение некоторых классов гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Б. М. Стасюк, Д. В. Тарасов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 100–112.
7. Boykov, I. V. An Approximate Solution of Hypersingular Integral Equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Appl. Num. Math. – 2010. – Vol. 60. – P. 607– 628.
8. Бойков, И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений / И. В. Бойков // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 9. – С. 1308–1314.
9. Boykov, I. V. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations./ I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, O. A. Baulina. – Appl. Numer. Math. 2018, 127, 280–305.

10. Бойков, И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Динамические системы. 2019. Т. 9. №3. С. 244 - 272.
11. Boykov, I. V. Approximate Methods for Solving Linear and Nonlinear Hypersingular Integral Equations. / I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova. – Axioms 2020, 9, 74.
12. Бойков, И. В. Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси / И. В. Бойков, П. В. Айкашев, А. И. Бойкова // Журнал СВМО. – №22:4. – 2020. С. 405–423.
13. Chan, Y-S. Integral equations with hypersingular kernels-theory and applications to fracture mechanics / Y-S. Chan, A. C. Fannjiang, G. H. Paulino. – International Journal of Engineering Science 41, (2003), 683–720.
14. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
15. Чикин, Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // Уч. записки Казан. гос. ун-та. 1953. Т. 1136, № 10. С. 57 - 105.
16. Шишкин, Г. А. Линейные интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма : учеб. пособие по спецкурсу и спецсеминару / Г. А. Шишкин. – Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2007. – 195 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг программы поиска приближенного решения гиперсингулярного интегрального уравнения второго рода с особенностью третьего порядка (обязательное)

Данная программа разработана для определения приближенного решения гиперсингулярного интегрального уравнения второго рода с особенностью третьего порядка. Программа реализует вычислительную схему п. 2.2. Исходные коды написаны и интерпретированы с помощью Python 3.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Точное решение
def x(t):
    return (np.exp(3*t) + (np.exp(3)-1)/15)/3 - \
           (np.exp(-2*t) + (1-np.exp(-2))/10)/2

# Заданная функция a(t)
def a(t):
    return -3

# Заданная функция b(t)
def b(t):
    return 1

# Заданная функция несингулярное ядро h(t, tau)
def h(t, tau):
    return 1/2

# Заданная функция правой части f(t)
def f(t):
```

```

return (np.exp(3*t) + np.exp(-2*t) + (4*exp(3)-45*exp(2) -\
20*exp(-3)+9*exp(-2)+62)/360

```

```

def phi(t, i, nodes, N):
    if (i < N - 1):
        if(nodes[i] <= t < nodes[i+1]):
            return 1
    if (i == N - 1):
        if(nodes[i] <= t <= 1):
            return 1
    return 0

```

Задание сетки узлов

```

def set_nodes(t, N):
    for i in range(0, N + 1):
        t[i] = -1 + i*2/N

```

Задание матрицы A СЛАУ и вектора правой части F

```

def make_AF(A, F, t, N):
    for i in range(0, N):
        F[i] = f(t[i])

    for i in range(0, N):
        A[i, i] = a(t[i])

    for i in range(0, N):
        for j in range(0, N):
            A[i, j] += h(t[i], t[j])
            if((j != i-2) and (j != i-1) and (j != i+1)):
                A[i, j] += -N**2/8

    A *= 2
    A /= N

```

```

# Параметры схемы
N = 50          # Число сегментов
t = np.zeros(N + 1)  # Узлы сетки
A = np.zeros((N, N))  # Матрица СЛАУ
F = np.zeros(N)      # Вектор правой части

# Задаем узлы
set_nodes(t, N)

# Задаем СЛАУ
make_AF(A, F, t, N)

# Решение СЛАУ
sol = np.linalg.solve(A, F)

# Вывод промежуточных результатов
print(t)
print(A)
print(F)
print(sol)

z = np.zeros(N)
exact_sol = np.zeros(N)
apprx_sol = np.zeros(N)

# Таблица
print("N = 50")
for i in range(N):
    z[i] = t[i] + 1/N
    exact_sol[i] = x(z[i])
    for j in range(N):

```

```

    appr_x_sol += sol[j]*phi(z[i], j, t, N)
print(f'{z[i]:.5f}', f'{exact_sol[i]:.5f}', f'{appr_x_sol[i]:.5f}',
      f'{np.abs(exact_sol[i] - appr_x_sol[i]):.5f}')

# Графики
plt.plot(z, exact_sol, linewidth=1.0, label="Точное решение")
plt.plot(z, appr_x_sol, linewidth=1.0, label="Приближенное решение")
plt.legend()
# plt.savefig("50.png", dpi=300, bbox_inches='tight', pad_inches=.1)
# plt.show()

```