

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Пензенский государственный университет

Кафедра «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

КУРСОВАЯ РАБОТА
по дисциплине «Функциональный анализ»
на тему «Элементы спектральной теории линейных операторов»

ПГУ 1.1.130302.104.001 Специальность – 01.05.01

Фундаментальная математика и механика

Профиль подготовки – Вычислительная математика и вычислительная
механика

Выполнил студент: _____ Безбородов А.О.

Группа: _____ 18ВФ1

Руководитель:

к.ф.-м. н, доцент _____ Цупак А.А.

Работа защищена с оценкой _____

Преподаватель _____

Дата защиты _____

Пенза, 2021

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Зав. кафедрой МСМ

_____ Ю.Г. Смирнов

ЗАДАНИЕ

На курсовую работу по дисциплине

«Функциональный анализ»

Тема: «Элементы спектральной теории линейных операторов»

Необходимо:

1. Изучить литературу и по данной теме;
2. Разобрать примеры решения задач.

Руководитель работы, к. ф-м. н., доцент

Цупак А.А.

Содержание

Введение.....	4
1. Линейный оператор.....	5
1.1. Понятие линейного оператора.....	5
1.2. Линейные преобразования.....	6
1.3. Сопряжённый и самосопряжённый оператор.....	8
2. Спектральная теория операторов.....	9
2.1 Спектр оператора.....	9
2.2 Понятие об ограниченном операторе.....	11
2.3. Понятие о компактном операторе.....	16
3. Спектральная теория компактных операторов.....	19
3.1. Множество значений компактного оператора.....	19
3.2. Собственное значение компактного оператора.....	22
Заключение.....	30
Список используемой литературы.....	31

Введение

Данная курсовая работа посвящена спектральной теории операторов. В отдельной главе более подробно рассматривается спектральная теория компактных операторов. Важнейшими задачами этой теории являются утверждения о приведении изучаемых операторов к так называемому диагональному виду – спектральные теоремы, утверждения о свойствах спектра и собственных значениях.

Цель данной курсовой работы – познакомить тех, кто интересуется математикой со спектральной теорией операторов, в частности, со спектральной теорией для компактных операторов.

Данная курсовая работа состоит из трёх глав:

- 1) Линейный оператор;
- 2) Спектральная теория операторов;
- 3) Спектральная теория компактных операторов.

В первой главе рассматриваются понятия линейного оператора, линейные преобразования, сопряжённый и самосопряжённый оператор.

Во второй главе рассматривается понятие спектра оператора, теорема для замкнутого линейного оператора, спектральный радиус понятие об ограниченном операторе и компактных операторах, а также теорема, являющаяся важным характеристическим свойством компактных операторов.

В третьей главе рассматриваются множество значений компактного оператора, собственные значения компактного оператора. В каждой главе приводятся решённые примеры.

1. Линейный оператор

1.1. Понятие линейного оператора

Функцию, множество значений которой принадлежит полю скаляров, называют функционалом.

Вообще функция может быть определена не на всем гильбертовом пространстве, а лишь на некотором его подмножестве. Это подмножество называют областью определения функции. Множеством значений функции называют множество, в которое эта функция отображает свою область определения. Для удобства условимся обозначать область определения через D , гильбертово пространство ее содержащее, — через H_1 множество значений — через R а содержащее его пространство — через H_2 .

Определение 1.1. Оператор (преобразование) L называется линейным, если его область определения D является линейным подпространством (плотным или нет) и он линеен на D .

$$L(\alpha_x + \beta_y) = \alpha Lx + \beta Ly \quad (1.1)$$

Множество линейного оператора также является линейным подпространством.

1.2. Линейные преобразования

Определение 1.2. Графиком $G(T)$ линейного преобразования T называется подпространство в произведении подпространств $H_1 \times H_2$, образованное по правилу

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \quad (1.2)$$

Определение 1.3. Линейное преобразование T называется замкнутым, если его график функции замкнут в H_3 . Иначе замкнутость оператора T можно определить так: пусть $x_n \in D(T)$, $x_n \rightarrow x$, $Tx_n \rightarrow y$. Тогда $x \in D(T)$ и $Tx = y$.

Отметим, что, как правило, дифференциальные операторы замкнуты. Этот факт и определяет необходимость рассмотрения класса замкнутых операторов.

Определение 1.4. Линейное преобразование T называется ограниченным, если $D = H_1$ и

$$\sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = M < \infty \quad (1.3)$$

Определение 1.5. Нормой линейного ограниченного преобразования T называется число

$$\|T\| = \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad (1.4)$$

Линейное преобразование ограничено, если оно непрерывно в начале координат. Тогда оно непрерывно в каждой точке. Ограниченное линейное преобразование, очевидно, непрерывно.

Пусть T_1, T_2 — линейные ограниченные операторы, отображающие пространство H_1 в H_2 . Тогда ясно, что сумма $T_1 + T_2$ также является линейным ограниченным оператором. Кроме того,

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\| \quad (1.5)$$

В силу определения $(\alpha T)x = \alpha Tx$, где α элемент поля скаляров, следовательно, оператор αT ограничен, если T ограничен. Следовательно, множество всех линейных ограниченных операторов образует линейное пространство, а норма оператора является нормой на этом пространстве. Полученное таким образом линейное нормированное пространство операторов обозначается через $L(H_1, H_2)$. Нетрудно показать, что пространство $L(H_1, H_2)$ полно. Действительно, если $\{T_n\}$ — последовательность Коши этого пространства, то для любого элемента x пространства H_1 имеем

$$\|Qx - T_n x\| \leq \|T - Q\| \|x\| \quad (1.6)$$

Следовательно, $\{T_n x\}$ является последовательностью Коши пространства H_2 , ее предел обозначим через Tx . Очевидно, что оператор T линеен и ограничен. Если $n > N(\epsilon)$ и $\|x\| \leq 1$, то

$$\|(T - T_n)x\| \leq \|(T - T_Q)x\| + \|T_Q - T_b\| \leq 2\alpha \quad (1.7)$$

1.3. Сопряжённый и самосопряжённый оператор

Определение 1.6. Пусть T — линейный ограниченный оператор из H_1 в H_2 сопряженный оператор T^* (определенный на H_2 и принимающий значения в H_1) определяется условием $y = T^*x$ в том и только том случае, если существует вектор u такой, что $[y, z] = [x, Tz]$ для любого $z \in H_1$.

Определение 1.7. Пусть $H_1 = H_2 = H$. Оператор L с плотной областью определения, называется самосопряжённым, если $L = L^*$. [9]

2. Спектральная теория операторов

2.1 Спектр оператора

В приложениях часто возникает следующая задача: задан оператор T , найти элемент x такой, что $Tx = y$, где элемент y , задан. В общем случае множество решений может оказаться либо пустым, либо содержать слишком много элементов. Можно рассмотреть несколько более общую задачу: найти элемент x такой, что $\lambda x - Tx = y$, где λ — скаляр. Важность рассмотрения этой задачи обусловлена тем, что последняя тесно связана со структурой самого оператора. Возможно, что читатель имеет представление о собственных значениях и собственных векторах матрицы. Спектральная теория операторов рассматривает вопросы, связанные с этими понятиями, но уже для более широкого класса операторов. В дальнейшем гильбертовы пространства рассматриваются над полем комплексных чисел.

Определение 2.1. Пусть T — замкнутый линейный оператор, отображающий пространство H в себя. Комплексное число λ называется собственным значением оператора T , если существует элемент x . Из H такой, что $Tx = \lambda x$; при этом элемент x (предполагается, что его норма равна 1) называется собственным вектором, соответствующим λ . Множество всех собственных значений оператора T образует его точечный спектр.[4]

Если комплексное число λ не принадлежит точечному спектру оператора T , то, безусловно, можно определить оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ (здесь I — тождественный оператор): $x = (\lambda I - T)^{-1}y$ в том и только том случае, если $y = \lambda x - Tx$.

Обратный оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ очевидно, линеен. Однако для наших целей весьма важно знать условия, при выполнении которых обратный оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ кроме того и непрерывен. Для этого необходимо, чтобы множество значений оператора $(\lambda I - T)$ совпадало со всем пространством H .

Но самое замечательное при этом заключается в том, что для замкнутых операторов это условие оказывается и достаточным, и этим в значительной степени объясняется наш интерес к замкнутым операторам.

Теорема 2.1. Пусть T — замкнутый линейный оператор и число λ не принадлежит его точечному спектру. Пусть, далее, множество значений оператора $(\lambda I - T)$ совпадает со всем пространством H . Тогда оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ ограничен, т. е. для любого элемента x из H и некоторого числа M (зависящего от λ) справедлива оценка

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq M|x| \quad (2.1)$$

Доказательство. Оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ замкнут и его область определения есть все пространство H . Следовательно, по теореме о замкнутом графике он должен быть непрерывным.

Определение 2.2. Множество комплексных чисел λ , не являющихся собственными значениями оператора T , таких, что множество значений оператора $(\lambda I - T)$ совпадает со всем пространством H , называется резольвентным множеством оператора E и обозначается через $p(T)$. Для $\lambda \in p(t)$ оператор $(\lambda I - T)^{-1}$ обозначается через $R(\lambda, T)$ и называется резольвентой T . Дополнение резольвентного множества называют спектром оператора. Таким образом, точечный спектр оператора является подмножеством его спектра. [5]

Пример 2.1. Пусть $H = L_2(0,1)$ а D — класс функций, производные которых тоже принадлежат $L_2(0,1)$. Для функций $f \in D$ положим $Tf = f'$. Тогда оператор T замкнут и его область определения плотна. Рассмотрим его резольвентное множество. Уравнение $\lambda f - f' = 0$ означает, что $f(t) = f(0)e^{\lambda t}$ и $e^{\lambda t} \in L_2(0,1)$. Таким образом, все числа λ принадлежат спектру оператора T , и потому его резольвентное множество пусто. Этого, однако, не может быть для ограниченных операторов.

2.2 Понятие об ограниченном операторе

Теорема 2.2. Пусть T — ограниченный оператор, отображающий пространство H в себя. Тогда $\lambda \in p(T)$ если $|\lambda| > r$, где $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$. Число $r > 0$ называется спектральным радиусом оператора T . [5]

Доказательство. Основным шагом заключается в доказательстве сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T^n\|}{|\lambda|^n} \quad (2.2)$$

для всех $|\lambda| > r$. Это непосредственно следует из того факта, что мажорирующий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad (2.3)$$

абсолютно сходится при $|z| > \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$. Следовательно, ряд сходится по норме пространства $L(H, H)$. Более того, имеем так что

$$(\lambda I - T) \left(\sum_{k=0}^n \frac{T^k}{\lambda^k} \right) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{T^k}{\lambda^k} \right) (\lambda I - T) = \left(\lambda I - \frac{T^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \right) \quad (2.4)$$

Следствие 2.1. Спектр произвольного замкнутого оператора является замкнутым множеством. Спектр ограниченного оператора не пуст.

Доказательство. Сначала докажем, что резольвентное множество произвольного замкнутого оператора открыто. В случае, если резольвентное множество замкнутого оператора пусто, то доказывать нечего. Предположим, что резольвентное множество не пусто и содержит число λ_0 . Покажем, что все λ , удовлетворяющие условию $|\lambda - \lambda_0| / \|R(\lambda_0; T)\| < 1$, принадлежат резольвентному множеству. Прежде всего, отметим, что для таких λ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0; T)^n$ сходится и

$$(I + (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0; T))^{-1} = \sum (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; T)^n \quad (2.5)$$

Докажем, что

$$R(\lambda; T) = (I + (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; T))^{-1}R(\lambda_0; T) \quad (2.6)$$

Пусть $x \in H$. Имеем

$$(\lambda I - T) \left(\sum_0^x (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; T)^{n+1} \right) x = x \quad (2.7)$$

Если $x \in D(T)$, то

$$\sum_0^x (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; T)^{n+1} (\lambda I - T)x = x \quad (2.8)$$

Таким образом, оператор $R(\lambda; T)$ — резольвента. Следовательно, резольвентное множество открыто. Более того, имеем

$$R(\lambda_0 + \lambda; T) = \sum_0^x (-\lambda)^n R(\lambda_0; T)^n \quad (2.9)$$

При $\|\lambda R(\lambda_0; T)\| < 1$.

Таким образом, если $L(\cdot)$ — линейный непрерывный функционал на $L(H, H)$, то функция $L(R(K; T))$ оказывается аналитической на резольвентном множестве оператора T . Рассмотрим теперь случай, когда оператор T ограничен. Предположим, что его спектр — пустое множество. Тогда для любого линейного непрерывного функционала $L(\cdot)$ аналитическая функция $L(R(\lambda; T))$ определена на всей комплексной плоскости и, кроме того, она ограничена в бесконечности, поскольку

$$\|\lambda R(\lambda; T)\| \leq (1 - \|T\|/|\lambda|)^{-1} \text{ для всех } |\lambda| > \|T\|.$$

Следовательно, в силу классической теоремы Лиувилля для любого функционала $L(\cdot)$ и любого комплексного λ функция $L(R(\lambda; T))$ тождественно равна нулю. Но тогда

$$L(I) = L(\lambda R(\lambda; T) - TR(\lambda; T)) = L(TR(\lambda; T)).$$

Поэтому в силу сходимости правой части последнего равенства к нулю при $\lambda \rightarrow +\infty$ $L(I) = 0$ для любого линейного непрерывного функционала $L(\cdot)$, что невозможно. Таким образом спектр ограниченного оператора не может быть пустым.

Определение 2.3. Ограниченный оператор называется квазиниль-потентным, если его спектральный радиус равен нулю [6].

Спектр квазиниль-потентного оператора содержит лишь нулевую точку.

Пример 2.2. Пусть $H = L_2(0, 1)$.

Определим оператор T соотношениями

$$Tf = g, g(t) = \int_0^t f(s)ds, 0 \leq t \leq 1 \quad (2.10)$$

Тогда оператор T линеен и ограничен. Используя неравенство Шиарца, найдем $\|T\| \leq 1$. Что касается спектра оператора T , то заметим, что если

$$\lambda f(t) - \int_0^t f(s)ds = 0 \text{ почти всюду на } [0,1],$$

f -непрерывная функция. Далее, уравнение

$$\lambda f(t) - \int_0^t f(s)ds = g(t)$$

имеет единственное решение

$$f(t) = \frac{g(t)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} g(s)ds, \quad (2.11)$$

и потому спектр оператора T может содержать лишь нулевую точку. Это можно доказать заметив, что оператор T квазиниль-потентен:

$$T^{n+1}f = g, g(t) = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-\sigma)^n f(\sigma)d\sigma, \|T^{n+1}\| \leq \frac{1}{n!}. \quad (2.12)$$

Как было доказано выше, спектр ограниченного оператора не может быть пустым. Следовательно, спектр оператора T состоит из нулевой точки. С другой стороны, в рассматриваемом случае, нуль не является собственным значением, поскольку из условия $Tf = 0$ следует, что $f = 0$. Отсюда

следует, что T^{-1} — замкнутый линейный оператор, однако он неограничен. Это и следовало ожидать, поскольку $T^{-1}f = g$ означает, что $g = f'$.

Пример 2.3. В общем случае нельзя указать эффективной процедуры отыскания спектра и резольвентного множества заданного оператора. Однако, для интегральных операторов такой общий метод существует; он заключается в дифференцировании необходимое число раз равенства, определяющего точку спектра с целью получения определяющего дифференциального уравнения. Рассмотрим, например, оператор

$$Tf = g, g(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.13)$$

Рассмотрим сначала точечный спектр этого оператора. Если функция $L(\cdot)$ из H является собственным вектором, то

$$\int_0^t f(s) ds = \lambda t f(t) \text{ почти всюду.}$$

Дифференцируя обе части этого равенства, получим дифференциальное уравнение

$$f(t) = \lambda t f'(t) + \lambda f(t);$$

его общее решение имеет вид $f(t) = k - t^a$, где k — произвольное постоянное число, а $a = (1 - \lambda)/\lambda$. С другой стороны, из условия

$$\int_0^1 t^{2\sigma} dt < \infty, \quad \sigma = \operatorname{Re} a,$$

следует, что

$$1 + 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \right) = 0 \text{ или } \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\lambda} \right) > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, всякое комплексное число λ , удовлетворяющее этому условию, принадлежит точечному спектру. Так как спектр — замкнутое множество, то $\{\lambda; -\frac{1}{2} + \operatorname{Re}(1/\lambda) \geq \frac{1}{2}\}$ принадлежит ему. Это множество представляет собой шар радиуса 1 с центром в точке $\sigma = 1$. Далее, рассмотрим уравнение $\lambda f - Tf = g$, или

$$\lambda t f(t) - \int_0^t f(s) ds = t g(t),$$

Предполагая дифференцируемость соответствующих функций, получим

$$\lambda t f'(t) + \lambda f(t) - f(t) = t g'(t) + g(t).$$

Отсюда следует, что

$$f(t) = \frac{g(t)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{t^{1-1/\lambda}} \int_0^t s^{-\frac{1}{\lambda}} g(s) ds + \frac{k}{t^{q-1/\lambda}}, \quad (2.14)$$

где k — константа. Если ограничиться рассмотрением тех λ , для которых $1 + 2 \operatorname{Re}(1 - \lambda) / \lambda < 0$, то, полагая $k = 0$, получим

$$f(t) = \frac{g(t)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{t^{1-1/\lambda}} \int_0^t s^{-\frac{1}{\lambda}} g(s) ds. \quad (2.15)$$

Условие $1 + 2 \operatorname{Re}(\lambda - 1) / \lambda > 0$ эквивалентно условиям $\operatorname{Re}(\lambda) < C < 1/2$, или $\sigma^2 + \tau^2 - 2\sigma > 0$, где $\lambda = \sigma + i\tau$. Можно показать, что последняя формула определяет резольвенту. Заметим, что такое λ принадлежит спектру, но не является собственным значением. Безусловно, спектр целиком содержится в шаре $|\lambda| \leq \|T\| = 2$.

Определение 2.4. Ограниченный линейный оператор, отображающий пространство λ в себя, называется неотрицательно определенным, если он самосопряжен и квадратичная форма $[Tx, x]$ неотрицательно определена.

Для любого ограниченного линейного оператора операторы T^* и TT^* неотрицательно определены [8].

2.3. Понятие о компактном операторе

Определение 2.5. Ограниченный линейный оператор, отображающий пространство H_1 в H_2 , называется компактным (вполне непрерывным), если он переводит ограниченные множества из H_1 в компактные подмножества H_2 .

Важное характеристическое свойство компактных операторов определяется следующей теоремой [7].

Теорема 2.3. Пусть T — компактный оператор, отображающий пространство H_1 в H_2 . Тогда для любой слабо сходящейся последовательности $\{x_n\}$ из H_1 последовательность $\{Tx_n\}$ сильно сходится в H_2 . Обратно, любой ограниченный линейный оператор, обладающий этим свойством, компактен [6].

Доказательство. Пусть оператор T компактен, а $\{x_n\}$ — слабо сходящаяся, скажем к x_0 , последовательность из H_1 . Тогда, согласно принципу равномерной ограниченности имеем оценку

$$\|x_n\| < M$$

для некоторого числа M , $0 < M < \infty$. Поэтому последовательность $\{Tx_n\}$ принадлежит некоторому компактному подмножеству в H_2 и, значит, из любой ее подпоследовательности можно извлечь еще более узкую сильно сходящуюся подпоследовательность. Обозначим такую сильно сходящуюся подпоследовательность через $\{Tx_{n_k}\}$, а ее предел через y . Тогда для любого $h \in H_2$ имеем цепочку равенств

$$[y; h] = \lim [Tx_{n_k}, h] = \lim [x_{n_k}, T^* h] = [x_0, T^* h] = [Tx_0, h],$$

откуда $y = Tx_0$, так что y не зависит от выбора конкретной подпоследовательности, а значит,

$$\lim Tx_n = y$$

Обратно, пусть T — ограниченный линейный оператор, переводящий любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Пусть B — ограниченное множество в H_q . Покажем, что замыкание множества TB компактно. Действительно, пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность элементов из B . В силу свойства слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовом пространстве найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, слабо сходящаяся к некоторому пределу, скажем к x . Тогда подпоследовательность $\{Tx_{n_k}\}$ сходится сильно и, как мы видели, ее пределом должна быть точка Tx . Очевидно, что Tx — предельная точка множества TB , а это и значит, что оператор компактен.

Пример 2.4. Пусть $(\Omega_1, B_1, \mu_1), (\Omega_2, B_2, \mu_2)$ — пространства c^σ -конечными мерами μ_1, μ_2 . Обозначим через $R(t, s)$ измеримую матричную функцию порядка (p, q) , определенную на множестве $\Omega_2 \times \Omega_1$. Положим

$$\|R\|^2 = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} \text{Tr} R(t, s) d\mu_1 \mu_2 < \infty$$

Тогда оператор L , определенный соотношениями

$$Lf = g, g(t) = \int_{\Omega_1} R(t, s) f(s) d\mu_1, t \in \Omega_2,$$

линейно и непрерывно отображает пространство $H_1 = L_2(\Omega_1, B_1, \mu_1)^p$ в $H_2 = L_2(\Omega_2, B_2, \mu_2)^p$. Заметим, что пространство H_1 не обязательно сепарабельно. Докажем компактность оператора L . Пусть последовательность $f_n \in H_1$ слабо сходится. Для всех $t \in \Omega_2$, где Ω_2 — множество полной меры имеем

$$\int \|\mathbf{R}(t, s)\|^2 d\mu_1 < \infty.$$

Пусть e_i — единичный вектор евклидова пространства R^q . Тогда для любого $t \in A$ формула

$$[\int R(t, s) f(s) d\mu_1, e_i]$$

определяет линейный непрерывный функционал на пространстве H_1 . Следовательно, для каждого $t \in A$ последовательность

$$g_n(t) = \int R(t, s) f_n(s) d\mu_1$$

сходится к

$$g(t) = \int R(t, s) f(s) d\mu_1.$$

Можно применить теорему Лебега о по членном интегрировании последовательности. Следовательно,

$$\int |g_n(t)|^2 d\mu_2 \rightarrow \int |g(t)|^2 d\mu_1$$

при $n \rightarrow \infty$. Так как последовательность $g_n(\cdot)$ сходится к $g(\cdot)$ слабо, то отсюда следует сильная сходимость g_n к g .

3. Спектральная теория компактных операторов

3.1. Множество значений компактного оператора

Спектральная теория характеризует спектры и резольвентные множества операторов. Исследование интегральных операндов по существу эквивалентно изучению интегральных уравнений.

По своим свойствам компактные операторы близки к конечномерным (матричным) операторам. Кроме того, последние играют большую роль в приложениях. Пусть T — компактный оператор, отображающий пространство H в себя. Тогда, если пространство бесконечномерно, то нуль должен принадлежать спектру, поскольку тождественный оператор $T^{-1}T$ не является компактным. Напомним, что в дальнейшем пространства рассматриваются над полем комплексных чисел.

Лемма 3.1. Для любого $\lambda \neq 0$ множество значений оператора $\lambda I - T$ замкнуто [10].

Доказательство. Пусть $\{y_n\}$ — сходящаяся последовательность из множества значений оператора $(\lambda I - T)$ т. е. $y_n = \lambda x_n - Tx_n$. Положим

$$M = \{x: \lambda x = Tx\}.$$

Тогда M — замкнутое подпространство H . Обозначим через P оператор проектирования на подпространство M и положим $z_n = x_n - Px_n$. Предположим, что $\|z_n\| \rightarrow 0$. Пусть

$$z_n = z_n \|z_n\|^{-1}, h_n = y_n \|z_n\|^{-1} \quad (3.1)$$

В силу сходимости $\{y_n\}$ последовательность h_n сходится к нулю. Так как $\|z'_n\| = 1$, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{z'_n\}$ слабо сходится к элементу z' . Однако ввиду равенства $TP = \lambda P$ справедливо соотношение

$$z'_n = (h_n + Tz'_n)/\lambda \quad (3.2)$$

Отсюда, в силу сильной сходимости Tz'_n к Tz' следует, что последовательность $\{z'_n\}$ сильно сходится к z' . Далее, $\lambda z' = Tz'$ и $\|z'\| = 1$. Однако это невозможно, поскольку элементы z'_n принадлежат $M^\perp$. Таким образом, последовательность $\{\|z_n\|\}$ ограничена. Поэтому, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{z_n\}$ – слабо сходящаяся последовательность. Из равенства $z_n = (y_n + Tz_n)/\lambda$ как и ранее, следует, что последовательность $\{z_n\}$ сходится сильно. Обозначая через z соответствующий предел, получим, что $\lambda z = Tz + y$, где y — предел последовательности $\{y_n\}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Предположим, что $\lambda \neq 0$ и множество значений оператора $(\lambda I - T)$ совпадает со всем пространством H . Тогда λ принадлежит резольвентному множеству оператора T [10].

Доказательство. Достаточно показать, что λ не является собственным значением оператора T . Предположим противное; тогда найдется элемент $x \neq 0$ такой, что $\lambda x = Tx$. Так как множество значений оператора $\lambda I - T$ совпадает со всем пространством, то существует элемент f_1 из H такой, что $\lambda f_1 - Tf_1 = x$. Далее, по той же причине найдется элемент f_2 такой, что $\lambda f_2 - Tf_2 = f_1$. По индукции строится последовательность $\{f_k\}$ такая, что

$$\lambda f_k - Tf_k = f_{k-1} \quad (3.3)$$

$$\lambda f_1 - Tf_1 = x = f_0 \quad (3.4)$$

Обозначим через E_k подпространство, порожденное элементами $\{f_0, \dots, f_k\}$. Докажем, что $\dim E_k > \dim E_{k-1}$ для всех $k \geq 1$. Для

этого достаточно показать, что элемент f_k не принадлежит пространству E_{k-1} . Предположим противное. Тогда

$$f_k = \sum_0^{k-1} a_j f_j \quad (3.5)$$

Следовательно,

$$Tf_k = \sum_0^{t-1} a_i Tf_i = \sum_1^{t-1} a_i [\lambda f_i - f_{i-1}] + a_0 \lambda f_0 \quad (3.6)$$

С другой стороны, $Tf_k = Xf_k - Tf_{k-1}$. Таким образом,

$$\lambda f_k - f_{k-1} = \sum_{-1}^{t-1} a_j f_{j-1} + \lambda f_k \quad (3.7)$$

или

$$\lambda f_k - f_{k-1} = \sum_1^{t-1} a_j f_{j-1} \quad (3.8)$$

Следовательно, противоположное утверждение остается верным для $(k-1)$, и потому оно справедливо и для случая $k=1$, что невозможно. Далее, если $\dim E_k > \dim E_{k-1}$, то существует ортонормированная последовательность векторов $\{e_k\}$ такая, что e^k ортогонален подпространству E_{k-1} . Но $[\lambda I - T] E_k \subset E_{k-1}$ и потому $[(\lambda I - T)e_k, e_k] = 0$, т. е. $\lambda = [Te_k, e_k]$. Но последовательность $\{e_k\}$ слабо сходится к нулю, поэтому последовательность $\{Te_k\}$ сходится к нулю сильно. Следовательно $\lambda = 0$, что невозможно.

3.2. Собственное значение компактного оператора

Лемма 3.3. Предположим, что ненулевое комплексное число λ принадлежит спектру оператора T . Тогда $\bar{\lambda}$ является собственным значением оператора T^* .

Доказательство. Применяя предыдущую лемму, получим, что множество значений оператора $(\lambda I - T)$ не совпадает со всем пространством. Так как множество значений оператора $(\lambda I - T)$ замкнуто, то существует ненулевой элемент y такой, что для любого $x \in H$ справедливо равенство $[\lambda x - Tx, y] = 0$, или $[x, \bar{\lambda} y - T^* y] = 0$. Таким образом, $\bar{\lambda}$ является собственным значением оператора T . Из вышеприведенных лемм следует следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть λ — ненулевое комплексное число. Тогда либо λ является собственным значением оператора T , либо оно принадлежит его резольвентному множеству. (Это утверждение называется альтернативой Фредгольма.)

Доказательство. Достаточно показать, что если число λ принадлежит спектру оператора T , то оно является собственным значением. Если λ не принадлежит спектру T и не является собственным значением, то множество значений оператора $(\lambda I - T)$ не совпадает со всем пространством. Согласно предыдущей лемме отсюда следует, что $\bar{\lambda}$ является собственным значением сопряженного оператора T^* . Применяя лемму 2.3 еще раз, получим, что λ является собственным значением оператора $T^{**} = T$. Теорема доказана.

Лемма 3.4. Пространство собственных функций, отвечающих ненулевому собственному значению, конечномерно.

Доказательство. Пусть λ — ненулевое собственное значение. Предположим, что соответствующее пространство собственных функций бесконечномерно. Пусть $\{e_k\}$ — ортонормальный базис этого

подпространства. Тогда $Te_k = \lambda e_k$, и потому $[Te_k, e_k] = \lambda$. Но последовательность $\{Te_k\}$ должна сильно сходиться к нулю, что невозможно.

Лемма 3.5. Последовательность $\{X_n\}$ ненулевых и попарно различных собственных значений оператора T может иметь предельной точкой лишь нуль.

Точно так же, как и в конечномерном случае, собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы. Действительно, пусть $Tx = \lambda x$, $Tx_2 = \lambda x_2$, $Tx_m = \lambda x_m$. Пусть, далее, m является наименьшим целым числом таким, что элемент x_m принадлежит подпространству, порожденному элементами $\{x, \dots, x_{m-1}\}$. Тогда

$$X_m = \sum_{k=1}^{m-1} a_k x_k \quad (3.9)$$

Следовательно,

$$\lambda X_m = \sum_{k=1}^{m-1} a_k \lambda_k x_k \quad (3.10)$$

и потому

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k (\lambda_m - \lambda_k) x_k = 0 \quad (3.11)$$

Отсюда следует, что m может быть уменьшено на единицу, что противоречит определению целого m . Обозначим через P_m оператор проектирования на подпространство E_m , порожденное элементами $\{x, \dots, x_m\}$. Оператор T отображает подпространство E_m в себя. Положим $z_m = x_m - P_{m-1} x_m$. Тогда $z_m \neq 0$ и $[Tz_m; z_m] = [\lambda z_m; z_m]$. Пусть $e_m = z_m / \|z_m\|$. Последовательность $\{e_m\}$, очевидно, ортонормальна и $[Te_m, e_m] = \lambda_m$. Следовательно, $\lambda_m \rightarrow 0$. Таким образом,

ненулевые собственные числа образуют изолированное подмножество спектра. Для произвольных двух заданных чисел $0 < r_1 < r_2$ множество $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$ может содержать лишь конечное число собственных чисел оператора T . Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Спектр компактного оператора содержит не более счетного числа точек и его предельной точкой может быть лишь нуль. Каждая ненулевая точка спектра является собственным значением.

Компактный оператор может вообще не иметь собственных значений. Однако для самосопряженных компактных операторов это уже не так.

Теорема 3.3. Самосопряженный компактный оператор, отображающий пространство H в себя, имеет по крайней мере одно собственное значение.

Доказательство. Прежде всего докажем, что если оператор самосопряжен, то

$$\|T\| = \sup \frac{|(Tx, x)|}{(x, x)} \quad (3.12)$$

Обозначим правую часть этого равенства через s . Ясно, что $s \leq \|T\|$. Далее, имеем

$$\|T\| = \sup \frac{|(Tx, x)|}{(x, x)}, x, y \in H.$$

По

$$[Tx, y] + [Ty, x] = \frac{1}{2} \{ [T(x+y), x+y] - [T(x-y), x-y] \}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
|[Tx, y] + [Ty, x]| &\leq \frac{1}{2\{|[T(x+y), x+y] + [T(x-y), x-y]|\}} \\
&\leq \frac{1}{2c\{|x+y|^2 + |x-y|^2\}} = c(|x|^2 + |y|^2)
\end{aligned}
\tag{3.13}$$

Так как оператор T самосопряжен, поэтому в случае вещественного гильбертова пространства

$$|[Tx, y]| \leq c \frac{(|x|^2 + |y|^2)}{2},$$

или $|[Tx, y]| \leq c$ для всех $\|x\| = \|y\| = 1$. Следовательно, или $|[Tx, y]| \leq c \|x\| \cdot \|y\|$, или $\|T\| < c$. Если исходное пространство рассматривается над полем комплексных чисел, то положим $[Tx, y] = |[Tx, y]| e^i$. Пусть $x_1 = x^{\alpha^{-ie}}$. Тогда в силу самосопряженности оператора T имеем

$$[Tx_1, y_1] + [Ty, x_1] = c(|x|^2 + |y|^2) \tag{3.14}$$

Полагая $\|x\| = \|y\| = 1$, получим $[Tx, y] \leq n$, откуда следует, что $|[Tx, y]| < c \|x\| \|y\|$. Таким образом существует последовательность $\{x_n\}$ такая, что

$$\|x_n\| = 1, \lim |[Tx_n, x_n]| = \|T\| > 0$$

Так как последовательность $\{[Tx_m, x_m]\}$ состоит из вещественных чисел, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что она сходится либо к $+\|T\|$, либо к $-\|T\|$. Обозначим этот предел через λ . Еще раз переходя к подпоследовательности можно считать, что x_0 слабо сходится к x_0 ; в силу компактности оператора T последовательность $\{Tx_n\}$ будет сильно сходиться к $y_0 = Tx_0$. Следовательно,

$$\lim [Tx_m, x_m] = [Tx_0, x_0] = [y_0, x_0] \quad (3.15)$$

Кроме того,

$$0 < \lim ||Tx_m - \lambda x_m||^2 = ||y_0||^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 = ||y_0||^2 - \lambda^2.$$

Но $||y_0||^2 = \lim ||Tx_m||^2 \leq ||T||^2 = \lambda^2$, поэтому $||y_0||^2 = \lambda^2$ и

$$\lim ||Tx_m - \lambda x_m||^2 = 0 \quad (3.16)$$

В силу сильной сходимости $\{Tx_m\}$ последовательность $\{x_m\}$ сильно сходящаяся. Следовательно, $Tx_0 = \lambda x_0$, причем $||x_0|| = 1$ и $\lambda = \pm ||T||$. Теорема доказана.

Точно так же, как и в конечномерном случае, собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Пусть теперь T — компактный самосопряженный оператор. Тогда, как мы знаем, его спектр состоит из дискретного множества вещественных собственных значений $\{\lambda_i\}$ и предельной точкой $\{\lambda_i\}$ может быть лишь нуль. Обозначим через M_i подпространство собственных векторов, соответствующих ненулевому собственному значению λ_i .

$$M_i = \{x: Tx = \lambda x\}.$$

Пусть $M_0 = \{x: Tx = 0\}$. Для любого x из H положим $x_i = P_i x$, где P_i — оператор проектирования на подпространство M_i .

Тогда $0 \leq ||x - \sum_0^n x_i||^2 = ||x||^2 - \sum_1^n ||x_i||^2$, потому ряд $\sum_0^n x_i$ сильно сходится. Рассмотрим подпространство H_0 , ортогональное всем $M_i, i = 0, 1, \dots$. Тогда H_0 — замкнутое подпространство и оператор T , будучи самосопряженным, отображает H_0 в себя. Так как оператор T является самосопряженным и компактным, то существует собственное значение λ такое, что $Tx = \lambda x, x \in H$. Однако это возможно лишь в том

случае, если $H_0 = \{0\}$, т. е. нуль является единственным элементом H_0 . Следовательно, для любого x из H справедливо разложение

$$x = \sum_0^x x_i \quad (3.17)$$

Следовательно, $Tx = \sum_1^x \lambda_i x_i$. Заметим, что для каждого элемента λ_i справедливо разложение

$$x_i = \sum_1^{j x_i} [x_j, e_{ij}] e_{ij}, T e^{ij} = \lambda_i e_{ij} \quad (3.18)$$

где $e_{ij}, j = 1, \dots, m_i$, – базис подпространства M_i , которое, как было показано выше, конечномерно.

Замечание. Равенство $Tx = \lambda_i P_i x$ можно переписать в виде

$$T = \sum_1^x \lambda_i P_i, \sum_1^x P_i = I, [P_i x, P_j x] = 0,$$

где I — тождественный оператор. Из этих равенств следует

$$T = \sum_1^x \lambda_i (E_i - E_{i-1}), E_i = \sum_1^i P_j \quad (3.19)$$

причем последовательность операторов проектирования $\{E_i\}$ не убывает. Такого рода представление можно получить и для произвольного ограниченного оператора.

Пример 3.1. Задача определения собственных значений и собственных функций компактного самосопряженного оператора в общем случае довольно сложна и, за исключением отдельных случаев, может быть решена лишь численно. Здесь мы рассмотрим лишь простейшую итерационную процедуру, позволяющую решить эту задачу приближенно. Пусть T — компактный самосопряженный оператор и x произвольный ненулевой элемент

пространства H . Предполагая $Tx \neq 0$, положим $x_{\Pi} = T^{\Pi}x / \|T^{\Pi}x\|$. Если $T^m x = 0$ для некоторого m , то элемент x должен принадлежать ядру оператора T , и потому он является собственным вектором. Таким образом, если элемент x не является собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению, то $T^n x \neq 0$ для любого n . Предположим, что это условие выполнено. Рассмотрим спектральное представление $Tx = \sum \lambda_i P_i x$, где λ_i —ненулевые собственные значения, а P_i —операторы проектирования на соответствующие подпространства собственных векторов. Предположим, что модули собственных значений образуют невозрастающую последовательность, т.е. $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \dots$. Определим оператор P_i^+ следующим образом. Если $|\lambda_i|$ является собственным значением, то P_i^+ — оператор проектирования на соответствующее подпространство собственных векторов, в противном случае P_i^+ — нулевой оператор. Аналогично, если $-|\lambda_i|$ — собственное значение, то P_i^- — проектор на соответствующее подпространство собственных векторов, иначе P_i^- — нулевой оператор. Итак, пусть последовательность собственных значений упорядочена по возрастанию их модулей: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \dots$. Тогда ясно, что последовательность

$$[Tx_{\Pi}, x_{\Pi}] = \sum \lambda_i^{2n+1} \|P_i x\|^2 / \sum \lambda_i^{2n} \|P_i x\|^2$$

сходится к

$$|\lambda_i| \frac{\|P_i^+ x\|^2 - \|P_i^- x\|^2}{(\|P_i^+ x\|^2 + \|P_i^- x\|^2)}$$

если только $\|P_i^+ x\|^2 + \|P_i^- x\|^2 \neq 0$.

Последовательность $\{x_{2n}\}$ сильно сходится к

$$(P_i^+ x + P_i^- x) / \|(P_i^+ x - P_i^- x)\|$$

А последовательность x_{2n+1} сходится к

$$\frac{(P_i^+ x + P_i^- x)}{\|P_j^+ x + P_j^- x\|}.$$

В более общем случае следует положить

$$k = \inf\{j: \|P_j^+ x + P_j^- x\| \neq 0\}$$

и во всех последовательностях, рассмотренных выше, вместо индекса 1 подставить k . С целью ускорения сходимости процесса можно исходить из оператора $T - \lambda I$ вместо T . Это и есть обобщение энергетического метода на бесконечномерный случай.

Заключение

В данной курсовой работе были рассмотрены линейный оператор, спектральная теория операторов и, в частности, спектральная теория компактных операторов, показано решение некоторых задач.

Наиболее изученным классом теории операторов является теория компактных операторов, но, несмотря на это, остаётся пространство для исследования и изучения более глубокого.

Решение ряда важных задач спектральной теории связано с теорией аналитических функций. Дело в том, что основные объекты, характеризующие спектральную задачу для оператора, такие как резольвента, собственные значения оператора и другие, являются аналитическими функциями спектрального параметра в определённых областях.

На мой взгляд данная курсовая работа будет интересна всем, кто интересуется математикой.

Список используемой литературы

1. Ахнезер, М.Н., Глазман И.Н. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве М.Н. Ахнезер, И.Н. Глазман. – Киев: Виша школа, 1977. – 336 с.
2. Балакришнан, А. Slochaslic Differential system. A.V. Balakrishnan. – N.-Y.: Springer-Verlag, 1960. – 451 с.
3. Балакришнан, А. Communication theory. A.V. Balakrishnan. – N.-Y.: McGraw-Hill, 1968. – 432 с.
4. Блум, Е. Numerical Analysis and Computation. Theory and Placlice. Е. Блум. N.-Y.:Addison Wesley. 1972.–274 с.
5. Данфорд, Н. Линейные операторы. Н. Данфорд, Дж. Шварц. – М.: Наука, 1966. – 386 с.
6. Канторович, Л.В. Функциональный анализ. Л.В. Канторович, Акилов Г.П. – М.: Наука, 1977. – 231 с.
7. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа. Л.А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 496 с.
8. Люстерник, Л.А. Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом. Л.А. Люстерник, В. И. – М.: Наука, 1961. – 442 с.
9. Садовничий, В. А. Теория операторов. В. А. Садовничий. – М.: Издательский дом «Дрофа», 2004. – 816 с.
10. Халмош, П. Introduction to Hilbert Space Theory. П. Халмош. – . N-Y: Chelsea Publishing Co., 1951. – 480 с.

