

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Формирование исследовательских навыков в области геометрии во
внеурочной деятельности обучающихся»

Студент

А.Рожков 6.05.25 Рожков Артём Сергеевич
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

М.В.Сорокина 6.05.25 Сорокина М. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Е.Г.Журавлева 23.06.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой

В.И.Паньженский 02.06.25 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 5(отл) (протокол заседания ГЭК от 27.06.25 № 16)

Секретарь ГЭК

Е.Г.Журавлева 27.06.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ШКОЛЬНИКОВ.....	6
1.1 Понятие исследовательских способностей и их значение в образовательном процессе.....	6
1.2 Роль геометрии в формировании логического мышления и исследовательских навыков.....	10
1.3 Внеклассная деятельность как средство развития исследовательских способностей.....	14
1.4 Основные виды геометрических задач и их исследовательский потенциал.....	16
1.5 Методы и приемы геометрических рассуждений.....	20
ГЛАВА 2 ОРГАНИЗАЦИЯ ВНЕКЛАССНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО РАЗВИТИЮ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ЧЕРЕЗ ГЕОМЕТРИЮ.....	24
2.1 Теоретический материал исследовательской задачи о теореме Понселе.....	24
2.2 Разработка программы внеклассных мероприятий по геометрии...	42
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	53
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	55

ВВЕДЕНИЕ

Современная система образования ставит перед школой важную задачу - формирование у учащихся исследовательских компетенций, которые включают умение самостоятельно выявлять проблемы, выдвигать гипотезы, анализировать информацию и делать обоснованные выводы. В условиях стремительного развития технологий и увеличения объема доступных знаний эти навыки становятся особенно востребованными, помогая школьникам адаптироваться к быстро меняющемуся миру.

Геометрия как учебный предмет обладает особым потенциалом для развития исследовательского мышления. Ее уникальность заключается в гармоничном сочетании логической строгости математических доказательств с наглядностью пространственных образов. Решение геометрических задач естественным образом включает все этапы исследовательской деятельности: от постановки вопроса через анализ условий к проверке гипотез и формулированию выводов.

Однако в современной школьной практике этот потенциал используется недостаточно полно. Преподавание геометрии часто сводится к механическому запоминанию формул и шаблонному решению типовых задач, что не способствует развитию творческого и исследовательского мышления. Особенно заметен этот разрыв во внеклассной работе, где, несмотря на благоприятные условия для организации исследовательской деятельности, преобладает ориентация на подготовку к экзаменам, а не на развитие познавательной самостоятельности учащихся.

Особый интерес представляет внеклассная деятельность как наиболее гибкая и вариативная форма организации учебного процесса, позволяющая максимально раскрыть исследовательский потенциал геометрического содержания. Внеурочные занятия создают благоприятные условия для реализации индивидуальных познавательных интересов

учащихся, проведения долгосрочных исследований и применения творческих подходов к решению задач. Однако, как показывают современные исследования, этот потенциал используется недостаточно эффективно, что определяет необходимость разработки научно обоснованных методик развития исследовательских способностей средствами геометрии во внеклассной работе.

Таким образом, разработка методики развития исследовательских способностей школьников через систему специально организованных геометрических рассуждений во внеклассной деятельности представляет собой актуальную педагогическую задачу. Ее решение позволит не только повысить качество математического образования, но и сформировать у учащихся универсальные навыки, необходимые для успешного обучения и дальнейшей профессиональной деятельности в самых разных областях.

Цель исследования состоит в разработке внеурочных занятий по геометрии для развития исследовательских способностей школьников.

Объект исследования: процесс развития исследовательских способностей учащихся основной и старшей школы.

Предмет исследования: методика использования геометрических рассуждений для развития исследовательских способностей школьников во внеклассной деятельности.

Задачи исследования:

1. Проанализировать психолого-педагогическую литературу по проблеме развития исследовательских способностей учащихся.
2. Изучить факторы развития исследовательских способностей
3. Выявить потенциал геометрических рассуждений для формирования исследовательских компетенций.
4. Рассмотреть особенности организации внеурочной деятельности
5. Разработать внеклассные занятия по геометрии исследовательской направленности.

Работа состоит из двух глав. В первой главе излагаются теоретические вопросы, касающиеся понятия исследовательских способностей, роли геометрии в формировании логического мышления и исследовательских навыков, а также даны основные характеристики внеклассной работы как средства развития исследовательских способностей. Во второй главе представлена методическая разработка для слушателей математического кружка, базирующаяся на изучении и доказательстве теоремы Понселе в различных случаях.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ШКОЛЬНИКОВ

1.1 Понятие исследовательских способностей и их значение в образовательном процессе

В современной педагогике и психологии исследовательские способности рассматриваются как комплекс интеллектуальных и личностных качеств, обеспечивающих эффективное осуществление исследовательской деятельности. Данное понятие анализируется в работах ведущих отечественных ученых, каждый из которых акцентирует различные аспекты этого феномена.

А. И. Савенков определяет исследовательские способности как «индивидуально-психологические особенности личности, обеспечивающие успешность исследовательской деятельности, включающие поисковую активность, аналитическое мышление, генерацию гипотез и их проверку». В его работах подчеркивается роль познавательной инициативы и креативности как ключевых компонентов, отличающих исследовательскую деятельность от репродуктивного обучения. В отличие от Леонтовича, Савенков больше внимания уделяет природным предпосылкам этих способностей, хотя и признает возможность их развития. Особый акцент делается на мотивационной составляющей и эмоционально-волевых качествах исследователя[11].

А. В. Леонтович делает акцент на методологической составляющей, рассматривая исследовательские способности как «интегративное качество личности, проявляющееся в умении выявлять проблему, применять научные методы познания, анализировать результаты и осуществлять рефлексию». В отличие от Савенкова, он выделяет организационно-деятельностные аспекты, связывая их с формированием научного мышления. Ключевой особенностью данного подхода является

ориентация на процессуальную сторону исследовательской деятельности. Леонтович особо отмечает, что эти способности формируются в ходе специально организованной деятельности и поддаются целенаправленному развитию[9].

Д. Б. Богоявленская включает в это понятие интеллектуальную активность, определяя исследовательские способности как «стремление к самостоятельному познанию через выявление противоречий и поиск решений». Этот подход отличается наибольшей ориентацией на творческую составляющую исследовательской деятельности. Богоявленская подчеркивает спонтанный, внутренне мотивированный характер подлинной исследовательской активности[4].

Савенков и Богоявленская делают больший акцент на внутренней мотивации и когнитивных процессах, тогда как Леонтович рассматривает исследовательские способности через призму структуры деятельности.

Общим для всех авторов является выделение аналитического мышления и способности к рефлексии как ключевых компонентов.

Учитывая особенности, рассматриваемые различными авторами, можно составить обобщённое определение. Исследовательские способности – это комплекс интеллектуальных и личностных качеств, позволяющих учащемуся самостоятельно выявлять проблему, формулировать гипотезы, планировать и проводить исследование, анализировать результаты и делать обоснованные выводы. В структуру исследовательских способностей входят:

познавательная активность (стремление к поиску новой информации);

критическое мышление (умение анализировать, сопоставлять, оценивать достоверность данных);

креативность (способность генерировать нестандартные идеи и решения);

методологическая грамотность (владение методами научного познания);

В образовательном процессе развитие исследовательских способностей играет важную роль, поскольку:

Формирует научное мышление – учащиеся учатся не просто запоминать факты, а понимать причинно-следственные связи, выдвигать и проверять гипотезы.

Способствует мотивации к обучению – самостоятельный поиск знаний повышает интерес к предмету и осознанность их усвоения.

Готовит к современным вызовам – в условиях быстро меняющегося мира важны умения адаптироваться, находить и анализировать информацию, решать нестандартные задачи.

Развивает soft skills – исследовательская деятельность тренирует навыки проектного управления, работы в команде, публичных выступлений.

Современные образовательные стандарты подчеркивают необходимость развития исследовательских способностей в рамках системно-деятельностного подхода. В требованиях к метапредметным результатам выделяются:

Умение работать с информацией (поиск, анализ, интерпретация данных);

Способность к проектированию и проведению исследований (планирование, эксперимент, выводы);

Формирование научного типа мышления (критичность, логика, доказательность)[1].

В условиях стремительного развития информационного общества и перехода к экономике знаний исследовательские способности обучающихся приобретают особую педагогическую значимость.

Проведенный анализ психолого-педагогической литературы позволяет выделить несколько аспектов их важности в образовательном процессе.

Когнитивно-развивающий аспект. Формирование исследовательских способностей способствует развитию высших психических функций и интеллектуальных качеств учащихся:

- критического мышления (анализ, синтез, оценка информации);
- креативности (способность к нестандартным решениям);
- познавательной самостоятельности;
- метакогнитивных умений (планирование, рефлексия, самоконтроль).

Как отмечает А.И. Савенков, исследовательская деятельность создает условия для перехода от репродуктивного усвоения знаний к продуктивному мышлению, что соответствует современной парадигме образования[11].

Методологический аспект. Развитие исследовательских способностей обеспечивает: овладение методами научного познания; формирование навыков проектирования и организации исследования; умение работать с различными источниками информации; развитие методологической культуры.

А.В. Леонтович подчеркивает, что данные умения составляют основу научного мировоззрения и являются важнейшим компонентом функциональной грамотности[9].

Социально-педагогический аспект. Исследовательские способности: способствуют профессиональному самоопределению; развивают навыки сотрудничества и коммуникации; формируют социальную активность; воспитывают ответственность и инициативность.

Соответствие требованиям ФГОС. Анализ федеральных государственных образовательных стандартов показывает, что развитие исследовательских способностей напрямую связано с формированием:

Познавательных УУД: поиск и обработка информации; построение логических рассуждений; решение проблем творческого характера.

Регулятивных УУД: целеполагание; планирование; контроль и оценка.

Личностных результатов: познавательная мотивация; готовность к саморазвитию; ценностное отношение к знаниям.

Также в развитии исследовательских способностей заключен практический смысл, так как развитие исследовательских способностей повышает качество образовательных результатов, создает условия для индивидуализации обучения, способствует реализации принципа преемственности между общим и профессиональным образованием и формирует конкурентные преимущества выпускников.

Таким образом, исследовательские способности выступают как интегративная характеристика личности, объединяющая когнитивные, деятельностные и личностные компоненты. Их развитие становится важнейшей задачей современного образования, отвечающей как индивидуальным потребностям обучающихся, так и стратегическим целям развития общества.

1.2 Роль геометрии в формировании логического мышления и исследовательских навыков

Геометрия как учебная дисциплина занимает особое место в системе школьного образования, выполняя важную функцию в интеллектуальном развитии учащихся. Анализ психолого-педагогических исследований позволяет выделить несколько аспектов влияния геометрического образования на развитие логического мышления и исследовательских способностей школьников.

А.В. Леонтович в своих работах раскрывал глубокую взаимосвязь между изучением геометрии и развитием исследовательских способностей школьников. Он рассматривал геометрию как уникальную учебную дисциплину, которая в своей структуре воспроизводит основные этапы научного познания, что делает её идеальным инструментом для формирования исследовательской культуры учащихся. "Геометрическое доказательство — это идеальная модель научного исследования в миниатюре"[9].

Центральное место в концепции Леонтовича занимает мысль о том, что геометрическое доказательство представляет собой модель научного исследования в миниатюре. В процессе решения геометрических задач учащиеся последовательно проходят все этапы исследовательской деятельности: от постановки проблемы через выдвижение гипотез к их проверке и формулированию выводов. Этот процесс, по мнению учёного, развивает ключевые исследовательские компетенции - проблемное видение, способность к анализу и синтезу, логическую строгость мышления.

Особое внимание Леонтович уделял развитию гипотетико-дедуктивного мышления через геометрию. Он подчёркивал, что работа с геометрическими задачами учит школьников выстраивать чёткие причинно-следственные связи, формулировать предположения и последовательно их проверять. При этом важнейшую роль играет формирование методологической культуры - понимания принципов построения доказательств, владения различными методами решения задач.

В практическом плане Леонтович предлагал использовать специально разработанные системы геометрических задач, направленных на развитие исследовательских навыков. Эти задачи отличаются открытостью формулировок, возможностью различных подходов к решению, необходимостью проведения мини-исследований. Учёный особо

отмечал значение геометрических задач с практическим содержанием, которые помогают учащимся увидеть связь между абстрактными математическими понятиями и реальными явлениями.

Важным аспектом концепции Леонтовича является идея о том, что геометрия развивает не только когнитивные, но и личностные качества исследователя - настойчивость, точность, критичность мышления. Он рассматривал геометрическое образование как средство формирования целостной исследовательской позиции, которая проявляется не только в математической деятельности, но и в других сферах познания.

Л.С. Атанасян в своих работах раскрывал глубокую взаимосвязь между изучением геометрии и развитием исследовательских способностей учащихся. Автор классического школьного учебника рассматривал геометрию как уникальную дисциплину, органично сочетающую логическую строгость математических доказательств с наглядностью и практической направленностью, что создает идеальные условия для формирования исследовательской культуры.

Центральное место в концепции Атанасяна занимает представление о геометрии как модели научного познания. В процессе изучения геометрических закономерностей учащиеся естественным образом проходят все этапы исследовательской деятельности: от наблюдения конкретных свойств фигур через выдвижение гипотез к их строгому логическому обоснованию и практической проверке. Такой подход, по мнению ученого, позволяет сформировать целостное понимание научного метода.

Особое значение Атанасян придавал тщательно выстроенной системе учебных задач, которая является важнейшим инструментом развития исследовательских навыков. В его учебниках задачи подобраны таким образом, чтобы постепенно подводить учащихся к самостоятельным открытиям: от простых измерений и построений к сложным

доказательствам и исследованию свойств геометрических объектов. При этом особое внимание уделяется задачам, допускающим различные способы решения, что стимулирует творческий поиск.

Атанасян подчеркивал, что геометрия развивает не только формально-логическое мышление, но и пространственное воображение, способность к абстрагированию и конкретизации. Эти качества он считал фундаментальными для успешной исследовательской деятельности в любой области знания. Важным аспектом его подхода было соединение теоретических знаний с практическими умениями - черчением, моделированием, измерениями, что обеспечивает целостность исследовательского опыта учащихся.

В методике Атанасяна особую роль играет принцип наглядности, который реализуется через систему чертежей и геометрических построений. Это позволяет учащимся не только усваивать абстрактные понятия, но и развивать навыки визуализации - важнейшего компонента современной исследовательской культуры. При этом автор последовательно проводит идею о необходимости перехода от наглядных представлений к строгим логическим выводам.

Геометрия занимает особое место в системе формирования исследовательских способностей учащихся, выступая своеобразным полигоном для развития научного мышления. Многочисленные исследования педагогов и психологов демонстрируют, что эта дисциплина обладает уникальным комплексом характеристик, делающих её идеальным инструментом для воспитания исследовательской культуры.

Основная ценность геометрии как средства развития исследовательских способностей заключается в её двойственной природе, сочетающей абстрактную логическую строгость с конкретной наглядностью. Такой синтез позволяет учащимся осваивать методологию научного познания в доступной и увлекательной форме. Через решение

геометрических задач школьники естественным образом усваивают ключевые этапы исследовательской деятельности: от постановки проблемы через выдвижение гипотез к их проверке и формулированию выводов.

Важнейшим аспектом является то, что геометрия развивает не только когнитивные способности (логическое мышление, пространственное воображение, аналитические навыки), но и формирует личностные качества исследователя: настойчивость в достижении цели, точность формулировок, критичность мышления, готовность к преодолению трудностей. Эти универсальные компетенции выходят далеко за рамки математического образования и становятся основой для успешной деятельности в любой профессиональной сфере.

Современные педагогические подходы подчеркивают особую значимость геометрического образования в условиях цифровой трансформации. Динамические геометрические среды и компьютерное моделирование открывают новые возможности для исследовательской деятельности, позволяя учащимся проводить виртуальные эксперименты, проверять гипотезы и визуализировать сложные математические концепции. Это делает геометрию особенно актуальной в контексте формирования исследовательских компетенций XXI века.

Таким образом, геометрия представляет собой не просто учебный предмет, а универсальную образовательную технологию развития исследовательских способностей. Её потенциал полностью соответствует требованиям современного образования, ориентированного на формирование самостоятельной, творческой личности, способной к непрерывному самообразованию и решению нестандартных задач в различных областях знания.

1.3 Внеклассная деятельность как средство развития исследовательских способностей

В современной образовательной практике внеклассная работа приобретает особую значимость как эффективное средство развития исследовательских способностей школьников. В отличие от урочной системы, внеклассная деятельность предоставляет уникальные возможности для реализации исследовательского потенциала учащихся благодаря своей гибкости, вариативности и ориентации на индивидуальные познавательные интересы.

Внеклассная работа в контексте развития исследовательских способностей характеризуется следующими особенностями: добровольность участия и учет индивидуальных интересов учащихся; возможность выхода за рамки учебной программы; сочетание индивидуальных и коллективных форм работы; практико-ориентированный характер деятельности; творческая свобода и меньшая регламентация временными рамками.

Как отмечает А.В. Леонтович, именно во внеурочной деятельности создаются оптимальные условия для формирования подлинной исследовательской позиции, так как учащиеся руководствуются внутренней мотивацией, а не внешними требованиями.

Федеральные образовательные стандарты обращают особое внимание на эффективное взаимодействие урочной и внеурочной деятельности обучающихся, когда в условиях совместной и последовательной работы учителей и самих школьников результатом становится качественно существенно более высокое усвоение предметного материала. Внеурочные занятия с успехом могут быть использованы для углубления знаний учащихся в области математики, развития их логического мышления, исследовательских навыков, смекалки, привития

вкуса к чтению математической литературы, для сообщения учащимся полезных сведений из истории математики.

Учитель может на внеурочных занятиях в максимальной мере учесть возможности, запросы и интересы своих учеников. Внеклассная работа по математике дополняет обязательную учебную работу по предмету и должна прежде всего способствовать более глубокому усвоению учащимися материала, предусмотренного программой. «Процесс интеграции урочной и внеурочной деятельности представляет собой объединение элементов системы на основе их взаимозависимости и взаимодополняемости. Сущность процесса интеграции качественные изменения внутри каждой составляющей, входящих в систему» [16].

В практике образовательных учреждений сложились следующие эффективные формы внеклассной работы исследовательской направленности:

2.1. Предметные кружки и научные общества учащихся

углубленное изучение отдельных тем;
подготовка исследовательских проектов;
организация мини-конференций и дискуссий.

2.2. Исследовательские проекты

долгосрочные индивидуальные или групповые исследования;
междисциплинарные проекты;
прикладные исследования с практической направленностью.

2.3. Научно-практические конференции и конкурсы

презентация результатов исследований;
развитие навыков научной коммуникации;
экспертная оценка и обратная связь[7].

Особенностью внеурочной работы по математике является то, что формы ее организации делятся на постоянные (математический кружок, факультатив, научное математическое общество школьников и т. п.) и

временные (математическая абака, математический бой, математическая конференция, математическая карусель, математический КВН и т. п.). Временные формы чаще всего ориентированы на диагностику достигнутого предметного результата.

Внеклассная деятельность представляет собой важнейший компонент системы развития исследовательских способностей учащихся, дополняя и расширяя возможности урочной работы. Ее потенциал заключается в создании условий для свободного исследовательского поиска, реализации индивидуальных познавательных интересов и формирования устойчивой мотивации к научной деятельности. Эффективная организация внеклассной исследовательской работы требует системного подхода, учитывающего возрастные особенности учащихся и современные образовательные тенденции[3].

1.4 Основные виды геометрических задач и их исследовательский потенциал

Л.С. Атанасян, автор одного из самых распространённых школьных учебников по геометрии, предложил классификацию задач, основанную на виде познавательной деятельности, которую они активизируют. В отличие от других классификаций, ориентированных на сложность или тематику, подход Атанасяна делает акцент на методической роли задач в обучении.

Автор школьных учебников выделяет:

Качественные задачи. На установление фактов без вычислений. Эти задачи направлены на анализ свойств геометрических объектов без выполнения вычислений.

Вычислительные. С числовыми ответами. Требуют применения формул и точных расчётов

Доказательные. Связаны с логическим обоснованием утверждений

Комбинированные. Соединяют элементы вычислений, доказательств и анализа.

Особенности классификации Атанасяна

Практико-ориентированность. Задачи подобраны так, чтобы подготовить учащихся к решению реальных проблем, где требуются и вычисления, и логика, и анализ.

Постепенное усложнение. В учебниках Атанасяна задачи расположены от простых качественных (на узнавание свойств) к сложным комбинированным (доказательство + вычисления).

Связь с исследовательской деятельностью

Качественные задачи → формируют гипотезы;

Доказательные → учат проверять предположения;

Комбинированные → моделируют полноценное исследование.

Классификация Атанасяна отражает целостный подход к обучению геометрии, где задачи не просто тренируют навыки, но и развивают научное мышление. Это делает её особенно ценной для формирования исследовательских способностей школьников.

Похожую классификацию предлагал И.Ф. Шарыгин, разделяя их по типу вопроса задачи: вычислительные задачи, доказательные задачи, построительные задачи, геометрические места точек, задачи на преобразования. Можно заметить, что отдельное внимание автор уделял таким сложным, но в то же время интересным темам, как геометрическое место точек и преобразования плоскости. Данные разделы легко можно связать с математическими моделями реальных жизненных ситуаций, что является отличным объектом исследовательской деятельности.

В.А. Гусев, известный российский методист, разработал свою классификацию геометрических задач, ориентированную на дидактические цели и уровни познавательной активности учащихся. Его подход отличается от других (например, от классификации Атанасяна) тем,

что он делает акцент не только на содержании задач, но и на их роли в учебном процессе.

Основные группы задач по В.А. Гусеву

(1) Вводные (пропедевтические) задачи

Цель: подготовить учащихся к восприятию нового материала.

Особенности: направлены на актуализацию опорных знаний; содержат элементы проблемности, но не требуют сложных рассуждений; часто связаны с наглядными образами и простыми построениями.

(2) Тренировочные (стандартные) задачи

Цель: закрепление базовых умений и алгоритмов.

Особенности: требуют применения изученных формул и теорем; развивают точность вычислений и технику построений; могут решаться по образцу.

(3) Проблемные (творческие) задачи

Цель: развитие исследовательских навыков.

Особенности: не имеют очевидного решения; требуют выдвижения гипотез и поиска нестандартных подходов; часто содержат избыточные или недостающие данные.

(4) Нестандартные (олимпиадные) задачи

Цель: развитие математической культуры и креативности.

Особенности: требуют глубокого анализа и оригинальных идей; могут использовать редкие свойства фигур или неочевидные дополнительные построения; направлены на формирование гибкости мышления.

(5) Исследовательские задачи

Цель: моделирование научного поиска.

Особенности: предполагают многоэтапное решение (анализ, гипотеза, проверка, вывод); часто не имеют единственного правильного ответа; требуют обобщения результатов.

Связь с этапами обучения:

Вводные задачи → мотивация и подготовка;

Тренировочные → отработка навыков;

Проблемные и нестандартные → развитие творчества;

Исследовательские → применение знаний в новых условиях.

Гусев особо выделяет проблемные и исследовательские задачи, так как они учат анализировать условия; выдвигать гипотезы; проверять решения разными способами.

Классификация Гусева помогает учителю дифференцировать задания (подбирать задачи разного типа для разных учащихся); планировать уроки (сочетать тренировочные и творческие задачи); готовить школьников к олимпиадам (через нестандартные задачи).

Подход В.А. Гусева ориентирован не только на результат (правильный ответ), но и на процесс решения, что делает его эффективным для развития логического и исследовательского мышления. Его классификация широко используется в практике преподавания геометрии, особенно в классах с углубленным изучением математики.

Также свою классификацию задач предлагал Г.Д. Глейзера, разделяя их на уровни сложности: репродуктивные, реконструктивные, вариативные, исследовательские. Такой взгляд учитывает также различные уровни задействования познавательных способностей учащихся и их навыки к нахождению новых решений.

1.5 Методы и приемы геометрических рассуждений

Геометрические рассуждения представляют собой систему логических умозаключений, направленных на установление свойств

пространственных форм и отношений между ними. В процессе обучения геометрии формируется комплекс методов и приемов рассуждений, которые составляют основу математического мышления и исследовательской деятельности учащихся.

Центральное место в геометрических рассуждениях занимает метод доказательства, который может реализовываться через различные приемы. Наиболее распространенным является синтетический метод, основанный на последовательном выведении следствий из данных условий с использованием известных теорем и аксиом. Этот метод развивает способность к дедуктивным умозаключениям и формирует строгость математического мышления.

Аналитический метод рассуждений предполагает движение от искомого к данным условиям задачи. Этот прием особенно ценен при решении задач на построение и доказательство, так как позволяет выявить логические связи между элементами геометрической конфигурации. Аналитический подход способствует развитию обратного мышления и умения выдвигать гипотезы.

Метод преобразований (движений плоскости) включает такие приемы, как использование симметрии, параллельного переноса, поворота и гомотетии. Эти приемы не только упрощают решение многих задач, но и развивают пространственное воображение учащихся, позволяя увидеть скрытые свойства геометрических фигур.

Важное место занимает координатный метод, который переводит геометрические задачи в алгебраическую плоскость. Этот метод развивает межпредметные связи и показывает единство математического знания, формируя у учащихся понимание различных подходов к решению проблем.

Особую группу составляют эвристические приемы, такие как:

- проведение вспомогательных элементов (прямых, окружностей, сечений)

- рассмотрение крайних и частных случаев

- использование аналогий

- принцип инвариантности

Эти приемы развивают творческое мышление и исследовательские способности, так как требуют нестандартного подхода к решению задач.

Формирование методов геометрических рассуждений происходит постепенно - от простых умозаключений в начальной школе до сложных доказательств в старших классах. Этот процесс способствует развитию логического мышления, способности к анализу и синтезу, а также формированию научного стиля изложения мыслей.

Эффективное обучение методам геометрических рассуждений требует системного подхода, включающего:

- последовательное усложнение задач

- разнообразие типов доказательств

- сочетание наглядности и строгости

- развитие навыков самопроверки

Освоение этих методов имеет важное значение не только для математического образования, но и для общего интеллектуального развития учащихся, так как формирует универсальные навыки логического мышления и исследовательской деятельности.

Примеры успешного применения геометрических рассуждений в учебном процессе

В современной педагогической практике накоплен значительный опыт эффективного использования геометрических рассуждений в учебном процессе. Анализ успешных кейсов позволяет выделить несколько направлений их продуктивного применения, демонстрирующих

как развитие математического мышления учащихся, так и формирование их исследовательских компетенций.

Одним из ярких примеров является использование метода геометрических преобразований при изучении свойств фигур. Так, в ряде школ Москвы и Санкт-Петербурга была успешно апробирована методика, где учащиеся 7-8 классов, применяя понятия осевой и центральной симметрии, самостоятельно выводили свойства равнобедренного треугольника и параллелограмма. Этот подход позволил не только повысить уровень понимания геометрических закономерностей, но и развить у школьников способность к визуализации пространственных отношений.

Особого внимания заслуживает опыт применения аналитического метода при решении задач на построение. В специализированных математических классах Новосибирска была продемонстрирована эффективность методики, при которой учащиеся сначала анализируют условия задачи, выявляя возможные зависимости между элементами, и только затем переходят к практическому построению. Такой подход способствовал формированию системного мышления и умения предвидеть результаты своих действий.

Успешным примером интеграции различных методов рассуждений стало внедрение в учебный процесс комплексных исследовательских заданий. В частности, в лицеях Казани используется система задач, сочетающих координатный метод с элементами векторного анализа. Учащиеся 9-11 классов, решая такие задачи, не только закрепляют изученные понятия, но и учатся видеть многообразие подходов к решению одной проблемы, что существенно развивает их математическую культуру.

Особую эффективность показало применение эвристических приемов в работе с одаренными детьми. На занятиях математических кружков и летних школ широко используется методика "геометрических

открытий", когда учащимся предлагается самостоятельно сформулировать и доказать новые свойства известных фигур. Этот подход, активно применяемый в образовательном центре "Сириус", способствует развитию творческого математического мышления и исследовательской инициативы.

Важным достижением современной методики стало успешное внедрение компьютерных технологий в процесс обучения геометрическим рассуждениям. Использование динамических геометрических сред (GeoGebra, Geometry Pad) в школах Екатеринбурга и Томска позволило наглядно демонстрировать процесс рассуждений, проверять гипотезы и исследовать предельные случаи, что значительно повысило эффективность усвоения геометрических понятий.

Эти примеры свидетельствуют о том, что грамотное применение различных методов геометрических рассуждений не только улучшает качество математической подготовки, но и способствует развитию критического мышления, исследовательских навыков и творческого потенциала учащихся. Полученные результаты подтверждают необходимость дальнейшего совершенствования методик обучения геометрическим рассуждениям с учетом современных образовательных тенденций и технологий.

ГЛАВА 2 ОРГАНИЗАЦИЯ ВНЕКЛАССНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПО РАЗВИТИЮ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ЧЕРЕЗ ГЕОМЕТРИЮ

2.1 Теоретический материал исследовательской задачи о теореме Понселе

Для развития исследовательских способностей необходимо рассматривать различные геометрические задачи, имеющие исследовательский потенциал. Например, в качестве такой задачи можно рассмотреть теорему Понселе.

Теорема 1. На плоскости даны две коники. Если существует n -угольник, вписанный в первую конику, все стороны которого (или их продолжения) касаются второй, то таких n -угольников бесконечно много, причем любая точка первой коники может быть его вершиной

Данная теорема является крайне ярким примером исследовательской задачи, так как имеет множество вариаций, в том числе более простых. Например следующая теорема:

Теорема 2. На плоскости даны две окружности. Если существует n -угольник, вписанный в первую окружность, все стороны которого (или их продолжения) касаются второй, то таких n -угольников бесконечно много, причем любая точка первой окружности может быть его вершиной.

Данная теорема ограничивается только окружностями в качестве коник, что значительно упрощает данную формулировку для школьников, которые не изучают другие коники и их свойства.

Допускается дальнейшее упрощение и разбор частных случаев данной теоремы:

Теорема 3. На плоскости даны две окружности. Если существует треугольник, вписанный в первую окружность, все стороны которого (или

их продолжения) касаются второй, то таких треугольников бесконечно много, причем любая точка первой окружности может быть его вершиной.

А также аналогичную теорему для четырёх- и пятиугольников.

Итак, последовательно разберём данные теоремы. Существует несколько путей изучения данных утверждений. 1 путь основывается на непосредственных построениях с помощью интерактивных средств, например, программы GeoGebra.

Возьмём произвольный треугольник, построим для него вписанную и описанную окружности. Для любой точки на описанной окружности можно построить две касательные и после этого из одной из точек пересечения касательной с описанной окружностью провести ещё одну касательную. Мы получим треугольник, для которого наши окружности также будут являться вписанной и описанной (рисунок 1).

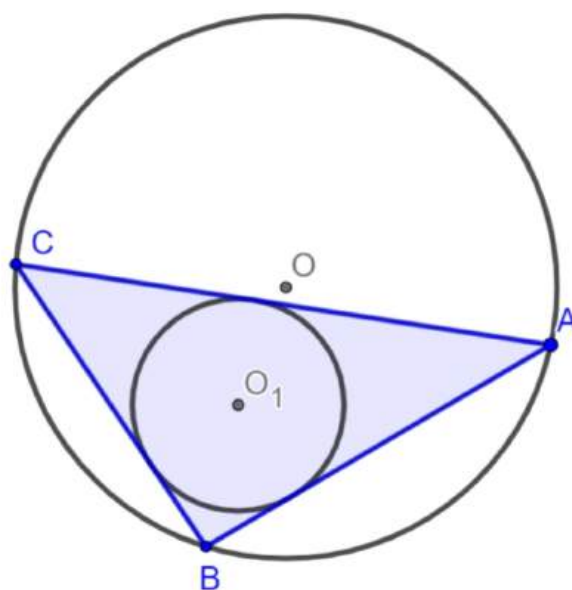


Рисунок 1

С помощью анимирования исходной точки на описанной окружности можно убедиться, что каждая точка окружности может быть вершиной треугольника. Таким образом, теорема наглядно показана. Однако сразу же возникает ряд проблем, связанных с данными рассуждениями.

1 проблема заключается в том, что данное построение нельзя считать полноценным доказательством, а только наблюдением данной теоремы. 2 проблема возникнет при попытке подобных построений для четырёхугольника. В случае треугольника всегда существует как вписанная, так и описанная окружность, чего нельзя сказать про четырёхугольники. Мы знаем отдельные критерии их вписанности и описанности, однако в совокупности условие хоть и имеется, но довольно редко изучается. А в случае большего количества углов многоугольника эти условия становятся все сложнее и построить их уже вызывает серьезные затруднения. 3 проблема заключается в бесконечности оригинальной формулировки теоремы Понселе, в которой говорится про любой n -угольник. Все возможные случаи просто невозможно будет построить, а следовательно и полноценного доказательства получить нельзя.

Для решения первой проблемы необходимо получить какое-либо аналитическое выражение условий вписанности и описанности треугольника и других многоугольников.

В случае треугольников данная зависимость выражается формулой Эйлера-Чапела для расстояний между центрами вписанной и описанной окружности.

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

где d - расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, R - радиус описанной окружности, r - радиус вписанной окружности.

Также данная формула имеет эквивалентный вид:

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}.$$

Эта формула замечательна тем, что связывает только характеристики окружностей и не затрагивает длины сторон или углы треугольника, а

следовательно будет соответствовать множеству треугольников для фиксированных окружностей. Именно этого мы и хотим добиться для теоремы Понселе.

Для доказательства данной формулы нам понадобится дополнительный факт, который крайне редко возникает в школьном курсе математики, а именно так называемая лемма о трезубце(или лемма о трилистнике):

Точка пересечения биссектрисы треугольника с описанной окружностью равноудалена от концов противоположной стороны и от центра вписанной окружности.

Докажем данный факт:

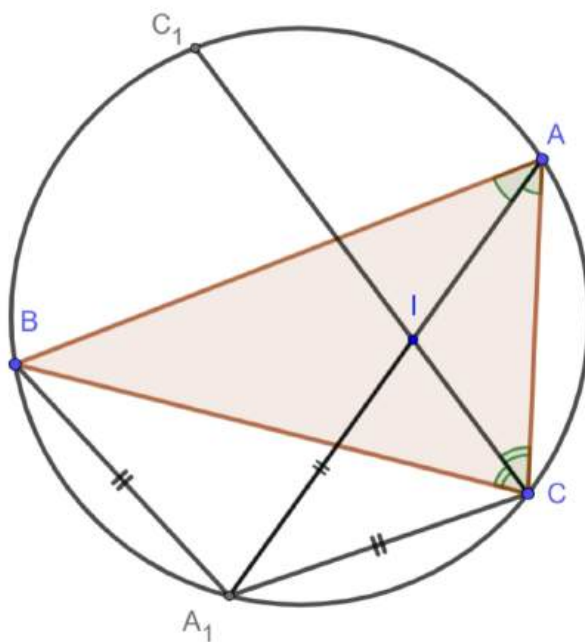


Рисунок 2

Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC (рисунок 2). Биссектрисы углов A и C пересекают описанную окружность в точках A_1 и C_1 ; угол AIC_1 , будучи углом между хордами AA_1 и CC_1 , равен полусумме дуг CA_1 и C_1A . Но дуги C_1A и BC_1 , CA_1 и A_1B попарно равны, поэтому угол BIC_1 равен полусумме дуг BC_1 и A_1B , т.е. половине дуги

A_1C_1 , т.е. углу A_1AC_1 . Получаем, что треугольник IC_1A равнобедренный, и $C_1A = C_1I$. Аналогично доказывается, что $C_1I = C_1B$. Таким образом мы доказали, что лемму о трезубце, которая понадобится нам для дальнейших рассуждений.

Вернёмся к доказательству формулы Эйлера-Чапела.

Проведем диаметр BM и опустим перпендикуляр IK на сторону AC (рисунок 3). Прямоугольные треугольники ICK и BCM_1 подобны, поскольку их острые углы ICK и BCM_1 равны половине угла C . Поэтому $\frac{BC_1}{BM} = \frac{IK}{IC}$, или $BC_1 * IC = BM * IK = 2R * r$. Но так как $C_1B = C_1I$, $C_1I * IC = 2R * r$. Наконец, воспользовавшись свойством секущей получаем, что произведение $C_1I * IC = R^2 - d^2$. Итак, $2Rr = R^2 - d^2$ [14].

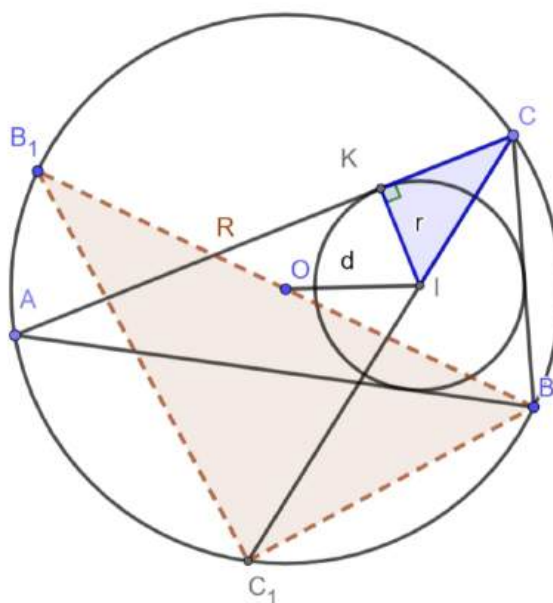


Рисунок 3

Доказав данный факт вернемся к нашей теореме Понесе для треугольников. Пусть, начав из вершины A , мы получили треугольник ABC , вписанный во внешнюю окружность и описанный вокруг внутренней (рисунок 3). Возьмем теперь произвольную точку A'

описанной окружности и начнем процесс из этой точки: проводим последовательно хорды $A'B'$ и $B'C'$, касающиеся внутренней окружности. Что дальше? Почему хорда $A'C'$ будет также ее касаться? Можно применить формулу Эйлера–Чаппела к треугольнику $A'B'C'$. Но беда в том, что у него только значение R такое же, как и у треугольника ABC , а значения g и d могут быть другими.

Однако с помощью леммы о трезубце легко осуществить построение треугольника с заданной описанной окружностью, точкой на ней и центром вписанной окружности и доказать, что задача всегда имеет единственное решение (с точностью до симметрии).

Основываясь на данном суждении рассмотрим теорему Понселе. Взяли произвольную точку A' на внешней окружности. Построили с помощью циркуля и линейки вписанный треугольник $A'B'C'$, у которого I – центр вписанной окружности. У этого треугольника значения R и d такие же, как у ABC . Применив теперь к нему формулу Эйлера–Чаппела, получаем, что у него и значение g такое же. Значит, $A'B'C'$ имеет ту же вписанную окружность, что и ABC , так как центр окружности был тот же.

Таким образом, мы получили, что построенный треугольник также будет вписан во внешнюю окружность и описан около внутренней. А так как исходную вершину A' нового треугольника мы выбирали произвольно, значит любая точка внешней окружности может быть вершиной треугольника, о чём и говорится в теореме Понселе. Теорема доказана.

Данные рассуждения применимы для любой пары окружностей, удовлетворяющих формуле Эйлера–Чаппела и имеют строгий характер, что решает первую проблему, возникшую после исследования методом построений. Однако необходимо рассмотреть потенциал данных рассуждений дальше - для четырёхугольников и далее для произвольных многоугольников.

Возможно есть формула аналогичная формуле Эйлера-Чапела, но уже для четырёхугольников? На самом деле такая формула существует и носит имя российского математика Николая Ивановича Фусса и формулируется в следующем виде:

$$\frac{1}{(R+l)^2} + \frac{1}{(R-l)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Также имеется вид, более похожий на формулу Эйлера-Чапела:

$$l^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2},$$

в котором напрямую выражено расстояние между центрами вписанной и описанной окружности через их радиусы[6].

Доказательство данной формулы уже более сложное и требует некоторых фактов, выходящих за рамки школьной программы. Однако можно начать её доказательство для отдельных видов четырёхугольников, например для равнобедренной трапеции.

Начнём с известных условий вписанности и описанности четырёхугольников.

Теорема. В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Теорема. Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равны.

В случае равнобедренной трапеции углы при основаниях равны, а следовательно суммы противоположных углов также равны, то есть автоматически выполняется требование вписанности в окружность. Осталось только интерпретировать требования описанности.

Сумма оснований должна быть равна сумме боковых сторон и так как они равны можно сказать, что боковые стороны должны быть равны полусумме оснований или же средней линии трапеции.

Теперь рассмотрим выведение формулы Фусса. Пусть нам дана равнобедренная трапеция, вписанная в окружность с центром O_1 и

описанная около окружности с центром O_2 и расстоянием между центрами l (рисунок 4).

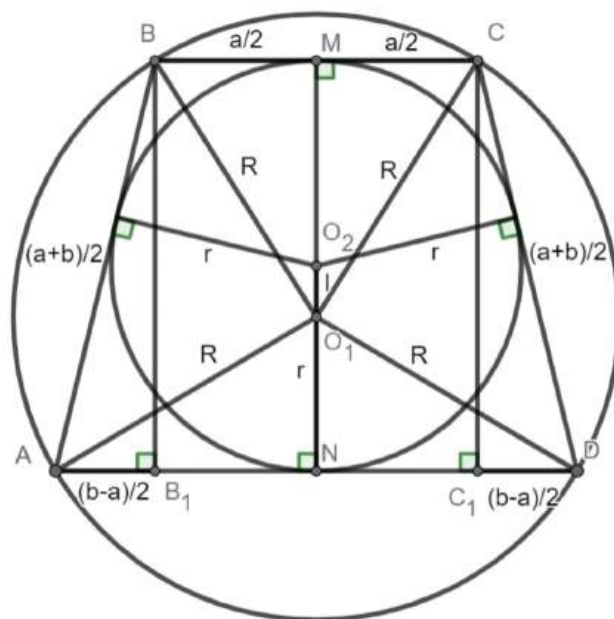


Рисунок 4

Из треугольников ABB_1 , BO_1M , AO_1N соответственно по теореме Пифагора имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (2r)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (r-l)^2 = R^2 \\ \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (r-l)^2 = R^2 \end{cases}$$

что путём алгебраических преобразований можно привести к виду:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{4} \cdot \frac{b^2}{4} = r^4 \\ \frac{a^2}{4} = R^2 - (r+l)^2 \\ \frac{b^2}{4} = R^2 - (r-l)^2 \end{cases}$$

Подставляя выражения 2 и 3 уравнения в 1 и преобразовывая полученное равенство, получаем следующее уравнение:

$$l^4 - 2(R^2 + r^2)l^2 + (R^4 - 2R^2r^2) = 0.$$

Решая данное уравнение относительно l^2 получаем корень $l^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}$. Второй корень не подходит, так как получается, что $l < R$. Получаем, что формула Фусса доказана для случая равнобедренной трапеции.

Также можно рассмотреть ещё один частный случай вписано-описанного четырёхугольника, а именно дельтоид, то есть четырёхугольник, у которого две пары равных смежных сторон. А точнее рассматривать мы будем ещё более частный случай дельтоид - когда угол между неравными сторонами прямой (рисунок 5).

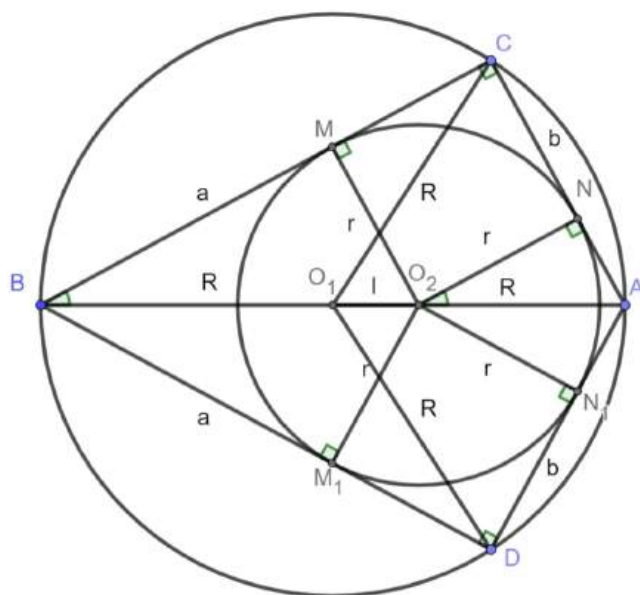


Рисунок 5

Противоположные углы C и D прямые, следовательно их сумма равна 180 градусам, а значит суммы противоположных углов равны и такой дельтоид можно вписать в окружность.

Смежные стороны дельтоида равны, следовательно суммы противоположных сторон также будут равны, а значит в дельтоид можно вписать окружность.

Таким образом мы получили, что дельтоид будет вписано-описанным четырёхугольником. Далее докажем справедливость формулы Фусса.

В прямоугольном треугольнике $ВМО_2$ мы можем выразить тригонометрическую функцию: $\sin \frac{B}{2} = \frac{MO_2}{BO_2} = \frac{r}{R+l}$. Из прямоугольного треугольника $АНО_2$ следует, что $\sin \frac{A}{2} = \frac{NO_2}{AO_2} = \frac{r}{R-l}$.

Углы A и B в сумме дают 180 градусов, значит $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ$. Соответственно по формулам приведения $\cos \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2} = \frac{r}{R-l}$. Далее воспользуемся основным тригонометрическим тождеством для угла $\frac{B}{2}$ и получим следующее выражение: $\frac{r^2}{(R+l)^2} + \frac{r^2}{(R-l)^2} = 1$. Поделив всё выражение на r^2 получим формулу Фусса $\frac{1}{(R+l)^2} + \frac{1}{(R-l)^2} = \frac{1}{r^2}$.

Таким образом мы доказали верность формулы для дельтоида с прямыми углами между неравными сторонами. Далее перейдём к доказательству формулы Фусса для произвольного четырёхугольника(рисунок 6).

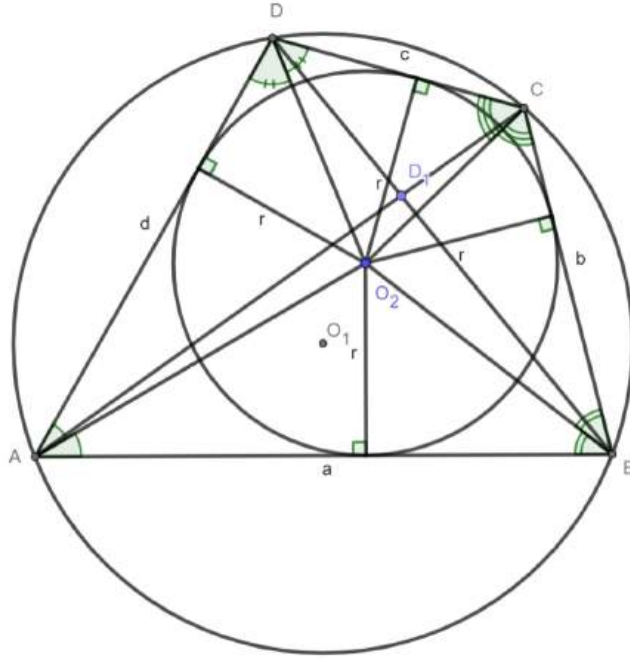


Рисунок 6

ABCD - описанный четырехугольник, следовательно справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} a = r \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{A}{2} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{B}{2} \right) \right) \\ b = r \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{B}{2} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{C}{2} \right) \right) \\ c = r \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{C}{2} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{D}{2} \right) \right) \\ d = r \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{D}{2} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{A}{2} \right) \right) \end{cases}$$

ABCD - вписанный четырёхугольник, значит верна система уравнений:

$$\begin{cases} C = \pi - A \\ D = \pi - B \end{cases}$$

Исходя из последней системы можно сделать выводы, что

$$\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \text{ и } \operatorname{ctg} \frac{D}{2} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

В таком случае мы можем переформулировать условия, которым удовлетворяет вписано-описанный четырёхугольник:

$$\begin{cases} a = r \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{A}{2} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{B}{2} \right) \right) \\ b = r \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{B}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{A}{2} \right) \right) \\ c = r \left(\operatorname{tg} \left(\frac{A}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right) \right) \\ d = r \left(\operatorname{tg} \left(\frac{B}{2} \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{A}{2} \right) \right) \end{cases}$$

Для доказательства формулы Фусса нам понадобится выразить отношение квадратов радиусов $\frac{R^2}{r^2}$ через тригонометрические функции углов четырёхугольника ABCD. Из треугольника ADB по теореме синусов $\frac{f}{\sin A} = 2R$. Аналогично из треугольника ABC – $\frac{e}{\sin B} = 2R$. Перемножив данные равенства получим следующее выражение:

$$4R^2 = \frac{ef}{\sin A * \sin B}$$

По теореме Птолемея произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон: $ef = ac + bd$. Тогда $4R^2 = \frac{ac+bd}{\sin A * \sin B}$.

Применив формулы (4) и выполнив алгебраические преобразования включающие тригонометрические формулы получим следующий результат:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{1}{\sin A * \sin B} + \frac{1}{\sin^2 A * \sin^2 B} \quad (5)$$

Найдя отношение квадратов радиусов вписанной и описанной описанной окружности можем приступить к доказательству формулы Фусса для произвольного четырёхугольника.

Введём вписано-описанный четырёхугольник в ПДСК, как показано на рисунке 7.

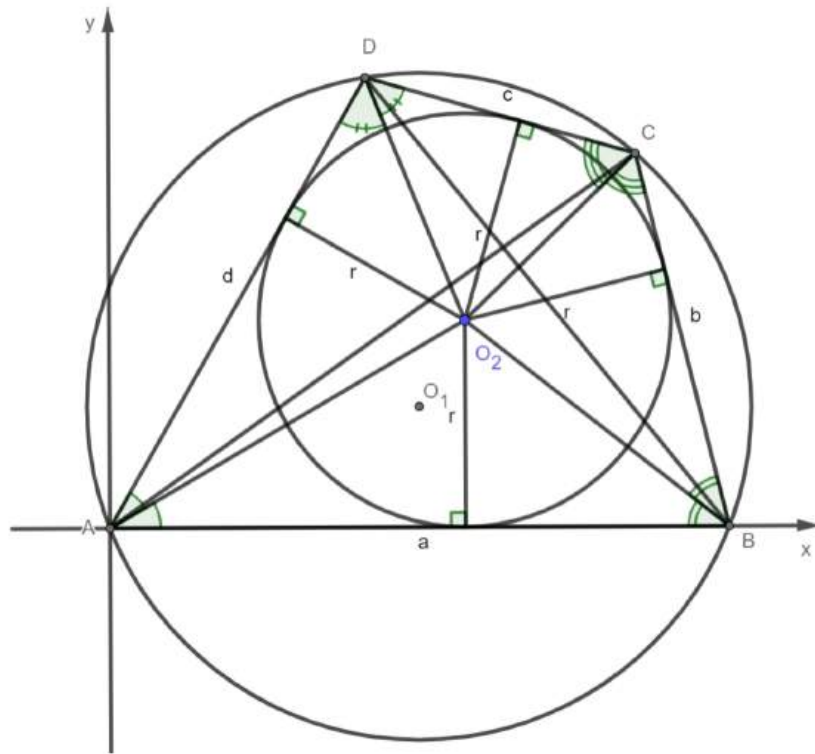


Рисунок 7

Координаты центров описанной и вписанной окружности соответственно равны:

$$O_1\left(\frac{r}{2}(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2}); \sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2})^2}\right), O_2(r * \operatorname{ctg}\frac{A}{2}; r).$$

По формуле квадрата расстояния между двумя точками получим:

$$\begin{aligned} O_1 O_2^2 = l^2 &= \left(\frac{r}{2}(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} - \operatorname{ctg}\frac{A}{2})\right)^2 + \left(\sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2})^2} - r\right)^2 = \\ &= R^2 + r^2 - r(r * \operatorname{ctg}\frac{A}{2} * \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + 2\sqrt{R^2 - \frac{r^2}{4}(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2})^2}). \end{aligned}$$

Осталось доказать, что

$$r * \operatorname{ctg}\frac{A}{2} * \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \sqrt{4R^2 - r^2(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2})^2} = \sqrt{4R^2 + r^2}.$$

Нам удобнее перераспределить слагаемые так, чтобы тригонометрические величины были в обеих частях равенства:

$$\sqrt{4R^2 - r^2(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2})^2} = \sqrt{4R^2 + r^2} - r * \operatorname{ctg}\frac{A}{2} * \operatorname{ctg}\frac{B}{2}. \quad (6)$$

Однако в конце необходимо убедиться в положительности правой части этого равенства.

Возведём обе части равенства (6) в квадрат:

$$2\sqrt{\frac{4R^2+r^2}{r^2}} = 2 + \frac{(1+\operatorname{tg}^2\frac{A}{2})(1+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2})}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}.$$

После элементарных тригонометрических преобразований получим:

$$\sqrt{\frac{4R^2}{r^2} + 1} = 1 + \frac{2}{\sin A \cdot \sin B}.$$

Если возвести полученное равенство ещё раз в квадрат, то получим формулу вида (5). Однако данные рассуждения верны только если правая часть уравнения (6) положительна, то есть

$$\sqrt{4R^2 + r^2} - r \cdot \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{B}{2} > 0, \text{ что равносильно}$$

$$4R^2 + r^2 > r^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{A}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{B}{2}.$$

С учётом формулы (5) можно преобразовать данное выражение к следующему виду

$$1 + \sin A \cdot \sin B > \cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} (\cos^2\frac{A}{2} \cdot \cos^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{A}{2} \cdot \sin^2\frac{B}{2}),$$

в которой левая часть больше единицы, а правая меньше единицы, следовательно неравенство выполняется. В силу равносильности преобразований можно сказать, что исходное неравенство также верно.

Таким образом доказана справедливость формулы Фусса для произвольного четырёхугольника.

Если возвращаться к доказываемой теореме Понселе для четырёхугольников, то надо сказать, что формула Фусса работает для случая, когда существует вписано-описанный четырёхугольник, однако не любые две окружности, удовлетворяющие ей могут быть вписанной и описанной для какого-либо четырёхугольника. Однако по теореме Понселе нам сказано, что уже существует четырёхугольник, для которого

данные окружности являются вписанными и описанными, поэтому мы можем сказать, что таковыми они будут и для серии других четырёхугольников. Таким образом теорема Понселе для случая $n=4$ доказана.

Доказательство формулы Фусса требовало достаточно обширных математических рассуждений, поэтому можно предположить, что рассмотрение последующих ситуаций для других многоугольников затребует ещё больших усилий. Тем более, что уже для пятиугольников в школе неизвестны критерии вписанности и описанности.

Хочется сказать, что существуют последующие формулы для различных значений n :

$$\text{при } n=5: \sqrt{(R-r)^2 - d^2} + \sqrt{2R(R-r-d)} = r \frac{R-d}{R+d},$$

$$\text{при } n=6: \frac{1}{(R^2-d^2)^2-4Rr^2d} + \frac{1}{(R^2-d^2)^2+4Rr^2d} = \frac{1}{2r^2(R^2+d^2)^2-(R^2-d^2)^2},$$

$$\text{при } n=8: \frac{1}{((R^2-d^2)^2-4Rr^2d)^2} + \frac{1}{((R^2-d^2)^2+4Rr^2d)^2} = \frac{1}{(2r^2(R^2+d^2)^2-(R^2-d^2)^2)^2}.$$

А также есть универсальная формула для любого n , которая была выведена Кэли.

Пусть f - окружность заданная формулой $x^2 + y^2 = 1$, а g - эллипс $ax^2 + by^2 = 1$. Тогда условие на заикливание цепи задаётся в терминах ряда Тейлора функции $\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(1+t)} = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \dots$ (каждый коэффициент c_i вычисляется через a и b). А именно:

1. Цепь Понселе пары f и g заикливается за $2m+1$ шагов тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} c_2 & \dots & c_{m+1} \\ \dots & & \dots \\ c_{m+1} & \dots & c_{2m} \end{vmatrix} = 0$$

2. Цепь Понселе пары f и g зацикливается за $2m$ шагов тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} c_3 & \cdots & c_{m+1} \\ \cdots & & \cdots \\ c_{m+1} & \cdots & c_{2m-1} \end{vmatrix} = 0$$

Все данные формулы крайне сложно доказывать, а общую формулу невозможно объяснить школьникам вовсе.

Таким образом мы получаем невозможность рассмотрения данного подхода к доказательству теоремы Понселе даже в рамках внеклассных занятий. Поэтому необходимо найти новый подход к доказательству.

Для начала вернёмся к теореме Понселе при $n=3$, то есть к случаю треугольника. А точнее рассмотрим даже более тривиальную задачу: доказательство данной задачи для концентрических окружностей[14].

Мы можем поворачивать многоугольник вокруг общего центра вписанной и описанной окружности и тогда вся цепочка сторон в точно такую же цепочку сторон, которые также будут касаться внутренней окружности и стягивать одинаковые дуги внешней. Пусть длина всей внешней окружности l , тогда каждая сторона многоугольника будет стягивать дуги, равные $\frac{l}{n}$. Таким образом, если все дуги будут равны данной величине, то цепочка касательных хорд замкнётся через n шагов и мы получим вписано-описанный многоугольник. В свою очередь, если длина каждой дуги будет равна $\frac{lk}{n}$, то цепочка касательных также будет замыкаться, только уже через k оборотов.

Итак, замыкание произойдет тогда и только тогда, когда длина дуги соизмерима (т.е. имеет отношение, выраженное рациональным числом) с длиной всей окружности.

Данный вывод верен в случае концентрических окружностей, однако не применим к произвольным окружностям. Но возможно существует какая-либо величина, которая будет оставаться постоянной для произвольных окружностей также как была постоянной длина дуги, стягиваемой хордой.

Предположим, что у нас есть пара окружностей: внешняя окружность λ и внутренняя ω . Введем систему координат, приняв за начало координат центр внутренней окружности, оси Ox и Oy направляются произвольно, а радиус окружности λ возьмём за единичный отрезок. В таком случае окружность λ будет задаваться функцией от двух переменных $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Данная функция будет обращаться в 0 для точек на λ , будет отрицательной для точек внутри λ и положительной для точек вне λ . На самом деле данная функция будет задавать степень точки относительно λ .

Рассмотрим величину $\rho = \frac{1}{\sqrt{f(M)}}$ - плотность точки, которая ставит в соответствие каждой точке значение, обратное корню из степени этой точки относительно λ . Массой дуги назовём сумму плотностей всех точек на ней. Рассмотрим свойства данных величин.

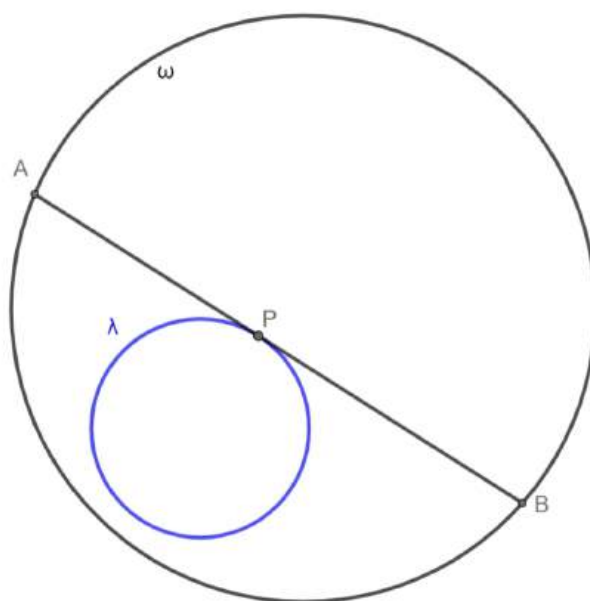


Рисунок 8

Как известно, степень точки можно выразить как квадрат касательной и тогда плотность в точка А и В будет принимать следующий вид $\rho(A) = \frac{1}{\sqrt{AP^2}} = \frac{1}{AP}$, $\rho(B) = \frac{1}{\sqrt{BP^2}} = \frac{1}{BP}$. Тогда можно выразить отношение: $\frac{\rho(A)}{\rho(B)} = \frac{BP}{AP}$, которое также принимает вид $AP * \rho(A) = BP * \rho(B)$. Можно заметить, что плотности точек также будет являться их массой относительно точки касания с внутренней окружности.

Проведём ещё одну касательную хорду A_1B_1 максимально приближённо к исходной хорде АВ(рисунок 9). Тогда масса маленькой дуги AA' примерно равна ее длине, умноженной на плотность $\rho(A)$. Длина же дуги AA' примерно равна длине хорды AA' . Таким образом, масса дуги AA' примерно равна $AA \cdot \rho(A)$, а масса дуги BB' примерно равна $BB' \cdot \rho(B)$.

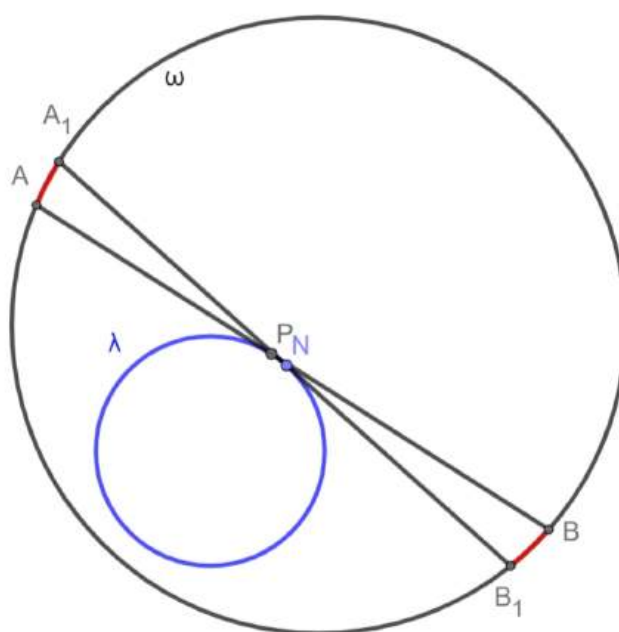


Рисунок 9

Отношение масс двух дуг стремиться к $\frac{AA_1}{BB_1} * \frac{\rho(A)}{\rho(B)} = \frac{AA_1}{BB_1} * \frac{AP}{BP}$.

Также можно заметить, что треугольники ANA_1 и B_1NB подобны, так как их углы опираются на равные дуги, а следовательно выполняется

отношение $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AN}{B_1N}$, то есть $\frac{AA_1}{BB_1} * \frac{\rho(A)}{\rho(B)} = \frac{AN}{B_1N} * \frac{AP}{BP}$. Если рассматривать максимальное приближение хорды A_1B_1 к хорде AB также можно приравнять отношения $\frac{A_1N}{B_1N} = \frac{AP}{BP}$. Таким образом мы получили, что отношение масс дуг AA_1 и BB_1 стремиться к 1, то есть их массы примерно равны. Поэтому масса дуги AB не меняется при её малых изменениях, то есть она постоянна.

Вернемся к теореме Понселе. Нам известно, что существует многоугольник, вписанный во внешнюю окружность и описанный около внутренней. Все стороны многоугольника, которые являются хордами внешней окружности, отсекают дуги равной массы, следовательно если масса всей окружности равна m , то масса каждой дуги будет $\frac{m}{n}$. Таким образом, если взять цепочку из n последовательных касательных хорд, каждая из которых будет стягивать дугу массой $\frac{m}{n}$, то в сумме они будут давать массу m , то есть всю окружность. Следовательно данная цепочка хорд будет замыкаться и образовывать новый многоугольник, который вписан во внешнюю окружность и описан около внутренней. Теорема доказана.

На самом деле данное доказательство можно распространить и на случай с эллипсами, если ввести эквивалент степени точки для эллипса. Если быть точнее, нам необходимо доказать, что верным для эллипсов будет выражение $AP * \rho(A) = BP * \rho(B)$.

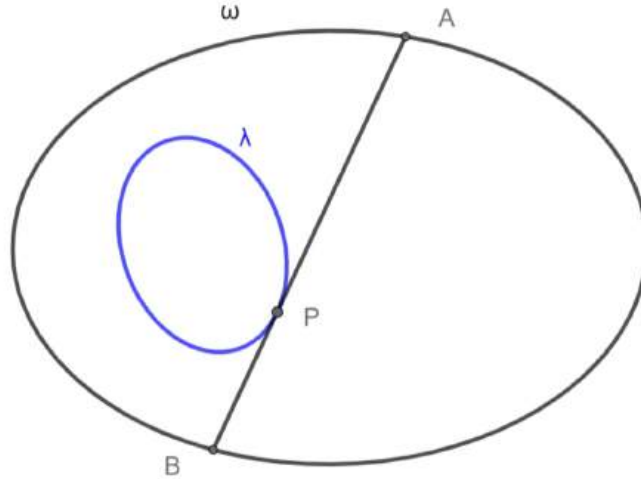


Рисунок 10

Пусть внутренний эллипс задан уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тогда формула плотности задаётся таким же образом: $\rho(M) = \frac{1}{\sqrt{f(M)}}$, где $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Если ограничить функцию f на прямую AB, то получим квадратичную функцию, причём в точке P её значение равно 0, так как она находится на внутреннем эллипсе, а во всех остальных больше нуля, так как они находятся вне эллипса. Таким образом на прямой AB функция f будет принимать вид параболы. Можно представить её в виде $f(t) = pt^2$, где $p > 0$. Поэтому для любых двух точек t_1, t_2 прямой AB получим $\left| \frac{t_1}{t_2} \right| = \frac{\sqrt{f(t_1)}}{\sqrt{f(t_2)}}$. В частности, для точек A и B получаем $\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{f(A)}}{\sqrt{f(B)}} = \frac{\rho(B)}{\rho(A)}$. То есть будет выполняться равенство $AP * \rho(A) = BP * \rho(B)$. Все последующие рассуждения для эллипсов повторяются, поэтому можно сказать, что массы их дуг также не будут меняться при малых смещениях концов хорды, то есть также будут постоянны. Теорема Понселе для эллипсов доказана.

2.2 Разработка программы внеклассных мероприятий по геометрии

Рассмотрим возможности использования теоремы Понселе как средства развития исследовательских способностей учащихся на внеклассных занятиях.

В ходе 3 занятий учащиеся последовательно откроют, сформулируют, рассмотрят различные пути доказательства, докажут и рассмотрят следствия теоремы Понселе.

Сценарий 1 занятия:

В начале занятия проводится актуализация знаний по теме вписанные и описанные окружности. В ходе работы вспоминаются ключевые теоремы о вписанности треугольников, четырёхугольников. Основным пунктом здесь будут являться следующие суждения: в любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну, около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Далее задаётся вопрос: а верны ли обратные утверждения? В любую окружность можно вписать треугольник, около любой окружности можно описать треугольник. Путём несложных рассуждений становится понятно, что данные высказывания также верны, кроме того отсутствует вывод, что возможно построение только одной фигуры, то есть существует бесконечно много вписанных и описанных треугольников для любой окружности.

Однако данные утверждения верны по отдельности. А будут ли они верны в совокупности? То есть необходимо проверить, можно ли построить треугольник, который будет вписан в одну окружность и описан около другой и сколько таких треугольников существует. В этот момент вводится понятие вписано-описанного треугольника.

После некоторых попыток теоретического построения или доказательства можно обратиться к цифровым средствам построения, например к программе GeoGebra. Может возникнуть проблема в том, что не для любых окружностей возможно построение вписано-описанного треугольника. Таким образом уже появляются некоторые ограничения на наличие таких треугольников. Однако, если построить окружности, которые уже будут вписанной и описанной для какого-либо треугольника, то можно будет заметить, что также возможно построение и других вписано-описанных треугольников для этих окружностей. Таким образом учащиеся могут самостоятельно сформулировать теорему Понселе для двух окружностей и треугольников.

На плоскости даны две окружности. Если существует треугольник, вписанный в первую окружность, все стороны которого (или их продолжения) касаются второй, то таких треугольников бесконечно много, причем любая точка первой окружности может быть его вершиной.

В ходе формулировки теоремы обязательно необходимо сделать акцент, что нам подходят не любые две окружности, а только те, для которых уже существует вписано-описанный треугольник. А также обратить внимание на то, что любая точка внешней окружности может быть вершиной треугольника, что они могли наблюдать в ходе цифровых построений.

После формулировки теоремы необходимо перейти к её доказательству. Начать рассуждения можно с того факта, что не любые пары окружностей удовлетворяют данной теореме. То есть требуется вывести ограничения, накладываемые на окружности. Для пары окружностей есть только 3 характеристики: два радиуса и расстояние между центрами, соответственно нам необходимо связать эти параметры.

Упражнение 1. Дан вписано-описанный треугольник. Найти формулу, связывающую радиусы и расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

Если у учащихся возникнут сложности можно доказать вместе с ними лемму о трезубце, которая поможет найти им соотношение необходимых отрезков.

После доказательства формулы Эйлера-Чеппела предлагаем учащимся следующее упражнение.

Упражнение 2. Дана окружность, точка A на ней и точка I внутри нее. Постройте треугольник ABC , вписанный в данную окружность, для которого I – центр вписанной окружности. Сколько решений, в зависимости от расположения точек A и I , имеет задача?

Данное решение подводит учащихся к применению формулы Эйлера-Чапела к доказательству теоремы Понселе. Они должны прийти к выводу, что при расстоянии между центрами, удовлетворяющем условию, начиная из любой точки A можно построить вписано-описанный треугольник.

Таким образом можно получить, что при наличии пары окружностей, для которых существует вписано-описанный треугольник, мы можем построить бесконечно много других вписано-описанных треугольников, начиная из любой точки внешней окружности. То есть теорема Понселе для треугольников доказана.

В конце занятия в качестве задания для самоподготовки можно предложить учащимся ряд заданий, которые продолжают рассуждения о формуле Эйлера-Чеппела и теореме Понселе для треугольников:

1. Докажите, что каждая из невписанных окружностей треугольника пересекает описанную окружность.

2. Воспользовавшись предыдущим упражнением, докажите, что для пары окружностей, расположенных вне друг друга, не существует

треугольников, вписанных в одну окружность, стороны которых (или их продолжения) касаются другой.

3. Сформулируйте и докажите аналог формулы Эйлера–Чапела для вневписанной окружности.

4. Решите упражнение 2 для случая, когда точка I лежит вне окружности и должна быть центром вневписанной окружности.

5. Пользуясь результатами двух предыдущих упражнений, докажите теорему Понселе для случая $n = 3$ для двух пересекающихся окружностей.

Сценарий 2 занятия:

В качестве основной темы для второго занятия будет выступать рассмотрение доказательства теоремы Понселе для четырёхугольников. В частности будет проводиться поиск формулы, связывающей расстояние между центрами вписанной и описанной окружности четырёхугольника, аналогичной формуле Эйлера-Чеппела для треугольника.

В отличие от треугольников не каждый четырёхугольник можно вписать или описать около окружности, поэтому в начале занятия предлагается вспомнить основные факты, касающиеся вписанных и описанных четырёхугольников. А именно следующие теоремы:

Теорема 1. В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Теорема 2. Около четырёхугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равны.

На основании данных фактов предлагается найти примеры четырёхугольников, которые удовлетворяют обоим требованиям и могут быть вписано-описанными. В качестве таковых сразу отмечаем параллелограммы, в частности ромбы, так как они не могут быть вписанными в окружность. Также не берём прямоугольники, так как в них нельзя вписать окружность. В таком случае остаются квадраты, для

которых все доказательства очевидны, трапеции и произвольные четырёхугольники.

Также требуется сказать, что из трапеций нам подходят только равнобедренные, так как только их можно вписать в окружность, однако также требуется наложить ограничение по длинам сторон для соблюдения требования описанности около окружности. А именно необходимо рассматривать равнобедренные трапеции, у которых боковые стороны равны полусумме оснований, то есть средней линии трапеции.

Далее мы переходим к рассуждениям, аналогичным случаю треугольников, а именно к поиску формулы, связывающей радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами. Для начала выведем эту формулу на частном примере равнобедренной трапеции.

Упражнение 1. Найти формулу, связывающей радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами для вписано-описанной трапеции.

В данном задании применяются только базовые знания геометрии, теорема Пифагора и элементарные алгебраические преобразования, поэтому учащиеся способны полностью самостоятельно выполнить его. При возникновении затруднений можно сделать рисунок и указать, какие треугольники требуется рассмотреть.

В результате выполнения задания учащиеся должны вывести формулу Фусса: $l^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}$. Однако пока что мы можем утверждать, что данная формула верна только для случая равнобедренной трапеции, боковые стороны которого равны средней линии. Необходимо доказать истинность данной формулы для других четырёхугольников.

В качестве следующего задания можно предложить найти ещё какие-нибудь вписано-описанные четырёхугольники. В первую очередь

можно натолкнуть учащихся на элементарный случай удовлетворения условию вписанности четырёхугольника, а именно вариант, когда два противоположных угла равны 90° . Для равенства суммы противоположных сторон также рассмотрим элементарный случай когда смежные стороны попарно равны, а следовательно и суммы противоположных сторон также будет равны, то есть четырёхугольник может быть описан около окружности. Также следует указать, что в таком случае углы в 90° могут быть только между парами неравных сторон, потому что в ином случае четырёхугольник станет квадратом.

Таким образом мы пришли к рассмотрению новой фигуры, которая называется дельтоидом, точнее к тому случаю, когда углы между неравными сторонами дельтоида равны 90° .

Упражнение 2. Доказать верность формулы Фусса для дельтоида углы между неравными сторонами которого равны 90° .

В ходе выполнения данного упражнения учащимся необходимо будет воспользоваться теоремой синусов и основным тригонометрическим тождеством. При возникновении трудностей также можно сделать чертеж и указать, какие треугольники необходимо рассмотреть.

После выполнения задания мы убеждаемся, что формула Фусса работает не только для равнобедренной трапеции, но и для дельтоида. После этого можно переходить к доказательству формулы Фусса для произвольного четырёхугольника.

Прежде всего необходимо записать условия вписано-описанного четырёхугольника в общем виде. А именно две системы, первая из которых затрагивает стороны фигуры, а вторая её углы. После чего постепенно переходить к непосредственному доказательству. Однако доказательство достаточно сложное, поэтому разобьём его на несколько подзадач.

Упражнение 3. Найти отношение квадратов радиусов описанной и вписанной окружности произвольного вписано-описанного четырёхугольника.

В ходе выполнения этого упражнения учащимся потребуются знания о теореме синусов и малоизвестная теорема Птолемея о связи сторон и диагоналей вписанного четырёхугольника. При возникновении трудностей указываем треугольники, которые необходимо рассмотреть, а также приводим саму теорему Птолемея для перехода от диагоналей к сторонам.

После нахождения требуемого отношения необходимо перейти к доказательству формулы Фусса. Надо сказать, что оно будет производиться с помощью введения системы координат, так как это самый простой способ нахождения расстояния между двумя точками (в нашем случае между центрами окружностей). В качестве начала координат берем любую из вершин фигуры, направив одну из осей по стороне четырёхугольника.

Отдельным заданием можно выделить определение координат центров вписанной и описанной окружностей и выражение квадрата расстояния между ними.

Далее следует ряд алгебраических преобразований с полученным выражением, которые приводят нас к формуле Фусса. Учащимся потребуются знания множества тригонометрических формул и умение работать с ними. Преобразования достаточно сложные, поэтому рекомендуется проделывать их вместе с учащимися, задавая им наводящие вопросы.

После доказательства формулы Фусса также как и с треугольниками переходим к её применению для доказательства теоремы Понселе для четырёхугольников. Надо сказать, что построить четырёхугольник по заданным описанной окружности и центру вписанной окружности уже представляет из себя крайне сложную задачу, в отличие от такой же для

треугольников. Однако логика доказательства аналогична предыдущему случаю.

На этом занятие заканчивается. В ходе работы были исследованы различные случаи вписано-описанного четырехугольника и доказана формула Фусса. Также было рассмотрено доказательство теоремы Понселе для четырёхугольников. Для самостоятельного рассмотрения можно предложить учащимся следующие задачи:

1. Доказать, что во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями проекции точки пересечения диагоналей на стороны являются вершинами вписано-описанного четырехугольника. Более того, все вписанно-описанные четырехугольники получаются таким способом.

2. Доказать, что окружности, построенные на боковых сторонах вписано-описанной трапеции, как на диаметрах, касаются.

3. Площадь вписано-описанного четырехугольника равна корню из произведения его сторон.

4. Во вписано-описанном четырехугольнике отрезки, соединяющие точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами, перпендикулярны.

5. Внутри окружности дана точка M и взята произвольная хорда AB такая, что $\angle AMB = 90^\circ$. Найдите геометрическое место: а) середин хорд AB ; б) точек пересечения касательных к окружности, проведенных в точках A и B .

6. Выведите теорему Понселе для $n = 4$ из результата предыдущего упражнения.

В ходе выполнения этих заданий учащиеся могут глубже исследовать пройденную тему и найти новые свойства вписано-описанных четырёхугольников.

Сценарий 3 занятия:

В ходе проведения 3 занятия с учащимися необходимо найти новый подход к доказательству теоремы Понселе, ввиду крайней сложности выведения формул связи радиусов вписанной и описанной окружности с расстоянием между их центрами.

В начале занятия следует обратить внимание учащихся на сложность рассмотрения аналогичных формул для пяти и более угольников. Это связано с тем, что условия вписанности и описанности не проходятся в школьной или какой либо другой программе. Также отдельное внимание надо уделить тому, насколько сложным был вывод формулы, связывающей радиусы вписанной и описанной окружности с расстоянием между их центрами. Кроме того данный подход к доказательству теоремы Понселе требует последовательного рассмотрения каждого вида многоугольников и не имеет перехода к общему случаю. Поэтому необходимо найти новый подход к изучению теоремы Понселе.

Для начала предложим учащимся более тривиальную задачу, характеризующую нашу теорему.

Упражнение 1. Даны две concentric окружности, причём внешняя является описанной для некоторого n -угольника, а внутренняя вписанной для того же n -угольника. Докажите, что для данных окружностей существует бесконечно много вписано-описанных n -угольников, причём любая точка внешней окружности может быть из вершиной.

Данная задача является крайне простой и имеет несколько вариантов решения. Например, рассмотрение поворота исходного вписано-описанного n -угольника вокруг центра двух окружностей, что возможно благодаря тому, что все дуги внешней окружности равны между собой. По сути мы доказали теорему Понселе для concentric окружностей. Однако в общем случае дуги не равны и элементарным поворотом получить новую фигуру не получится. А что если найти другую

величину, которая будет оставаться неизменной при перемещении вершин по внешней окружности?

Можно дать учащимся попробовать проверить различные собственные варианты. После нескольких попыток можно дать подсказку, что новая величина также должна быть связана с дугами внешней окружности, которые стягиваются сторонами многоугольника. Далее можно предложить рассмотреть такую величину, как степень точки относительно внутренней, а точнее сумму степеней точек каждой дуги. Однако довольно очевидно доказывается, что данная сумма не равна для всех дуг, а наоборот возрастает, причём квадратично. После этого предлагаем рассмотреть величину, обратную квадрату степени точки относительно внутренней окружности. Назовём данную величину плотностью точки, а сумму плотностей точек дуги назовём массой дуги.

Упражнение 2. Доказать, что масса дуги не меняется при движении точки по внешней окружности.

В первую очередь при выполнении данного упражнения учащимся необходимо рассмотреть отношение плотностей точек одной касательной хорды. Получим, что плотность точки также будет характеризовать массу этой точки относительно точки касания хорды и внутренней окружности. После получения данного соотношения можем перейти к рассмотрению самого изменений массы дуги.

Прежде всего необходимо сделать акцент на том, что мы рассматриваем незначительное изменение положения точки на внешней окружности, при котором дуга приблизительно равна отрезку, соединяющему концы дуги. Проведя некоторые геометрические рассуждения о подобных треугольниках, мы приходим к подобию двух треугольников из которого выводим тот факт, что отношение массы исходной дуги к массе дуги, полученной при перемещении точки равно 1, а следовательно масса дуги не изменилась.

Таким образом мы нашли величину, остающуюся неизменной для любой дуги внешней окружности. Далее необходимо применить полученный факт к доказательству теоремы Понселе. Нам необходимо провести ряд рассуждений, аналогичных случаю концентрических окружностей, после чего мы получим, что при движении вершины многоугольника по внешней окружности фигура также будет оставаться вписано-описанным многоугольником.

Данные рассуждения являются доказательством теоремы Понселе в общем случае, которое мы и искали.

В качестве самостоятельного исследования можно предложить учащимся рассмотрения последующих случаев теоремы Понселе:

- Для двух эллипсов;
- Для пересекающихся окружностей;
- Для непересекающихся окружностей;
- Для гиперболы в качестве внешней кривой и др.

Таким образом в ходе 3 занятий учащиеся исследовали для себя новую область геометрии и получили инструмент для дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование подтвердило эффективность развития исследовательских способностей школьников через систему геометрических рассуждений во внеклассной деятельности. Особое значение в работе уделялось теореме Понселе как мощному инструменту формирования исследовательской культуры учащихся.

Теоретический анализ проблемы показал, что геометрические задачи обладают уникальным потенциалом для развития исследовательских компетенций. Теорема Понселе, с ее богатыми возможностями для визуализации и многоуровневыми связями с различными разделами математики, оказалась особенно продуктивной в этом отношении. Ее изучение позволяет учащимся освоить важные исследовательские навыки: от постановки проблемы и выдвижения гипотез до их проверки и формулирования выводов.

В практической части исследования была разработана методика изучения теоремы Понселе во внеклассной работе. Особое внимание уделялось:

- поэтапному освоению материала от простых случаев к сложным;
- использованию динамических геометрических сред для визуализации;
- организации самостоятельной исследовательской деятельности учащихся.

Особую ценность показало использование теоремы Понселе как связующего звена между различными разделами математики. Это позволило учащимся увидеть единство математического знания и сформировать целостное научное мировоззрение.

Практическая значимость работы заключается в разработке:

- системы заданий на основе теоремы Понселе для внеклассной работы;
- методических рекомендаций по организации исследовательской деятельности;

Таким образом, проведенное исследование подтвердило, что систематическое использование геометрических рассуждений, в частности изучение теоремы Понселе, во внеклассной деятельности является эффективным средством развития исследовательских способностей школьников. Предложенная методика может быть рекомендована для внедрения в практику работы общеобразовательных учреждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования : Приказ министерства образования и науки РФ от 17 декабря 2010 г. № 1897 // Вестник образования России. 2011. № 15. С. 39–65.
2. Об организации внеурочной деятельности при введении федерального государственного образовательного стандарта общего образования: письмо Министерства образования и науки от 12 мая 2011 г. № 03–296.
3. Акопян А. А., Карно Е. В., Шабанова А. В. Эффективность внеурочной деятельности по математике // Вестник науки. 2024. № 12 (81). С. 913–922.
4. Богоявленская Д. Б. Психология творческих способностей : монография. М. : Академия, 2002. 320 с.
5. Григорьев Д. В., Степанов П. В. Внеурочная деятельность школьников. Методический конструктор: пособие для учителя. М. : Просвещение, 2014. 223 с.
6. Далингер В. А. Методика работы над формулировкой, доказательством и закреплением теоремы: Книга для учителя. Омск : ОмГПУ, 1995. 196 с.
7. Дроздов В. Б. Формула Фусса // Матем. обр. 2017. № 1(81). С. 27–32.
8. Кожемякина Л. В. Проектная и исследовательская деятельность в школе во внеурочной деятельности // Инновационная наука. 2022. № 6–2. С. 89–91.
9. Леонтович А. В. Модель исследовательской деятельности учащихся // Исследовательская работа школьников. 2003. № 4. С. 34–42.
10. Протасов В. Ю. Два века теоремы Понселе // Квант. 2014. № 5–6. С. 2–12.

11. Савенков А. И. Психологические основы исследовательского подхода к обучению : учебное пособие. М. : Ось-89, 2006. 480 с.
12. Санько А. М., Борисова С. П. Организация исследовательской деятельности обучающихся // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. Социальные, гуманитарные, медико-биологические науки. 2023. № 88. С. 42–48.
13. Седакова В. И. Формирование исследовательских качеств у школьников в процессе решения математических задач // Вестник Сургутского государственного педагогического университета. 2010. № 1. С. 74–81.
14. Семенов Е. Е. Принцип систематизации в преподавании математики // Математика в школе. 2004. № 4. С. 28–32.
15. Совертков П. И. Проектирование поисково-исследовательской деятельности учащихся и студентов по математике и информатике. Сургут : РИО СУРГПИ, 2004. 167 с.
16. Хафизова Н. Ю., Обоскалов А. Г., Смушкевич Л. Н. К вопросу о формировании у обучающихся готовности к выбору инженерных профессий // Современные проблемы науки и образования. 2017. № 6. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=27235>. Заглавие с экрана (дата обращения: 13.04.2025).

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра «Математическое
образование»

Направление подготовки
44.03.01 «Педагогическое образование»
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024 г.
 Паньженский В. И.

Задание

по ВКР студента Рожкова Артёма Сергеевича.
(ФИО полностью)

Тема работы: «Формирование исследовательских навыков в области геометрии
во внеурочной деятельности обучающихся».

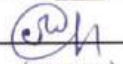
Утверждена приказом по университету от « 25.12 » 20 24 г. № 1350/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 6 » мая 20 25 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования.	Октябрь – ноябрь 2024	выполнено.
2.	Определение роли и значения внеурочных видов деятельности в развитии исследовательских способностей	Декабрь 2024	выполнено
3.	Подготовка теоретического материала по изучению теоремы Понселе	Январь – февраль 2025	выполнено
4.	Разработка структуры внеурочных занятий по геометрии.	Март – апрель 2025	выполнено
5.	Разработка конспектов внеурочных занятий по теме «Теорема Понселе».	Апрель 2025	выполнено
6.	Оформление текста работы.	Май – июнь 2025	выполнено
7.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь 2025	выполнено.

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель  Сорокина М. В.
(подпись) (ФИО)

Задание принял к исполнению  Рожков А. С.
(подпись) (ФИО)

Ректору Пензенского
государственного университета
А. Д. Гулякову
студента 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Рожкова Артёма Сергеевича

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Рожков Артём Сергеевич, студент 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика», прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат.ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Формирование исследовательских навыков в области геометрии во внеурочной деятельности обучающихся», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

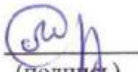
Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


(подпись)

18.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 18.05.25
(дата)

Руководитель ВКР 
(подпись)

Сорокина М. В.
(ФИО)

Протокол
проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной
квалификационной работы на тему
**«Формирование исследовательских навыков в области геометрии во
внеурочной деятельности обучающихся»**
студента 4 курса **Рожкова Артема Сергеевича**
направления подготовки **44.03.01 «Педагогическое образование»**,
профиль подготовки **«Математика»**
Руководитель ВКР Сорокина Марина Валерьевна

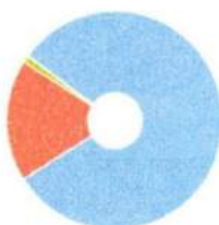
Автор: Журавлева Е.Г.

Название документа: Диплом

Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования "Пензенский государственный
университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
17,85%

Оригинальность:
81,12%

Цитирование:
1,03%

Самоцитирование:
0%

«Совпадения», «Цитирование», «Самоцитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 96,6% текста документа, исключено из проверки: 3,4% текста документа. Разделы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография.

- Совпадения** — фрагменты проверенного текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверенного текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- Самоцитирование** — фрагменты проверенного текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверенного документа. Показатель «Самоцитирование» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- Цитирование** — фрагменты проверенного текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированию относятся также шаблонные фразы: библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант», нормативно-правовая документация. Показатель «Цитирование» — это доля фрагментов проверенного текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверенного документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- Оригинальный текст** — фрагменты проверенного текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверенного текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверенного документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определения корректности и правильности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверенного документа остаются в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 97

Тип документа: Не указано

Дата проверки: 18.05.2025 21:06:35

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 41

Символов в тексте: 52941

Слов в тексте: 6519

Число предложений: 422

18.05.25

(дата)

(подпись)

М. В. Сорокина

(ИОФ руководителя ВКР)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Формирование исследовательских навыков в области геометрии
во внеурочной деятельности обучающихся»
студента Рожкова Артема Сергеевича
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Рожкова А.С. посвящена изучению возможностей организации исследовательской деятельности школьников в рамках дополнительного образования. В работе представлено методическое сопровождение исследовательской задачи для обучающихся, обладающих высокими интеллектуальными способностями и проявляющих повышенный интерес к математике.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы. Во введении представлены цель и задачи исследования, отмечается актуальность темы, выделены предмет и объект исследования. В первой главе излагаются теоретические вопросы, касающиеся понятия исследовательских способностей, роли геометрии в формировании логического мышления и исследовательских навыков, а также даны основные характеристики внеклассной работы как средства развития исследовательских способностей. Во второй главе представлена методическая разработка для слушателей математического кружка, базирующаяся на изучении и доказательстве теоремы Понселе в различных случаях. Детально разработаны занятия, в ходе которых учащиеся самостоятельно открывают и доказывают различные вариации теоремы Понселе.

Работа Рожкова А.С. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть использованы в работе учителя математики при организации научно-исследовательской деятельности и подготовки школьников к олимпиадам.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «отлично».

Руководитель, к. ф.-м. н, доцент кафедры
«Математическое образование»



М. В. Сорокина