МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Рабочая тетрадь «Решение показательных и логарифмических неравенств» для подготовки к единому государственному экзамену по математике»

Студент 06.06.24 (подпись, дата) Ромашкина Юлия Николаевна (ФИО полностью)

Руководитель 06.06.24 (подпись, дата) Журавлева Е.Г. (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 24.06.24 (подпись, дата) Журавлева Е.Г. (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 07.06.24 № 12)

Заведующий кафедрой 07.06.24 (подпись, дата) Паньженский В.И. (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 28.06.24 № 15)

Секретарь ГЭК 28.06.24 (подпись, дата) Журавлева Е.Г. (фамилия, инициалы)

Пенза 2024

Содержание

Введение 3
ГЛАВА 1. Теоретические основы формирования навыка решения показательных и логарифмических неравенств 6
1.1 Задачи, приводящие к логарифмическим или показательным неравенствам 6
1.2 Анализ школьных учебников по математике 12
ГЛАВА 2. Некоторые методические аспекты формирования навыка решения показательных и логарифмических неравенств 20
2.1 Примеры решения логарифмических неравенств 20
2.2 Критерии оценивания задания 15 ЕГЭ 39
2.3 Рабочая тетрадь «Решение показательных и логарифмических неравенств» 56
Заключение 87
Список литературы 88

Введение

В школьном курсе математики важное место занимает решение показательных и логарифмических неравенств. Несмотря на это школьники не понимают методы решения показательных и логарифмических неравенств, не способны обоснованно объяснить для чего они выполнили определенное действие в решении, с трудом понимают какие действия приводят к потере корней или к появлению посторонних. Неумение применять полученные навыки решения показательных и логарифмических неравенств наблюдается и в профильных классах.

В зависимости от авторов учебника эта тема изучается в 10 или 11 классе. Показательные и логарифмические неравенства встречаются в заданиях ЕГЭ. Поэтому изучению методов решения показательных и логарифмических неравенств должно быть уделено особое внимание. Из вышеуказанного следует актуальность выбранной темы, необходимость рассмотрения этой темы для будущего учителя математики.

Цель данной работы: разработать рабочую тетрадь по теме.

Задачи работы:

1. Изучить теоретический материал по теме «Показательные и логарифмические неравенства в школьном курсе».

2. Провести анализ этой темы в учебниках алгебры и начала анализа.

3. Рассмотреть основные методы решения показательных и логарифмических неравенств, систематизировать и обобщить основные особенности этой темы.

4. Разработать рабочую тетрадь по теме «Показательные и логарифмические неравенства в школьном курсе».

5. Провести анализ задач ЕГЭ по теме работы.

Дидактические средства обучения – это материальные объекты, носители учебной информации и предметы естественной природы, а также искусственно созданные человеком и используемые педагогами и учащимися в учебно-

воспитательном процессе в качестве инструмента их деятельности. К ним относятся наглядные пособия, учебники, дидактические материалы, оборудование, лаборатории. Средства обучения наряду с живым словом педагога являются важным компонентом образовательного процесса и элементом учебно-материальной базы любого образовательного учреждения. Важно учитывать, что дидактические средства обучения надо применять лишь тогда, когда это методически оправданно. Одним из средств обучения, получивших в последнее время общее признание, является печатная рабочая тетрадь для учащегося. Актуальность использования рабочей тетради при обучении заключается в оптимальном сочетании информационного содержания тетради с возможностью выявления направление движения мыслительной деятельности учащихся при их работе с тетрадью. Практическая значимость тетрадей заключается в применении их для облегчения изучения дисциплин. Данное исследование направленно на разработку рабочей тетради по теме «Решение показательных и логарифмических неравенств». Её использование позволит повысить уровень усвоения нового материала, отслеживать причинно-следственные связи. С одной стороны, это дает возможность приобретения дополнительных знаний за счёт сэкономленного времени, а с другой – возможность углубления знаний по данной теме. Анализ научно-методической литературы показал, что в образовательном процессе применяются различные средства обучения, но рабочие тетради не находят широкого применения, хотя как дидактическое средство обучения способствуют успешному освоению учебной дисциплины, а также формированию компетенций согласно требованиям ФГОС.

Объект исследования: показательные и логарифмические неравенства.

Предмет исследования: решение показательных и логарифмических неравенств.

Теоретическая значимость выпускной квалификационной работы заключается в том, что разработанная рабочая тетрадь по теме «Показательные

и логарифмические неравенства» рассчитана на учащихся 11 классов. Благодаря ей подготовка школьников к ЕГЭ по математике станет продуктивнее, так как в данной разработке производится актуализация знаний по данной теме, и практическое решение заданий ЕГЭ по теме «Показательные и логарифмические неравенства».

Практическая значимость выпускной квалификационной работы заключается в том, что разработанная рабочая тетрадь может быть использован учителями при подготовке школьников к ЕГЭ по математике.

Выпускная квалификационная работа состоит из: введения, двух глав, заключения и списка литературы.

ГЛАВА 1. Теоретические основы формирования решения показательных и логарифмических неравенств

1.1 Задачи, приводящие к логарифмическим или показательным уравнениям и неравенствам

Простейшие показательные и логарифмические неравенства встречаются в экономике, физике, биологии, химии, теории вероятностей, астрономии и, естественно, в математике. В свою очередь логарифмические и показательные неравенства, содержащие различные рациональные и степенные функции, существуют исключительно в математике.

Задача 1. Во время реакции распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по следующему закону: $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 – первоначальная масса изотопа, t – время, которое прошло от начала распада, T – период полураспада в минутах. В лабораторных условиях было получено вещество, содержащее m_0 = 80 мг изотопа азот-13, период полураспада которого равен 10 минутам. В течение какого времени масса изотопа азот-13 будет не менее 20 мг?

Решение: требуется найти *t* такое, что $m(t) \geq 20$.

Составим неравенство: $80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} \geq 20$.

Решим неравенство: $80 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} \geq 20 \,|: (80 > 0)$;

$$2^{-\frac{t}{10}} \geq \frac{20}{80};$$

$$2^{-\frac{t}{10}} \geq \frac{2}{8};$$

$$2^{-\frac{t}{10}} \geq \frac{1}{4};$$

$$2^{-\frac{t}{10}} \geq 2^{-2};$$

Т.к. основание 2 > 1, тогда будет справедливо неравенство:

$$-\frac{t}{10} \geq -2; |\cdot (-1)$$

$$\frac{t}{10} \leq 2; |\cdot (10 > 0)$$

$$t \leq 20.$$

Ответ: масса изотопа азот-13 будет не менее 20 мг в течение 20 минут.

Задача 2. Сколько раз нужно бросить кубик, чтобы вероятность появления хотя бы одной шестёрки была больше 0,5?

Решение: вероятность, что выпадет хотя бы одна шестёрка, будет $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N$. Следовательно: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N > 0{,}5; |-1$

$$-\left(\frac{5}{6}\right)^N > 0{,}5 - 1;$$

$$-\left(\frac{5}{6}\right)^N > -0{,}5;$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^N < 0{,}5;$$

Т.о., для решения задачи нужно найти такое N, чтобы $\left(\frac{5}{6}\right)^N < 0{,}5$.

Подбором находим:

Пусть N=1, тогда $\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{6}; \left| > \left(\frac{3}{6} = \frac{1}{2}\right)\right.$.

Пусть N=2, тогда $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}; \left| > \left(\frac{18}{36} = \frac{1}{2}\right)\right.$.

Пусть N=3, тогда $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}; \left| > \left(\frac{108}{216} = \frac{1}{2}\right)\right.$.

Пусть N=4, тогда $\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}; \left| < \left(\frac{648}{1296} = \frac{1}{2}\right)\right.$.

Т.о. находим, что N = 4.

Задача 3. (ЕГЭ по математике, 2022 г. [8, с.88]) Водолазный колокол, содержащий ν = 2 моль воздуха при давлении p_1 = 2,4 атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 в атмосферах. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле:

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где α = 13,5 $\frac{\text{Дж}}{\text{моль·К}}$ – постоянная, T = 300 К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 16 200 Дж. Ответ дайте в атмосферах.

Решение: составим логарифмическое уравнение:

$$13{,}5 \cdot 2 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{2{,}4} = 16\,200; |: (300 \neq 0)$$

$$13{,}5 \cdot 2 \cdot \log_2 \frac{p_2}{2{,}4} = 54;$$

$$27 \cdot \log_2 \frac{p_2}{2{,}4} = 54; |: (27 \neq 0)$$

$$\log_2 \frac{p_2}{2{,}4} = 2;$$

$$\log_2 \frac{p_2}{2{,}4} = \log_2 2^2;$$

Т.к. логарифмы в обоих частях уравнения имеют одинаковые основания, то равны и подлогарифмические выражения. А именно:

$$\frac{p_2}{2{,}4} = 2^2;$$

$$\frac{p_2}{2{,}4} = 4;$$

$$p_2 = 9{,}6.$$

Ответ: 9,6 атмосфер.

Задача 4. На апрель 2020 года численность популяции коал в Австралии составляет порядка 70 тысяч особей. За последнее время в силу разных причин (сокращение ареалов обитания, браконьерство, пожары летом 2019 года) она ежегодно сокращается на 15%. В течение какого времени (если не будут предприняты меры по спасению данного вида и сохранятся темпы его сокращения) численность животных станет меньше 10 тыс. особей?

Решение: воспользуемся формулой сложных процентов:

$$S_{\text{кон}} = S_{\text{нач}} \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x.$$

В нашем случае: $S_{\text{кон}} < 10000$.

$$70\,000\left(1+\frac{15}{100}\right)^{x} < 10\,000; |: (10\,000 \neq 0)$$

$$7\left(1+\frac{15}{100}\right)^{x} < 1;$$

$$1 > 7(1+0{,}15)^{x};$$

$$1 > 7 \cdot 1{,}15^{x}; |: (7 \neq 0)$$

$$\frac{1}{7} > 1{,}15^{x};$$

$$7^{-1} > 1{,}15^{x};$$

$$1{,}15^{x} > 7^{-1};$$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 1,15, >0 и ≠ 1.

$$log_{1,15}1{,}15^{x} < log_{1,15}7^{-1};$$

$$x < log_{1,15}7^{-1};$$

$$x < -log_{1,15}7;$$

$$x > log_{1,15}7;$$

Построим график функции $y = log_{1,15}x$ (Рисунок 1).

Ответ: примерно через 13 лет.

С помощью показательной функции $N = N_0e^{kt}$ в биологии описывается рост различных видов микроорганизмов и бактерий, дрожжей и ферментов, а также рост количества клеток гемоглобина в организме человека, потерявшего много крови.

Задача 5. Пусть имеется система банков B_1, B_2, ..., B_n и S_0 рублей – величина вклада в первый банк этой системы. Спрашивается, при каких значениях ставки обязательных резервов p% величина свободных резервов банка B_k будет больше заданной величины N_0?

Решение: пусть $x = \frac{p}{100}$. Тогда $S_k = S_0 (1 - x)^k$. Все решение задачи сводится к решению неравенства: $l\text{g}\ (1 - x) > \frac{1}{k} l\text{g}\frac{N_0}{S_0}$. Обозначим $\alpha = \frac{1}{k} l\text{g}\frac{N_0}{S_0}$. Очевидно, что $\alpha < 0$, поэтому $0 < 10^{\alpha} < 1$ и тогда $1-x > 10^{\alpha}$. Отсюда

$0< x < 1 - 10^{\alpha}$. Полученный результат означает, что если ставка обязательных резервов равна $p = 100x\%$, где x удовлетворяет последнему неравенству, то свободные резервы банка B_k будут больше N_0.

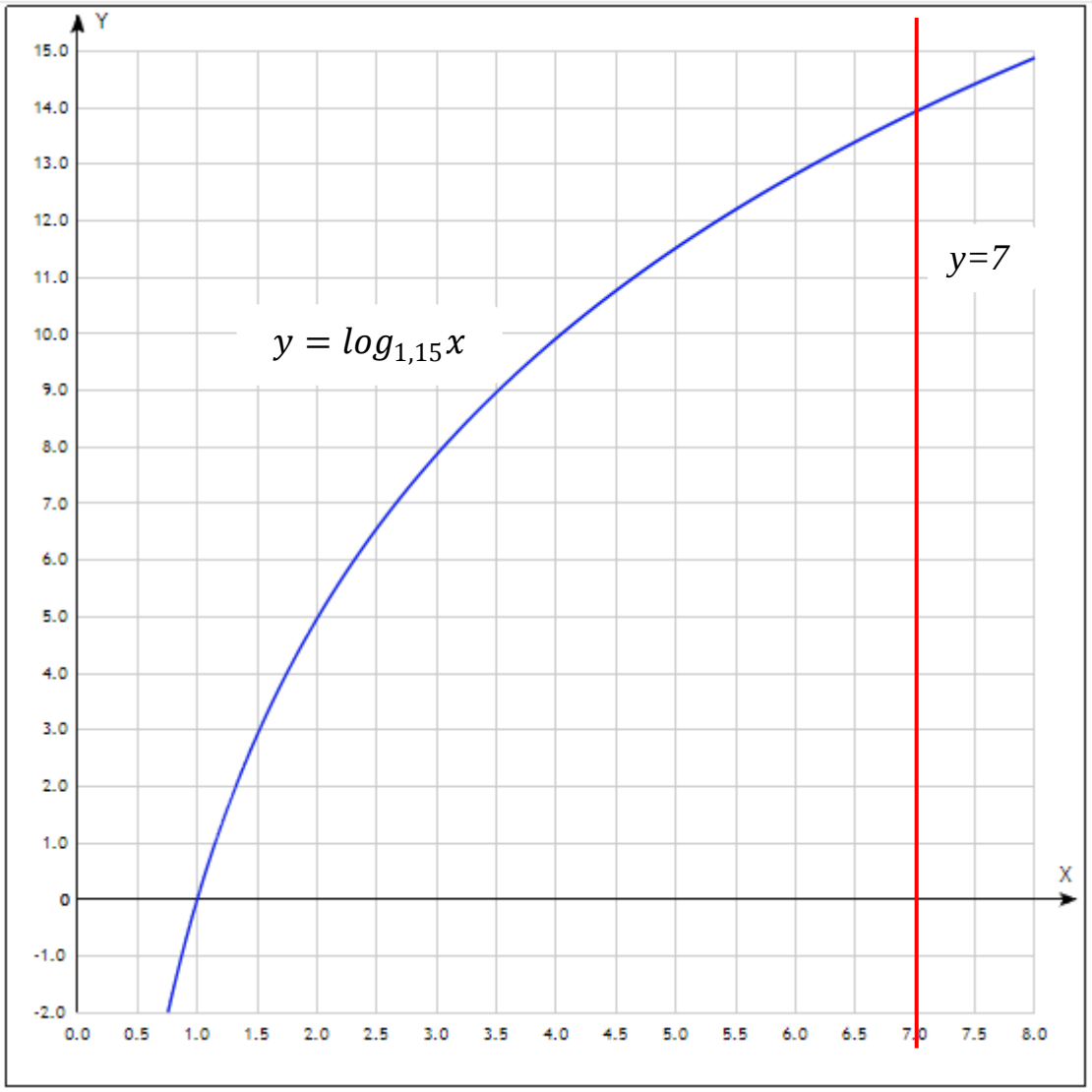


Рисунок 1

Рассмотренные выше задачи могут быть выбраны в качестве проблемных, ситуационных задач и могут быть использованы на различных этапах урока. Чтобы успешно с ними справиться, помимо предметных навыков учащиеся должны обладать навыками обработки информации (анализ, синтез, интерпретация, оценка, аргументирование). Что, в свою очередь, является важным условием формирования метаумений.

Заметим также, что любая задача на звёздные характеристики (а они являются логарифмическими величинами) – это задача на составление и решение логарифмического уравнения/неравенства. Особую роль здесь играет формула Погсона и составляет основу звездной фотометрии (методов точного измерения блеска звезд). Пусть освещенность, создаваемая первой звездой, будет E_1, а второй – E_2. Тогда разность их блеска в звездных величинах будет выражаться: $m_1 - m_2 = -2{,}5 \lg \frac{E_1}{E_2}$, где m_1 – звездная величина первой, а m_2 – второй звезды. В настоящее время астрономы умеют измерять блеск звезд очень точно, и звездная величина записывается с одним или двумя знаками после запятой и отмечается значком ^{m}.

1.2 Анализ школьных учебников по математике

Методические особенности изучения логарифмических неравенств в школьном курсе математики связан, в частности, с особенностями изложения данной темы авторами различных учебников. Рассмотри несколько таких учебников.

С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин «Алгебра и начала анализа» 10 класс [17].

В данном учебнике изучение логарифмов начинается с параграфа 5. Понятие логарифма вводится через показательную функцию $y=a^x$ ($a>0, a\neq1$). График данной функции дает возможность решить обратную задачу: для данных положительных чисел b и a ($a\neq1$) найти число α, такое, что $b = a^\alpha$ (α – единственное). В пункте 5.1. «Понятие логарифма» вводится определение, а так же определение натурального и десятичного логарифма числа. В пункте 5.2. «Свойства логарифмов» дается теорема, в которой отражены свойства логарифмов. А так же приводится ее доказательство. Далее дается формула перехода логарифмов от одного основания к другому и рассматриваются примеры. В пункте 5.3. «Логарифмическая функция» дается определение понятия «логарифмическая функция», строится ее график, и рассматриваются свойства для функции, когда $a>1$ и когда $0<a<1$. Пункт 5.4. «Десятичные логарифмы», который отмечен звездочкой, т. е. как дополнительный материал повышенной сложности. В этом пункте рассказывается, как вычислять десятичный логарифм положительного числа А, что называется характеристикой и мантиссой логарифма числа А.

В 6 параграфе «Простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства» имеются два пункта, в которых обучающиеся тренируются в нахождении простейших показательных и логарифмических уравнений. В пункте 6.2. «Логарифмические уравнения» рассказывается о том, что называется простейшим логарифмическим уравнением, и даются примеры с подробным решением данных уравнений. В пункте 6.4. «Логарифмические

неравенства» говорится о том, что называется простейшим логарифмическим неравенством, и приводятся примеры с решением данных неравенств.

Таким образом, в учебнике Никольского С.М. материал содержится и для базового и для профильного уровня. Выделяются задачи устной работы, повышенной трудности, задания для повторения. После главы имеются сведения из истории и происхождения изученных понятий, терминов, символов. В конце учебника есть упражнения для повторения логарифмических и уравнений, и неравенств.

Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс. [1]

В данном учебнике изучение темы «Логарифмы» начинается с 4 главы учебника – «Логарифмическая функция». Пропедевтика проводится при изучении показательной функции. Рассматривая уравнения типа $a^x=b$, где $a>0$, $a\neq1$, $b>0$ говорится, что данные уравнения имеют только один корень.

В параграфе 15 «Логарифмы» дается определение понятия «Логарифм числа» и говорится, что такое логарифмирование. Следующим шагом приводятся несколько примеров на вычисление логарифма числа по его определению: один пример на решение неравенства и один пример на решение уравнения.

В параграфе 16 «Свойства логарифмов» приводится и доказывается три основных свойства логарифмов и пример на их вычисление.

В 17 параграфе «Десятичные и натуральные логарифмы» вводятся следующие понятия: десятичный и натуральный логарифм, формула перехода логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию с доказательством.

В параграфе 18 «Логарифмическая функция, ее график и свойства» доказываются свойства логарифмической функции, а так же строятся несколько графиков этой функции. Далее доказывается теорема, которую используют при

решении уравнений и говорится, что логарифмическая и показательная функции взаимно обратны.

В 19 параграфе «Логарифмические уравнения» дается подробное решение шести уравнений и одной системы уравнений.

В 20 параграфе «Логарифмические неравенства» предлагаются 3 задачи с подробным описанием решения логарифмических неравенств.

После каждого параграфа дается ряд упражнений, ранжированные по уровню сложности: «обязательные задачи», «дополнительные более сложные задачи» и «трудные задачи». Также в конце главы выделены отдельным пунктом «Упражнения к главе IV».

Таким образом, у Ш.А. Алимова тему «Логарифмы» тоже изучают в десятом классе, материал изложен доступно. Ш.А. Алимов уделил внимание вычислению числа *e* на микрокалькуляторе. Практические задания на закрепление темы разнесены по уровню сложности: «обязательные задачи», «дополнительные более сложные задачи» и «трудные задачи». Для максимального усвоения данного материала в конце главы включены упражнения для самопроверки.

Мордкович А.Г., Семенов П.В. «Алгебра и начала анализа» – 11 класс (профильный уровень) [14, 15].

Изучение логарифмов начинается с 3 главы «Показательная и логарифмическая функция». Пропедевтика проводится при изучении показательных уравнений. Понятие логарифма вводится через показательные уравнения. Решение уравнения $2^x=6$ потребовало вводить новый символ, с помощью которого корень уравнения записали так: $x = log_2 6$.

В параграфе 14 «Понятие логарифма» дается определение логарифма числа и формула $log_a a^c=c$. Далее приводятся примеры на вычисление логарифма числа, и определяется десятичный логарифм.

В параграфе 15 «Логарифмическая функция, ее свойства и график» говорится о том, что для показательной функции существует обратная, которой является логарифмическая функция.

В 16 параграфе «Свойства логарифмов» доказываются свойства (4), (5), (6). Говорится что такое логарифмирование и потенцирование, что называется характеристикой и мантиссой десятичного логарифма числа. Доказывается формула перехода к новому основанию логарифма и как следствия данной теоремы формулы (8) и $log_a b = log a^r b^r$.

В параграфе 17 «Логарифмические уравнения» объясняется через теорему как решать логарифмические уравнения, затем рассматриваются примеры решения логарифмических уравнений и один пример решения системы логарифмических уравнений.

В 18 параграфе «Логарифмические неравенства» даются объяснения, как найти метод решения логарифмических неравенств, а затем рассматриваются примеры решения логарифмических неравенств.

В 19 параграфе «Дифференцирование показательной и логарифмической функций» в пункте 2 «Натуральные логарифмы. Функция y = *ln x*, ее свойства, график, дифференцирование» определяется понятие натурального логарифма, приводятся свойства натуральной логарифмической функции, выводится формула производной натуральной 32 логарифмической функции, а в конце параграфа для любой логарифмической функции.

В отличие от остальных учебников А.Г. Мордкович начинает изучение логарифмов в 11 классе. В данном учебнике представлено огромное разнообразие решенных примеров, многие из которых встречаются в экзамене в форме ЕГЭ. Кроме обязательных упражнений имеются задания следующего типа: найдите значение логарифмической функции в указанных точках, найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке, найдите область значений функции, сколько целочисленных решений имеет неравенство. В связи с тем, что ученики знакомятся у данного автора с

логарифмами только в 11 классе, отдельным пунктом выделено «Дифференцирование показательной и логарифмической функций». У Никольского и Алимова нет этого пункта, т. к. учащиеся еще не изучали производную.

Вывод: во всех рассмотренных учебниках, одинаковый порядок изучения темы «Логарифмические уравнения и неравенства», но методы решения, логарифмических уравнений и неравенств, представлены по-разному.

Методические особенности изучения показательных неравенств в школьном курсе математики также связан с особенностями изложения данной темы авторами различных учебников. Впервые тему «Показательные уравнения неравенства» изучают в 10 классе.

В учебнике алгебры и начал анализа А.Г. Мордковича изучение показательных уравнений и неравенств начинается с понятий корень n-ой степени числа и его свойств. Далее следует изучение функции $y = \sqrt[n]{x}$, ее графика и свойств. Затем – логарифмическая функция и её свойства. И только потом – показательная функция и решение показательных уравнений и неравенств.

Сначала вводится понятие показательного уравнения, как показательным называют уравнения вида: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения сводящиеся к нему. Далее приведена теорема о решении показательного уравнения с одинаковыми основаниями. В учебнике предложены методы решения показательных уравнений: метод уравнивания показателей, функционально-графический метод и метод введения новой переменной.

Отличительной особенностью учебника является доступное изложение материала, большое количество разобранных примеров. Например, в п. 46 Показательные уравнения, на метод уравнивания показателей приведено 3 разобранных примера:

А) $2^{2x-4} = 64$,

где нужно 64 представить как 2^6;

Б) $(\frac{1}{3})^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

где $\frac{1}{\sqrt{3}}$ нужно представить как 3^{-1};

В) $5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$,

где нужно решить квадратное уравнение.

В следующем параграфе учебника переходят к изучению показательных неравенств. Сначала вводится определение показательного неравенства и рассматривают два случая, когда $a > 1$ и $0 < a < 1$, тем самым эти два случая являются доказательством теоремы: показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$ если $a > 1$; показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$ если $0 < a < 1$. Далее приведены примеры решения показательного неравенства этим способом и представлен метод решения показательного неравенства методом введения новой переменной.

Учебник выпускается в двух частях. В первой части мы можем познакомиться с теорией, а во второй части уже приступить к решению задач.

В каждом параграфе представлено большое количества заданий. Упражнения сконцентрированы по двум блокам. Первый блок содержит задания базового и среднего уровня сложности, второй блок включает задания среднего и повышенного уровня. По данной теме предлагаются задания на решение уравнения, на решение системы уравнений, на решение неравенства, на нахождение количества натуральных чисел – решений неравенства, на нахождение наибольшего целочисленного решения неравенства.

Следует отметить, что учебник «Алгебры и начала анализа 10-11 классы» используется в обычном классе. Для профильных классов есть другой учебник этого автора.

Учебник «Алгебры и начала анализа» А.Н. Колмогорова является самым распространенным учебником алгебры в 10-11 классах. Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров. Задания для учащихся делаться на две части. Первая часть заданий обязательный минимум для учеников, который они должны уметь решать. В следующей части задания чуть сложнее. Также в конце каждой темы можно увидеть задания и вопросы на повторение, что помогает к подготовки к контрольной работе.

В учебники хорошо изложен дополнительный материал, интересные факты, биография ученных, происхождение терминов. Это позволяет развить интерес к предмету и окружающему миру. В учебнике Колмогорова мы сначала изучаем главу функции, в которой изучаем показательную функцию. Затем в следующей главе, переходим к решению показательных уравнений и неравенств. Однако, четкого определения показательного уравнения и неравенства в учебнике нет. В учебнике представлены следующие задания: на решение уравнения, на решение системы уравнений, на решение неравенств, на решение неравенства графически.

В учебнике рассмотрены: методы уравнивания показателей, методы введения новой переменной и метод вынесения общего множителя за скобку при решении показательного неравенства. А также указывается на свойства возрастания и убывания функций при решении показательных неравенств. Далее рассматривается решение системы показательных уравнений.

Учебник «Алгебра и начала математического анализа» Ш.В. Алимова пользуется меньшей популярностью среди учебников алгебры. Изложение учебника уже близко подходит к математическому анализу. В учебнике очень много разобранных примеров, графических иллюстраций к решению задач. Задания, предоставляемые в параграфе, разделены на два уровня: средний и высокий. В конце учебника к каждому параграфу есть дополнительные задачи, которые помогают подготовиться к контрольной работе. Прежде чем перейти к решению показательных уравнений и неравенств автор предлагает сначала

познакомиться с показательной функцией, ее графиком и свойствами. В учебнике представлены методы: метод уравнивания показателей, вынесения общего множителя за скобки, метод введения новой переменной. При решении показательных неравенств, также автор предлагает обратить внимание на возрастание и убывание функции. В учебнике предлагается пример решения показательного неравенства графическим методом. После изучения методов решения показательных уравнений и неравенств, сразу дается решение систем, содержащих показательные уравнения и неравенств.

Задания, представленные в учебнике – это задания на решение уравнения; на доказательство, что уравнение имеет один корень при фиксированном значении; на решение неравенства, на решение уравнения графическим способом; на нахождение целых значений неравенства на отрезке, на решение неравенства графически, на решение систем.

Вывод: Проанализировав учебники, можно сделать вывод о том, что во всех трех учебниках почти одинаковый порядок изучения темы, но методы решения показательных уравнений представлены по-разному. Теоретическое изложение этой темы, задания представленные в учебнике алгебры и начал анализа изложены лучше под редакцией А.Г. Мордковича.

Глава 2. Методические аспекты решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств

2.1 Примеры решения логарифмических неравенств

Пример 1: Найдите решение неравенства: $\boldsymbol{log_2^2 x - log_3^2 x > 0}$.

Решение: Воспользуемся *методом разложения на множители.*

$\boldsymbol{log_2^2 x - log_3^2 x > 0}$;

$\boldsymbol{(log_2 x - log_3 x)(log_2 x + log_3 x) > 0}$.

Перейдём к другому основанию. Пусть $\log_3 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 3}$, тогда:

$\left(log_2 x - \frac{\log_2 x}{\log_2 3}\right)\left(log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3}\right) > 0 | \cdot log_2 3 > 0;$

$\left(\frac{log_2 x \cdot \log_2 3 - log_2 x}{\log_2 3}\right)\left(\frac{log_2 x \cdot \log_2 3 + log_2 x}{\log_2 3}\right) > 0;$

$\frac{(log_2 x \cdot log_2 3 - log_2 x)(log_2 x \cdot log_2 3 + log_2 x)}{log_2^2 3} > 0 | \cdot log_2^2 3 > 0;$

$(log_2 x \cdot log_2 3 - log_2 x)(log_2 x \cdot log_2 3 + log_2 x) > 0.$

Вынесем на скобки $log_2 x$:

$log_2 x \cdot (log_2 3 - 1) \cdot log_2 x \cdot (log_2 3 + 1) > 0;$

$log_2^2 x \cdot (log_2 3 - 1) \cdot (log_2 3 + 1) > 0.$

Учитывая, что $0 = log_2 1$ и $1 = log_2 2$, получим:

$(log_2 x - log_2 1)^2 \cdot (log_2 3 - log_2 2) \cdot (log_2 3 + log_2 2) > 0.$

Т.к. $log_2 3 + log_2 2 > 0$ и $log_2 3 - log_2 2 > 0$, получим:

$(log_2 x - log_2 1)^2 > 0.$

Т.к. $a^2 > 0$ при любом $a \neq 0$ и по определению логарифма, получим:

$$\begin{cases} log_2 x - log_2 1 \neq 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} log_2 x \neq log_2 1, \\ x > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 2: Найдите решение неравенства: $\frac{log_9(2-x)-log_{15}(2-x)}{log_{15}x-log_{25}x} \leq 0$.

Решение: Перейдём в числителе и в знаменателе к одному основанию.

$$\frac{log_9(2-x)-\frac{log_9(2-x)}{log_9 15}}{log_{15}x-\frac{log_{15}x}{log_{15}25}} \leq 0;$$

$$\frac{\frac{log_9(2-x)\cdot log_9 15}{log_9 15}-\frac{log_9(2-x)}{log_9 15}}{\frac{log_{15}x\cdot log_{15}25}{log_{15}25}-\frac{log_{15}x}{log_{15}25}} \leq 0;$$

$$\frac{\frac{log_9(2-x)\cdot log_9 15-log_9(2-x)}{log_9 15}}{\frac{log_{15}x\cdot log_{15}25-log_{15}x}{log_{15}25}} \leq 0;$$

$$\frac{log_9(2-x)\cdot log_9 15-log_9(2-x)}{log_9 15}\cdot\frac{log_{15}25}{log_{15}x\cdot log_{15}25-log_{15}x} \leq 0;$$

$$\frac{log_9(2-x)\cdot log_9 15-log_9(2-x)}{log_{15}x\cdot log_{15}25-log_{15}x}\cdot\frac{log_{15}25}{log_9 15} \leq 0;\Big|\cdot\frac{log_9 15}{log_{15}25}>0;$$

$$\frac{log_9(2-x)\cdot log_9 15-log_9(2-x)}{log_{15}x\cdot log_{15}25-log_{15}x} \leq 0;$$

$$\frac{log_9(2-x)\cdot(log_9 15-1)}{log_{15}x\cdot(log_{15}25-1)} \leq 0;$$

$$\frac{(log_9(2-x)-0)\cdot(log_9 15-log_9 9)}{(log_{15}x-0)\cdot(log_{15}25-log_{15}15)} \leq 0;$$

$$\frac{(log_9(2-x)-log_9 1)\cdot(log_9 15-log_9 9)}{(log_{15}x-log_9 1)\cdot(log_{15}25-log_{15}15)} \leq 0;$$

Воспользуемся *методом рационализации*:

$$\begin{cases}\frac{(2-x-1)(15-9)}{(x-1)(25-15)} \leq 0,\\ 2-x>0,\\ x>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(2-x-1)\cdot 6}{(x-1)\cdot 10} \leq 0,\\ x<2,\\ x>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(2-x-1)\cdot 6}{(x-1)\cdot 10} \leq 0,\Big|\cdot\frac{10}{6}\\ x<2,\\ x>0,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(1-x)}{(x-1)} \leq 0,\\ x<2,\\ x>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(x-1)}{(x-1)} \geq 0,\\ x<2,\\ x>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{(x-1)}{(x-1)} \geq 0,\\ x<2,\\ x>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1,\\ x<2,\\ x>0.\end{cases}$$

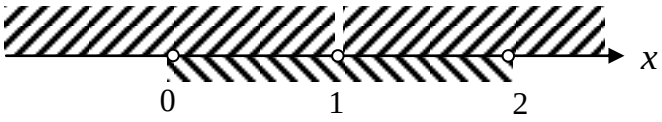


Рисунок 2

Ответ: (0;1)∪(1;2).

Пример 3: Найдите решение неравенства:

$$2log_3\frac{x-2}{x-3{,}3}+log_3(x-3{,}3)^2\geq 0.$$

Решение: По определению логарифма $\frac{x-2}{x-3{,}3}>0$ и $(x-3{,}3)^2>0$.

Учитывая также свойства алгоритма $log_a b+log_a c=log_a(bc)$ и $alog_b c=log_b c^a$, получим систему:

$$\begin{cases}log_3\left(\dfrac{(x-2)^2}{(x-3{,}3)^2}\cdot(x-3{,}3)^2\right)\geq 0,\\ (x-3{,}3)^2>0,\\ \dfrac{x-2}{x-3{,}3}>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}log_3((x-2)^2)\geq log_3 1,\\ (x-3{,}3)^2>0,\\ \dfrac{x-2}{x-3{,}3}>0,\end{cases}$$

Учитывая, что $a^2>0$ при любом значении a, отличном от нуля.

$$\begin{cases}(x-2)^2\geq 1,\\ x-3{,}3\neq 0,\\ \dfrac{x-2}{x-3{,}3}>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-2)^2-1\geq 0,\\ x\neq 3{,}3,\\ \dfrac{x-2}{x-3{,}3}>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\big((x-2)-1\big)\cdot((x-2)+1)\geq 0,\\ x\neq 3{,}3,\\ \dfrac{x-2}{x-3{,}3}>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)\cdot(x-1)\geq 0, \\ x\neq 3{,}3, \\ \dfrac{x-2}{x-3{,}3}>0, \end{cases}$$

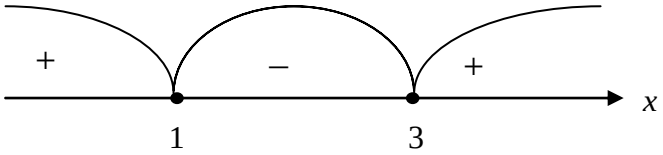


Рисунок 3

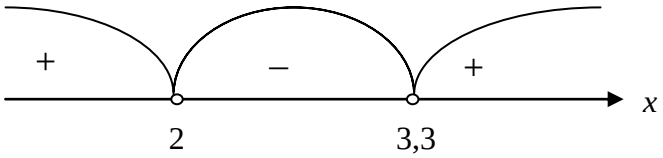


Рисунок 4

Решением первого неравенства является: $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

Решением второго и третьего неравенства: $(-\infty;2)\cup(3{,}3;+\infty)$.

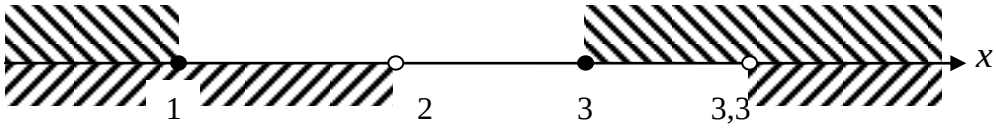


Рисунок 5

Ответ: $(-\infty;1]\cup(3{,}3;+\infty)$.

Пример 4: Найдите решение неравенства:

$$\frac{1}{log_2(16x-32)}+\frac{2}{log_2(2x-4)}\cdot\left(\frac{3}{4+log_2(x-2)}-1\right)\leq 0.$$

Решение:

$$\frac{1}{log_2\big(16\cdot(x-2)\big)}+\frac{2}{log_2\big(2\cdot(x-2)\big)}\cdot\left(\frac{3}{4+log_2(x-2)}-1\right)\leq 0;$$

$$\frac{1}{log_2 16+log_2(x-2)}+\frac{2}{log_2 2+log_2(x-2)}\cdot\left(\frac{3}{4+log_2(x-2)}-1\right)\leq 0;$$

$$\frac{1}{log_2 2^4+log_2(x-2)}+\frac{2}{1+log_2(x-2)}\cdot\left(\frac{3}{4+log_2(x-2)}-1\right)\leq 0;$$

Пусть $t = log_2(x-2)$, тогда

$$\frac{1}{4+t} + \frac{2}{1+t} \cdot \left(\frac{3}{4+t} - 1\right) \leq 0;$$

$$\frac{1}{4+t} + \frac{2}{1+t} \cdot \frac{3-4-t}{4+t} \leq 0;$$

$$\frac{1}{4+t} + \frac{2}{1+t} \cdot \frac{-1-t}{4+t} \leq 0;$$

$$\frac{1}{4+t} - \frac{2}{1+t} \cdot \frac{1+t}{4+t} \leq 0;$$

$$\frac{1}{4+t} - \frac{2+2t}{(1+t)\cdot(4+t)} \leq 0;$$

$$\frac{1+t-2-2t}{(1+t)\cdot(4+t)} \leq 0;$$

$$\frac{-1-t}{(1+t)\cdot(4+t)} \leq 0;$$

$$\frac{t+1}{(t+1)\cdot(t+4)} \geq 0;$$

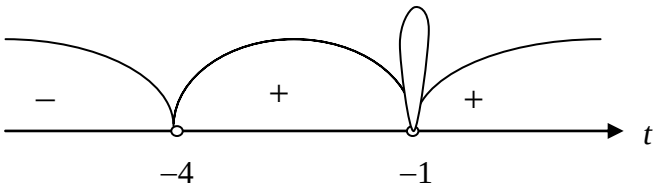


Рисунок 6

Т.о. $t \in (-4;-1) \cup (-1;+\infty)$

Произведём обратную замену:

$-4 < log_2(x-2) < -1;$

$-4log_2 2 < log_2(x-2) < -log_2 2;$

$log_2 2^{-4} < log_2(x-2) < log_2 2^{-1};$

Т.к. основание логарифма 2 > 0, то

$\frac{1}{16} < x-2 < \frac{1}{2};$

$\frac{1}{16} + 2 < x < \frac{1}{2} + 2;$

$2\frac{1}{16} < x < 2\frac{1}{2}.$

$-1 < log_2(x-2);$

$-log_2 2 < log_2(x-2);$

$log_2 2^{-1} < log_2(x-2);$

Т.к. основание логарифма 2 > 0, то

$\frac{1}{2} < x-2;$

$2\frac{1}{2} < x.$

Ответ: $\left(2\frac{1}{16};2\frac{1}{2}\right)\cup\left(2\frac{1}{2};+\infty\right)$

Пример 5: Найдите решение неравенства:

$$13log_{13}(x^2-x-6)\le 14+log_{13}\frac{(x+2)^{13}}{x-3}.$$

Решение: $log_{13}(x^2-x-6)^{13}\le 14log_{13}13+log_{13}\frac{(x+2)^{13}}{x-3}$;

$$log_{13}(x^2-x-6)^{13}\le log_{13}13^{14}+log_{13}\frac{(x+2)^{13}}{x-3};$$

$$log_{13}(x^2-x-6)^{13}\le log_{13}\left(13^{14}\cdot\frac{(x+2)^{13}}{x-3}\right);$$

Т.к. основание логарифма 13 > 0, то

$$\begin{cases}(x^2-x-6)^{13}\le 13^{14}\cdot\dfrac{(x+2)^{13}}{x-3};\\ x^2-x-6>0;\\ \dfrac{(x+2)^{13}}{x-3}>0.\end{cases}$$

Разложим x^2-x-6 на множители.

$$x^2-x-6=0$$

D = $(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)$ = 1+24 = 25

$x_1=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$ или $x_2=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3.$

$$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$$

Имеем:

$$\begin{cases}(x+2)^{13}(x-3)^{13}\le 13^{14}\cdot\dfrac{(x+2)^{13}}{x-3};\\ (x+2)(x-3)>0;\\ \dfrac{(x+2)^{13}}{x-3}>0.\end{cases}$$

Найдём решение первого неравенства системы.

$$(x+2)^{13}(x-3)^{13}\le 13^{14}\cdot\frac{(x+2)^{13}}{x-3};$$

$$(x+2)^{13}(x-3)^{13} - 13^{14} \cdot \frac{(x+2)^{13}}{x-3} \le 0;$$

$$(x+2)^{13}\left((x-3)^{13} - 13^{14} \cdot \frac{1}{x-3}\right) \le 0;$$

$$(x+2)^{13}\left(\frac{(x-3)^{14} - 13^{14}}{x-3}\right) \le 0;$$

$$\frac{(x+2)^{13}((x-3)^{14} - 13^{14})}{x-3} \le 0;$$

Применим метод интервалов.

$(x+2)^{13} = 0;$	$x - 3 = 0;$	$(x-3)^{14} - 13^{14} = 0;$
$x + 2 = 0;$	$x_2 = 3.$	$(x-3)^{14} = 13^{14};$
$x_1 = -2.$		$\sqrt[14]{(x-3)^{14}} = \sqrt[14]{13^{14}};$
		$\lvert x-3\rvert = 13;$
		$\begin{cases} x-3 \ge 0, \\ x-3 = 13, \end{cases}$ или $\begin{cases} x-3 < 0, \\ x-3 = -13, \end{cases}$
		$\begin{cases} x \ge 3, \\ x = 16, \end{cases}$ или $\begin{cases} x < 3, \\ x = -10, \end{cases}$
		$x_3 = 16$ или $x_4 = -10$

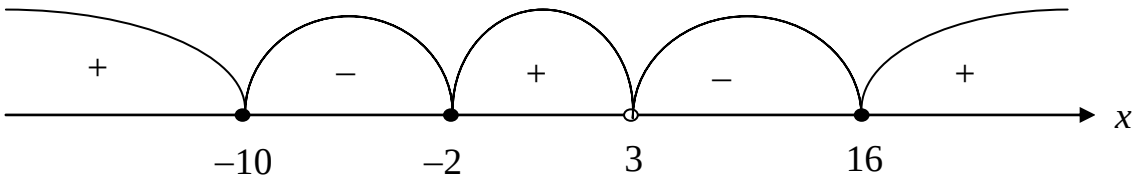


Рисунок 7

Решением первого уравнения системы является $[-10; -2] \cup (3; 16]$.

Очевидно, что второе и третье уравнения системы имеют одинаковое решение.

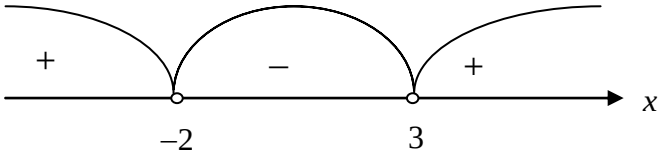


Рисунок 8

Решением второго и третьего уравнений системы является $(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Найдем решение системы.

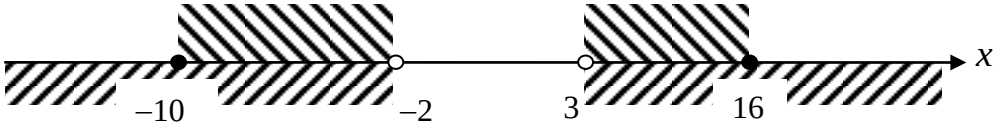


Рисунок 9

Ответ: $[-10;-2)\cup(3;16]$.

Пример 6: Найдите решение неравенства: $log_{2x+4}(x^2-3x+10)\geq 1$.

Решение: $log_{2x+4}(x^2-3x+10)\geq 1$;

Перейдём к логарифму по основанию 2.

$$\frac{log_2(x^2-3x+10)}{log_2(2x+4)}-1\geq 0;$$

$$\frac{log_2(x^2-3x+10)}{log_2(2x+4)}-\frac{log_2(2x+4)}{log_2(2x+4)}\geq 0;$$

$$\frac{log_2(x^2-3x+10)-log_2(2x+4)}{log_2(2x+4)-0}\geq 0;$$

$$\frac{log_2(x^2-3x+10)-log_2(2x+4)}{log_2(2x+4)-log_2 1}\geq 0;$$

Функция $y=log_2 x$ возрастает на области определения, т.е. при $x > 0$.

Для решения неравенства применим метод оптимизации.

Перейдём к системе:

$$\begin{cases}\dfrac{(x^2-3x+10)-(2x+4)}{(2x+4)-1}\geq 0;\\ x^2-3x+10>0;\\ 2x+4>0;\\ 2x+4\neq 1;\end{cases}$$

Решим последовательно каждое неравенство системы.

$$1)\ \frac{x^2-3x+10-2x-4}{2x+4-1}\geq 0;$$

$$\frac{x^2-5x+6}{2x+3} \geq 0;$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{2x+3} \geq 0;$$

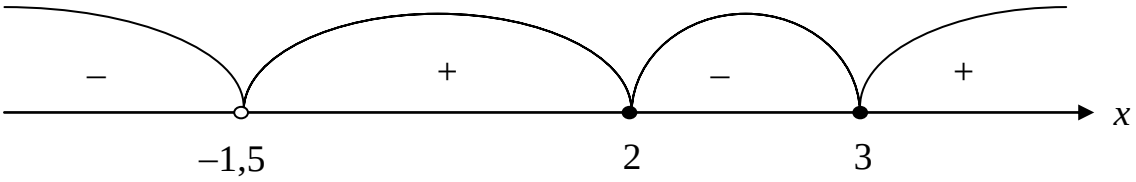


Рисунок 10

$x \in (-1{,}5; 2] \cup [3; +\infty)$.

$$2)\ x^2 - 3x + 10 > 0;$$

$$x^2 - 3x + 10 = 0;$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9 - 40 = -31 < 0$$

Следовательно, квадратичная функция $y = x^2 - 3x + 10$ (ветви вверх) не имеет точек пересечения с осью абсцисс. Другими словами, неравенство $x^2 - 3x + 10 > 0$ верно при любом действительном значении *x*.

$$3)\ 2x + 4 > 0;$$

$$2x > -4;$$

$$x > -2;$$

$$4)\ 2x + 4 \neq 1;$$

$$2x \neq -3;$$

$$x \neq -1{,}5.$$

Нанесём все 4 решения на одну прямую.

Рисунок 11

Ответ: $(-1{,}5; 2] \cup [3; +\infty)$.

Пример 7: Найдите решение неравенства: $\frac{log_2(2x) \cdot log_{0,5x}2}{log_{0,125x}8} \leq 1$

Произведём преобразования дроби:

$$\frac{log_2(2x)\cdot log_{0,5x}2}{log_{0,125x}8}=\frac{(log_22+log_2x)\cdot log_{0,5x}2}{log_{0,5^3x}2^3}=\frac{(1+log_2x)\cdot log_{2^{-1}x}2}{3\cdot log_{2^{-3}x}2}=$$

$$=\frac{(1+log_2x)\cdot\frac{log_22}{log_2(2^{-1}x)}}{3\cdot\frac{log_22}{log_2(2^{-3}x)}}=\frac{(1+log_2x)\cdot\frac{1}{log_22^{-1}+log_2x}}{3\cdot\frac{1}{log_22^{-3}+log_2x}}=\frac{\frac{1+log_2x}{-1+log_2x}}{\frac{3}{-3+log_2x}}.$$

Пусть $t=log_2x$, тогда:

$$\frac{\frac{1+t}{-1+t}}{\frac{3}{-3+t}}=\frac{1+t}{t-1}:\frac{3}{t-3}=\frac{1+t}{t-1}\cdot\frac{t-3}{3}=\frac{(t+1)(t-3)}{3(t-1)}$$

Найдём решение неравенства

$$\frac{(t+1)(t-3)}{3(t-1)}\le 1;$$

$$\frac{(t+1)(t-3)}{3(t-1)}-1\le 0;$$

$$\frac{t^2-3t+t-3-3t+3}{3(t-1)}\le 0;$$

$$\frac{t^2-5t}{3(t-1)}\le 0;$$

$$\frac{t(t-5)}{3(t-1)}\le 0;$$

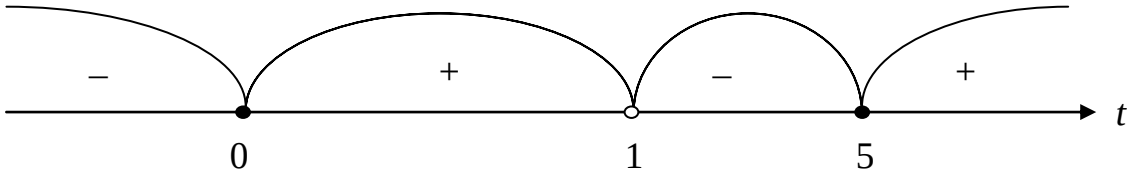


Рисунок 12

Неравенство $\frac{t(t-5)}{3(t-1)}\le 0$ верно при $t\le 0$ или $1<t\le 5$.

Произведём обратную замену: $log_2x\le 0$ или $1<log_2x\le 5$.

Решим последовательно оба неравенства.

а) $log_2x\le 0$;

$log_2x\le log_21$;

$\begin{cases} x \le 1, \\ x > 0. \end{cases}$

$x \in (0; 1]$.

б) $1 < log_2 x \le 5$;

$log_2 2 < log_2 x \le log_2 2^5$;

$2 < x \le 2^5$;

$2 < x \le 32$.

Найдём область допустимых значений исходного неравенства:

$$\frac{log_2(2x) \cdot log_{0,5x} 2}{log_{0,125x} 8} \le 1.$$

$$\begin{cases} 2x > 0, \\ 0{,}5x > 0, \\ 0{,}5x \ne 1, \\ 0{,}125x > 0, \\ 0{,}125x \ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > 0, \\ x \ne 2, \\ x > 0, \\ x \ne \frac{1000}{125}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \ne 2, \\ x \ne 8. \end{cases}$$

С учётом ограничений получим ответ

а)

Рисунок 13

Следовательно, $x \in (0; 1]$.

б)

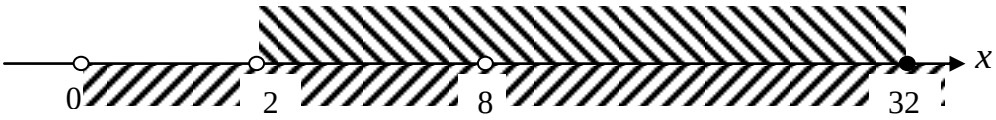


Рисунок 14

Следовательно, $x \in$.

Ответ: $x \in (0; 1] \cup (2; 8) \cup (8; 32]$.

Пример 8: Найдите решение неравенства:

$$3log_4^2(4-x)^8 + 4log_{0,5}(4-x)^6 \geq 72.$$

Решение: Найдём область допустимых значений неравенства:

$$\begin{cases}(4-x)^8 > 0;\\(4-x)^6 > 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4-x \neq 0;\\4-x \neq 0;\end{cases} \Leftrightarrow x \neq 4.$$

1-й способ

Преобразуем неравенство:

$$3 \cdot log_4\,(4-x)^8 \cdot log_4\,(4-x)^8 + 4log_{\frac{1}{2}}(4-x)^6 \geq 72;$$

$$3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot log_{2^2}|4-x| \cdot log_{2^2}|4-x| + 4 \cdot 6 \cdot log_{2^{-1}}|4-x| \geq 72;$$

$$3 \cdot 8 \cdot 8 \cdot log_{2^2}|4-x| \cdot log_{2^2}|4-x| + 4 \cdot 6 \cdot log_{2^{-1}}|4-x| \geq 72; |:(6 \cdot 4) > 0$$

$$8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot log_4^2|4-x| + log_{2^{-1}}|4-x| \geq 3;$$

$$2 \cdot log_4^2|4-x| - log_2|4-x| - 3 \geq 0;$$

Пусть $t = log_2|4-x|$, тогда $2t^2 - t - 3 \geq 0$.

$$2t^2 - t - 3 = 0.$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25$$

$$t_1 = \frac{1-5}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{или} \quad t_2 = \frac{1+5}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = 1{,}5.$$

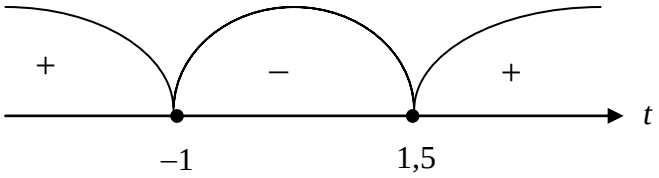


Рисунок 15

$t \leq -1$ или $1{,}5 \leq t$.

Произведём обратную замену:

$log_2|4-x| \leq -1$; или $1{,}5 \leq log_2|4-x|$.

Решим последовательно оба неравенства.

а) $log_2|4-x| \leq log_2 2^{-1}$;

$|4-x| \leq 2^{-1}$.

Раскроем модуль

$\begin{cases} 4-x \le 2^{-1}, \\ 4-x \ge 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} 4-x \le -2^{-1}, \\ 4-x < 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 4-x \le 0{,}5, \\ 4 \ge x, \end{cases}$ или $\begin{cases} 4-x \le -0{,}5, \\ 4 < x, \end{cases}$

$\begin{cases} 4-0{,}5 \le x, \\ x \le 4, \end{cases}$ или $\begin{cases} 4+0{,}5 \le x, \\ x > 4, \end{cases}$

$\begin{cases} x \ge 3{,}5, \\ x \le 4, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \ge 4{,}5, \\ x > 4, \end{cases}$

Следовательно, $x \in [3{,}5; 4] \cup (4; 4{,}5]$.

Учитывая ОДЗ, получим $x \in [3{,}5; 4) \cup (4; 4{,}5]$.

б) $log_2 2^{1{,}5} \le log_2 |4-x|$,

$2^{1{,}5} \le |4-x|$,

Раскроем модуль

$\begin{cases} 2^{1{,}5} \le 4-x, \\ 4-x \ge 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} 2^{1{,}5} \le -4+x, \\ 4-x < 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 2^{1{,}5} - 4 \le -x, \\ 4-x \ge 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} 2^{1{,}5} + 4 \le x, \\ 4-x < 0, \end{cases}$

$\begin{cases} 4 - 2^{1{,}5} \ge x, \\ 4 \ge x, \end{cases}$ или $\begin{cases} 2^{1{,}5} + 4 \le x, \\ 4 < x, \end{cases}$

$\begin{cases} 4 - 2\sqrt{2} \ge x, \\ 4 \ge x, \end{cases}$ или $\begin{cases} 4 + 2\sqrt{2} \le x, \\ 4 < x, \end{cases}$

Следовательно, $x \in (-\infty; 4-2\sqrt{2}] \cup [4+2\sqrt{2}4; +\infty)]$, при этом ОДЗ в объединение интервалов не входит.

2-й способ

$$3\left(log_{2^2}(4-x)^{2\cdot 4}\right)^2 + 4log_{2^{-1}}(4-x)^{2\cdot 3} \ge 72;$$

$$3\left(\frac{4}{2}log_2\,(4-x)^2\right)^2 + 4\cdot\frac{3}{-1}log_2(4-x)^2 - 72 \ge 0;$$

$$12\cdot\left(log_2\,(4-x)^2\right)^2 - 12\cdot log_2(4-x)^2 - 72 \ge 0;$$

Пусть $t = log_2(4-x)^2$, тогда $12\cdot t^2 - 12\cdot t - 72 \ge 0; |: 12 \ne 0$

$$t^2 - t - 6 \ge 0;$$

$$(t+2)(t-3) \ge 0;$$

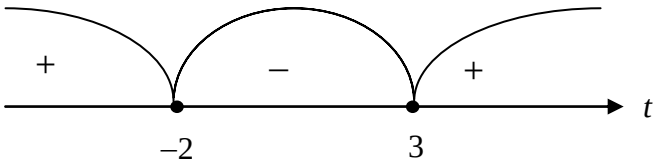


Рисунок 16

Имеем, $t \le -2$ или $3 \le t$.

Произведём обратную замену.

$log_2(4-x)^2 \le -2$ или $3 \le log_2(4-x)^2$.

Решим последовательно оба неравенства.

а) $log_2(4-x)^2 \le -2$;

$log_2(4-x)^2 \le log_2 2^{-2}$;

$$\begin{cases}(4-x)^2 \le 0{,}25;\\ (4-x)^2 > 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4-x)^2 - 0{,}25 \le 0;\\ (4-x)^2 > 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4-x)^2 - 0{,}25 \le 0;\\ (4-x)^2 > 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4-x-0{,}25)(4-x+0{,}25) \le 0;\\ (4-x)^2 > 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(3{,}5-x)(4{,}5-x) \le 0;\\ x \ne 4;\end{cases}$$

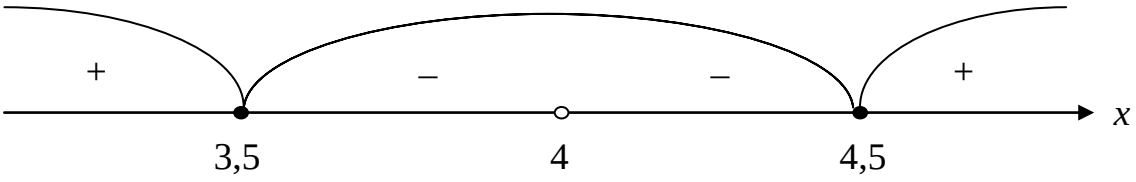


Рисунок 17

$x \in [3{,}5;\,4) \cup (4;\,4{,}5]$.

б) $3 \le log_2(4-x)^2$;

$log_2(4-x)^2 \ge log_2 2^3$;

$$\begin{cases}(4-x)^2 \ge 8,\\ (4-x)^2 > 0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4-x)^2-8\geq 0,\\ x\neq 4,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(4-x-2\sqrt{2})(4-x+2\sqrt{2})\geq 0,\\ x\neq 4,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left((4-2\sqrt{2})-x\right)\left((4+2\sqrt{2})-x\right)\geq 0,\\ x\neq 4,\end{cases}$$

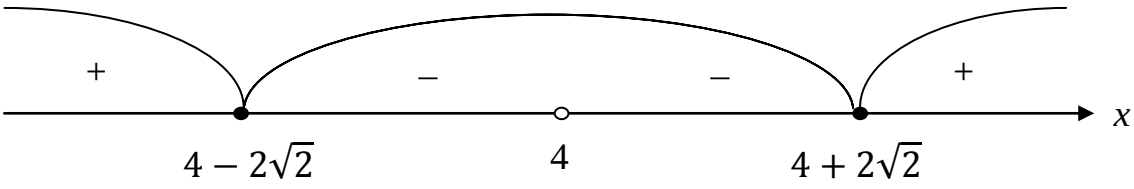


Рисунок 18

$x\in(-\infty;4-2\sqrt{2}]\cup[4+2\sqrt{2}4;+\infty)]$.

Ответ: $x\in(-\infty;4-2\sqrt{2}]\cup[3{,}5;4)\cup(4;4{,}5]\cup[4+2\sqrt{2}4;+\infty)]$

Пример 9: Найдите решение неравенства:

$$2log_7(x\sqrt{2})-log_7\left(\frac{x}{1-x}\right)\leq log_7\left(8x^2+\frac{1}{x}-5\right).$$

Решение: Перейдём к системе неравенств, где первое неравенство – исходное, а остальные – его ОДЗ:

$$\begin{cases}log_7(x\sqrt{2})^2-log_7\left(\frac{x}{1-x}\right)\leq log_7\left(8x^2+\frac{1}{x}-5\right),\\ x\sqrt{2}>0,\\ \frac{x}{1-x}>0,\\ 8x^2+\frac{1}{x}-5>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}log_7\frac{2x^2\cdot(1-x)}{x}\leq log_7\left(8x^2+\frac{1}{x}-5\right),\\ x>0,\\ \frac{x}{1-x}>0,\\ \frac{8x^3-5x+1}{x}>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2 \cdot (1-x)}{x} \le 8x^2 + \dfrac{1}{x} - 5, \\ x > 0, \\ \dfrac{x}{1-x} > 0, \\ \dfrac{8x^3 - 5x + 1}{x} > 0, \end{cases}$$

Решим последовательно каждое неравенство системы.

1)

$$\frac{2x^2 \cdot (1-x)}{x} \le 8x^2 + \frac{1}{x} - 5,$$

$$\frac{2x^2 \cdot (1-x)}{x} - 8x^2 - \frac{1}{x} + 5 \le 0,$$

$$\frac{2x^2 - 2x^3}{x} - 8x^2 - \frac{1}{x} + 5 \le 0,$$

$$\frac{2x^2 - 2x^3 - 8x^3 - 1 + 5x}{x} \le 0,$$

$$\frac{2x^2 - 10x^3 - 1 + 5x}{x} \le 0,$$

$$\frac{-10x^3 + 2x^2 + 5x - 1}{x} \le 0,$$

$$\frac{-2x^2(5x-1) + 1(5x-1)}{x} \le 0,$$

$$\frac{(5x-1)(-2x^2+1)}{x} \le 0,$$

$$\frac{(5x-1)\left(1-\sqrt{2}x\right)\left(1+\sqrt{2}x\right)}{x} \le 0,$$

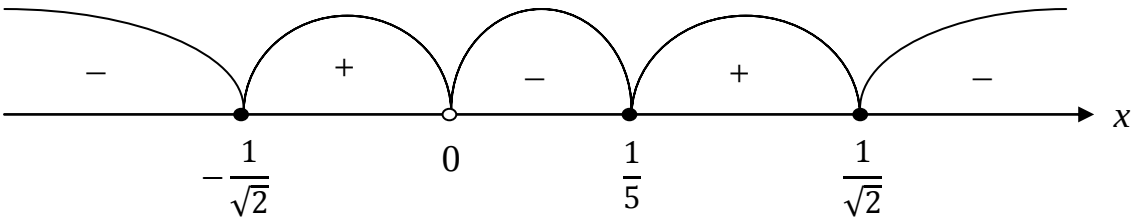


Рисунок 19

Решением первого неравенства системы является

$$x \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup (0; \frac{1}{5}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty).$$

2) Решением второго неравенства системы является $x \in (0; +\infty)$. Т.о. получается, что предполагаемое решение неравенства сокращается до объединения $x \in (0; \frac{1}{5}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty)$.

3)

$$\frac{x}{1-x} > 0.$$

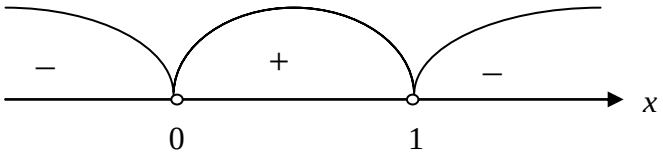


Рисунок 20

Решением третьего неравенства системы является $x \in (0; 1)$. Следовательно, предполагаемое решение неравенства сокращается ещё, а именно до объединения $x \in (0; \frac{1}{5}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1)$

4) Сократится ли предполагаемое решение неравенства после решения четвёртого неравенства системы: $8x^2 + \frac{1}{x} - 5 > 0$?

$$\frac{8x^3 - 5x + 1}{x} > 0,$$

$$\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{x} > 0.$$

Чтобы применить метода интервалов для решения неравенства $8x^2 + \frac{1}{x} - 5 > 0$ необходимо приравнять его к нулю. Получим: $8x^2 + \frac{1}{x} - 5 = 0$. Другими словами: $8x^2 - 5 = -\frac{1}{x}$ или $-8x^2 + 5 = \frac{1}{x}$.

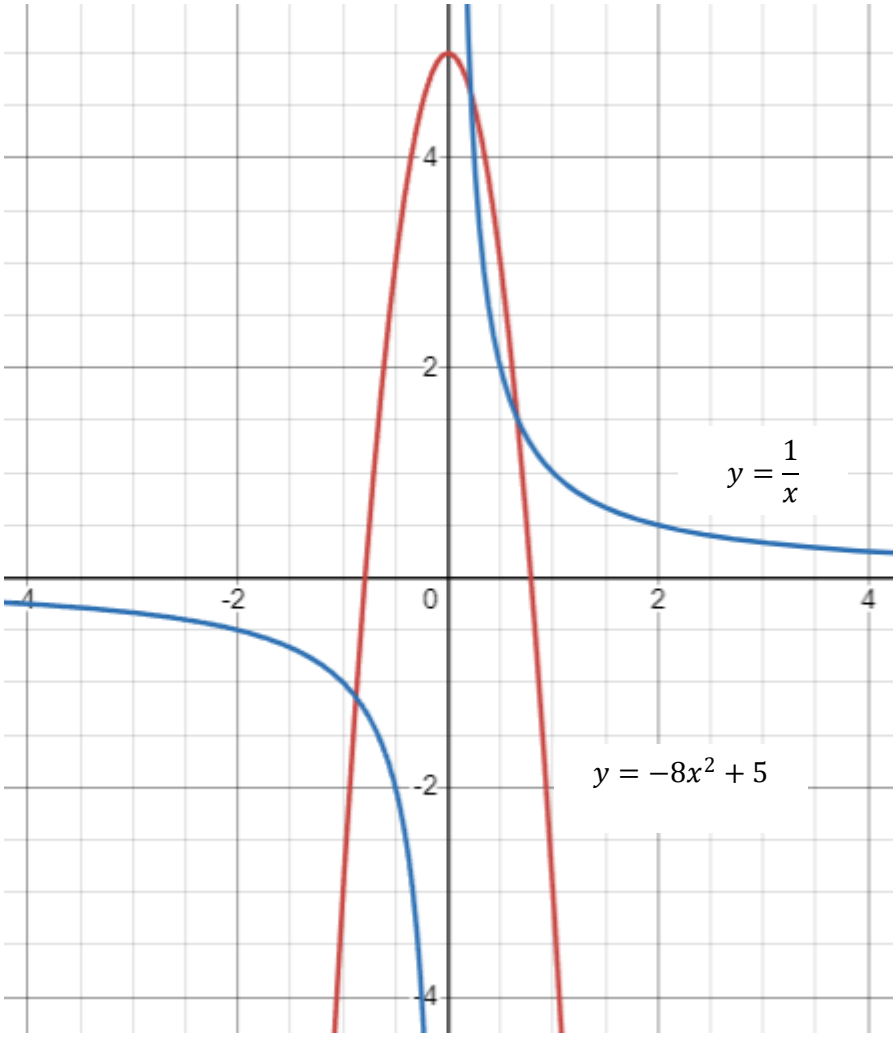


Рисунок 21

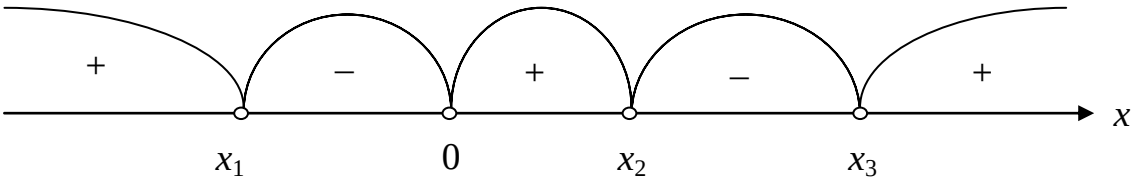


Рисунок 22

Решением четвёртого неравенства системы будет являться объединение $x \in (-\infty; x_1) \cup (0; x_2) \cup (x_3; +\infty)$.

Учитывая, что предполагаемое решение всей системы неравенств есть объединение: $x \in (0; \frac{1}{5}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1)$, очевидно, что не имеет смысла поиск значения x_1. Поиск значений x_2 и x_3 займёт много времени. В нашем случае

достаточно убедиться, что крайние точки: $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$, - лежат внутри соответствующих интервалов $(0; x_2), (x_3; +\infty)$. Для этого убедимся, что неравенство $8x^2 + \frac{1}{x} - 5 > 0$ выполняется в этих точках.

Пусть $x = \frac{1}{5}$, тогда

$8\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{\frac{1}{5}} - 5 > 0;$

$8\frac{1}{25} + 5 - 5 > 0;$

$8\frac{1}{25} > 0.$

Очевидно, верное неравенство.

Пусть $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда

$8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 5 > 0;$

$8\frac{1}{2} + \sqrt{2} - 5 > 0;$

$4 + \sqrt{2} - 5 > 0;$

$\sqrt{2} - 1 > 0;$

$\sqrt{2} > 1.$

Очевидно, верное неравенство.

Таким образом, получаем ответ всей системы неравенств: $x \in (0; \frac{1}{5}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1)$.

Ответ: $x \in (0; \frac{1}{5}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}; 1)$.

2.2 Критерии проверки и оценка решений задания 15 ЕГЭ

Задание № 15 – это неравенство: дробно-рациональное, логарифмическое или показательное.

Таблица 1

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

При этом в первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «<» вместо «≤», или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

Задача 15 (демонстрационный вариант 2020 г.).

Решите неравенство $\log_{11}\left(8x^2+7\right)-\log_{11}\left(x^2+x+1\right)\geq\log_{11}\left(\frac{x}{x+5}+7\right)$.

Решение. Правая часть неравенства определена при $x<-5$ и $x>-\frac{35}{8}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2+7$ принимает положительные значения, при $x<-5$ и $x>-\frac{35}{8}$ неравенство принимает вид:

$\frac{8x^2+7}{x^2+x+1} \geq \frac{8x+35}{x+5}$; $\frac{8x^3+40x^2+7x+35}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)} \geq \frac{8x^3+43x^2+43x+35}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)}$;

$\frac{3x^2+36x}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)} \leq 0$; $\frac{3x(x+12)}{(x+5)\left(x^2+x+1\right)} \leq 0$,

откуда $x \leq -12$; $-5 < x \leq 0$. Учитывая ограничения $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$, получаем: $x \leq -12$; $-\frac{35}{8} < x \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -12]$; $\left(-\frac{35}{8}; 0\right]$.

Таблица 2

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек -12 и/или 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задача 1.

Решите неравенство $2^x - 6 - \frac{9 \cdot 2^x - 37}{4^x - 7 \cdot 2^x + 12} \leq \frac{1}{2^x - 4}$.

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t-6-\frac{9t-37}{t^2-7t+12} \le \frac{1}{t-4};\ t-6-\frac{9t-37}{(t-3)(t-4)}-\frac{t-3}{(t-3)(t-4)} \le 0;$$

$$t-6-\frac{10}{t-3} \le 0, \text{ где } t \ne 4;\ \frac{(t-1)(t-8)}{t-3} \le 0, \text{ где } t \ne 4,$$

откуда $t \le 1;\ 3 < t < 4;\ 4 < t \le 8.$

При $t \le 1$ получим: $2^x \le 1$, откуда $x \le 0$.

При $3 < t < 4$ получим: $3 < 2^x < 4$, откуда $\log_2 3 < x < 2$.

При $4 < t \le 8$ получим: $4 < 2^x \le 8$, откуда $2 < x \le 3$.

Решение исходного неравенства:

$x \le 0;\ \log_2 3 < x < 2;\ 2 < x \le 3.$

Ответ: $(-\infty; 0];\ (\log_2 3; 2);\ (2; 3]$.

Таблица 3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или 3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 2.

Решите неравенство $\frac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geq\frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Решение.

Пусть $t=\log_4 x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t+3}{t-3}+\frac{t-3}{t+3}\geq\frac{4t+16}{t^2-9};\ \frac{t^2+6t+9}{(t-3)(t+3)}+\frac{t^2-6t+9}{(t-3)(t+3)}-\frac{4t+16}{(t-3)(t+3)}\geq 0;$$

$$\frac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}\geq 0;\ \frac{2(t-1)^2}{(t-3)(t+3)}\geq 0,\ \text{откуда}\ t<-3;\ t=1;\ t>3.$$

При $t<-3$ получим: $\log_4 x<-3$, откуда $0<x<\frac{1}{64}$.

При $t=1$ получим: $\log_4 x=1$, откуда $x=4$.

При $t>3$ получим: $\log_4 x>3$, откуда $x>64$.

Решение исходного неравенства: $0<x<\frac{1}{64};\ x=4;\ x>64$.

Ответ: $\left(0;\frac{1}{64}\right);\ 4;\ (64;+\infty)$.

Таблица 4

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 4, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задача 3.

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3\left(x^2-3x+2\right)-\log_3(x+4)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$\log_3(5(1-x)) \geq \log_3((2-x)(1-x))-\log_3(x+4)$;

$\log_3 5+\log_3(1-x) \geq \log_3(2-x)+\log_3(1-x)-\log_3(x+4)$.

Неравенство определено при $-4<x<1$, поэтому при $-4<x<1$ неравенство принимает вид:

$5 \geq \frac{2-x}{x+4}$; $\frac{6x+18}{x+4} \geq 0$,

откуда $x<-4$; $x \geq -3$. Учитывая ограничение $-4<x<1$, получаем: $-3 \leq x<1$.

Ответ: $[-3;1)$.

Таблица 5

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки -3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Примеры оценивания решений задания 15

Пример 1.

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$.

Ответ: $(-\infty;0];\ (\log_2 3;2);\ (2;3]$.

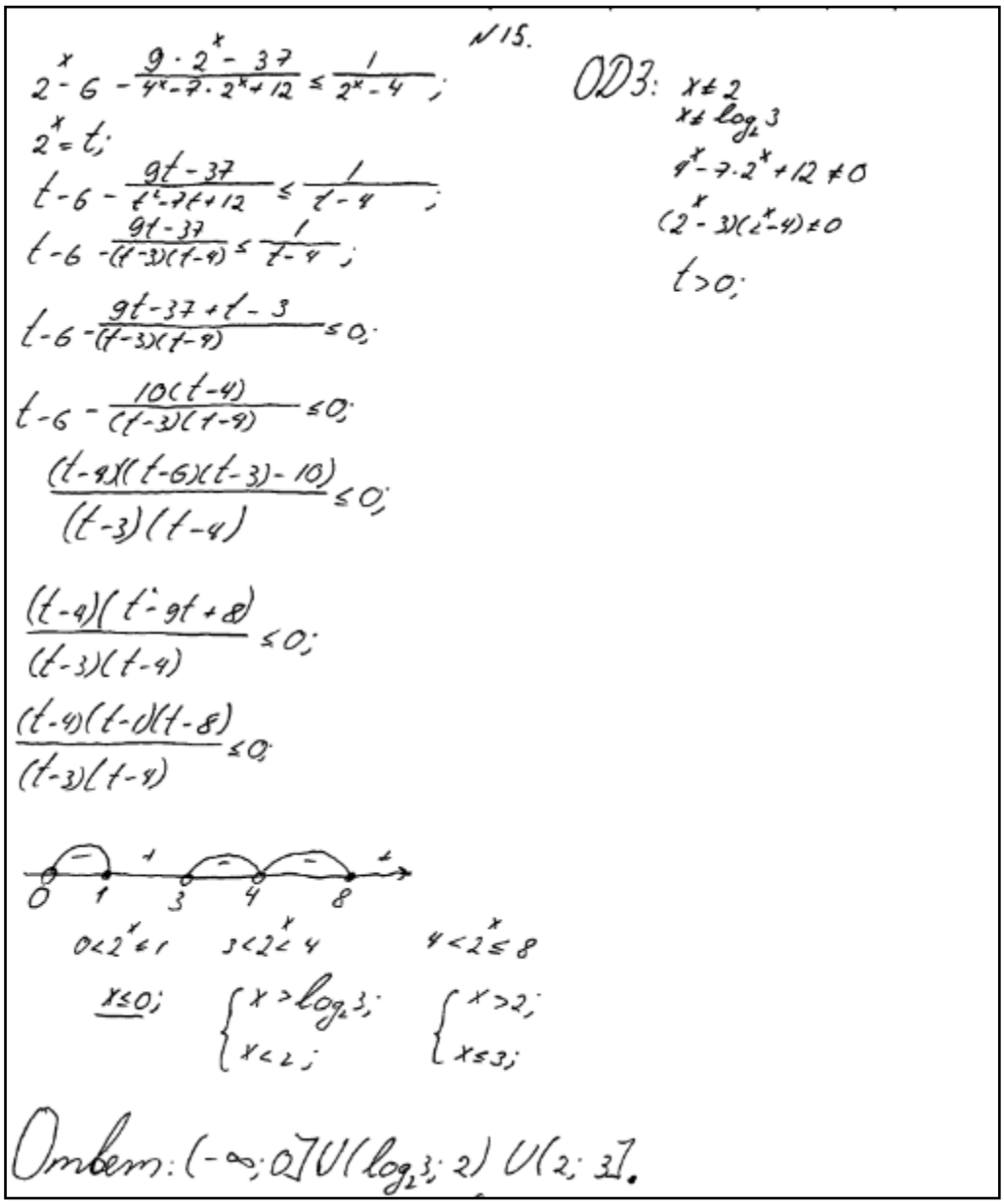


Рисунок 23

***Комментарий*.**

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 2.

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$.

Ответ: $(-\infty;0];\ (\log_2 3;2);\ (2;3]$.

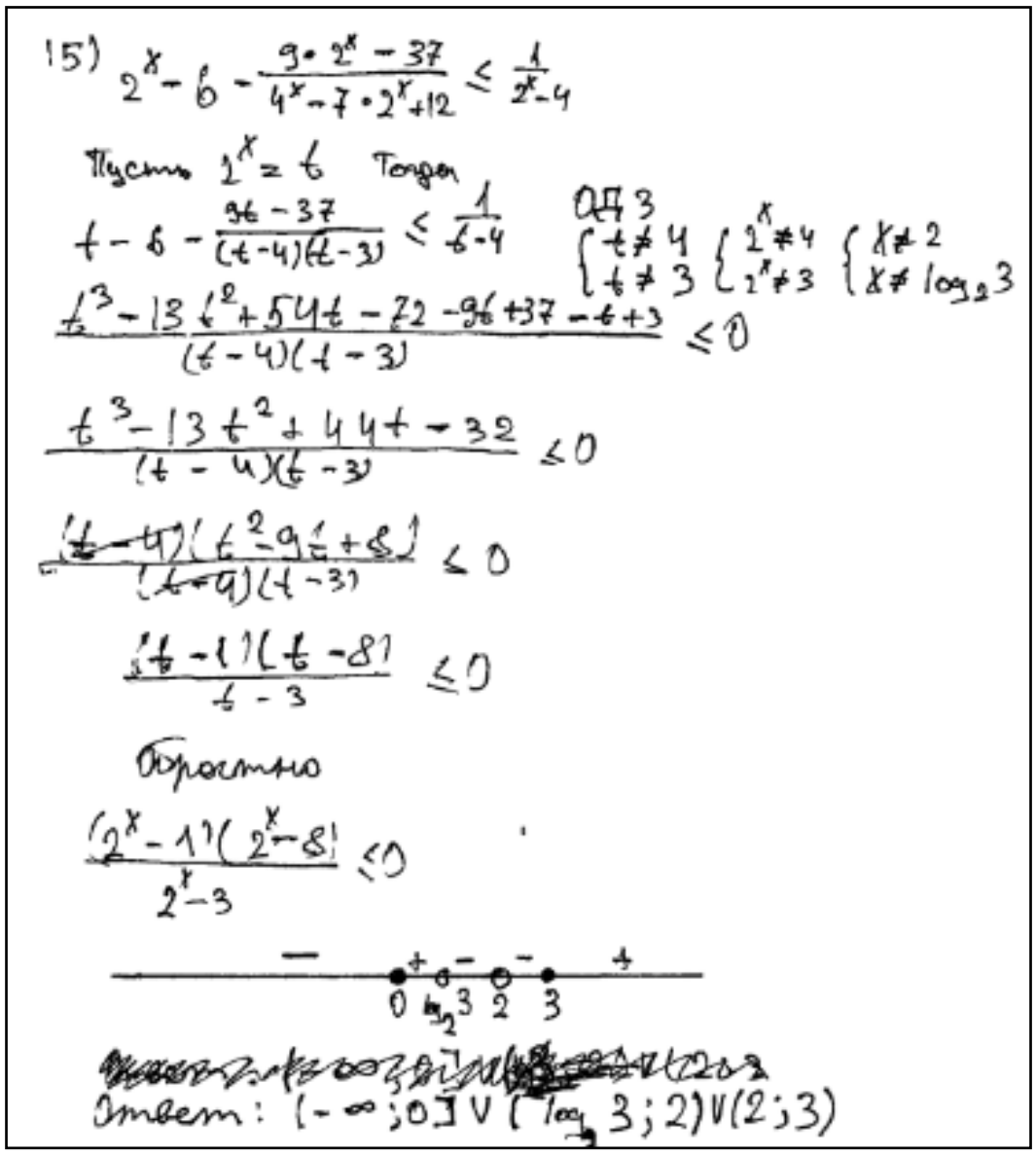


Рисунок 24

Комментарий.

В решение содержится запись «ОДЗ», которая может трактоваться по-разному. Ответ получен неверный, но он отличается от верного только исключением точки 3.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 3.

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$.

Ответ: $(-\infty;0];\ (\log_2 3;2);\ (2;3]$.

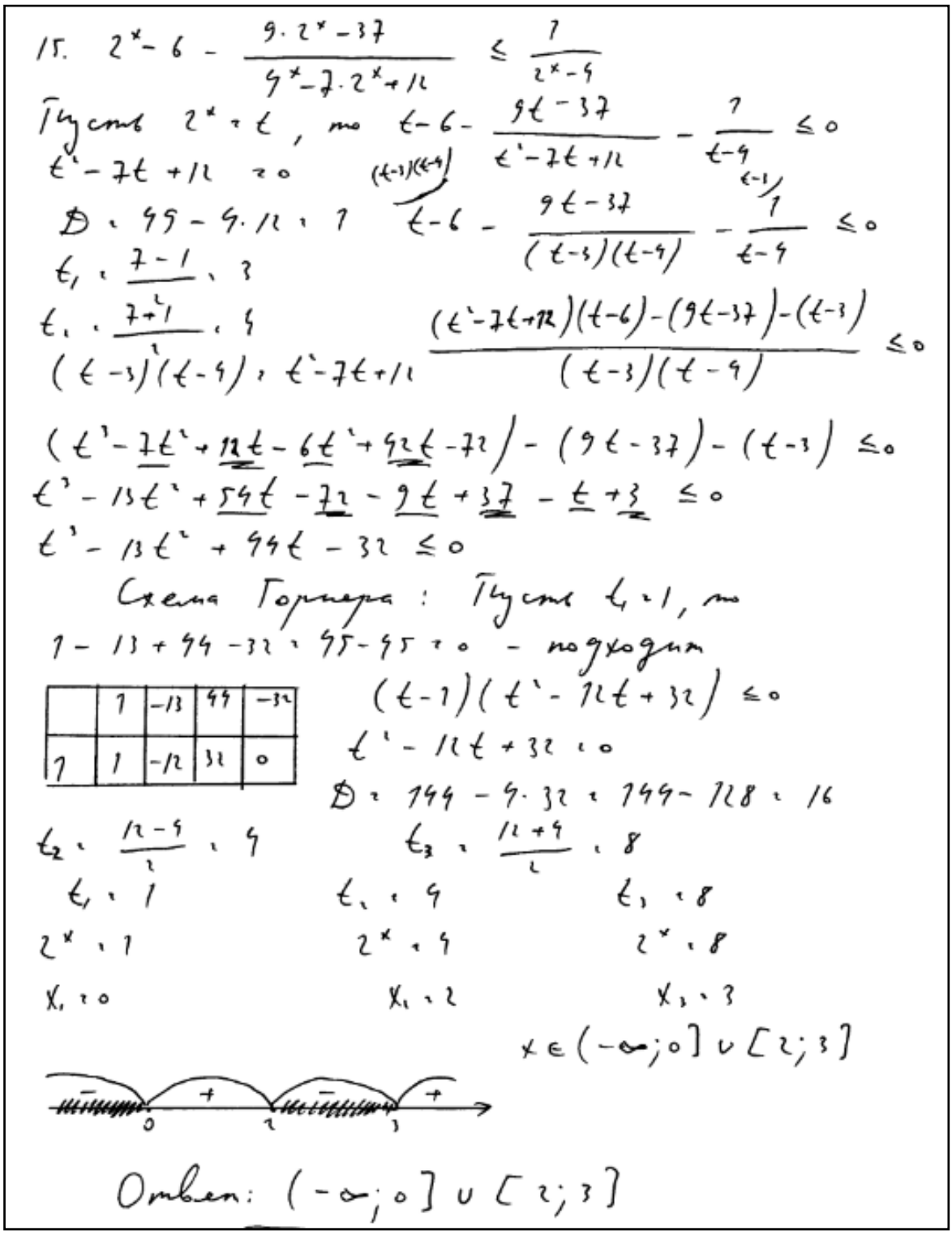


Рисунок 25

Комментарий.

При решении неравенства допущена ошибка – допущен неравносильный переход. Это привело к неверному ответу.

Оценка эксперта. 0 баллов.

Пример 4.

Решите неравенство $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geq\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right);\ 4;\ (64;+\infty)$.

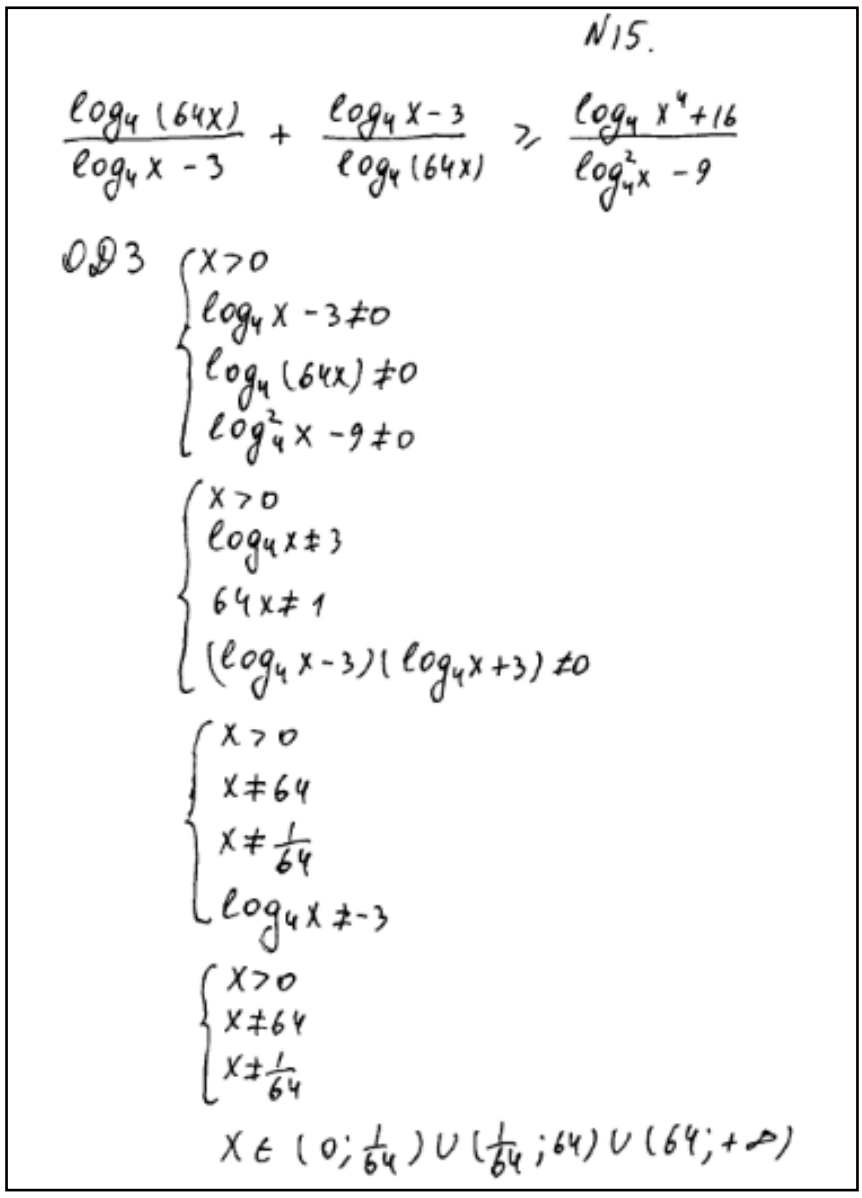


Рисунок 26

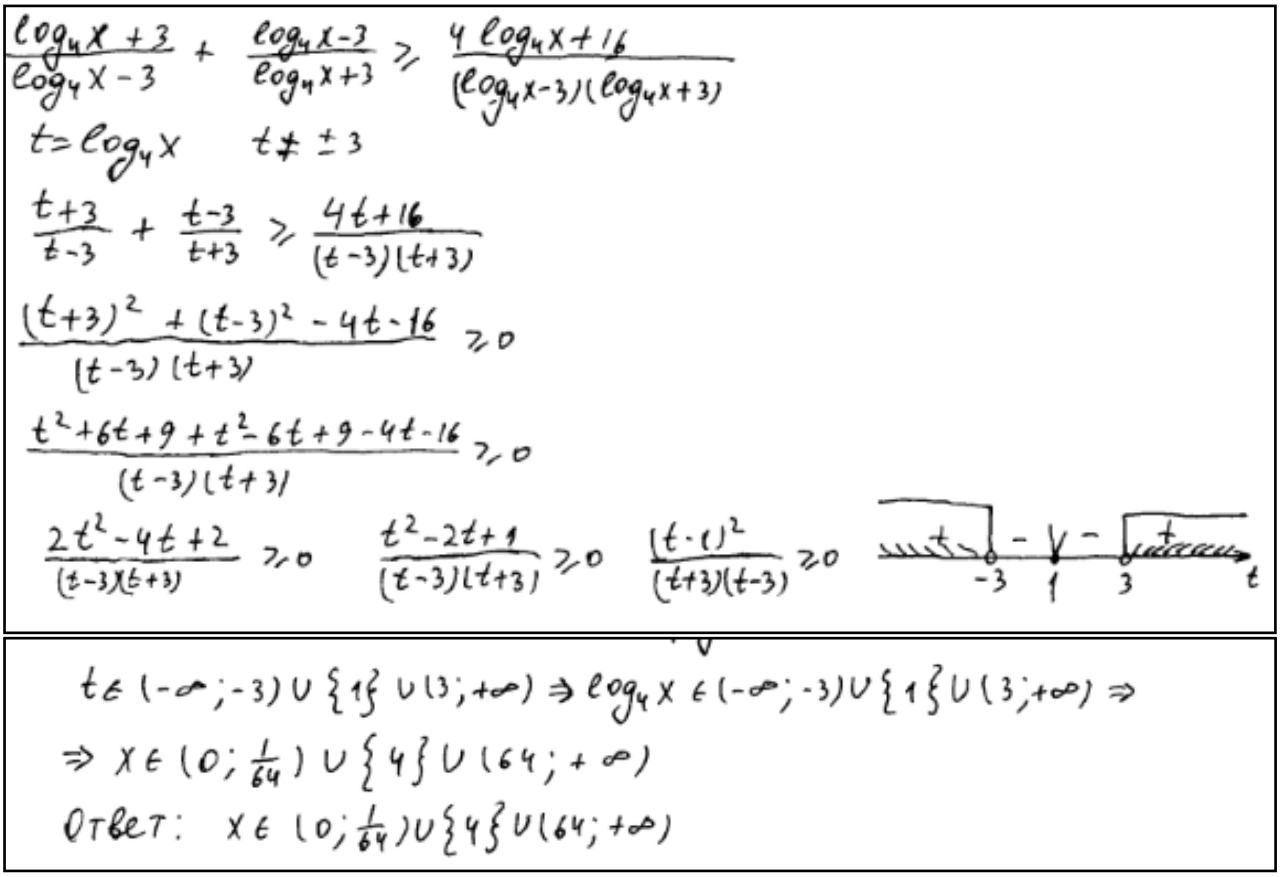


Рисунок 27

***Комментарий*.**

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта. 2 балла.

Пример 5.

Решите неравенство $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geq\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$.

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{64}\right);\ 4;\ (64;+\infty)$.

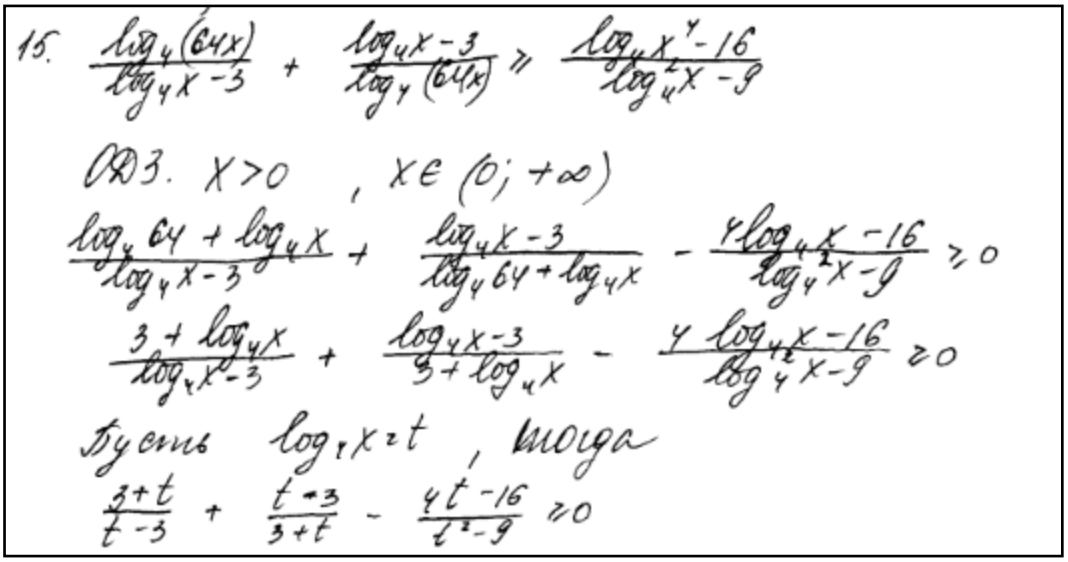


Рисунок 28

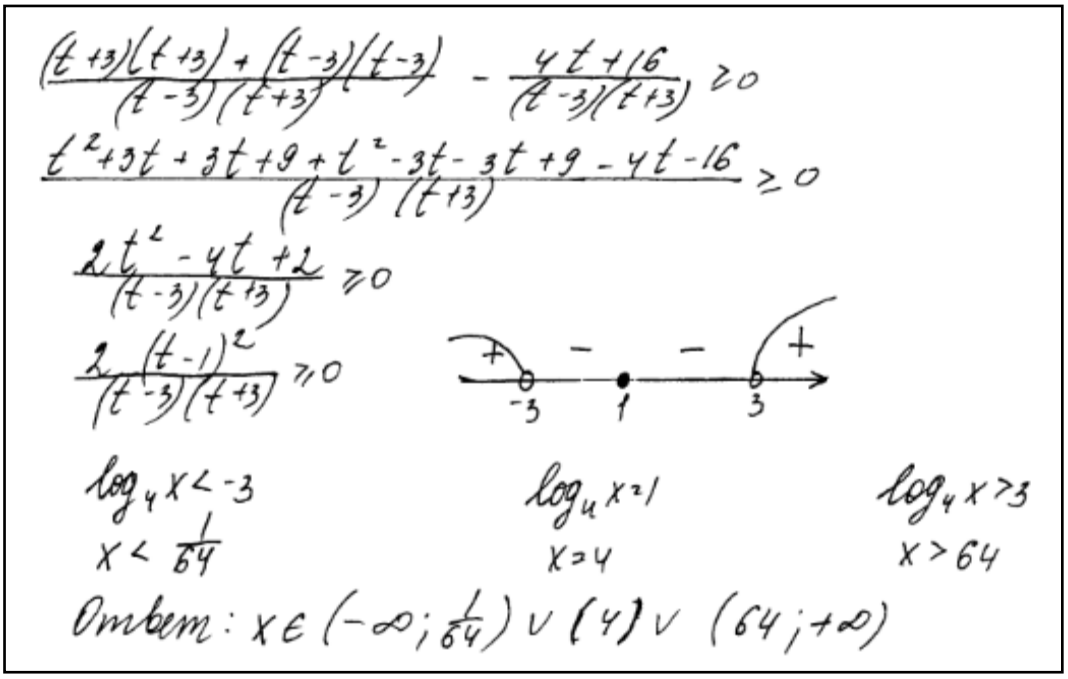


Рисунок 29

Комментарий.

При решении неравенства допущена ошибка при решении простейшего логарифмического неравенства. Ответ получен неверный. В решении содержится ошибочное утверждение, связанное с ОДЗ.

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 6.

Решите неравенство $\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5.$

Ответ: $(-\infty;1];\ (\log_3 5;2).$

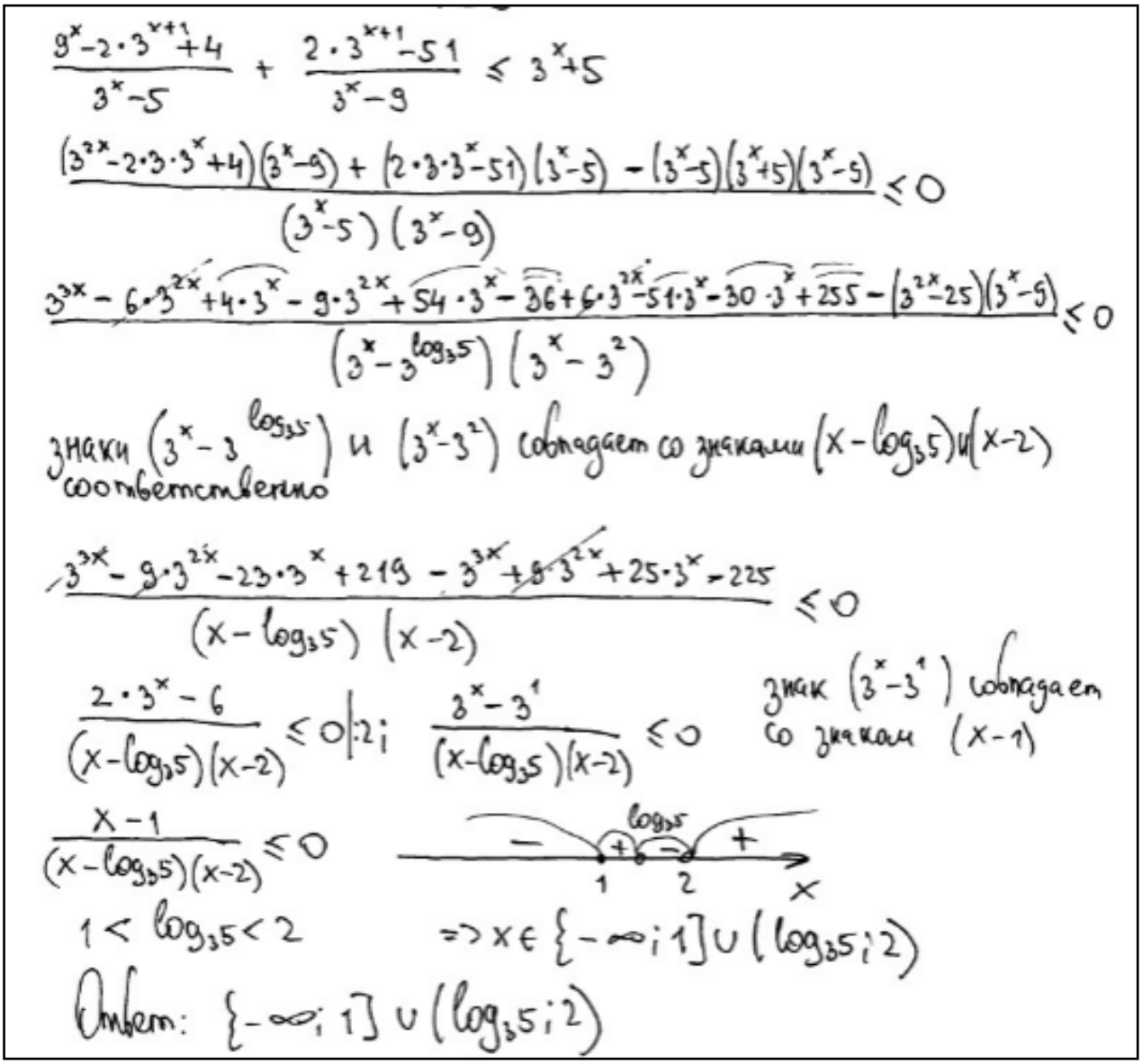


Рисунок 30

***Комментарий*.**

Обоснованно получен верный ответ. Левая круглая скобка в ответе может быть прочитана как фигурная, но это не является основанием для того, чтобы считать ответ неверным.

Оценка эксперта. 2 балла.

Пример 7.

Решите неравенство $\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5.$

Ответ: $(-\infty;1];\ (\log_3 5;2).$

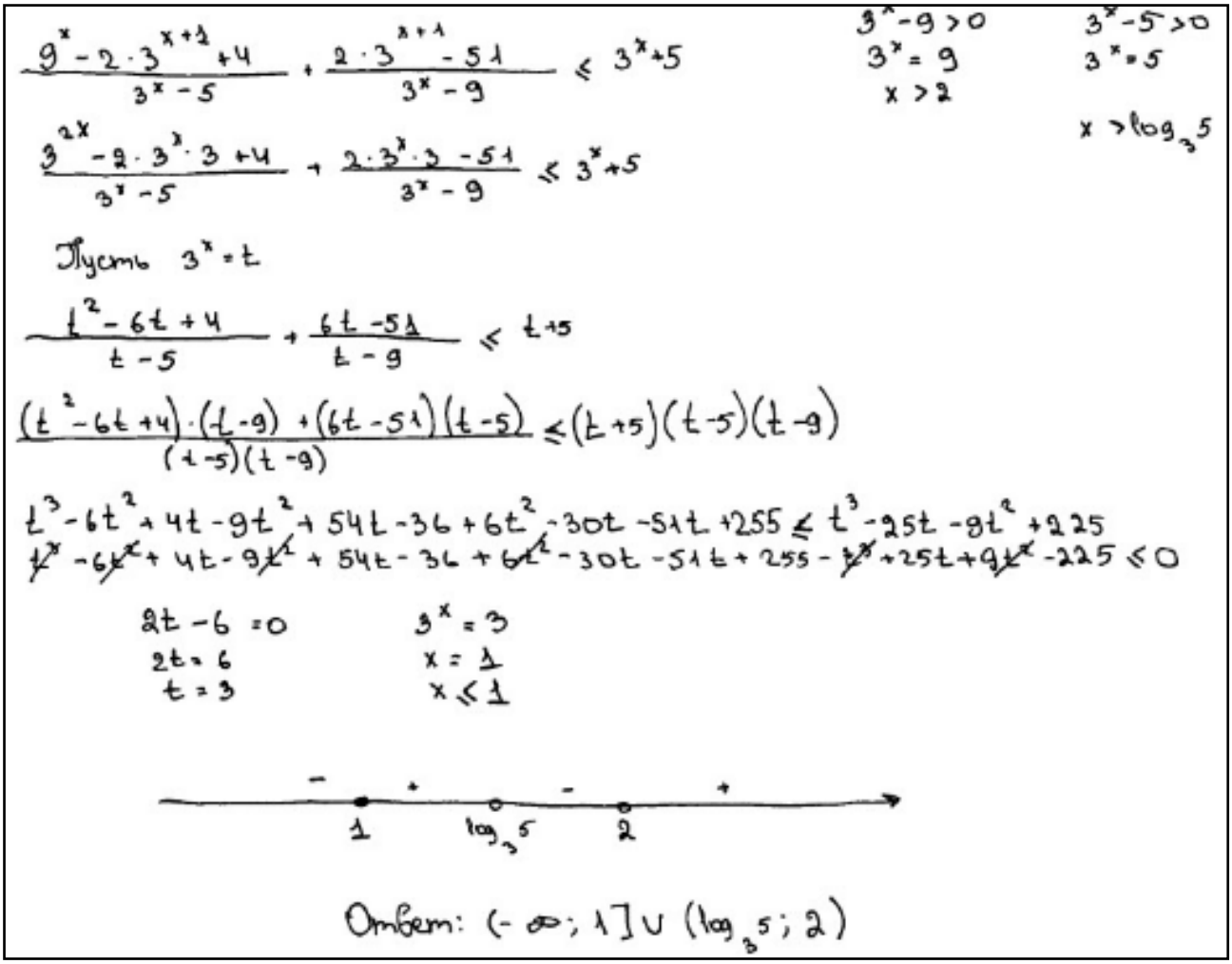


Рисунок 31

***Комментарий*.**

В решении допущены ошибочные утверждения, присутствует неравносильный переход при решении неравенств, получен ответ (совпадающий с верным).

Оценка эксперта: 0 баллов.

Пример 8.

Решите неравенство $\frac{9^x-2\cdot 3^{x+1}+4}{3^x-5}+\frac{2\cdot 3^{x+1}-51}{3^x-9}\le 3^x+5.$

Ответ: $(-\infty;1];\ (\log_3 5;2).$

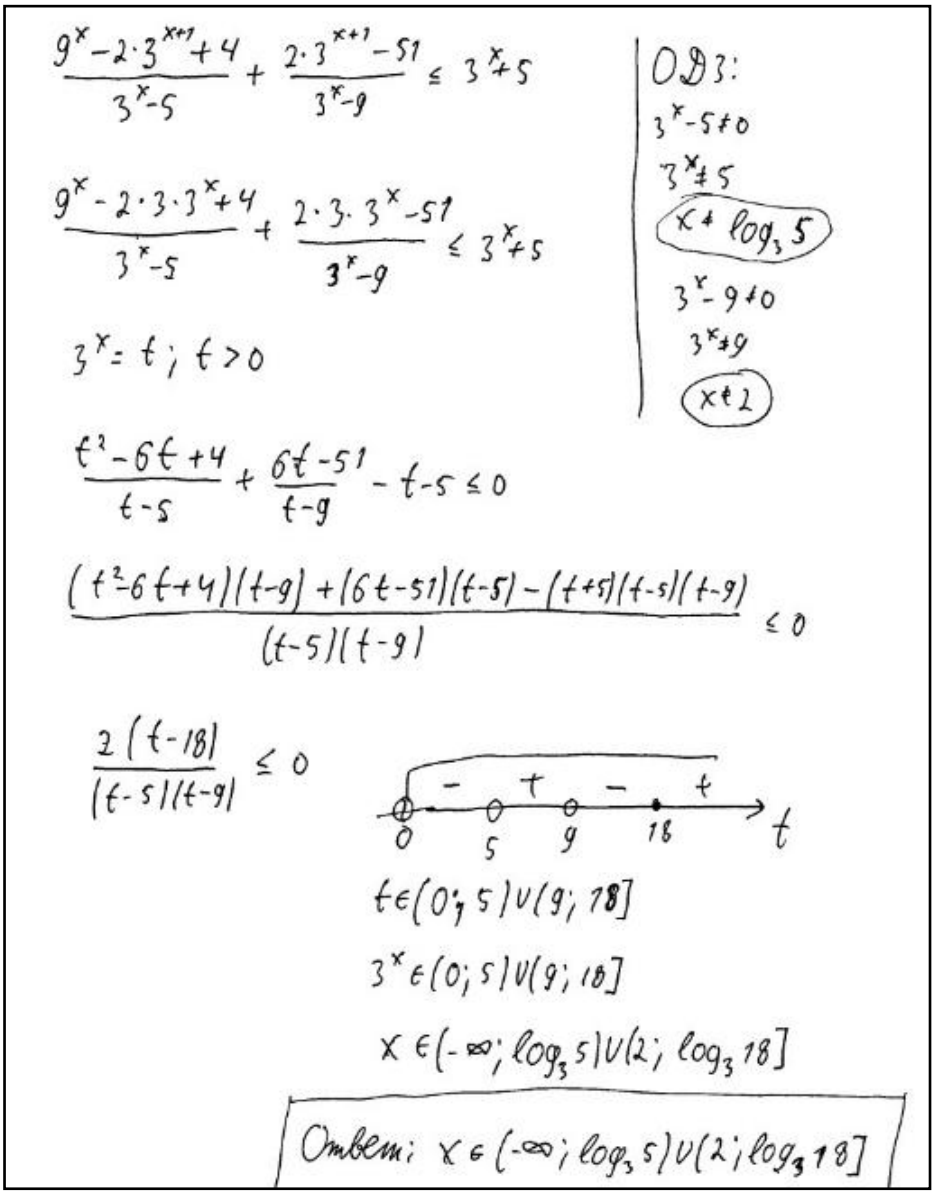


Рисунок 32

Комментарий.

Ответ неверный. При преобразовании числителя допущена вычислительная ошибка, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.

Оценка эксперта: 1 балл.

Пример 9.

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3\left(x^2-3x+2\right)-\log_3(x+4)$.

Ответ: $[-3;1)$.

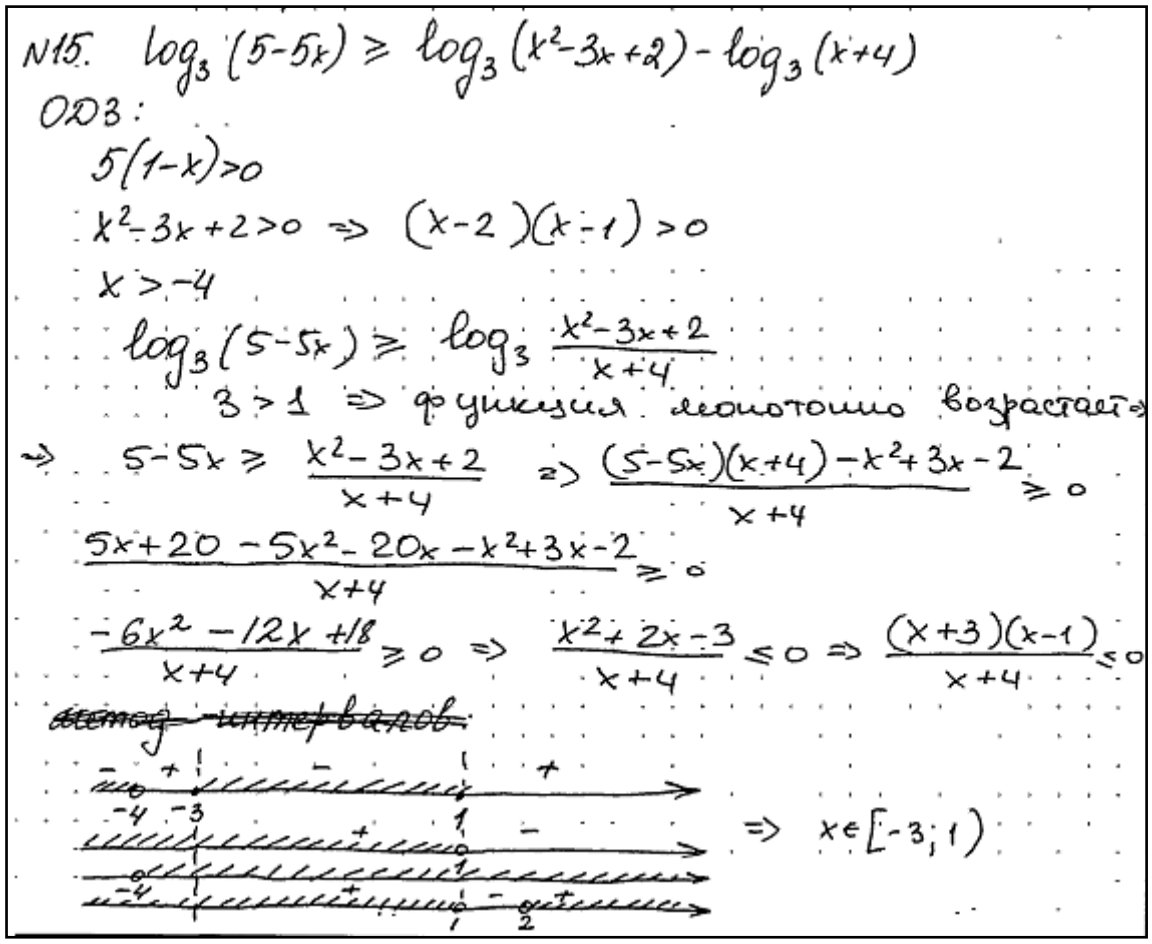


Рисунок 33

***Комментарий*.**

Обоснованно получен верный ответ.

Оценка эксперта: 2 балла.

Пример 10.

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3\left(x^2-3x+2\right) - \log_3(x+4)$.

Ответ: $[-3;1)$.

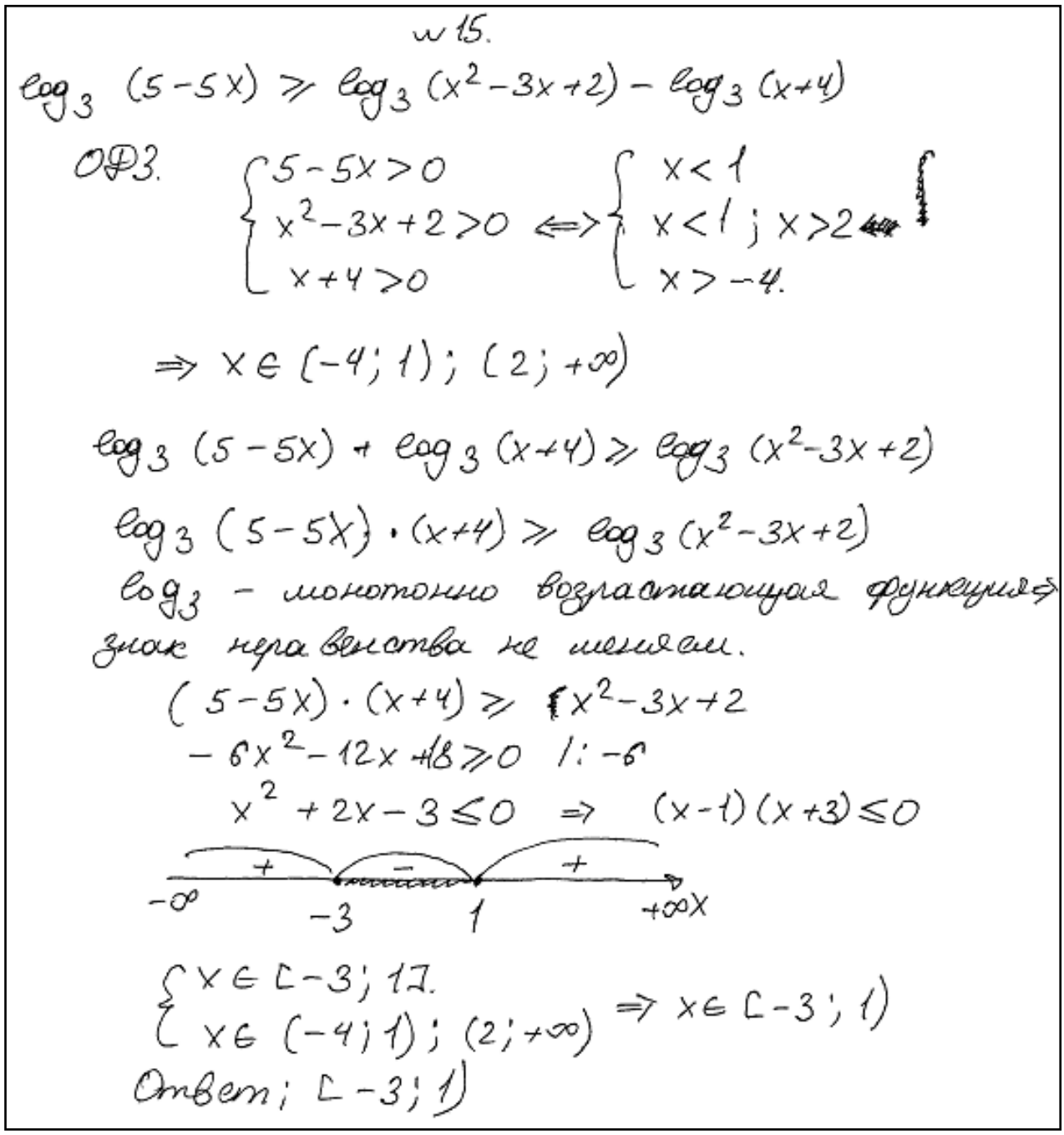


Рисунок 34

***Комментарий*.**

Система неравенств решена неверно (не вычислительная ошибка).

Оценка эксперта: 0 баллов.

Это задание решают преимущественно экзаменуемые с высоким и средним уровнями подготовки, а слабо подготовленные участники к этому заданию не приступают. Ошибки в выполнении задания 15 свидетельствуют о существующей проблеме в подготовке заметной доли выпускников – несформированности умения решать не только логарифмические неравенства, но и неравенства вообще. Основанием для этого вывода стали выявленные ошибки: неумение решать квадратные, дробно-рациональные неравенства; неумение находить и записывать решение системы неравенств; непонимание сути метода интервалов; выполнение неравносильных преобразований. В последние годы, особенно в связи с задачами ЕГЭ, всё большую популярность приобретает так называемый «обобщённый метод интервалов». Название метода стихийно возникло в учительской среде и не является общеупотребительным термином. Суть сводится к решению уравнения и определению знаков функции произвольного вида (не обязательно рациональной) на интервалах знакопостоянства. К сожалению, школьники, даже понимая суть метода, часто не могут грамотно описать последовательность своих действий и теряют логику рассуждений, пытаясь повторить решение по памяти или по аналогии с похожими примерами, которые они решали раньше, и, как следствие, допускают грубые ошибки.

2.3 Рабочая тетрадь «Решение показательных и логарифмических неравенств»

Рабочая тетрадь содержит задания по теме: «Показательные и логарифмические неравенства». Представленные задания можно использовать на факультативных занятиях с целью укрепить полученные умения и навыки при решении показательных и логарифмических неравенств.

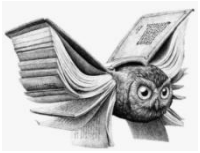
Наличие разноуровневых заданий позволяет преподавателю выстраивать индивидуальные траектории изучения материала учащимися, имеющими различные уровни математической подготовки.

Рабочая тетрадь содержит и задания единого государственного экзамена.

Рабочая тетрадь может быть использована и для самостоятельной работы обучающихся, а также для выполнения домашних работ.

Решение неравенств, содержащих показательную и логарифмическую функции, основано на свойствах этих функций, а также на методах решения показательных и логарифмических уравнений.

Основные обозначения



теоретический материал

задания для самостоятельного решения

1. Показательные неравенства вида

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \ \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

(на месте знака $>$ может стоять любой из знаков $\leqslant$, $\geqslant$, $<$).

Решение неравенств данного вида основано на теоремах:

Теорема 1: Если $a > 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$.

Теорема 2: Если $0 < a < 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Пример 1: Найдите решение неравенства:

$$2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$$

Решение: $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;

$2^{x+2}(1 - 2 - 2^2) > 5^{x+1}(1 - 5)$;

$-5 \cdot 2^{x+2} > -4 \cdot 5^{x+1}$,

$-5 \cdot 4 \cdot 2^x > -4 \cdot 5 \cdot 5^x$,

$2^x < 5^x$,

$\left(\frac{2}{5}\right)^x < 1^0$,

Т.к. $0 < \frac{2}{5} < 1$, то по теореме 2 имеем $x > 0$.

Ответ: $x > 0$.

Пример 2: Найдите решение неравенства: $36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0$.

Решение: $36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0 | : 9^x \neq 0$,

$\left(\frac{36}{9}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{18}{9}\right)^x - 8 > 0$,

$4^x - 2 \cdot 2^x - 8 > 0$,

Пусть $2^x = t, \ t > 0$. Имеем: $t^2 - 2t - 8 > 0$.

Найдём корни уравнения $t^2 - 2t - 8 = 0$.

$D = \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)} = \sqrt{4 + 32} = 6$.

$t_1 = \frac{2-6}{2\cdot 1} = -2$ или $t_2 = \frac{2+6}{2\cdot 1} = 4.$

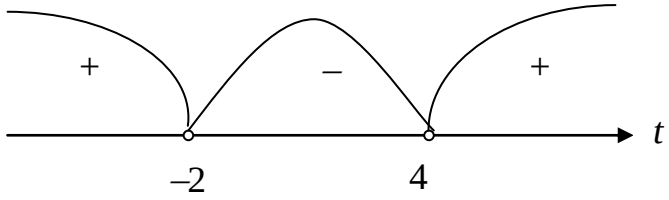


Рисунок 35

Таким образом, решением уравнения $t^2 - 2t - 8 > 0$ является объединение интервалов $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$. Т.к. по условию замены $t > 0$, то $t \in (4; +\infty)$.

Производим обратную замену: $2^x > 4$,

$$2^x > 2^2.$$

Т.к. $2 > 0$, то по теореме 1 имеем $x > 2$.

Ответ: $x > 2$.

Пример 3: Найдите решение неравенства: $\frac{1}{3^x+5} < \frac{1}{3^{x+1}-1}$.

Решение: Произведём замену переменной. Пусть $3^x = t,\ t > 0$. Имеем:

$\frac{1}{t+5} < \frac{1}{3t-1}$;

$\frac{1}{t+5} - \frac{1}{3t-1} < 0;$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$\frac{3t-1-t-5}{(t+5)(3t-1)} < 0;$

$\frac{2t-6}{(t+5)(3t-1)} < 0;$

Нанесём критические точки на числовой луч.

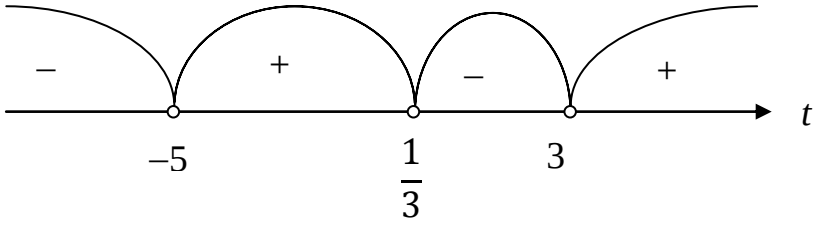


Рисунок 36

Получаем, что $t \in (-\infty; -5) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Т.к. по условию замены $t > 0$, то $t \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

$$\begin{cases} 3^x > \frac{1}{3}, \\ 3^x < 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > 3^{-1}, \\ 3^x < 3^1. \end{cases}$$

По теореме 1 получим $\begin{cases} x > -1, \\ x < 1, \end{cases}$ или $x \in (-1; 1)$.

Ответ: $x \in (-1; 1)$.

Пример 4: Найдите решение неравенства: $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

Решение: Представим 10^x как произведение $10^x = 5^x \cdot 2^x$:

$25 \cdot 2^x - 5^x \cdot 2^x + 5^x > 25;$

$25 \cdot 2^x - 5^x \cdot 2^x + 5^x - 25 > 0.$

Сгруппируем следующим образом:

$(25 \cdot 2^x - 25) + (5^x - 5^x \cdot 2^x) > 0;$

$25 \cdot (2^x - 1) + 5^{x \cdot}(1 - 2^x) > 0;$

$25 \cdot (2^x - 1) - 5^{x \cdot}(2^x - 1) > 0.$

Вынесем скобку за скобку:

$(2^x - 1) \cdot (25 - 5^x) > 0;$

Учитывая, что произведение может быть больше 0 тогда и только тогда, когда оба множителя имеют одинаковый знак. Решим две системы:

$$\begin{cases} 2^x - 1 > 0, \\ 25 - 5^x > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2^x - 1 < 0, \\ 25 - 5^x < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x > 1, \\ 25 > 5^x, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2^x < 1, \\ 25 < 5^x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x > 2^0, \\ 5^2 > 5^x, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2^x < 2^0, \\ 5^2 < 5^x. \end{cases}$$

Применяя теорему 1, получим:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 2 > x, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 0, \\ 2 < x. \end{cases}$$

Решением первой системы является интервал $(0; 2)$.

Вторая система неравенств не имеет решений.

Ответ: $x \in (0; 2)$.

Пример 5: Найдите решение неравенства: $(2x-1)^x \geq (2x-1)^{x^2-2}$.

Основание показательной функции может быть как больше 1, так и находиться в интервале от 0 до 1. Соответственно, могут быть применены обе теоремы. Решим две системы:

I) $\begin{cases} 2x-1>1, \\ x \geq x^2-2, \end{cases}$ или II) $\begin{cases} 0<2x-1<1, \\ x \leq x^2-2, \end{cases}$

Решим первую систему: $\begin{cases} 2x-1>1, \\ x \geq x^2-2. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x>1+1, \\ x^2-x-2 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>2, \\ x^2-x-2 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x^2-x-2 \leq 0. \end{cases}$$

Решая второе неравенство системы с применением теоремы Виета, получим $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

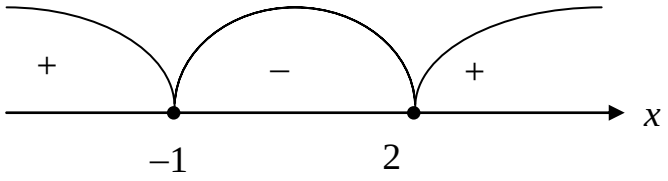


Рисунок 37

Решением второго уравнения системы является отрезок $[-1; 2]$.

Отложим на одном числовом луче оба интервала:

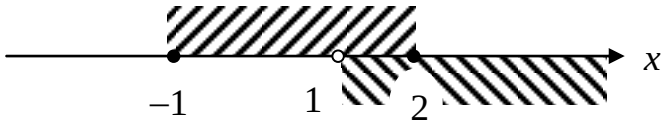


Рисунок 38

Получаем, что $x \in (1; 2]$.

Решим вторую систему $\begin{cases} 0<2x-1<1, \\ x \leq x^2-2. \end{cases}$

$$\begin{cases} 1<2x<2, \\ x^2-x-2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}<x<1, \\ x^2-x-2 \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что решением второго неравенства системы является объединение промежутков $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Нанесем на числовой луч решения обоих неравенств второй системы:

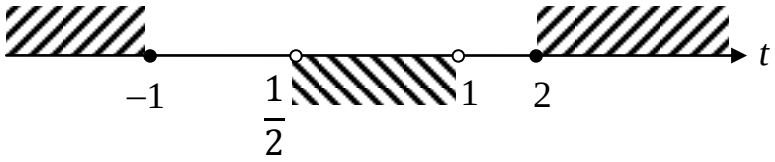


Рисунок 39

Получаем, что вторая система неравенств не имеет решения.

Ответ: $x \in (1; 2]$.

Пример 6: Найдите решение неравенства:

$$\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}^{x-\sqrt{x}} > \left(3 - \sqrt{5}\right)^{x+\sqrt{x}}.$$

Решение: Учитывая, что

$$\left(3 - \sqrt{5}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5},$$

Запишем неравенство в виде:

$$\sqrt{\left(3 - \sqrt{5}\right)^2}^{x-\sqrt{x}} > \left(3 - \sqrt{5}\right)^{x+\sqrt{x}},$$

$$\left|3 - \sqrt{5}\right|^{x-\sqrt{x}} > \left(3 - \sqrt{5}\right)^{x+\sqrt{x}}.$$

Раскроем модуль. Оценим $3 - \sqrt{5}$? 0;

$$3 \ ? \ \sqrt{5};$$

$$3^2 \ ? \ \sqrt{5}^2;$$

$$9 \ ? \ 5.$$

Очевидно, что $9 > 5$, следовательно, $3 - \sqrt{5} > 0$, а значит

$$\left|3 - \sqrt{5}\right| = 3 - \sqrt{5}.$$

Тогда, $\left(3 - \sqrt{5}\right)^{x-\sqrt{x}} > \left(3 - \sqrt{5}\right)^{x+\sqrt{x}}$.

Сравним $\left(3 - \sqrt{5}\right)$ с 1.

$$3 - \sqrt{5} \ ? \ 1;$$

$$3-\sqrt{5}-1\ ?\ 0;$$

$$2\ ?\ \sqrt{5};$$

$$2^2\ ?\ \sqrt{5}^2;$$

$$4\ ?\ 5.$$

Т.к. $4<5$, то $\left(3-\sqrt{5}\right)<1$. Т.о. имеем $0<\left(3-\sqrt{5}\right)<1$.

Применим теорему 2. Получим:

$x-\sqrt{x}<x+\sqrt{x};$

$x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}<0;$

$-2\sqrt{x}<0;$

$2\sqrt{x}>0;$

$\sqrt{x}>0;$

$x>0.$

Ответ: $x>0$.

Пример 7: Найдите решение неравенства: $\frac{2^{2+\sqrt{x-1}}-24}{2^{1+\sqrt{x-1}}-8}>1.$

Решение: Пусть $2^{\sqrt{x-1}}=y,\ \ y>0.$

$\frac{2^2\cdot 2^{\sqrt{x-1}}-24}{2^1\cdot 2^{\sqrt{x-1}}-8}>1;$

$\frac{4y-24}{2y-8}>1;$

$\frac{4y-24}{2y-8}-1>0;$

$\frac{4y-24-2y+8}{2y-8}>0;$

$\frac{2y-16}{2y-8}>0;\ |:2\neq 0;$

$\frac{y-8}{y-4}>0;$

Применим метод интервалов.

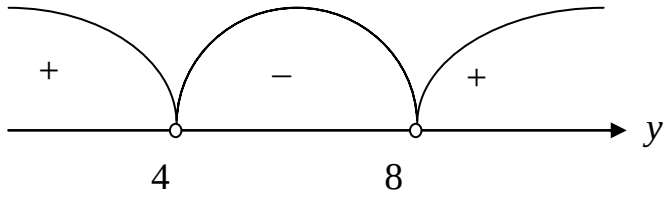


Рисунок 40

Получаем $y\in(-\infty;4)\cup(8;+\infty)$.

По условию замены $y > 0$, тогда в итоге $y \in (0; 4) \cup (8; +\infty)$.

Произведём обратную замену:

$0 < 2^{\sqrt{x-1}} < 4$ или $2^{\sqrt{x-1}} > 8$.

Т.к. a^x всегда больше 0, имеем:

$2^{\sqrt{x-1}} < 4$ или $2^{\sqrt{x-1}} > 8$.

$2^{\sqrt{x-1}} < 2^2$ или $2^{\sqrt{x-1}} > 2^3$.

Т.к. $2 > 1$, применим теорему 1.

$\sqrt{x-1} < 2$ или $\sqrt{x-1} > 3$.

$\sqrt{x-1}^2 < 2^2$ или $\sqrt{x-1}^2 > 3^2$.

Перейдем к системам

$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-1 < 4, \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-1 > 9, \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 1, \\ x < 4+1, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geq 1, \\ x > 9+1, \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 1, \\ x < 5, \end{cases}$ или $\begin{cases} x \geq 1, \\ x > 10. \end{cases}$

Решением первой системы является промежуток $x \in [1;\ 5)$.

Решением первой системы является промежуток $x \in (10; +\infty)$.

Ответ: $x \in [1;\ 5) \cup (10; +\infty)$.

Пример 8: Найдите решение неравенства: $(x-2)^{x^3-x} > (x-2)^x$.

Решение:

Основание показательной функции может быть как больше 1, так и находиться в интервале от 0 до 1. Соответственно, могут быть применены обе теоремы. Решим две системы:

I) $\begin{cases} x-2 > 1, \\ x^3 - x > x, \end{cases}$ или II) $\begin{cases} 0 < x-2 < 1, \\ x^3 - x < x, \end{cases}$

Решим первую систему.

$\begin{cases} x > 1+2, \\ x^3 - x - x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x^3 - 2x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x \cdot (x^2 - 2) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x \cdot (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0. \end{cases}$$

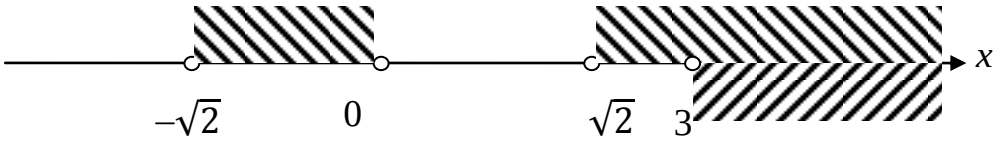


Рисунок 41

Решением первой системы является $x \in (3; +\infty)$.

Решим вторую систему.

$$\begin{cases} 0 < x - 2 < 1, \\ x^3 - x < x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x^3 - 2x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x \cdot (x^2 - 2) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x \cdot (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0. \end{cases}$$

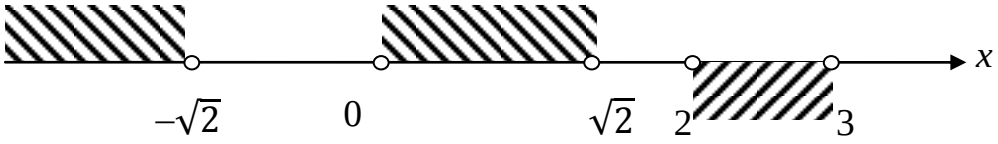


Рисунок 42

Вторая система неравенств не имеет решений.

Ответ: $x \in (3; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. $2^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}$.
2. $2^{2+x} - 2^{2-x} > 15$.
3. $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$.
4. $3^{-x-1} \cdot 4^{-x-1} > 12 \cdot (144^{2x-1})^2$.
5. $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1$.
6. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} > 6{,}25$.
7. $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$.
8. $0{,}008^x + 5^{1-3x} + 0{,}04^{\frac{3}{2}(x+1)} \leq 30{,}04$.
9. $2 \cdot 3^x + 6 \cdot 7^{x-1} < 7^x + 5 \cdot 3^{x-3}$.
10. $\frac{1}{125} \cdot 5^{-2x^2} \geq 5^{5x}$.

2. Логарифмические неравенства вида

$$log_a f(x) > log_a g(x), \ \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

(на месте знака $>$ может стоять любой из знаков $\leqslant$, $\geqslant$, $<$).

Решение неравенств данного вида основано на теоремах:

Теорема 1: Если $a > 1$, то $log_a f(x) > log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 2: Если $0 < a < 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \quad (2)$$

Замечание: а) в системе (1) можно опустить первое неравенство, т.к. оно следует из второго и третьего, а в системе (2) можно опустить второе неравенство.

б) первыми двумя неравенствами систем (1) и (2) задается область определения неравенства.

в) при решении логарифмических неравенств, как показывает практика, нахождение области определения заданного неравенства в большинстве случаев нецелесообразно. Обычно условия, задающие область определения неравенства, подключают к тому неравенству, которое является следствием заданного логарифмического неравенства, и решают затем полученную систему.

Пример 1: Найдите решение неравенства:

$$log_{27}(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) \geq log_3(x^2 - 9) - 4.$$

Решение: Т.к. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$, тогда

$$log_{27}(x - 3)^3 \geq log_3(x^2 - 9) - 4.$$

Составим систему:

$$\begin{cases} (x-3)^3 > 0, \\ x^2 - 9 > 0, \\ 3 \cdot log_{3^3}(x-3) \geq log_3(x^2-9) - 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ (x-3)(x+3) > 0, \\ 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot log_3(x-3) \geq log_3(x^2-9) - 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ (x-3)(x+3) > 0, \\ log_3(x-3) \geq log_3\big((x-3)(x+3)\big) - 4, \end{cases}$$

Для решения второго неравенства системы воспользуемся методом интервалов.

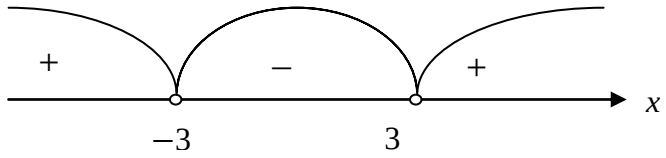


Рисунок 43

Решением второго неравенства системы является

$$x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$$

Очевидно, что решение первого неравенства системы включено в решение второго неравенства системы. Т.о. общим решением первого и второго неравенств системы является интервал $x \in (3; +\infty)$.

Решим отдельно третье неравенство системы.

$$log_3(x-3) \geq log_3\big((x-3)(x+3)\big) - 4$$

$$log_3(x-3) \geq log_3(x-3) + log_3(x+3) - 4$$

$$log_3(x-3) - log_3(x-3) - log_3(x+3) \geq -4$$

$$-log_3(x+3) \geq -4$$

$$log_3(x+3) \leq 4$$

$$log_3(x+3) \leq log_3 3^4$$

$$x + 3 \leq 3^4$$

$$x + 3 \leq 81$$

$$x \leq 78$$

Очевидно, что решением системы неравенств будет являться пересечение двух интервалов $(3;+\infty)$ и $(-\infty;78]$.

Рисунок 44

Ответ: $x \in (3;78]$.

Пример 2: Найдите решение неравенства:

$$log_3(x+7)+\frac{1}{6}log_3(x+1)^6 \geq 2.$$

Решение: Составим систему:

$$\begin{cases} x+7>0, \\ (x+1)^6>0, \\ log_3(x+7)+\dfrac{1}{6}\cdot 6\cdot log_3|x+1| \geq log_3 3^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-7, \\ (x+1)^6>0, \\ log_3(x+7)+log_3|x+1| \geq log_3 3^2. \end{cases}$$

Т.к. $t^6>0$ при любом $t \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} x>-7, \\ x+1 \neq 0, \\ log_3(x+7)+log_3|x+1| \geq log_3 3^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-7, \\ x \neq -1, \\ log_3(x+7)+log_3|x+1| \geq log_3 3^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-7, \\ x \neq -1, \\ log_3(x+7)+log_3|x+1| \geq log_3 3^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-7, \\ x \neq -1, \\ log_3\big((x+7)\cdot|x+1|\big) \geq log_3 3^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-7, \\ x \neq -1, \\ (x+7)\cdot|x+1| \geq 3^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -7, \\ x \neq -1, \\ (x+7)\cdot|x+1| \geq 9, \end{cases}$$

Раскроем модуль и решим уже две системы:

I) $$\begin{cases} x > -7, \\ x \neq -1, \\ x+1 \geq 0, \\ (x+7)\cdot(x+1) \geq 9, \end{cases}$$

II) $$\begin{cases} x > -7, \\ x \neq -1, \\ x+1 < 0, \\ (x+7)\cdot(-x-1) \geq 9, \end{cases}$$

Решим систему (I).

$$\begin{cases} x > -7, \\ x \neq -1, \\ x \geq -1, \\ (x+7)\cdot(x+1) - 9 \geq 0, \end{cases}$$

Решим отдельно 4-ое неравенство системы.

$$x^2 + 7x + x + 7 - 9 \geq 0$$

$$x^2 + 8x - 2 \geq 0$$

$$D = \sqrt{8^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)} = \sqrt{64+8} = \sqrt{72} = \sqrt{6\cdot 6\cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

$x_1 = \frac{-8-6\sqrt{2}}{2\cdot 1} = -4-3\sqrt{2}$ или $x_2 = \frac{-8+6\sqrt{2}}{2\cdot 1} = -4+3\sqrt{2}$

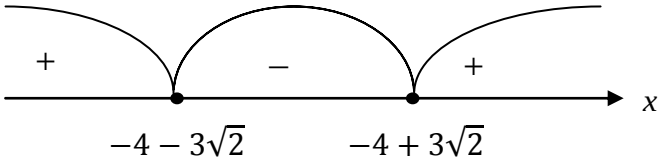


Рисунок 45

$$x \in (-\infty; -4-3\sqrt{2}] \cup [-4+3\sqrt{2}; +\infty).$$

Вернёмся к системе.

$$\begin{cases} x > -7, \\ x \neq -1, \\ x \geq -1, \\ x \leq -4-3\sqrt{2} \text{ или } x \geq -4+3\sqrt{2}. \end{cases}$$

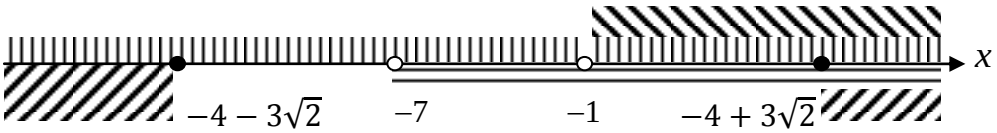


Рисунок 46

Получаем, что $x \in \left[-4+3\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Решим систему (II).

$$\begin{cases} x > -7, \\ x \neq -1, \\ x < -1, \\ (x+7)\cdot(-x-1)-9 \geq 0. \end{cases}$$

Решим 4-е неравенство системы отдельно.

$$-x^2-7x-x-7-9 \geq 0,$$

$$x^2+8x+16 \leq 0,$$

$$(x+4)^2 \leq 0.$$

Т.к. $t^2 \leq 0$ тогда и только тогда, когда $t = 0$, имеем:

$$x+4=0,$$

$$x=-4.$$

Вернёмся к системе.

$$\begin{cases} x > -7, \\ x \neq -1, \\ x < -1, \\ x = -4. \end{cases}$$

Очевидно, что решением данной системы является $x = -4$.

Ответ: $x \in \{-4\} \cup \left[-4+3\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Пример 3: Найдите решение неравенства:

$$9 \cdot log_{12}(x^2-3x-4) \leq 10 + log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}.$$

Решение: $log_{12}(x^2-3x-4)^9 \leq log_{12}12^{10} + log_{12}\frac{(x+1)^9}{x-4}$.

$$log_{12}(x^2-3x-4)^9 \leq log_{12}\left(12^{10}\cdot\frac{(x+1)^9}{x-4}\right).$$

Составим систему:

$$\begin{cases} (x^2-3x-4)^9 > 0, \\ 12^{10} \cdot \dfrac{(x+1)^9}{x-4} > 0, \\ (x^2-3x-4)^9 \le 12^{10} \cdot \dfrac{(x+1)^9}{x-4}, \end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы по отдельности.

Решим первое неравенство.

$(x^2-3x-4)^9 > 0,$

$x^2-3x-4 > 0,$

$(x+1)(x-4) > 0,$

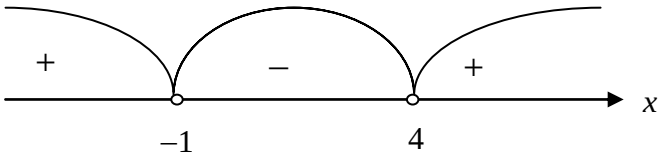


Рисунок 47

$x \in (-\infty;-1) \cup (4;+\infty).$

Решим второе неравенство.

$12^{10} \cdot \frac{(x+1)^9}{x-4} > 0,$

$\frac{(x+1)^9}{x-4} > 0,$

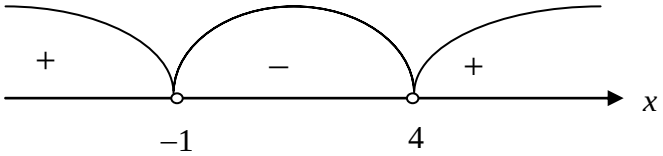


Рисунок 48

$x \in (-\infty;-1) \cup (4;+\infty).$

Решим третье неравенство.

$(x^2-3x-4)^9 \le 12^{10} \cdot \frac{(x+1)^9}{x-4},$

$(x+1)^9(x-4)^9 \le 12^{10} \cdot \frac{(x+1)^9}{x-4},$

$(x+1)^9(x-4)^9 - 12^{10} \cdot \frac{(x+1)^9}{x-4} \le 0,$

$(x+1)^9\left((x-4)^9 - 12^{10} \cdot \frac{1}{x-4}\right) \le 0,$

$(x+1)^9 \cdot \frac{(x-4)^{10}-12^{10}}{x-4} \leq 0,$

$\frac{(x+1)^9 \cdot ((x-4)^{10}-12^{10})}{x-4} \leq 0,$

Решим уравнение: $(x-4)^{10} - 12^{10} = 0,$

$(x-4)^{10} = 12^{10},$

$x - 4 = 12$ или $x - 4 = -12,$

$x = 16$ или $x = -8.$

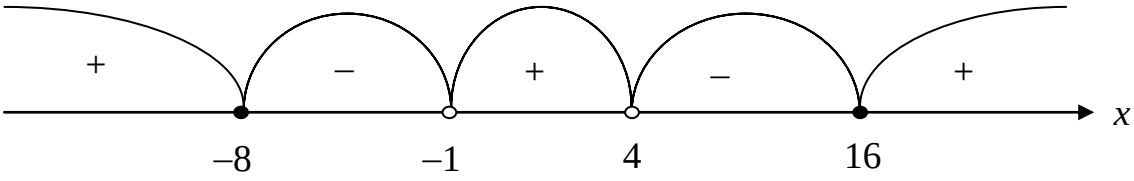


Рисунок 49

$x \in [-8; -1) \cup (4; 16].$

Вернёмся к системе.

$$\begin{cases} x < -1 \text{ или } x > 4, \\ x < -1 \text{ или } x > 4, \\ -8 \leq x < -1 \text{ или } 4 < x \leq 16. \end{cases}$$

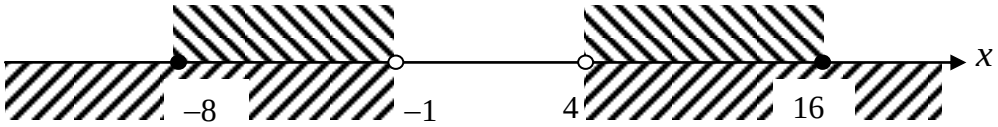


Рисунок 50

Ответ: $x \in [-8; -1) \cup (4; 16].$

Пример 4: Найдите решение неравенства:

$$log_3(log_2(2 - log_4 x) - 1) < 1.$$

Решение: Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 2 - log_4 x > 0, \\ log_2(2 - log_4 x) - 1 > 0, \\ log_3(log_2(2 - log_4 x) - 1) < 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0, \\ 2>log_4 x, \\ log_2(2-log_4 x)>1, \\ log_3(log_2(2-log_4 x)-1)<log_3 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0, \\ log_4 x<log_4 4^2, \\ log_2(2-log_4 x)>log_2 2, \\ log_2(2-log_4 x)-1<3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<4^2, \\ 2-log_4 x>2, \\ log_2(2-log_4 x)<4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<16, \\ log_4 x<0, \\ log_2(2-log_4 x)<log_2 2^4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<16, \\ log_4 x<log_4 1, \\ log_2(2-log_4 x)<log_2 16, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<16, \\ x<1, \\ 2-log_4 x<16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<16, \\ x<1, \\ -log_4 x<14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<16, \\ x<1, \\ log_4 x>log_4 4^{-14}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<16, \\ x<1, \\ x>4^{-14}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<16, \\ x<1, \\ x>2^{-28}. \end{cases}$$

Рисунок 51

Ответ: $x \in (2^{-28}; 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. $2log_2 \frac{x-1}{x+1,2} + log_2(x+1,2)^2 \geq 2,$
2. $log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2,$
3. $log_2 log_3 \frac{x+1}{x-1} < log_{\frac{1}{2}} log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1},$
4. $\frac{3x^2-16x+21}{log_{0,3}(x^2+4)} < 0,$
5. $log_2 log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) < 1,$
6. $log_2\big((x-3)(x+2)\big) + log_{\frac{1}{2}}(x-3) < -log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 3.$

3.Логарифмические неравенства с переменным основанием

Рассмотрим неравенство $log_{a(x)}f(x) \geq log_{a(x)}g(x)$

(на месте знака $\geqslant$ может стоять любой из знаков $\leqslant$, $>$, $<$).

Найти решение неравенства можно при помощи двух методов.

I) *С помощью перехода к системе неравенств*:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) \geq g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) \leq g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

II) *С помощью метода рационализации*:

Рассмотрим функцию $y = log_2 x$.

Если $a > b$, то $log_2 a > log_2 b$ (функция возрастает),

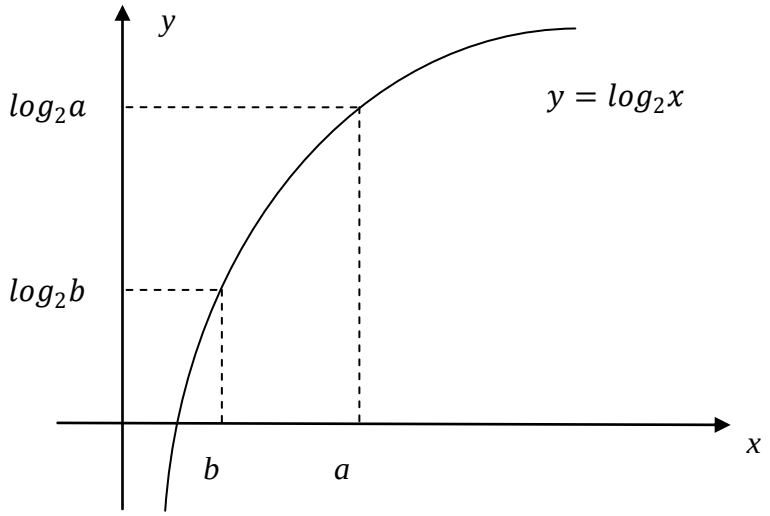


Рисунок 52

следовательно, $log_2 a - log_2 b > 0$ при $\begin{cases} a - b > 0, \\ a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$

Пример 1: Найдите решение неравенства: $log_x \left(\frac{3x-1}{x^2+1}\right) > 0$.

Решение: Для решения данного неравенства воспользуемся методом перехода к системе неравенств. Учитывая, что $log_x 1 = 0$, получим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 1, \\ 1 > 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} < 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Найдём решение первой системы:

$$\begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 1, \\ 1 > 0, \end{cases}$$

Решим неравенство $\frac{3x-1}{x^2+1} > 1$.

$\frac{3x-1}{x^2+1} - 1 > 0;$

$\frac{3x-1-x^2-1}{x^2+1} > 0.$

Т.к. $x^2 + 1 > 0$ всегда, значит для решения данного неравенства достаточно решить следующее неравенство: $3x - 1 - x^2 - 1 > 0$.

$x^2 - 3x + 2 < 0.$

$x_1 = 1$ или $x_2 = 2$

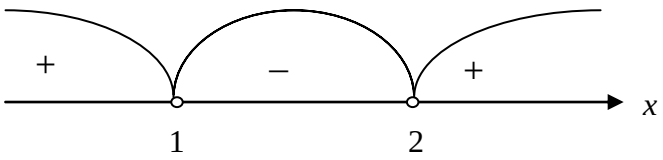


Рисунок 53

$x \in (1; 2).$

Вернёмся к системе: $\begin{cases} x > 1, \\ 1 < x < 2, \\ 1 > 0. \end{cases}$

Т.к. 1 > 0 всегда, значит для поиска решения системы достаточно нанести на числовой луч два интервала.

Рисунок 54

Решением первой системы является интервал $x \in (1; 2)$.

Найдём решение второй системы: $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} < 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 0. \end{cases}$

Из поиска решения первой системы, очевидно, что решение неравенства $\frac{3x-1}{x^2+1} < 1$ является промежуток $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Осталось найти решение неравенства: $\frac{3x-1}{x^2+1} > 0$.

Т.к. $x^2 + 1 > 0$ всегда, значит для решения данного неравенства достаточно решить следующее неравенство: $3x - 1 > 0$.

$3x > 1$,

$x > \frac{1}{3}$.

Вернёмся к системе: $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x < 1 \text{ или } x > 2, \\ x > \frac{1}{3}. \end{cases}$

Рисунок 55

$x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$.

Пример 2: Найдите решение неравенства: $log_{2x+4}(x^2-3x+10) \geq 1$.

Решение методом перехода к системе неравенств.

Положим, что $1 = log_{2x+4}(2x+4)$, где $2x+4>0$ и $2x+4 \neq 1$, получим следующую систему:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2x+4>0, \\ 2x+4 \neq 1, \\ 2x+4>1, \\ x^2-3x+10 \geq 2x+4, \\ 2x+4>0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 2x+4>0, \\ 2x+4 \neq 1, \\ 0<2x+4<1, \\ x^2-3x+10 \leq 2x+4, \\ x^2-3x+10>0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Найдём решение первой системы $\begin{cases} 2x+4>0, \\ 2x+4 \neq 1, \\ 2x+4>1, \\ x^2-3x+10 \geq 2x+4, \\ 2x+4>0. \end{cases}$

Очевидно, что первые два условия системы полностью покрываются третьим неравенством. Следовательно, для решения первой системы достаточно найти решение следующей системы:

$$\begin{cases} 2x+4>1, \\ x^2-3x+10 \geq 2x+4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x>-3, \\ x^2-3x+10-2x-4 \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-1\frac{1}{2}, \\ x^2-5x+6 \geq 0, \end{cases}$$

Найдём решение неравенства $x^2-5x+6 \geq 0$.

Найдём корни уравнения $x^2-5x+6=0$.

$$x_1 = 2 \quad \text{и} \quad x_2 = 3$$

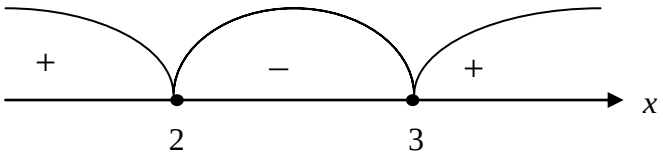


Рисунок 56

$x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$.

Нанесём решения неравенств системы на один числовой луч.

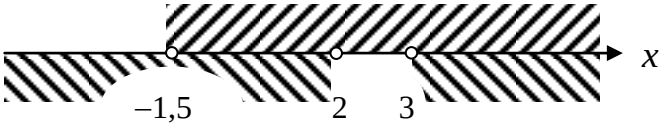


Рисунок 57

Решением первой системы является промежуток:

$x \in (-1{,}5; 2] \cup [3; +\infty)$.

Найдём решение второй системы: $\begin{cases} 2x + 4 > 0, \\ 2x + 4 \neq 1, \\ 0 < 2x + 4 < 1, \\ x^2 - 3x + 10 \leq 2x + 4, \\ x^2 - 3x + 10 > 0. \end{cases}$

Очевидно, что решения первых трех неравенств системы пересекаются по решению неравенства $0 < 2x + 4 < 1$, а именно $-2 < x < -1{,}5$.

$$\begin{cases} -2 < x < -1{,}5, \\ x^2 - 3x + 10 \leq 2x + 4, \\ x^2 - 3x + 10 > 0. \end{cases}$$

Из поиска решения первой системы, очевидно, что решением неравенства $x^2 - 3x + 10 \leq 2x + 4$ является отрезок $x \in [2; 3]$.

Найдём решение неравенства: $x^2 - 3x + 10 > 0$.

Найдём корни уравнения $x^2 - 3x + 10 = 0$.

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9 - 40 = -36 < 0$.

Следовательно, функция $y = x^2 - 3x + 10$, ветви которой направлены вверх, не пересекает ось абсцисс ни в одной точке, а неравенство $x^2 - 3x + 10 > 0$ верно при любом значении *x*.

Вернёмся к системе: $\begin{cases} -2 < x < -1{,}5, \\ 2 \le x \le 3, \\ x - \text{любое число.} \end{cases}$

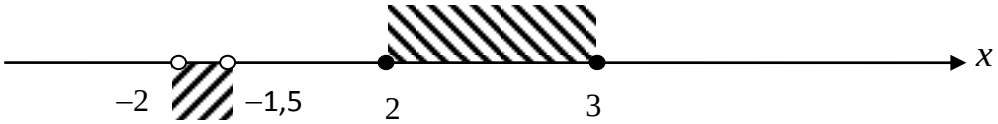


Рисунок 58

Вторая система неравенств не имеет решения.

Ответ: $x \in (-1{,}5; 2] \cup [3; +\infty)$.

Решение методом рационализации.

$$log_{2x+4}(x^2 - 3x + 10) \ge 1$$

Перейдем к другому основанию:

$$\frac{log_2(x^2 - 3x + 10)}{log_2(2x + 4)} - 1 \ge 0$$

$$\frac{log_2(x^2 - 3x + 10) - log_2(2x + 4)}{log_2(2x + 4) - 0} \ge 0$$

$$\frac{log_2(x^2 - 3x + 10) - log_2(2x + 4)}{log_2(2x + 4) - log_2 1} \ge 0$$

Составим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 10 - (2x + 4)}{2x + 4 - 1} \ge 0, \\ x^2 - 3x + 10 > 0, \\ 2x + 4 > 0, \\ 2x + 4 - 1 \ne 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 10 - 2x - 4}{2x + 3} \ge 0, \\ x^2 - 3x + 10 > 0, \\ 2x > -4, \\ 2x + 3 \ne 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x + 3} \ge 0, \\ x^2 - 3x + 10 > 0, \\ x > -2, \\ 2x \ne -3, \end{cases}$$

Найдём решения неравенств системы по отдельности.

Найдём решение первого неравенства системы.

Пусть $y = \frac{x^2-5x+6}{2x+3}$.

Разложим на множители числитель $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Нанесём критические точки функции на числовую прямую.

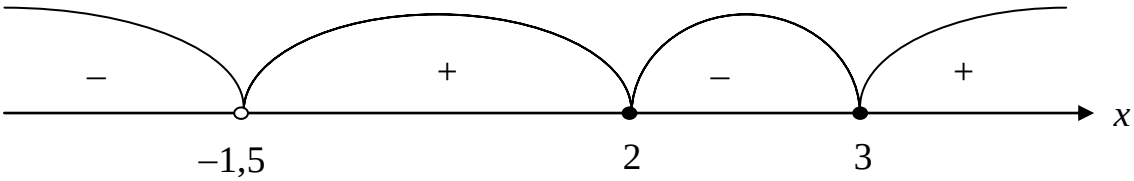


Рисунок 59

Решением первого неравенства системы является:

$$x \in (-1{,}5; 2] \cup [3; +\infty).$$

Найдём решение второго неравенства системы: $x^2 - 3x + 10 > 0$.

Пусть $y = x^2 - 3x + 10$. Найдём критические точки:

$x^2 - 3x + 10 = 0$.

$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9 - 40 = -36 < 0$.

Таким образом, функция, ветви которой направлены вверх, не пересекает ось абсцисс ни в одной точке, а, следовательно, неравенство $x^2 - 3x + 10 > 0$ верно при любом значении *x*.

Решением второго неравенства системы является вся числовая прямая.

Решением четвёртого неравенства системы является: $x \neq -1{,}5$.

Отложим решения каждого неравенства системы на числовой прямой.

Рисунок 60

Ответ: $x \in (-1{,}5; 2] \cup [3; +\infty)$.

Пример 3: Найдите неравенство системы: $log_{\frac{x}{3}}(3x^2 - 2x + 1) \geq 0$.

Найдём решение неравенства двумя способами.

Решение методом перехода к системе неравенств.

Учитывая, что $log_{\frac{x}{3}}1 = 0$, запишем: $log_{\frac{x}{3}}(3x^2 - 2x + 1) \geq log_{\frac{x}{3}}1$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{x}{3} > 1,\\ 3x^2 - 2x + 1 \geq 1,\\ 1 > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}0 < \dfrac{x}{3} < 1,\\ 3x^2 - 2x + 1 \leq 1,\\ 3x^2 - 2x + 1 > 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Найдём решение первой системы.

Решением первого неравенства системы является $x \in (3; +\infty)$.

Решением третьего неравенства является вся числовая прямая, т.к. 1 > 0 при любом *x*.

Найдём решение второго неравенства системы $3x^2 - 2x + 1 \geq 1$.

$3x^2 - 2x \geq 0$;

$x(3x - 2) \geq 0$;

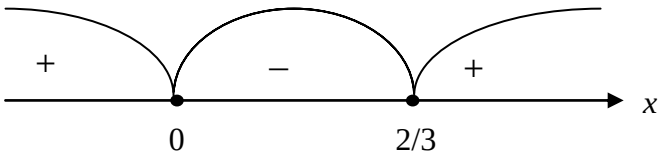


Рисунок 61

Решение второго неравенства системы является промежуток

$$x \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

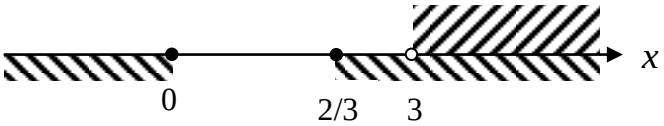


Рисунок 62

Решением первой системы является промежуток $x \in (3; +\infty)$.

Найдём решение второй системы.

Решим первое неравенство: $0 < \frac{x}{3} < 1$.

Решением первого неравенства является промежуток $x \in (0; 3)$.

Из решения первой системы очевидно, что решением второго неравенства второй системы является отрезок $x \in [0; \frac{2}{3}]$.

Найдём решение третьего неравенства второй системы.

$$3x^2 - 2x + 1 > 0$$

Пусть $y = 3x^2 - 2x + 1$. Найдём критические точки функции.

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8 < 0$$

Т.к. функция *y* – квадратичная, и ветви её направлены вверх, получается, что функция не имеет точек пересечения с осью абсцисс.

Значит неравенство верно на всей числовой прямой, т.е. при любом *x*.

Отложим решения каждого неравенства второй системы на числовой прямой.

Рисунок 63

Решением второй системы является промежуток $x \in (0; \frac{2}{3}]$.

Ответ: $x \in (0; \frac{2}{3}] \cup (3; +\infty)$.

Решение методом рационализации.

Перейдём к другому основанию.

$$\frac{log_2(3x^2 - 2x + 1) - 0}{log_2 \frac{x}{3} - 0} \geq 0$$

$$\frac{log_2(3x^2 - 2x + 1) - log_2 1}{log_2 \frac{x}{3} - log_2 1} \geq 0$$

Перейдём к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2-2x+1-1}{\frac{x}{3}-1} \geq 0, \\ 3x^2-2x+1>0, \\ \dfrac{x}{3}>0, \\ \dfrac{x}{3}-1 \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2-2x}{\frac{x}{3}-1} \geq 0, \\ 3x^2-2x+1>0, \\ x>0, \\ x \neq 3, \end{cases}$$

Найдём решение первого неравенства системы.

$$\frac{3x^2-2x}{\frac{x}{3}-1} \geq 0; \ \Big| \cdot \frac{1}{3} > 0$$

$$\frac{3x^2-2x}{3 \cdot \frac{x}{3}-3} \geq 0;$$

$$\frac{x(3x-2)}{x-3} \geq 0;$$

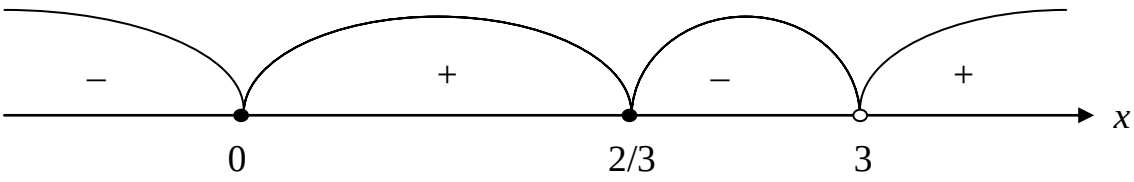


Рисунок 64

Решением первого неравенства системы является промежуток:

$$x \in [0;\frac{2}{3}] \cup (3;+\infty).$$

Найдём решение второго неравенства системы $3x^2-2x+1>0$.

Пусть $y=3x^2-2x+1$ – квадратичная функция, ветви вверх.

Найдём критические точки функции.

$$3x^2-2x+1=0$$

$$D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 = -8 < 0$$

Следовательно, функция не имеет точек пересечения с осью абсцисс, а неравенство верно при любом *x*.

Отложим решения каждого неравенства системы на числовой прямой.

Рисунок 65

Ответ: $x \in (0; \frac{2}{3}] \cup (3; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. $log_{x+1}(x-1) \geq 0,$
2. $log_{x+2}(x^2-2) \geq 2,$
3. $log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4,$
4. $log_{3x-3}3 + log_{(x-1)^2}27 \geq 2,$
5. $log_x \frac{x+3}{x-1} > 1,$
6. $log_{x^2-3}729 > 3.$

Заключение

Выпускная квалификационная работа посвящена разработке рабочей тетради по теме «Решение показательных и логарифмических неравенств». В ходе исследования были решены все поставленные задачи и получены следующие результаты:

1. Изучен теоретический материал по теме «Показательные и логарифмические неравенства в школьном курсе».

2. Проведен анализ этой темы в учебниках алгебры и начала анализа.

3. Рассмотрены основные методы решения показательных и логарифмических неравенств, систематизированы и обобщены основные особенности этой темы.

4. Разработана рабочая тетрадь по теме «Показательные и логарифмические неравенства в школьном курсе».

5. Проведен анализ задач ЕГЭ по теме работы.

Цель работы достигнута, поставленные задачи решены.

Разработанная рабочая тетрадь поможет старшеклассникам самостоятельно овладеть некоторыми приемами решения показательных и логарифмических неравенств, а учителям - планомерно организовать работу по данной теме в классе на уроке или факультативных занятиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый уровень / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева [и др.]. 18-е изд. М. : Просвещение, 2012. 464 с.

2. Барвенов С. А. Методы решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств, систем : учебник для общеобразовательных учреждений / А. И. Азаров, С. А. Барвенов. М. : Аверсэв, 2005. 288 с.

3. Блох А. Методика преподавания математики в средней школе / А. Блох, Е. С. Канин, Е. С. Черкасов [и др.]. М. : Просвещение, 2015. 336 с.

4. Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе, М., 1949.

5. Виленкин Н. Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд, 30-е изд, стер. М. : Мнемозина, 2014. 288 с.

6. Гейдман Б. П. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства / Б. П. Гейдман. М. : МЦНМО, 2013. 185 с.

7. Глухов М. М. Задачник-практикум по алгебре / М. М. Глухов, А. С. Солодовников. М. : Просвещение, 2009. 276 с.

8. Далингер В. А. Математика: логарифмические уравнения и неравенства : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. 51 А. Далингер. 2-е изд., испр. и доп. М. : Издательство Юрайт, 2020. 176 с.

9. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень : типовые экзаменационные варианты : 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. М. : Издательство «Национальное образование», 2022. 224 с. (ЕГЭ. ФИПИ школе). ISBN 978-5-4454-1541-1.

10. Жукова Н. Д. История логарифмов. Различные подходы к определению логарифма // Молодой ученый. 2019. № 18. С. 78-81.

11. Жафяров А. Ж. Профильное обучение математике старшеклассников учебно-дидактический комплекс / А. Ж. Жафяров.− Новосибирск : Сиб. унив., 2003. − 48 с.

12. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын [и др.] ; под ред. А. Н. Колмогорова. 26-е изд. М. : Просвещение, 2018. 384 с.

13. Литвиненко В. Н. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. М. : ABF, 2013.

14. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. : В двух частях. Ч. 1 : Учеб. для общеобразоват. учреждений. / А. Г. Мордкович. 14-е изд. М. : Мнемозина, 2013. 400 с.

15. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа: 11 класс. В 2 ч. Ч. 2 Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / под ред. А. Г. Мордковича. 3-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2013. 264 с.

16. Мерзляк А. Г. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа: 11 класс: методическое

пособие. / Буцко Е. В., Мерзляк А. Г., Номировский Д. А. , Полонский В. Б. [и др.] М. : Вентана-Граф, 2018. 83 с.

17. Никольский С. М. Алгебра и начала анализа: Учеб. Для 10 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, Н.Н. Решетников, М. К. Потапов, А. В. Шевкин. М.: Просвещение, 2009. 383 с.

18. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. 8-е изд. М. : Просвещение, 2009. 464 с.

19. Лаппо Л. Д. ЕГЭ. Математика. Подготовка к ЕГЭ / Л. Д. Лаппо. М. : Издательство «Экзамен», 2017. 120 с.

20. Олехник С. Н. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения / С. Н. Олехник, М. К. Потапов, П. И. Пасиченко. М. : Дрофа, 2015. 53

21. Петрович А. Ю. Логарифмические уравнения и неравенства / А. Ю. Петрович. М. : Подготовительные курсы, 2008. 20 с.

22. Рисберг В. Г. Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений повышенного и высокого уровня сложности. Ч.1 / В. Г. Рисберг. Пермь : Пушка, 2015. 56 с.

23. Сканави М. И. Логарифмические уравнения и неравенства. Полный сборник решений задач для поступающих в вузы / М. И. Сканави. М. : Мир и Образование, 2015. 912 с.

24. Сканави М. И. Элементарная математика / М. И. Сканави, В. В. Зайцев, В. В. Рыжков [и др.]. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1974. 592 с.

25. Смирнова И. М. Профильная модель обучения математике / И. М. Смирнова // Математика в школе. 1997. № 2. С. 30-31.

26. Ященко И. В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / И. В. Ященко [и др.] ; под ред. И. В. Ященко. М. : Издательство «Национальное образование», 2017. 256 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
«21» 09 2023 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студентки Ромашкиной Юлии Николаевны
(ФИО полностью)

Тема работы: «Рабочая тетрадь «Решение показательных и логарифмических неравенств»для подготовки к единому государственному экзамену по математике»

Утверждена приказом по Университету от «26.09» 2023 г. № 0972а10

Срок сдачи студентом законченной работы «07» июня 2024 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение литературы по теме работы	Сентябрь-октябрь 2023	выполнено
2.	Анализ задач ЕГЭ	Ноябрь-декабрь 2023	выполнено
3.	Разбор основных методов решения показательных и логарифмических неравенств	Январь-февраль 2024	выполнено
4.	Содержание рабочей тетради	Март-апрель 2024	выполнено
5.	Оформление работы	Май 2024	выполнено
6.	Подготовка текста выступления и разработка презентации	Май 2024	выполнено

Дата выдачи задания «18» 09 2023 г.

Руководитель _____ _____
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ _____
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Романкиной Юлии
Николаевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Романкина Юлия Николаевна,
Ф.И.О. студента
студент (ка) 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Рабочая тетрадь „Решение показательных и логарифмических неравенств" для подготовки к единому государственному экзамену по математике»,
выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись
06.06.24
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 06.06.24
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР _____ Муравьева Е.Г.
подпись И.О.Ф.

ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе "Антиплагиат.ВУЗ" выпускной квалификационной работы на тему **«Рабочая тетрадь «Решение показательных и логарифмических неравенств» для подготовки к единому государственному экзамену по математике»**

студентки 5 курса **Ромашкиной Юлии Николаевны**

направления подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование"

профиль подготовки "Математика"

Руководитель ВКР Журавлева Е.Г.

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

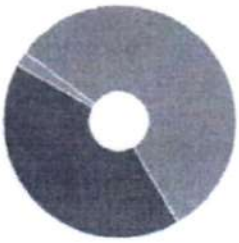
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://pnzgu.antiplagiat.ru

Отчет о проверке

Автор: Журавлева Екатерина Геннадьевна
Название документа: Ромашкина

Проверяющий: Журавлева Екатерина Геннадьевна
Организация: Пензенский государственный университет

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения: 41.23%
Оригинальность: 56.28%
Цитирования: 2.49%
Самоцитирования: 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 90.79% текста документа, исключено из проверки: 9.21% текста документа. Разделы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография, Приложение

Руководитель ВКР 04.06.24 Е.Г. Журавлева

дата, подпись

ОТЗЫВ

РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Рабочая тетрадь «Решение показательных и логарифмических неравенств» для подготовки к единому государственному экзамену по математике»
студентки Ромашкиной Юлии Николаевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»
профиль «Математика», гр. 193ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Ромашкиной Юлии Николаевны посвящена разработке рабочей тетради «Решение показательных и логарифмических неравенств» для подготовки к единому государственному экзамену по математике. Необходимость разработки рабочей тетради связана с тем, что в школьном курсе математики важное место занимает решение показательных и логарифмических неравенств. В зависимости от авторов учебника эта тема изучается в 10 или 11 классе. При решении логарифмических и показательных неравенств развиваются навыки систематизации, логического мышления при выборе правильного метода решения, повышаются творческие и умственные способности. Изучение неравенств такого типа очень важно в школьном курсе математики, т.к. примеры, содержащие показательные и логарифмические неравенства встречаются в заданиях ЕГЭ. Для выполнения этих заданий недостаточно прочного усвоения теоретического содержания школьного курса математики, необходимо также иметь развитое логическое мышление, умение ориентироваться в нестандартных ситуациях, определенные навыки исследовательской работы, достаточно высокий уровень общей математической культуры.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи: проведен анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования; выделены основные методы решения показательных и логарифмических неравенств; проведен анализ заданий ЕГЭ по математике, разработана рабочая тетрадь.

Работа является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован в школе.

Выпускная квалификационная работа Ромашкиной Ю.Н. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным работам и заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель, к.п.н., доцент кафедры
«Математическое образование» Е.Г. Журавлева