

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Обучение методам доказательства
при изучении элементов теории чисел в школе»**

Студент	<u>Юдн - 04.06.21</u> (подпись, дата)	<u>Юдина Надежда Олеговна</u> (ФИО полностью)
Руководитель	<u>Мф 04.06.21</u> (подпись, дата)	<u>Монахова О.А.</u> (фамилия, инициалы)
Нормоконтролёр	<u>Жу 29.06.21</u> (подпись, дата)	<u>Журавлева Е.Г.</u> (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 04.06.2021 № 8)

Заведующий кафедрой	<u>Жу 07.06.2021</u> (подпись, дата)	<u>Паньженский В.И.</u> (фамилия, инициалы)
---------------------	---	--

Работа защищена с оценкой 5/отл (протокол заседания ГЭК от 08.07.2021 № 19)

Секретарь ГЭК	<u>Жу - 08.07.2021</u> (подпись, дата)	<u>Журавлева Е.Г.</u> (фамилия, инициалы)
---------------	---	--

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические основы обучения доказательству	5
1.1. Задачи на доказательство в школьном курсе математики и заданиях ГИА	5
1.2. Доказательства, виды и методы доказательств.....	7
1.3. Методические аспекты обучения доказательству	13
1.4. Специфика обучения доказательствам и формирование мотивации.	16
Глава 2. Обучение методам доказательства при изучении теории чисел	21
2.1. Этапы работы при обучении доказательствам	21
2.2. Система упражнений для реализации этапов обучения доказательствам.....	22
2.3. Технологические карты уроков с использованием системы упражнений для обучения методам доказательства.....	45
Заключение	58
Список литературы	59
Приложение	61

Введение

Развитие цифровых технологий привело к тому, что человеческая способность быстро и правильно считать уже не востребована ни в одной сфере деятельности. Громоздкие вычисления, сложные расчеты, долгие выкладки и преобразования теперь легко выполняются при наличии калькулятора, или математических программ для решения более серьезных задач. Значит, перед учителями математики встают совершенно иные задачи, по сравнению с предыдущим периодом.

Чрезмерный поток информации, обрушивающийся на школьника, не усваивается. А наличие средств, обеспечивающих легкий доступ к этой информации, снижает мотивацию к её усвоению. Например, есть список тригонометрических формул, его можно в любой момент «скачать», зачем спрашивается запоминать, то, что всегда под рукой? Но без знания формул, без этой «общей картины» в голове не выполнишь ни одного преобразования, потому что не будешь видеть, к чему нужно стремиться.

На современном этапе главной задачей учителя становится развитие мыслительной деятельности. Одним из её компонентов является умение выстраивать логическую цепочку рассуждений, делать выводы. Кроме того математика как никакая другая область человеческих знаний богата закономерностями, и задача учителя показать их ученикам, научить обнаруживать их, раскрывать и обосновывать, и конечно, применять при решении различных задач.

Математические доказательства – один из инструментов в руках учителя, позволяющий формировать мышление учащихся. В школе напрямую с доказательствами сталкиваются в 7 классе в курсе геометрии, однако зачастую у учеников возникают сложности. Чтобы этих сложностей избежать можно начинать знакомить школьников с доказательствами, начиная с 5-6 класса при изучении элементов теории чисел.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения учащихся различным доказательствам теории чисел в курсе математики основной школы.

Цель исследования: разработать систему упражнений направленную на обучение методам доказательства при изучении элементов теории чисел в школе.

Задачи исследования:

1. Описать методы доказательства, применяемые в теории чисел.
2. Выделить этапы работы при обучении доказательствам.
3. Составить систему упражнений для реализации этапов обучения доказательствам.
4. Разработать технологические карты уроков, на которых используется разработанная система упражнений.

Решение поставленных задач потребовало привлечения следующих методов исследования:

- анализ методической литературы, а также анализ учебников и школьной программы по математике для 5-9 классов;
- обобщение и систематизация теоретических и практических знаний по рассматриваемой теме.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанная система упражнений может быть использована для обучения методам доказательства в процессе изучения теории чисел в школе.

Данная работа состоит из 2 глав, введения, заключения и списка литературы. В первой главе рассмотрены теоретические основы обучения доказательству, во второй разработана система упражнений для обучения доказательствам и технологические карты, где показано интеграция данных заданий в учебный процесс.

Глава 1. Теоретические основы обучения доказательству

1.1. Задачи на доказательство в школьном курсе математики и заданиях ГИА

Мыслительная деятельность человека является сложным и многогранным процессом, она осуществляется сразу на двух уровнях: сознательном и бессознательном. Мышление человека базируется на логике и интуиции – противоположных, но при этом тесно связанных понятиях. Логика не опирается на какие-либо внешние факторы (опыт, интуицию и другие), но она всегда от истинных посылок приводит к истинным заключениям. Интуиция же является способностью постичь истину без ее обоснования логическим путем, то есть обнаружение закономерностей на подсознательном уровне. [6]

Развитие математики и науки в целом невозможно без интуиции и логики, поэтому в современном мире роль математики в школе предполагает улучшение математической подготовки учащихся, важное место в котором имеет умение открывать закономерности, обосновывать их и применять на практике. Формирование алгоритмического, эвристического, абстрактного мышления учащихся осуществляется также в процессе доказательства, при этом мы должны развивать у учащихся как логическое, так и интуитивное мышление. [6] В естественных науках люди постоянно обращаются к экспериментам и наблюдениям, чтобы установить истинность каких-либо утверждений.

В математике же, утверждение будет считаться доказанным только если, если его вывели логически из предыдущих рассуждений. Поэтому проблема обучения учащихся доказательству всегда являлась одной из главных в методике преподавания математики. В школе напрямую с доказательствами сталкиваются в 7 классе в курсе геометрии, однако зачастую у учеников возникают сложности, чтобы этих сложностей избежать можно начинать знакомить школьников с доказательствами, начиная с 5 класса при изучении элементов теории чисел и продолжать на протяжении всего курса математики в школе. Это обосновано тем, что в заданиях ВПР для 5-6 классов включены

задачи по теории чисел и на логическое обоснование математических утверждений.

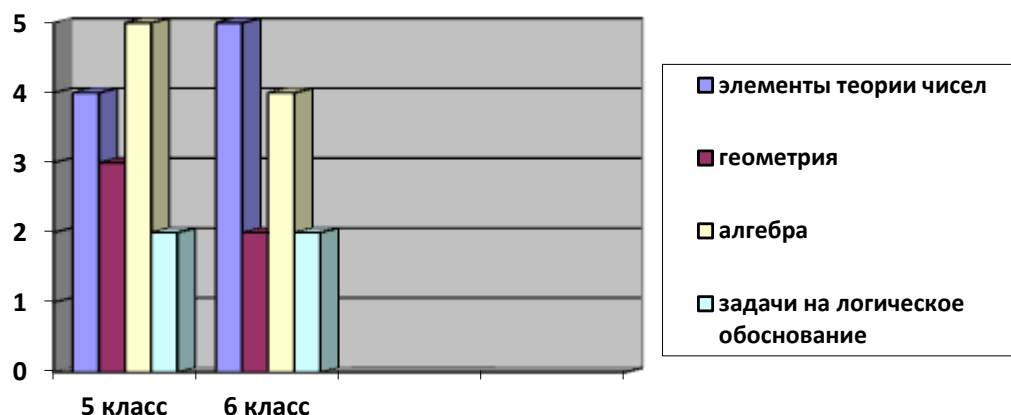


Рис.1. Структура ВПР в 5-6 классах

Также при решении заданий выпускных экзаменов наибольшую сложность вызывают задачи на доказательство, а в ЕГЭ за решение задания №19 проверяющего знания по теории чисел берутся очень немногие ученики.

Далее приведена диаграмма, отображающая процентное количество решенных заданий на ЕГЭ в 2020 году.

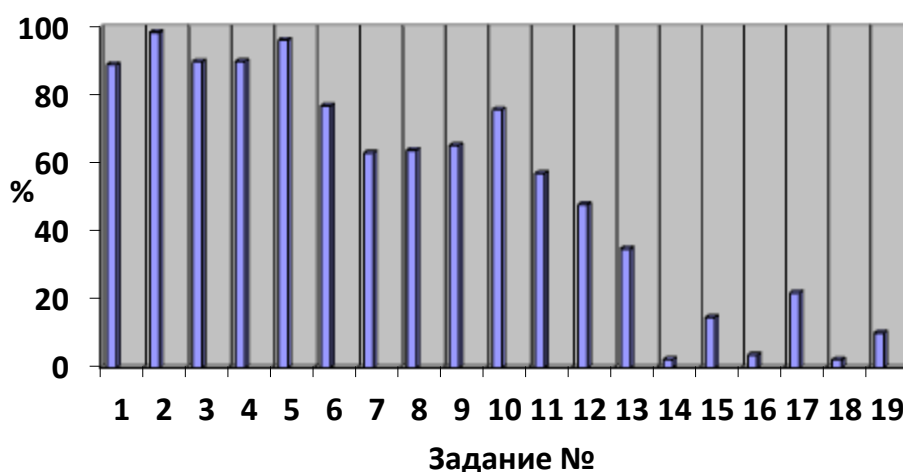


Рис. 2. Количество решенных заданий на ЕГЭ в 2020 году

Задания № 14,16,18,19 являются заданиями на вычисление и доказательство, на гистограмме наглядно показано, что процент выполняемости данных заданий существенно ниже остальных заданий.

Нас рис. 3 приведена диаграмма, отражающая количество верно выполненных пунктов задания №19.

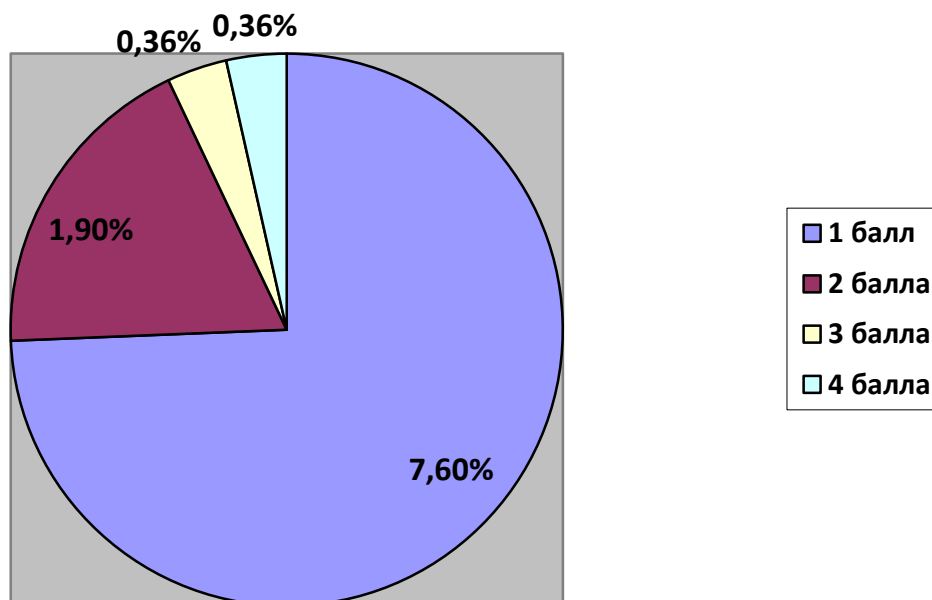


Рис. 3. Количество правильно решенных пунктов задания №19 в ЕГЭ

Как видно на этой диаграмме большинство учеников получили 1 балл, что означает, что был решен только 1 пункт 19 задания, наличие проблемы с проведением доказательства у учеников подтверждают приведенные статистические данные. Возможно, данную ситуацию можно улучшить, если работа с доказательствами начнется как можно раньше на уроках математики 5-6 класса. Поскольку программа этих классов содержит большой объем материала теории чисел, то обучение доказательству можно с небольших утверждений и теорем, предлагаемых данной теорией.

1.2. Доказательства, виды и методы доказательств

Для того чтобы начать обучать доказательству следует разобраться что такое доказательство и выделить его виды.

Доказательство – это форма логического мышления, в которой из очевидной правдивости некоторых суждений, последовательным образом на основании некоторых законов выводится истинность исходного суждения. [14]

Рассуждение — это такой метод получения нового знания, который представляет собой логический вывод заключения из имеющихся данных.

Аргументация — процедура приведения какой-либо совокупности доводов (аргументов) ради подтверждения какого-либо выдвинутого ранее положения.

Обоснование можно трактовать в широком и в узком смысле. В широком смысле: обоснование – способ убеждения в правильности чего-либо, в узком — толкование аналогично аргументации.

В доказательстве различают несколько видов утверждений: тезис – то утверждение, которое нужно обосновать и аргументы или доводы – те утверждения, при помощи которых доказывается тезис, а также различают форму доказательства – способ логической связи между тезисом и аргументами. [1]

Аргументами могут быть:

- неопровержимые факты: результаты экспериментов, исследований;
- свойственные любой науке определения понятий;
- аксиомы и постулаты – утверждения, составляющие основу доказательной базы науки;
- законы науки (необходимые, существенные, устойчивые, повторяющиеся отношения, связи между явлениями) и теоремы.

При рассмотрении роли доказательства в обучении нередко используют такой термин, как идея доказательства. Выделение идеи доказательства целесообразно для усвоения доказательства, а значит, для процесса обучения математике, она является одним из инструментов работы с теоремой и ее доказательством. [2]

Доказательства, по способу ведения, подразделяются на прямые и косвенные.

Прямым обоснованием утверждения T следует называть конечную последовательность предложений $j_1, j_2, \dots, j_n$ данной теории, которая удовлетворяет данным требованиям:

- 1) предложение j_1 – является началом;
- 2) каждое следующее утверждение j_i последовательности или аксиома, или получена из предыдущих утверждений согласно одному из правил математической логики;
- 3) заключительным предложением данной последовательности j_n является утверждение T .

Иногда из-за того, что прямое доказательство, в силу определения, является громоздким, наравне с аксиомами выступают ранее выведенные утверждения.

Косвенным называется доказательство в ходе проведения, которого обосновывается ложность утверждения, являющегося отрицанием исходного. Одним из самых известных видов косвенного доказательства в школе является доказательство методом «от противного». [19]

По форме умозаключения, в которой совершаются доказательства, различают индуктивные и дедуктивные.

Дедукция – такой способ рассуждения, когда доказательство ведется от общих положений к частным заключениям. Например, применение любого из признаков делимости. [7]

Индукция обратна дедукции, здесь способ рассуждения ведется от частного к общему, от фактов к обобщениям. Примером может служить выведение признаков делимости: их устанавливают при помощи поиска закономерностей в таблице умножения. [8]

В математике существует большое количество методов доказательств, эти методы могут быть как и универсальными, так и достаточно узкими, подходящими только для определенной задачи. Рассмотрим в таблице №1 неко-

торые виды математических доказательств, которые могут быть изучены школьниками в курсе теории чисел и их суть.

Таблица №1 – Виды математических доказательств

Название метода	Суть метода
Прямое доказательство	Прямое доказательство предусматривает применение только непосредственного дедуктивного вывода из считающихся верными утверждений (аксиом, ранее доказанных лемм и теорем), без использования суждений с отрицанием каких-либо утверждений.
Метод контрпримера	Иногда в математических задачах требуется доказать ложность какого-либо высказывания, тогда можно построить контрпример – объект, который удовлетворяет условиям задачи, но не удовлетворяет заключению.
Метод математической индукции	<p>Метод математического доказательства, который используется чтобы доказать истинность некоторого утверждения для всех натуральных чисел. Работоспособность данного принципа заложена в аксиомах Пеано для натуральных чисел: предположим, что для каждого натурального числа $n \geq n_0$ есть утверждение $P(n)$, обладающее двумя свойствами:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $P(n_0)$ истинно; 2) для любого натурального $k \geq n_0$ из справедливости $P(k)$ вытекает истинность $P(k + 1)$, то есть $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$. <p>Тогда утверждение $P(n)$ верно для любого натурального числа $n \geq n_0$.</p>
Метод «от противного»	Доказательство «методом от противного» производится по следующей схеме: сначала предполагается, что утверждение, которое надо доказать ложно. Затем, с помощью цепочки логических рассуждений приходят к выводу, что полученное утверждение невозможно или противоречит исходному утверждению, из чего следует истинность исходного утверждения.

Принцип наибольшего числа	Принцип наибольшего числа утверждает, что в любом непустом конечном множестве натуральных чисел найдётся наибольшее число.
Принцип наименьшего числа	Принцип наименьшего числа утверждает, что в любом непустом (не обязательно в конечном) множестве натуральных чисел существует наименьшее число. Принцип наименьшего числа также можно сформулировать следующим образом: не существует бесконечно убывающей последовательности натуральных чисел.
Метод бесконечного спуска	Метод бесконечного спуска часто применяется при доказательстве неразрешимости уравнений в натуральных или целых числах. Пусть требуется показать, что уравнение $f(x, y, z, \dots) = 0$ не имеет решений в натуральных числах. Если из предположения о том, что уравнение имеет некоторое натуральное решение $a, b, c \dots$ удастся вывести существование другого «меньшего» решения $a_1, b_1, c_1, \dots$, то продолжая аналогично, построим бесконечно убывающую последовательность натуральных чисел, чего быть не может. Значит, уравнение не имеет решений в натуральных числах.
Принцип Дирихле	Принцип Дирихле можно объяснить на примере кроликов в клетках: если общее число кроликов больше числа клеток, в одной из этих клеток наверняка сидит более одного кролика. Также этот принцип может выглядеть следующим образом: в n клетках невозможно рассадить поодиночке $n + 1$ кроликов, т.е. найдётся клетка, где сидят не менее двух кроликов. Формулировка в терминах отображений между множествами: при отображения множества P , содержащего $n + 1$ элементов, в множество Q , содержащее n элементов, найдутся два элемента множества P , имеющие один и тот же образ. Таким образом, чтобы применить принцип Дирихле к решению задач, надо указать, что принимать за "клетки", а что за "кроликов", а также указать способ, которым надо усаживать "кроли-

	<p>ков" в "клетки".</p> <p>При рассмотрении задач на делимость целых чисел, то принцип Дирихле можно сформулировать так: среди $p + 1$ целых чисел найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на p.</p>
Метод инвариантов и полуинвариантов	<p>Инвариант – термин, используемый в математике и физике, а также в программировании, обозначает нечто неизменяемое.</p> <p>Все задачи, объединённые условным названием «инвариант», имеют следующий вид: даны некоторые объекты, над которыми разрешается выполнять определённые операции.</p> <p>Как правило, в задаче спрашивается, можно ли при помощи этих операций из одного объекта получить другой? Если можно, то нужно привести пример, как это сделать. Если нельзя, то нужно доказать, что это невозможно.</p> <p>В качестве инварианта могут выступать самые разные величины - чётность-нечётность, сумма, произведение, остаток от деления и т.д.</p> <p>Если значения инварианта для начального и конечного объекта не равны, то ответ на поставленный вопрос отрицателен.</p> <p>Наиболее часто встречаются следующие инварианты: раскраска, выделение части объекта, остаток от деления, алгебраическое выражение, полученное из условия задачи.</p> <p>Иногда применяется понятие "полуинвариант".</p> <p>Полуинвариант - величина, которая в процессе изменения может только увеличиваться (уменьшаться).</p>
Метод перебора всех возможных вариантов	<p>Сущность метода перебора заключается в том, что необходимо:</p> <p>а) рассматривать все возможные случаи;</p> <p>б) найти те, которые удовлетворяют условию данной задачи;</p>

	в) показать, что других решений нет.
Конструктивный метод	Конструктивное доказательство — доказательство, в котором существование математического объекта доказывается путем прямого построения.

1.3. Методические аспекты обучения доказательству

Методические аспекты обучения доказательству, определяются не только понятием содержательной части доказательства, но и теми целями, которые выдвигаются в ходе его изучения. Одним из немаловажных аспектов обучения доказательству являются возрастные и индивидуальные возможности учащихся. Формирование образовательной программы, в рамках которой обучения доказательствам, могут осуществляться на более ранних этапах, должно происходить с учётом методов, средств и форм обучения математике. Исходя из этого, обучение доказательствам должно представлять собой слаженную систему, которая учитывает все ее многочисленные структурные подразделения. Рассмотрим некоторые точки зрения на определения сути понятия обучение доказательству.

Одним из примеров является точка зрения, где под обучением доказательству понимается обучение мыслительным процессам поиска, открытие и построение доказательства, а не обучение воспроизведению и заучиванию готовых доказательств. [17] Данная концепция возникла, очевидно, в противовес традиционной форме обучения, которая была ориентирована на заучивание и последующее воспроизведение теорем, но при этом вовсе не уделялось времени на самостоятельную работу учащихся по открытию и обоснованию каких-либо математических фактов.

Другой подход к определению сути данного обучения можно сформулировать в виде отдельных аспектов, которые необходимо учитывать при проведении данной работы. Данные аспекты основаны на трудах психологов, например М.Г. Ярошевского. Проанализировав эти работы можно выделить

ряд рекомендаций для успешного обучения школьников различным способам доказательств. [21]

- 1) следует предоставлять школьникам широкие возможности свободного выбора необходимых посылок, как при доказательстве, так и при решении задач;
- 2) в учебных целях учителю важно ориентироваться на максимальные, а не на минимальные познавательные возможности учеников.
- 3) следует давать детям больше самостоятельности, потому что постоянная опека в соединении с неверием в силы учащихся приводит к тому, что изучение тех или иных положений протекает однообразно и скучно.
- 4) учитель должен постоянно наблюдать за процессом мышления учащихся, анализировать и изучать его. Необходимо создавать такие ситуации на уроках, чтобы ученики стремились выступать в роли первооткрывателей.

Выделим некоторые особенности процесса обучения доказательствам:

1) развитие доказательного мышления проходит две стадии. В младшем школьном возрасте ученики лучше усваивают готовые доказательства, могут их воспроизводить, находить ошибки в них, восстанавливать логические цепочки. В старшем школьном возрасте ребята уже лучше владеют аналитическими навыками и могут самостоятельно строить доказательства, исходя из имеющегося багажа знаний; [18]

2) доказательство - непростая деятельность, для овладения которой необходимо формировать у учеников такие качества как: стремление к неизведанному, любознательность, умение логически мыслить, применять нестандартный подход. Многие ученые посвящали свои труды разработке методической системы для формирования данных качеств. Приведем несколько высказываний из таких работ:

- обучение дедукции, включающие разъяснение простейших схем дедуктивных рассуждений, не явно применяемых в доказательствах, является

необходимым условием успешного применения новых знаний (А.А.Столяр). [18]

- процесс доказательства - сложный и многогранный процесс мышления, и он формируется постепенно, от простых к более сложным структурам. Также должны поступать и педагоги: постепенно увеличивать сложность и уровень строгости теорем и утверждений.

Для обучения доказательству необходим следующий набор действий:

- подведение объекта под понятие;
- соответственно конкретной теореме или задаче необходимо выделить существенные и несущественные признаки в ее формулировке, сформировать необходимые и достаточные условия доказательства ;
- развёртывание условий;
- вывод системы следствий;
- выделение в условии поисковых областей;
- вычленение из формулировки теорем их объектов, условия, заключения;
- перевод теоремы на символичный язык, указание ее возможных иных трактовок;
- построение обоснования так, чтобы каждое последующее предложение было выведено из предыдущих.

Несколько другая точка зрения на правило вывода доказательства у З.И.Слепкань: «положительный эффект в обучении применению элементов логики и математической символики был обнаружен у способных школьников, а средние и слабые учащиеся по-прежнему плохо рассуждали и решали задачи». [17] Следует отметить, что наилучшим образом результат достигается тогда, когда обучение доказательствам ведется в совокупности с обучением стандартным математическим действиям. При этом, даже действия ученика по разбору и осмыслению уже готового доказательства, приводят к запоминанию и усвоению стандартных математических силлогизмов.

Несмотря на то, что ученые придерживаются различных точек зрения на процесс обучения доказательству: одни делают акцент на самостоятельном выведении закономерностей, а другие на рассмотрении уже готовых доказательств, можно сказать, что это две стороны одной проблемы, отражающий разный путь ее достижения: логический и эвристический. На самом деле, реальный процесс доказательства должен включать в себя и логическую, и эвристическую часть, они должны дополнять друг друга. Таким образом, можно сделать вывод, что разные методические аспекты обучения неразрывно связаны между собой, и учеников следует учить, как рассматривать готовые доказательства, так и давать возможность самим проводить исследования и обосновывать утверждения.

1.4. Специфика обучения доказательствам и формирование мотивации.

Одним из важных факторов в усвоении методов доказательств является мотивационная составляющая, важно показать школьникам необходимость обоснования каждого их шага. При этом следует учитывать возрастные и индивидуальные особенности каждого учащегося. То как ученик распознает, ищет, строит и усваивает доказательство в данной конкретной ситуации, позволяет определить некоторые учебные уровни, которых может достичь и по которым может продвигаться учащийся. [16] По мнению Ж. Пиаже именно на эти уровни доказательных рассуждений и следует опираться при обучении доказательствам. Данные уровни и их особенности представлены в таблице № 2.

Таблица № 2 – Уровни доказательных рассуждений

Название уровня	Направленность рефлексии	Форма представления доказательства	Понимание доказательства	Характер Взаимодействия словесно-логических и наглядно-образных компонентов	Основной фактор

Здравого смысла	Получаемый результат	Единовременный визуально-представленный непрерывный акт	Наглядная модель, демонстрирующая смысл утверждения	Образы заменяют доказательные рассуждения	Потребность в выяснении справедливости конкретного математического факта
Умственного опыта	Соподчинение отдельных шагов общей логике проводимого обоснования	Цепочка взаимосвязанных суждений и заменяющих их визуальных образов	Упорядоченный ход рассуждений, убеждающий в справедливости рассуждений	Образы дополняют доказательные рассуждения	Стремление к максимальной возможной субъективной убедительности проводимых доказательных процедур
Мысль мысли	Характер собственной мыслительной деятельности	Логически развернутая последовательность шагов, представленная в вербально-символической форме	Конечная последовательность предположений в каждое, из которых является либо аксиомой, либо вытекает из аксиом	Образы являются средством стимуляции и интерпретации логических выводов	Потребность в поиске объективно-логических оснований

Для того чтобы ученики переходили с одного уровня на другой следует подбирать такие методические средства и приемы, формирующие умения и потребности школьников в изучении и составлении доказательств.

Рассмотрим некоторые методы формирования умений доказывать.

1.Сообщающий метод – метод, при котором главная роль в процессе отводится учителю, а для учеников на определенных этапах урока создаются проблемные ситуации и задачи, чтобы акцентировать их внимание на чем-то и пробудить у них интерес. Проблемы в процессе введения нового материала решает сам учитель. Использовать данным метод следует только в тех случаях, когда изучаемый материал либо слишком сложный, либо наоборот слишком легкий для восприятия школьниками.

2.Познавательный метод – данный метод основывается на том, что учитель дает некоторое задание ученикам, затем на конкретных примерах

иллюстрирует им каким образом и с помощью каких методов они должны прийти к решению данного задания. При этом учащиеся усваивают логику рассуждений и последовательность приемов, используемых преподавателем в процессе доказывания, затем самостоятельно выполняют действия по модели, сравнивают факты и явления, знакомятся с методами построения доказательств.

3. Диалогический метод – при использовании данного метода доказательство ведется совместными усилиями учителя и учеников, причем главная роль отводится ученикам, особенно в тех случаях, когда они уже хорошо знакомы с фактами, необходимыми для доказательства. Этот метод создает широкое поле для активной творческой, самостоятельной познавательной деятельности учеников, обеспечивает тесную обратную связь в обучении, ученик привыкает высказывать свои мнения вслух, доказывать и отстаивать их, что, как нельзя лучше, воспитывает активность его жизненной позиции.

4. Частично-поисковый или эвристический метод – применим на довольно высоком уровне знаний учеников, поиски доказательства осуществляются самими учениками либо в виде самостоятельной работы с последующей защитой, либо в виде группового обсуждения, так называемого «мозгового штурма». Аналогично с другими методами, учитель предоставляет ученикам задачу, но при этом сам играет роль лишь консультанта при обсуждении путей решения. [18]

В школе для демонстрации потребности в доказательстве можно использовать, такие приемы как, оптические иллюзии или определенные геометрические конфигурации, в которых требуется что-то найти или сравнить, но при этом эти действия невозможно сделать только с помощью наблюдения и опытной проверки. Еще одним способом является решение задач-парадоксов. [16]

Например, требуется доказать, что 1 это наибольшее целое число. Проведем доказательство методом от противного. Пусть x – наибольшее целое число. Допустим, что $x > 1$, тогда, умножая обе части неравенства на x ,

получим $x > x$. Полученное неравенство противоречит тому, что x – наибольшее целое число, следовательно $x = 1$. Данный вывод абсурден, это произошло из-за неполноты тезиса, потому что все приведенные выше рассуждения будут иметь смысл, если заранее известно, что существует наибольшее целое число.

Также способом формирования мотивации проведения доказательства может быть организация деятельности, которая требует планирования действий, систематического обследования, контроля над выполнением каждого шага. Иными словами в ходе этой деятельности ученик должен быть ориентирован не на конечный результат, а на сам процесс получения этого результата. Чаще всего такие задания связаны с нахождением нескольких альтернативных путей и выборе наиболее оптимального из них.

Например, от города до деревни можно добраться тремя способами: на автобусе, электричке или на такси. С помощью таблицы определите, за какое наименьшее время можно проделать данный путь (ответ дайте в часах).

Транспорт	В городе до остановки / станции	В пути	От остановки / станции до деревни
Автобус	15 мин	1 ч 15 мин	5 мин
Электричка	25 мин	2 ч 45 мин	20 мин
Такси	25 мин	2 ч 35 мин	40 мин

Следующий тип таких заданий являются задачи, в которых требуется вывести утверждения из другого. Примером такого задания может быть следующее: в классе учится 17 мальчиков и 24 девочки, половина девочек ходит в музыкальную школу, а 9 мальчиков ходят в футбольную секцию.

Выведите утверждения, которые следуют из данных условий.

Возможные ответы:

- 12 девочек ходят в музыкальную школу
- 8 мальчиков не ходят в футбольную секцию
- всего в классе 41 школьник

- в классе больше девочек, чем мальчиков

Таким образом, данные задачи вызывают интерес у детей и являются методическими приемами для стимулирования потребности обоснования того или иного решения.

Глава 2. Обучение методам доказательства при изучении теории чисел

2.1. Этапы работы при обучении доказательствам

Для успешного внесения заданий на доказательство в школьную программу, следует постепенно вводить эти задания на уроках во время изучения теории чисел по темам в школьных учебниках. В таблице № 4, проведем анализ тем в 5-9 классах, в течение изучения которых можно проделывать данную работу.

Обзор программ школьного курса показывает достаточный объем материала по теории чисел для успешного введения разработанной системы упражнений на усвоение различных методов доказательства. Работу с данной системой можно проводить на уроках при изучении следующих тем: сравнение натуральных чисел, сложение и вычитание натуральных чисел, свойства сложения, умножение и деление натуральных чисел, свойства умножения, деление с остатком, степень числа с натуральным показателем, обыкновенные дроби, основное свойство дроби, правильные и неправильные дроби, смешанные числа, сравнение обыкновенных дробей и смешанных чисел, арифметические действия с обыкновенными дробями и смешанными числами, контрпример, десятичные дроби, сравнение и округление десятичных дробей, арифметические действия с десятичными дробями, делители и кратные натурального числа, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное, признаки делимости на 2, на 3, на 5, на 9, на 10, простые и составные числа, разложение чисел на простые множители, обыкновенные дроби, основное свойство дроби, сравнение обыкновенных дробей и смешанных чисел, арифметические действия с обыкновенными дробями и смешанными числами, целые числа, рациональные числа, сравнение рациональных чисел, арифметические действия с рациональными числами, свойства сложения и умножения рациональных чисел.[10], [11], [13], [15]

С методами доказательств, приведенных в таблице №2 можно проводить работу на следующих этапах:

1 этап. Знакомство с методом доказательства. На этом этапе ученики узнают о сути различных методов доказательства. При этом знакомство с доказательством можно проводить на уроках обобщения и систематизации материала какой-либо основной темы школьного курса, для углубления и фиксации знаний по этой теме и, вместе с тем, для расширения диапазона навыков математических доказательств. Также следует ориентироваться на уровень знаний и индивидуальные способности учеников, выбирая метод доказательства для изучения.

2 этап. Распознавание методов на примерах доказательства несложных утверждений. Основная цель этого этапа – научить распознавать методы доказательства. Реализовать эту цель можно с помощью таких задач: изучите приведенное доказательство и укажите метод, который был использован, соотнесите представленные доказательства и методы. Сами доказательства, используемые на этом этапе не должны быть слишком громоздкими, в них должна легко просматриваться структура доказательства.

А так же на этом этапе полезно знакомить с различными методами доказательства одного и того утверждения, и последующим обсуждением преимуществ того или иного метода. Например, задача доказательства делимости $(a^5 - 5a^3 + 4a)$ на число 120 для любого натурального a , может быть решена с помощью индукции, а так же прямым доказательством, с использованием делимости числа $(a^5 - 5a^3 + 4a) = (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$ на взаимно простые множители 3, 8, 5.

3 этап. Работа с доказательствами. На этом этапе ученики уже глубже погружаются в сами доказательства, учатся достраивать логические цепочки, находить фактические и логические ошибки в рассуждениях. Этот этап приближает их к построению самостоятельных доказательств сначала путем воспроизведения усвоенных алгоритмов, затем начинается творческий процесс доказательства.

2.2. Система упражнений для реализации этапов обучения доказательствам

В зависимости от метода доказательства, возрастных и индивидуальных особенностей учеников, уровня владения учебным материалом реализация 1 этапа обучения доказательствам может быть реализована с помощью сообщающего, познавательного, диалогического или эвристического методов. Успешное изучение сути методов доказательств может быть осуществлено с помощью приемов приведенных ниже.

Формулирование сути метода доказательства различными способами.

Принцип Дирихле:

– Принцип Дирихле можно объяснить на примере кроликов в клетках: если общее число кроликов больше числа клеток, в одной из этих клеток наверняка сидит более одного кролика.

– Также этот принцип может выглядеть следующим образом: в n клетках невозможно рассадить поодиночке $n + 1$ кроликов, т.е. найдётся клетка, где сидят не менее двух кроликов.

– Формулировка в терминах отображений между множествами: при отображения множества P , содержащего $n + 1$ элементов, в множество Q , содержащее n элементов, найдутся два элемента множества P , имеющие один и тот же образ.

– При рассмотрении задач на делимость целых чисел, то принцип Дирихле можно сформулировать так: среди $p + 1$ целых чисел найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на p .

Определение правильной формулировки метода доказательства.

Выберите верную формулировку принципа наибольшего числа.

– Принцип наибольшего числа утверждает, что в любом непустом конечном множестве натуральных чисел найдётся наибольшее число.

– Принцип наибольшего числа утверждает, что в любом множестве натуральных чисел найдётся наибольшее число.

– Принцип наибольшего числа утверждает, что в любом непустом конечном множестве чисел найдётся наибольшее число.

Построение схем методов доказательств.

Метод перебора:

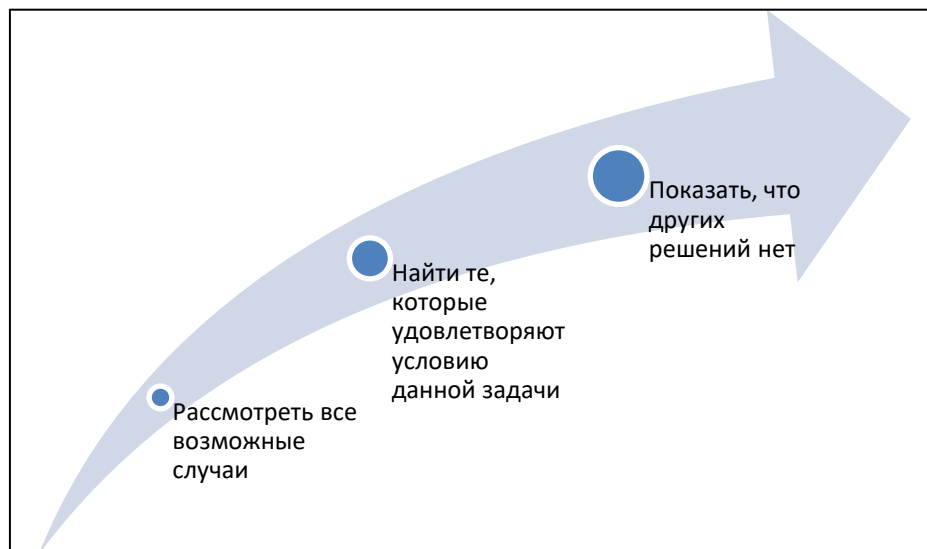


Рис. 4. Метод перебора.

Предоставление возможности ученикам самим формулировать суть доказательства по его названию или примеру.

Сегодня мы с вами познакомимся с еще одним методом доказательства «от противного». Как вы думаете, какова его суть?

Доказательство методом «от противного» производится следующим образом: сначала предполагается, что исходное утверждение неверно, затем с помощью цепочки логических рассуждений приходят к противоречию, тем самым убеждаясь в правдивости исходного утверждения.

Ребята будьте внимательны, для доказательства методом «от противного» нужно правильно построить отрицание исходного утверждения.

Реализация 2 этапа обучения доказательству может происходить, с помощью следующих задач.

Задача 1. Соотнесите доказательство и метод.

1. Докажите, что количество двузначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 3, 4 равно 9.

Доказательство. Выпишем все возможные варианты таких чисел: 22, 23, 24, 32, 33, 34, 42, 43, 44. Других двузначных чисел, состоящих из данных цифр нет, следовательно, количество чисел равно 9.

2. Докажите, что если в кинотеатре сидит 380 человек, то какие-нибудь 2 из них отмечают день рождения в один и тот же день года.

Доказательство. В году может быть максимум 366 дней (в високосный год), значит есть 366 возможностей отпраздновать день рождения. Пассажиров 380, $380 > 366$, значит, обязательно у каких-то двух человек день рождения будет приходиться на один день.

3. Строитель делает разметку участка, для этого он вбил в землю 15 кольшков и связал их веревками. Докажите, что к каждому кольшку не может быть привязано ровно по три веревки.

Доказательство. Предположим, что к каждому кольшку привязано ровно по три веревки. Тогда всего концов веревок привязано к кольшкам $15 \times 3 = 45$. У каждой веревки два конца, значит, число концов всех веревок должно делиться на 2 нацело. Но 45 – не делится на 2. Следовательно, наше предположение неверно и к каждому кольшку не может быть привязано ровно по три веревки.

Варианты ответа:

А) метод от противного

Б) метод перебора всех возможных вариантов

В) принцип Дирихле

Ответ: 1-Б, 2-В, 3-А.

Задача 2. Определите, каким методом проведено доказательство.

Докажите, что число 46 521 составное.

Доказательство:

Предположим, что число 46 521 – простое, из этого следует, что у него только 2 делителя: 1 и само это число. Сумма цифр этого числа равна $4 + 6 + 5 + 2 + 1 = 18$. Число 18 кратно 3, а, значит, 3 является одним из делителей числа 46 521. Получили противоречие, следовательно, число составное.

Варианты ответа:

А) прямое доказательство

Б) метод «от противного»

В) принцип Дирихле

Ответ: Б) метод «от противного»

Задача 3. Сопоставьте доказательство и его суть.

а) Метод перебора всех возможных вариантов

б) Метод контрпримера

в) Метод математической индукции

	1) Иногда в математических задачах требуется доказать ложность какого-либо высказывания, тогда можно построить такой пример – объект, который удовлетворяет условиям задачи, но не удовлетворяет заключению.
	2) Метод математического доказательства, который используется чтобы доказать истинность некоторого утверждения для всех натуральных чисел. Предположим, что для каждого натурального числа $n \geq n_0$ есть утверждение $P(n)$, обладающее двумя свойствами: 1) $P(n_0)$ истинно; 2) для любого натурального $k \geq n_0$ из справедливости $P(k)$ вытекает истинность $P(k + 1)$, то есть $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$. Тогда утверждение $P(n)$ верно для любого натурального числа $n \geq n_0$.
	3) Сущность метода заключается в том, что необходимо: а) рассматривать все возможные случаи; б) найти те, которые удовлетворяют условию данной задачи; в) показать, что других решений нет.

Ответ: а-3 ,б-1 , в-2 .

3 этап может быть реализован при использовании задач, приведенных ниже.

Задания для 5 класса.

Метод доказательства от противного.

Задача 1. Найдите ошибку в доказательстве и исправьте ее.

В классе 20 учеников, они писали контрольную работу по математике. Петя сделал 9 ошибок, все остальные ученики сделали меньше 9 ошибок. Докажите, что хотя бы 2 ученика сделали одинаковое количество ошибок.

Доказательство. Пусть найдутся ученики, которые сделали разное количество ошибок. Каждый из них мог сделать от 8 до 0 ошибок, таким обра-

зом, всего 9 вариантов. А количество оставшихся учеников 19, $19 > 9$, следовательно, не могло быть так, чтобы все сделали разное количество ошибок. Значит, наше предположение неверно и найдутся хотя бы 2 ученика с одинаковым количеством ошибок.

Ответ: (Неправильно построено отрицание исходного утверждения.) Пусть все остальные ученики сделали разное количество ошибок.

Задача 2. Выберите утверждение, которое можно использовать для доказательства этой задачи методом от противного.

В музыкальной школе 23 человека учатся играть на скрипке, 32 на фортепиано, при этом всего учеников 50. Докажите, что найдутся хотя бы 3 ученика, которые учатся играть сразу на 2 инструментах.

А) Допустим, что в школе не найдется 3 учеников, которые играют сразу на 2 инструментах

Б) Пусть в школе найдется больше 3 учеников, играющих сразу на 2 инструментах

В) Допустим, что из 50 учеников школы никто не играет сразу на 2 музыкальных инструментах.

Ответ: А.

Метод приведения контрпримера.

Задача 3. Выберите утверждение, опровергающее данное.

Если сумма некоторых слагаемых делится на некоторое число α , то на это число делится каждое из слагаемых.

А) Пусть слагаемые: 2,3,4 их сумма 9, $\alpha = 1$

Б) Пусть слагаемые: 22,23 их сумма 45, $\alpha = 5$

В) Пусть слагаемые: 8,16,24 их сумма 48, $\alpha = 4$

Ответ: Б.

Задача 4. Приведите контрпример для следующих выражений.

А) Каждое четное число имеет четное количество делителей.

Б) Любое нечетное число делится на 3.

Ответ: возможные контрпримеры:

А) 4 имеет 3 делителя: 1, 2, 4

Б) 7 имеет только 2 делителя: 1 и 7.

Принцип Дирихле.

Задача 5. Найдите ошибку в доказательстве и исправьте ее.

В мешке лежат 10 черных и 10 белых шаров. Их достают из мешка наугад. Докажите, что наименьшее количество шаров, которое нужно вынуть из мешка, чтобы среди них наверняка оказались два шара одного цвета равно 3.

Доказательство. Предположим, что «клетки» – шарики, которые нужно взять (их количество неизвестно, примем за N), а количество «кроликов» - цвета $M = 2$, $M < N$, по принципу Дирихле $N = 3$.

Ответ: (неверно определены «клетки и кролики» для принципа Дирихле) Предположим, что «кролики» – шарики, которые нужно взять (их количество неизвестно, примем за M), а количество «клеток» - цвета $N = 2$, $M > N$, по принципу Дирихле $M = 3$.

Задача 6. Выберите правильный вывод в доказательстве.

Совместно 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причём известно, что среди них есть школьники, решившие ровно 1 задачу, школьники, решившие ровно 2 задачи, и школьники, решившие ровно 3 задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее 5 задач.

Доказательство: Допустим, что первые три ученика решили соответственно 1, 2 и 3 задачи, тогда остальные 7 школьников решили всего $35 - 6 = 29$ задач,

А) 29 делится на 7 с остатком 1, $-29 = 7 \cdot 4 + 1$, значит, найдётся один школьник, решивший 5 задач.

Б) 29 делится на 6 с остатком 5, $-29 = 6 \cdot 4 + 5$, значит найдется школьник, решивший 5 задач.

Ответ: А.

Метод перебора вариантов.

Задача 7. Заполните таблицу.

Доказать что при $1 \leq x \leq 5$ уравнение $4xu + 6y = 13$ не имеет решений в натуральных числах.

Доказательство:

x	уравнение	y
1		$10y=13$, нет решений
2	$8y+6y=13$	
	$12y+6y=13$	$18y=13$, нет решений
4		$22y=13$, нет решений
5	$20y+6y=13$	

Ответ:

x	уравнение	y
1	$4y+6y=13$	$10y=13$, нет решений
2	$8y+6y=13$	$14y=13$, нет решений
3	$12y+6y=13$	$18y=13$, нет решений
4	$16y+6y=13$	$22y=13$, нет решений
5	$20y+6y=13$	$26y=13$, нет решений

Задания для 6 класса.

Прямое доказательство:

Задача 1. Заполните пропуски

Докажите, что число 67 925 является составным.

Доказательство.

67 925 –у этого числа в разряде единиц стоит цифра 5, это значит, что оно _____. Всякое натуральное число делится _____, можно утверждать, что у числа 67 925 есть, по крайней мере, еще один делитель. Следовательно, число составное;

Ответ: 67 925 –у этого числа в разряде единиц стоит цифра 5, это значит, что оно делится на 5. Всякое натуральное число делится на 1 и на само

себя, можно утверждать, что у числа 67 925 есть, по крайней мере, еще один делитель. Следовательно, число составное;

Задача 2. Восстановить последовательность рассуждений.

Доказать, что среди трёхзначных чисел нет числа, делящегося одновременно на 7, 11 и 13.

Доказательство.

- никакое трёхзначное число не может делиться на 1001.
- число, делящееся на каждое из нескольких простых чисел, обязано делиться и на их произведение.

- произведение $7 \cdot 11 \cdot 13$ равно 1001.

- числа 7, 11 и 13 — простые.

Ответ: один из возможных вариантов рассуждений:

1. числа 7, 11 и 13 — простые.

2. число, делящееся на каждое из нескольких простых чисел, обязано делиться и на их произведение.

3. произведение $7 \cdot 11 \cdot 13$ равно 1001.

4. никакое трёхзначное число не может делиться на 1001.

Доказательство от противного:

Задача 3. Заполните пропуски.

Докажите, что 2 – единственное натуральное четное простое число.

Доказательство. Допустим, что данное утверждение неверно, тогда найдется еще одно четное простое число из множества N . Любое четное число _____.

— больше 2

— делится на 2

— не делится на 2

Значит, его можно представить в виде произведения двух чисел $\neq 1$. Таким образом, это число имеет еще делители, кроме 1 и самого себя, тогда число является _____.

— простым

—составным

Следовательно, наше предположение неверно и число 2 является единственным четным простым числом.

Ответ: Любое четное число делится на 2. Таким образом, это число имеет еще делители, кроме 1 и самого себя, тогда число является составным.

Задача 4. Восстановите последовательность рассуждений.

Многочисленное число не содержит повторяющихся цифр. Докажите, что оно не может быть произведением двух меньших чисел, состоящих только из единиц и нулей.

Доказательство.

1) По условию число не может содержать двух единиц. Значит, первая единица и является последней ненулевой цифрой. Но в таком случае в каждом из сомножителей только одна единица в записи.

2) Предположим обратное: число является произведением двух чисел, состоящих только из единиц и нулей. Его последней цифрой может быть только 1 или 0. А последней ненулевой цифрой может быть только 1. Но первой цифрой этого числа тоже может быть только 1.

3) Но так как оба числа больше 1 (иначе другое равно произведению), то оба заканчиваются на 0, и в произведении найдутся два нуля. Получили противоречие, следовательно, наше предположение неверно.

Ответ: 213

Доказательство с помощью принципа наибольшего числа.

Задача 5. Подберите заключение к предложениям.

Доказать, что для любых двух натуральных чисел существует наибольший общий делитель.

Доказательство. У каждого натурального числа есть хотя бы один делитель, причем... Эти делители образуют множество, которое состоит из конечного числа элементов, соответственно,... Следовательно, выбрав наибольший элемент такого множества,.....

— получим наибольший общий делитель для любых двух натуральных чисел

— все делители числа меньше или равны самому числу

— множество общих делителей чисел также будет конечно

Ответ: У каждого натурального числа есть хотя бы один делитель, причем, все делители числа меньше или равны самому числу. Эти делители образуют множество, которое состоит из конечного числа элементов, соответственно, множество общих делителей чисел также будет конечно. Следовательно, выбрав наибольший элемент такого множества, получим наибольший общий делитель для любых двух натуральных чисел.

Принцип Дирихле

Задача 6. Найдите и исправьте ошибку в доказательстве.

Докажите, что в классе, состоящем из 30 учеников, найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей среди своих одноклассников.

Доказательство. За «кроликов» возьмём учеников, а за «клетки» количество друзей. Друзей у каждого человека может быть $0, 1, \dots, 29$ т.е. у нас получится 30 «клеток». Используя принцип Дирихле получим, что найдётся «клетка», где сидят не менее двух «кроликов». А это и означает, что найдутся два человека имеющие одинаковое число друзей.

Ответ: Всего не может быть 30 «клеток», так как «клетки» 29 и 0 одновременно существовать не могут, если человек имеет 29 друзей, то каждый из его друзей будет иметь хотя бы одного друга, значит, всего может быть 29 «клеток» $(0, 1, \dots, 28$ или $1, 2, \dots, 29)$.

Задача 7. Приведите контрпример для данного утверждения.

Если НОД чисел $(a, b) \neq 1$, то a, b – составные.

Ответ: возможный контрпример: $\text{НОД}(7, 49) = 7$, $7 = 1 * 7$, $49 = 1 * 7 * 7$, 7 – простое число.

Задания для 7 класса.

Прямое доказательство.

Задача 1. Восстановите процесс доказательства, согласно схеме:

Доказать: «Сумма квадратов двух четных чисел делится на 4».

Введем обозначения.

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow B.$$

- 1) «Сумма $x^2 + y^2$ делится на 4»,
- 2) «Числа x и y четные»,
- 3) « $x^2 + y^2 = 4m$, где m - целое число»,
- 4) « x и y имеют вид $x = 2n$, $y = 2r$, где n, k - целые числа».

Ответ: 2431

Задача 2. Вместо пропуска вставьте верный вариант из предложенных.

Доказать, что любую сумму (в рублях), кроме 1 и 3 рублей, можно заплатить монетами по 2 и 5 рублей.

Доказательство.

Пусть требуется заплатить n рублей x монетами по 2 рубля и y монетами по 5 рублей (x, y – целые числа, отрицательные значения x или y указывает, что получена сдача), тогда составим уравнение _____ (1)

1. $2x + 5y = n$
2. $2y + 5x = n$
3. $2x - 5y = n$

Если $(x; y)$ решение, то $n - 5y$ должно делиться на 2. Ввиду взаимной простоты 2 и 5, это будет выполнено, если y _____ (2) с n .

1. *Одного знака*
2. *Одной степени*
3. *Одной четности*

При $n = 1$ или 3 подойдёт $y = -1$, $x = 3$ или 4 соответственно (т.е. заплатить 3 или 4 монеты по 2 рубля и взять сдачу 5 рублей), при $n = 2k$ до-

статочно $y = 0, x = k$. Если же $n \geq 5$ нечётное число, можно взять $y = 1$, тогда получим $x \geq 0$.

Ответ: (1) – 1, (2) – 3

Задача 3. Найдите ошибку в доказательстве и исправьте ее.

3. Докажите, что одно из трех соседних нечетных чисел делится на 3.

Доказательство.

Пусть число x не делится на 3. Тогда остаток от деления $x : 3$ будет равен либо 1, либо 2. В случае если остаток 1, тогда можно представить: $x = 3k + 1$, следующее нечетное число $3k + 3$ делится на 3. В том случае, если остаток 2, тогда x представим как: $x = 3k + 2$, следующие нечетные числа $x = 3k + 3$ и $x = 3k + 9$ – делится на 3.

Ответ: неправильно сформированы нечетные числа в заключение: $x = 3k + 4$ и $x = 3k + 6$.

Доказательство от противного.

Задача 4. Дополните доказательство.

Доказать, что при любом натуральном n значение выражения $n^2 + 5n + 16$ не делится на 169.

Доказательство: Предположим противное: пусть уравнение $n^2 + 5n + 16 = 169k$, где k и n – натуральные числа, имеет решение.

Имеем $n^2 + 5n + 16 - 169k = 0$.

$$D = 25 - 4(16 - 169k) = 4 \cdot 169k - 39 = 13 \cdot (52k - 3) \quad .$$

Очевидно, что D не является квадратом натурального числа. Следовательно, уравнение $n^2 + 5n + 16 = 169k$ не имеет решений при любых натуральных n и k . Получено противоречие, наше предположение неверно, следовательно, $n^2 + 5n + 16$ не делится на 169 при любом натуральном n .

Ответ: пропущено обоснование факта: Очевидно, что D не является квадратом натурального числа, поскольку D кратно 13, но не на 132 ($52k - 3$ не делится на 13)

Задача 5. Исправьте ошибку в доказательстве.

При делении натурального числа a на натуральное число b в частном получили c и в остатке d . Докажите, что числа a, b, c и d не могут оказаться нечетными одновременно.

Доказательство: По условию задачи имеем $a = bc + d$. Предположим, что некоторые из чисел a, b, c, d нечетны. Тогда число bc – нечетное число (произведение двух нечетных чисел есть число нечетное), число $bc + d$ – четное число (сумма двух нечетных чисел есть число четное). Получили, что число $a = bc + d$ есть число четное, то есть наше предположение ошибочно. Таким образом, все числа a, b, c и d оказаться нечетными не могут.

Ответ: неверно сформулировано отрицание исходного утверждения: Предположим, что все числа a, b, c, d нечетны.

Метод инвариантов

Задача 6. Восстановите доказательство, так, чтобы каждое следующее утверждение логически следовало из предыдущего.

На доске написано 12 плюсов и 13 минусов. Будем стирать любые два знака и если они разные, то напишем вместо них минус, а если одинаковые, то плюс. Докажите, что после выполнения 24 таких действий на доске останется минус.

Доказательство:

1) Когда будут стерты два минуса, а вместо них появится плюс, то количество минусов уменьшится на 2.

Если стереть один минус и один плюс и вместо них написать минус, то количество минусов не изменится.

2) Неизменной (инвариантной) величиной в данной задаче является четность количества минусов, т.е. если минусов было нечётное количество, то после любого количества таких операций число минусов так и останется нечётным. Так как в исходном условии количество минусов нечетное, следовательно, на доске останется тоже нечетное количество минусов равное 1.

3) После каждой операции количество знаков уменьшается на 1, всего знаков $12 + 13 = 25$, следовательно, после 24 операций останется только один знак.

Ответ: 312 или 132.

Задача 7. Дополните доказательство

Варя резала бумагу для новогодней поделки, причем каждый попадающийся лист она резала на 4 части. Докажите, что на 2020 листов она могла разрезать бумагу, а на 2021 нет.

Доказательство:

Количество листов каждый раз увеличивается на 3. И это количество можно задать формулой $3n + 1$, где n – число, которое показывает, сколько раз Варя резала очередной листок. $2021 = 673 \cdot 3 + 2$ – остаток равен 2; , следовательно, не могла Варя разрезать бумагу на 2021 лист.

$2020 = 673 \cdot 3 + 1$ – остаток равен 1; , значит, 2020 листов могло получиться.

Ответ: Не указано, что является инвариантом: остаток при делении на 3 является инвариантом и должен равняться 1.

Задания для 8 класса.

Метод математической индукции.

Задача 1. Заполните пропуски.

Доказать, что $52^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4 = 25$ для любого натурального n .

Доказательство.

Применим метод математической индукции.

При $n = 1$ выражение равно _____ .

Предположим, что

$2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4 = 25m$ (*) (m натуральное). Надо доказать, что _____ . Умножим равенство

(*) на 6: $2^{k+3} \cdot 3^{k+1} + 30k - 24 = 150t$, выразим из полученного равенства:

$2^{k+3} \cdot 3^{k+1} = -30k + 24 + 150t$, подставим в выражение (**) и получим, что

_____ делится на 25, что и требовалось доказать. Согласно принципу математической индукции,

$$2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4 = 25 \text{ для любого натурального } n.$$

Задача 2. Восстановите последовательность рассуждений.

Доказать, что при любом натуральном значении n число вида $7^n + 3n - 1$ делится на 9.

Доказательство.

1) согласно методу математической индукции $7^n + 3n - 1$ делится на 9 при любых натуральных значениях n

4) При $n = 1$ имеем $7 + 3 - 1 = 9$ – делится на 9.

3) Предположим, что $7k + 3k - 1$ делится на 9

2) Докажем, что $7^k + 1 + 3(k + 1) - 1$ делится на 9: $7^{k+1} + 3k + 2 = 7 \cdot 7^k + 7 \cdot 3k - 7 + 7 - 7 \cdot 3k + 3k + 2 = 7(7^k + 3k - 1) - 18k + 9$. Каждое из трех слагаемых полученной суммы делится на 9: $7(7^k + 3k - 1)$ – по нашему предположению, $18k$ и 9 кратны 9.

Ответ: 4321.

Метод от противного.

Задача 3. Дополните доказательство.

Доказать иррациональность $\sqrt{2}$.

Доказательство.

Пусть $\sqrt{2} = r$, тогда r рациональное число и такое, что $r^2 = 2$. Всякое рациональное число можно выразить дробью $\frac{m}{n}$. Следовательно,

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2. \text{ Освобождаясь от знаменателя, имеем: } m^2 = 2n^2 \text{ (1).}$$

Следовательно, что число m^2 чётно. Можно представить $m = 2k$ при некотором целом k . Подставляя $2k$ в (1) вместо m , получаем: $(2k)^2 = 2n^2$ и, после сокращения на 2: $2k^2 = n^2$. Аналогично тому как мы убедились в чётности m , убеждаемся в чётности n . Итак, оба числа m и n чётны, и дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 2 — а ведь она несократима. Полученное противоречие доказывает, что число r не может быть рациональным, оно иррационально.

Ответ: пропущено утверждение, что числа m, n должны быть взаимно простыми.

Метод инвариантов

Задача 4. Укажите на основе каких рассуждений сделан вывод в доказательстве.

Числа от 1 до 100 выписали в ряд: 1, 2, 3, 4, ..., 99, 100. Можно менять местами два любых числа, между которыми стоит ровно одно. Доказать, что с помощью данной операции нельзя получить ряд: 100, 99, 98, 97, ..., ..., 2, 1.

Доказательство:

Так как в ряду: 100, 99, 98, ..., 2, 1 чётные числа находятся на нечётных местах, то с помощью данной операции такой ряд получить нельзя.

Ответ: При выполнении данной операции поменять местами можно либо четные, либо нечетные числа, при этом чётные числа всегда будут находиться на местах с четными номерами.

Задача 5. Укажите, что является инвариантом в задаче.

На доске выписаны числа 1, 2, 3, ..., 100. Будем стирать два k, m и вместо них запишем число $k \cdot m + k + m$, данное действие повторим до тех пор, пока не останется одно число. Докажите, что одно оставшееся число будет равно $101! - 1$

Доказательство:

Преобразуем запись числа $k \cdot m + k + m$.

$$k \cdot m + k + m = (k + 1) \cdot (m + 1) - 1.$$

Тогда $(k \cdot m + k + m) + 1 = (k + 1) \cdot (m + 1) - 1 + 1 = (k + 1) \cdot (m + 1) = M$.

M – это произведение всех выписанных на доске чисел $+ 1$.

Тогда искомое число равно:

$$M - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 101 - 1 = 101! - 1$$

Ответ: Величина M будет инвариантом, а последнее записанное число будет иметь вид: $M - 1$.

Прямое доказательство

Задача 6. На основе какого свойства сделан заключительный вывод доказательства?

Дано многозначное число $\overline{abcd \dots xyz}$. Отделив от него трехзначное число, образованное тремя последними цифрами, получим два числа: $\overline{abcd \dots k}$ и $\overline{xyz}$. Докажите, что если разность полученных чисел делится на 13, то и данное число делится на 13.

Доказательство: Преобразуем: $\overline{abcd \dots xyz} = 1000 \cdot \overline{abcd \dots k} + \overline{xyz} = 1001 \cdot \overline{abcd \dots k} - \overline{abcd \dots k} + \overline{xyz} = 1001 \cdot \overline{abcd \dots k} + (\overline{xyz} - \overline{abcd \dots k})$. Так как число 1001 делится на 13, то и $(\overline{xyz} - \overline{abcd \dots k})$ делится на 13.

Ответ: Вывод сделан на основе признака делимости суммы (если каждое слагаемое делится на какое-либо число, то и сумма делится на это число).

Задания для 9 класса.

Задача 1. Найдите ошибку и исправьте ее.

Верно ли, что $(5^{2n} - 1)$ делится на 24 при любом n ?

Доказательство.

Для того чтобы число делилось на 24, оно должно делиться на 4 и на 6.

5 делится на 4 с остатком 1, значит 5^{2n} тоже делится на 4, следовательно $(5^{2n} - 1)$ делится на 4. $5^{2n} = 25^n$, 25 делится на 6 с остатком 1, значит 25^n тоже делится на 6, следовательно $(25^n - 1)$ делится на 6.

Из доказанного выше следует, что $(5^{2n} - 1)$ делится на 24.

Ответ: Неверно сделан вывод: 5^{2n} делится на 4 с остатком 1, 25^n делится на 6 с остатком 1.

Задача 2. Укажите ошибку и замените ее верным суждением.

Доказать, что $2^n > n^2$, для любого n .

Доказательство.

Воспользуемся методом математической индукции.

1) При $n = 1$: $2^1 > 1^2$ – верно.

2) Пусть, при $n=k$, выражение $2^k > k^2$ верно.

3) Тогда при $n = k + 1$: $2^{k+1} > (k + 1)^2$, $2 \cdot 2^k > k^2 + 2k + 1$,

$2 \cdot 2^k > k^2 + 2k + 1$ по индуктивному предположению $2^k > k^2$, следовательно $2^k > 2k + 1$,

$$2^k + 2^k > k^2 + 2k + 1,$$

$$2 \cdot 2^k > (k + 1)^2 \text{ что и требовалось доказать.}$$

Задача 3. Дополните доказательство.

Доказать, что $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ – верно.

Проверим верно ли данное утверждение для $n = k + 1$.

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) = (1 + 2 + 3 + \dots + k) + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \text{ – верно.}$$

Таким образом, согласно методу математической индукции утверждение $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ верно для любого n .

Ответ: пропущен второй шаг метода математической индукции:

Предположим, что при $n = k$ утверждение $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ верно.

Метод бесконечного спуска.

Задача 4. Заполните пропуски.

Доказать, что уравнение $8x^4 + 4y^4 + 2z^2 = t^4$ не имеет решений в натуральных числах.

Доказательство: Предположим, что решение есть и при наименьшем возможном x , $x = m, y = n, z = p, t = q$ - является решением. Из вида уравнения получаем: $q = 2q_1$. Подставим решение в уравнение и сократим на 2: _____(1). Отсюда получаем: $p = 2p_1$, следовательно, _____(2). Аналогично, $n = 2n_1$, _____(3) и $m = 2m_1$, $8m_1^4 + 4n_1^4 + 2p_1^4 = q_1^4$. Следовательно, $x = m_1, y = n_1, z = p_1, t = q_1$ тоже являются решениями уравнения. Но $m_1 > m$ - это противоречит выбору наименьшего числа, следовательно, у уравнения нет решений.

А) $2m^4 + n^4 + 8p_1^4 = 4q_1^4$

Б) $m^4 + 8n_1^4 + 4p_1^4 = 2q_1^4$

В) $4m^4 + 2n^4 + p^4 = 8q_1^4$

Ответ: (1)-В, (2)-А, (3)- Б.

Метод инвариантов

Задача 5. Определите свойство многочленов, которое является инвариантом в этой задаче.

На доске написаны многочлены $P(x) = x^2 + 2$ и $Q(x) = x + 1$. Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых двух из уже выписанных на доску многочленов. Докажите, что на доске не может появиться многочлен $R(x) = x^3 + 2$.

Доказательство.

Заметим, что $P(2) = 6$ и $Q(2) = 3$. Сумма, разность и произведение этих многочленов в точке тоже будут обладать этим свойством. Следовательно, при любом числе таких преобразований результирующий многочлен в точке $x = 2$ также должен обладать указанным свойством.

Но $R(2) = 10$, а число 10 не обладает этим свойством. Поэтому получить многочлен $R(x) = x^3 + 2$ мы не можем.

Ответ: Значение многочленов при $x = 2$ кратно 3.

Задания №19 из ЕГЭ.

Задача 1. Дополните доказательство.

Из первых 22 натуральных чисел $1, 2, \dots, 22$ выбрали $2k$ различных чисел. Выбранные числа разбили на пары и посчитали суммы чисел в каждой паре. Оказалось, что все полученные суммы различны и не превосходят 27.

а) Может ли получиться так, что сумма всех $2k$ выбранных чисел равняется 170 и в каждой паре одно из чисел ровно в три раза больше другого?

б) Может ли число k быть равным 11?

в) Найдите наибольшее возможное значение числа k .

Решение.

а) Если в каждой паре одно число втрое больше другого, то сумма чисел в каждой паре делится на 4. Значит, сумма всех выбранных чисел делится на 4. Число 170 не делится на 4, поэтому такого быть не может.

б) Если $k = 11$ то выбраны все 22 числа от 1 до 22. Их сумма равна 253. С другой стороны, по условию суммы чисел в каждой паре различны и не превосходят 27. Значит, их сумма не превосходит $27 + 26 + \dots + 17 = 242$. Полученное противоречие показывает, что число k не может быть равным 11.

в) В предыдущем пункте было показано, что k не может равняться 11. Значит, наибольшее возможное значение числа k — это 10.

Ответ: Не хватает утверждения: десять пар (13; 14), (11; 15), (9; 16), (7; 17), (5; 18), (3; 19), (1; 20), (2; 8), (4; 10), (6; 12) удовлетворяют всем условиям задачи.

Задача 2. Вместо пропуска, вставьте утверждение, необходимое для обоснования вывода.

По кругу в некотором порядке по одному разу написаны натуральные числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Решение.

а) Да, могло. Например, если числа записаны в порядке 9, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 18, 17, 10.

б) Всего по кругу записано 10 чисел. Для каждой пары соседних чисел мы ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 10 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них не меньше 10. Но такого быть не может, так как для данных чисел наибольший из всевозможных наибольших общих делителей есть $\text{НОД}(18, 9) = 9$.

в) Числа 11, 13 и 17 являются простыми, наибольшие общие делители этих чисел со всеми остальными числами равняются 1. Каждое из чисел имеет двух соседей, следовательно, хотя бы два числа из этих трёх будут иметь, по крайней мере одного соседа, отличного от этих трёх чисел. _____ Следовательно, не может быть больше, чем семь попарно различных наибольших общих делителей. Для расстановки 9, 18, 12, 16, 14, 13, 11, 17, 10, 15 получается ровно 7 попарно различных наибольших общих делителей.

Ответ: Хотя бы четыре из всех наибольших общих делителей будут равняться 1, то есть совпадать и поскольку всего их десять, причём четыре совпадают, то наибольшее количество попарно различных делителей может быть только 7.

Задача 3. Укажите неточность в доказательстве.

Даны две последовательности: 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 и 3, 6, 12. В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону.

а) Найдите этот закон.

б) Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону).

в) Докажите, что число 21991 после нескольких переходов станет однозначным.

Решение.

а) Закон можно угадать, заметив, например, что пока число однозначное, оно удваивается, а потом — нет. А то, что 10 переходит в 2, наводит на мысль, что удваивается не само число, а сумма его цифр. Итак, искомый закон обнаружен: «Удвоенная сумма цифр».

б) Легко заметить, что однозначных чисел, больших нуля, с требуемым свойством нет. Попробуем найти решение среди двузначных чисел. Если первая цифра двузначного числа равна a , а вторая равна b , то само число равно $10a + b$. Имеем $10a + b = 2(a + b)$. Отсюда $8a = b$, то есть $a = 1$, $b = 8$.

в) Заметим, что если число не меньше, чем трёхзначное, то его сумма цифр меньше самого числа. Значит, число будет уменьшаться, пока не станет двузначным или однозначным. Остаётся единственная опасность: попасть в «неподвижную точку» — 18. Но это в нашем случае невозможно, так как исходное число не делилось на 9, а при данном преобразовании числа, не кратные 9, не могут перейти в числа, кратные 9.

Ответ: Под б использован неполный метод перебора: покажем, что других решений нет: самое маленькое трёхзначное число — 100, а самая большая сумма трёх цифр $9 + 9 + 9 = 27$, поэтому удвоенная сумма цифр всегда меньше самого числа. Так же с четырёхзначными, пятизначными, и так далее.

2.3. Технологические карты уроков с использованием системы упражнений для обучения методам доказательства

Технологическая карта урока №1	
Предмет	математика
Класс	6
Тип урока	Открытие нового знания.
Технология построения урока	Системно-деятельностный подход
Тема	Наибольший общий делитель
Цель	Создать условия для открытия нового метода доказательства
Основные термины, понятия	Наибольший общий делитель простых чисел, доказательство методом «от противного»

Планируемый результат	
<p>Предметные умения</p> <p>Уметь находить НОД двух чисел, уметь распознавать доказательство «от противного»</p>	<p><i>Личностные УУД:</i> сформировать умение планировать свои действия в соответствии с учебным заданием.</p> <p><i>Регулятивные УУД:</i> развивать умение учащихся анализировать, делать выводы, определять взаимосвязь и логическую последовательность мыслей; тренировать способность к рефлексии собственной деятельности и деятельности своих товарищей.</p> <p><i>Познавательные УУД:</i> анализировать, сравнивать, классифицировать и обобщать факты, строить логически обоснованное рассуждение, использовать доказательную математическую речь.</p> <p><i>Коммуникативные УУД:</i> самостоятельно организовывать взаимодействие в паре, отстаивать свою точку зрения, приводить аргументы, подтверждая их фактами.</p>

<i>Организация пространства</i>	
Формы работы	Ресурсы
Фронтальная, индивидуальная.	<i>Книгопечатная продукция</i> Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд, «Математика 6» <i>Технические средства обучения</i> мультимедиа-проектор, презентация, карточки с заданиями.

Дидактические задачи этапов урока

Этапы урока	Дидактические задачи
Организационный (этап мотивации) (3 мин)	включение учащихся в учебную деятельность на личностно значимом уровне.
Актуализация опорных знаний и умений (5 мин)	готовность мышления и осознание потребности к построению нового способа действия.
Формулирование проблемы, планирование деятельности (5 мин)	постановка цели учебной деятельности, выбор способа и средств ее реализации
Открытие нового знания (10 мин)	построение и фиксация нового знания
Первичная проверка понимания (7 минут)	применение нового знания в типовых заданиях.
Применение новых знаний (10 мин)	включение нового знания в систему знаний, повторение и закрепление ранее изученного
Рефлексия учебной деятельности (5 мин)	соотнесение цели урока и его результатов, самооценка работы на уроке, осознание метода построения нового знания.

Технология изучения

Этапы урока	Формируемые умения	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
Организационный (3 мин)	<p><i>Метапредметные (УУД):</i> <i>Личностные УУД:</i> умение выделять нравственный аспект поведения</p> <p><i>Познавательные УУД:</i> осознанное и произвольное построение речевого высказывания.</p>	<p>Здравствуйте ребята, сегодняшний урок я бы хотела начать словами английского ученого Роджера Бэкона: Устройство нашего мира непостижимо без знания математики.</p> <p>Давайте с вами продолжим изучать математику.</p> <p>Для начала вспомним, что изучали на прошлом уроке? (наибольший общий делитель чисел)</p> <p>Ребята, давайте запишем число в рабочих тетрадях</p>	<p>Включаются в деловой ритм урока: выполняют необходимые действия, демонстрируют готовность для работы</p> <p>Записывают в тетрадях число, «Классная работа».</p>
Актуализация опорных знаний и умений (5 мин)	<p>Предметные: Повторение понятия « наибольший общий делитель».</p> <p>Метапредметные (УУД): <i>познавательные:</i> поиск и выделение необходимой информации; построение своих высказываний, вывод на основе анализа. <i>регулятивные:</i> фиксация индивидуального затруднения, пути решения проблемы. <i>коммуникативные:</i> выражение своих мыслей, аргументация своего мнения, уважение чужой точки зрения</p>	<p>Какие числа называются простыми, а какие составными?</p> <p>Сформулируйте алгоритм нахождения НОД.</p> <p>Найдите разложение на простые множители НОД чисел а и b, если: а) $a=2*2*3*3$ и $b=2*3*3*5$</p> <p>№148 (а,в,д) Найдите НОД чисел: а) 12 и 18; в) 675 и 825 д) 324, 111 и 432 с комментарием у доски.</p>	<p>Формулируют алгоритм: Чтобы найти НОД нескольких натуральных чисел, надо: 1) разложить их на простые множители; 2) из множителей, входящих в разложение одного из этих чисел, вычеркнуть те, которые не входят в разложение других чисел; 3) найти произведение оставшихся множителей.</p> <p>Выполняют на доске и в тетради №147 $\text{НОД}(a,b)=18$ $18=2*3*3$ №148 а) $12=2*2*3$ $18=2*3*3$</p>

			$\text{НОД}(12,18) = 2 \cdot 3 = 6$ в) $675 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ $825 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$ $\text{НОД}(675,825) = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$ д) $324 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $111 = 3 \cdot 37$ $432 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\text{НОД}(324,111,432) = 3$
Формулирование проблемы, планирование деятельности (5 мин)	<p><i>Метапредметные (УУД):</i> <i>Личностные УУД:</i> смыслообразование. <i>Регулятивные УУД:</i> составление плана и последовательности действий, прогнозирование результата и уровня усвоения материала. <i>Познавательные УУД:</i> умение осознанно строить речевое высказывание. <i>Коммуникативные УУД:</i> умение слушать собеседника, дополнять и уточнять высказанные мнения</p>	<p>Мы с вами уже знаем, как находить НОД нескольких чисел. А как вы думаете, чему будет равен НОД нескольких простых чисел?</p> <p>У вас есть предположения, но как нам узнать наверняка?</p> <p>Верно, сегодня мы с вами познакомимся с еще одним методом доказательства «от противного».</p>	<p>Думают над задачей, предлагают свои варианты.</p> <p>Нужно провести доказательство.</p>

Открытие нового знания(10 мин)	<p><i>Предметные:</i> Умение понимать и формулировать правило вычисления НОД.</p> <p><i>Метапредметные (УУД):</i> <i>Личностные УУД:</i> независимость и критичность мышления.</p> <p><i>Познавательные УУД:</i> поиск и выделение необходимой информации.</p> <p><i>Коммуникативные УУД:</i> слушать собеседника, строить понятные для собеседника высказывания.</p>	<p>Как вы думаете какова его суть? Доказательство методом «от противного» производится следующим образом: сначала предполагается, что исходное утверждение неверно, затем с помощью цепочки логических рассуждений приходят к противоречию, тем самым убеждаясь в правдивости исходного утверждения. Давайте с вами попробуем привести простые примеры такого доказательства</p> <p>Докажем, что число 3 простое. Будем рассуждать «от противного».</p> <p>Ребята будьте внимательны, для доказательства методом «от противного» нужно правильно построить отрицание исходного утверждения.</p>	<p>Приводят примеры, распознают метод доказательства.</p> <p>Пусть число 3 не простое, а составное. Тогда оно имеет более 2 делителей, но число 3 имеет только 2 делителя 1 и само себя. Получили противоречие, следовательно, число 3 простое.</p>
.Физкультминутка		<p>Из-за парт мы быстро встали И на месте зашагали. А потом мы улыбнулись, Выше-выше потянулись. Сели-встали, сели-встали За минутку сил набрались, Плечи ваши распрямите, Поднимите, опустите, Вправо, влево повернитесь, И за парту вновь садитесь.</p>	<p>Учащиеся поднимаются с мест и повторяют действия за учителем Учащиеся сменили вид деятельности и готовы продолжить работу</p>

<p>Первичная проверка понимания(7 мин)</p>	<p><i>Предметные:</i> Умение применять доказательство от противного на простых примерах. <i>Метапредметные (УУД):</i> <i>Личностные УУД:</i> независимость и критичность мышления, развитие навыков сотрудничества. <i>Регулятивные УУД:</i> контроль правильности ответов, использование доказательной математической речи. <i>Коммуникативные УУД:</i> умение слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении проблем, договариваться и приходить к общему мнению в совместной деятельности. <i>Познавательные УУД:</i> поиск и выделение необходимой информации, способность к использованию правила нахождения НОД, обосновывать свое мнение;</p>	<p>Ребята, а теперь попробуем доказать ваше предположение о НОД простых чисел, с помощью изученного метода доказательства. Доказать, что НОД двух различных простых натуральных чисел равно 1. Предположим, что НОД простых чисел не равен 1, тогда у этих чисел должен найтись еще один общий делитель отличный от 1, тогда получим, что либо одно число составное, либо все. Получили противоречие, следовательно, НОД двух простых чисел равно 1. Вот мы сами и доказали это утверждение. Но стоит отметить, что существуют такие составные числа, НОД которых равен 1, такие числа называются взаимно простыми. Давайте убедимся в этом на примерах.</p>	<p>Вместе с учителем выполняют доказательство. Решают задания у доски и в тетрадях. НОД(14,25)=1 НОД(35,36)=1 НОД(77,20)=1 НОД(13,15,16)=1</p>
--	--	---	---

Предметные УУД: распознавание и применение знаний о новом методе доказательства.
Метапредметные (УУД):
Регулятивные: осознание качества и уровня усвоения нового материала.
Личностные: самоопределение.
Коммуникативные: управление своим поведением
Познавательные: применение аналитических навыков

Выполним следующие задания:
Подберите правильное отрицание для доказательства этой задачи методом от противного.
 В музыкальной школе 23 человека учатся играть на скрипке, 32 на фортепиано, при этом всего учеников 50 .Докажите, что найдутся хотя бы 3 ученика, которые учатся играть сразу на 2 инструментах.
 А) Допустим, что в школе не найдется 3 учеников, которые играют сразу на 2 инструментах
 Б) Пусть в школе найдется больше 3 учеников, играющих сразу на 2 инструментах
 В) Допустим, что из 50 учеников школы никто не играет сразу на 2 музыкальных инструментах.
Определите, каким методом проведено доказательство.
 Докажите, что число 46 521 составное.
 Доказательство:
 Предположим, что число 46 521 – простое, из этого следует, что у него только 2 делителя: 1 и само это число. Сумма цифр этого числа равна $4 + 6 + 5 + 2 + 1 = 18$. Число 18 кратно 3, а, значит, 3 является одним из делителей числа 46 521. Получили противоречие, следовательно, число составное.
 Варианты ответа:
 А) прямое доказательство
 Б) метод «от противного»
 В) принцип Дирихле

Проводят рассуждения, изучают доказательства.

Ответ: А.

<p>Рефлексия учебной деятельности(5 мин)</p>	<p><i>Метапредметные (УУД)</i> <i>Личностные УУД:</i> независимость и критичность мышления; <i>Регулятивные УУД:</i> осуществлять итоговый и пошаговый контроль по результату своей деятельности. <i>Познавательные УУД:</i> анализировать степень усвоения нового материала. <i>Коммуникативные УУД:</i> выслушивают одноклассников, озвучивают своё мнение.</p>	<p>Что нового мы узнали сегодня на уроке? Сформулируйте суть метода доказательства «от противного». Оцените свою работу на уроке. Что вам было трудным? Что показалось наиболее интересным?</p>	<p>Отвечают на вопросы, анализируют свои результаты на уроке.</p>
--	--	---	---

Технологическая карта урока №2	
Предмет	математика
Класс	6
Тип урока	Урок закрепления материала
Технология построения урока	Урок с применением ИКТ
Тема	Делимость чисел
Цель	Повторить пройденный материал
Основные термины, понятия	Признаки делимости, простые и составные числа, НОД, НОК

Планируемый результат	
<p>Предметные умения</p> <p>применять признаки делимости на 2,3,5,9,10.</p> <p>находить делители и кратные числа.</p> <p>находить наибольший общий делитель двух или трёх чисел.</p> <p>находить наименьшее общее кратное двух или трёх чисел.</p> <p>раскладывать число на простые множители.</p>	<p><i>Личностные</i> – проявляют устойчивый и широкий интерес к теме и к изучению предмета;</p> <p><i>Метапредметные:</i></p> <p><i>Регулятивные</i> – оценивают и корректируют усвоенный материал;</p> <p><i>Познавательные</i> - учатся осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения образовательных задач;</p> <p><i>Коммуникативные</i> – учатся слушать других, критично относиться к своему мнению, с достоинством признавать ошибочность своего мнения (если оно таково) и корректировать его.</p>

<i>Организация пространства</i>	
Формы работы	Ресурсы
Фронтальная, индивидуальная, в парах	<i>Книгопечатная продукция</i> Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд, «Математика 6» <i>Технические средства обучения</i> мультимедиа-проектор, ПК либо планшеты.

Дидактические задачи этапов урока

Этапы урока	Дидактические задачи
Организационный (этап мотивации) (3 мин)	включение учащихся в учебную деятельность на личностно значимом уровне.
Актуализация опорных знаний и умений (7 мин)	готовность мышления и осознание потребности к построению нового способа действия.
Применение полученных знаний в новой деятельности (10 мин)	применение знаний в новых заданиях
Обобщение и систематизация знаний (15 мин)	отработка навыков, полученных ранее, выявление пробелов в материале
Контроль и коррекция усвоенных знаний (5 минут)	коррекция и устранение недочетов в усвоенных знаниях
Рефлексия учебной деятельности (5 мин)	соотнесение цели урока и его результатов, самооценка работы на уроке.

Технология изучения

Этапы урока	Формируемые умения	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
Организационный(3 мин)	<i>Метапредметные (УУД):</i> <i>Коммуникативные УУД:</i> осознанное и произвольное построение речевого высказывания.	Ну-ка, проверь дружок, Ты готов начать урок? Всё ль на месте, Всё ль в порядке, Ручка, книжка и тетрадка? Все ли правильно сидят? Все ль внимательно глядят? Никакая наука не приводит в порядок ум так, как это делает математика. Как вы, ребята, понимаете эти слова? Ребята, давайте запишем число в рабочих тетрадях	Включаются в деловой ритм урока: выполняют необходимые действия, демонстрируют готовность для работы Записывают в тетрадях число, «Классная работа».
Актуализация опорных знаний и умений(7 мин)	<i>Предметные:</i> Повторение понятий пройденного материала <i>Метапредметные (УУД):</i> <i>Коммуникативные:</i> организовывать и планировать, сотрудничество с учителем и сверстниками. <i>Регулятивные:</i> оценка усвоенного материала.	Давайте вспомним, что мы изучали на прошлых уроках. Устный опрос: Сформулируйте признак делимости на 2,3,5,9,10. Какие числа называются простыми? Какие числа называют составными? Какое число не является ни простым, ни составным? Делитель? Алгоритм нахождения наибольшего общего делителя. Кратное? Алгоритм нахождения НОК. В чем суть доказательства методом «от противного»? Найдите НОД чисел 26 и 39. Найдите НОК чисел 12 и 20. Назовите пары взаимно простых чи-	Участвуют в работе, повторяют, отвечают на вопросы учителя 13. НОД (26; 39) = 13 14. НОК (12; 20) = 60 Взаимно простые: 40 и 99; 100 и 13; 10 и 21; 15 и 16; 4 и 63.

		сел: 8 и 10; 44 и 38; 40 и 99; 14 и 7; 34 и 17; 100 и 13; 44 и 20; 41 и 82; 10 и 21; 15 и 16; 4 и 63; 8 и 12	
Применение полученных знаний в новой деятельности (10 мин)	<p><i>Метапредметные (УУД):</i></p> <p><i>Личностные УУД:</i> принятие социальной роли обучающегося, смыслообразование.</p> <p><i>Познавательные УУД:</i> умение осознанно строить речевое высказывание.</p> <p><i>Коммуникативные УУД:</i> умение слушать собеседника, дополнять и уточнять высказанные мнения.</p>	<p>Пифагор (VI в. до н. э.) со своими учениками изучал вопрос о делимости чисел. Число, равное сумме всех его делителей (без самого числа), они называли совершенным числом. Например, число 6: $6 = 1 + 2 + 3$.</p> <p>Работа в парах: проведите исследование: определите, какое из чисел большее 25, но меньшее 30 является совершенным.</p> <p>Мама Васи Петрова купила для новогодних подарков ученикам 130 конфет, 182 шоколадки и 208 мандаринов и поручила Васе разложить их поровну в подарочные пакеты для одноклассников. Но Вася забыл сколько учеников в его классе, он помнил только, что их больше 25. Помогите Васе узнать сколько учеников в его классе.</p> <p>На празднике “Последнего звонка” выступающим первоклассникам принято дарить подарки. Ученики 11 “а” класса купили 58 конфет, ученики 11 “б” класс – 116 “чупа-чупсов”, а ученики 11 “в” класса – по одной мягкой игрушке. Сколько куплено мягких игрушек?</p>	<p>Делители числа 26: 1, 2, 13, 26 $1 + 2 + 13 \neq 26$</p> <p>Делители числа 27: 1, 3, 9, 27 $1 + 3 + 9 \neq 27$</p> <p>Делители числа 28: 1, 2, 4, 7, 14, 28 $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$.</p> <p>Ответ: 28</p> <p>1) НОД (130, 182, 208) = 26 26 учеников в классе</p> <p>2) НОД (58; 116) = 29 Куплено 29 мягких игрушек.</p>

Обобщение и систематизация знаний (15 мин)	<p><i>Предметные:</i> Умение применять полученные навыки и знания при самостоятельной работе</p> <p><i>Метапредметные (УУД):</i> <i>Личностные УУД:</i> независимость и критичность мышления.</p> <p><i>Регулятивные УУД:</i> контроль правильности ответов информации, выработка собственного отношения к изученному материалу обучающихся, использование знаний для обоснования утверждений.</p> <p><i>Познавательные УУД:</i> поиск и выделение необходимой информации.</p>	<p>Для того, чтобы проверить ваши знания, решим небольшой тест. Сейчас вам на ваших планшетах высветится задание, вы должны решить его за 15 минут, ответы будут сразу фиксировать у меня, затем мы с вами обсудим результаты.</p> <p>Тест см. в приложении.</p>	Выполняют задания теста.
Контроль и коррекция усвоенных знаний (5 минут)	<p><i>Метапредметные (УУД):</i> <i>Регулятивные:</i> контроль, коррекция, выделение и осознание того, что уже усвоено и что еще подлежит усвоению, осознание качества и уровня усвоения</p> <p><i>Познавательные:</i> анализ, синтез, использование общих правил</p>	Ребята, я получила ваши результаты и наибольшее число ошибок было в задания вида...Давайте разберем их вместе.	Проводят разбор заданий на доске и в тетрадях, дискутируют по поводу затруднений
Рефлексия учебной деятельности(5 минут)	<p><i>Метапредметные (УУД)</i> <i>Регулятивные УУД:</i>оценивание собственной деятельности на уроке, , умение анализировать собственные результаты</p>	<p>Чем мы занимались сегодня на уроке?</p> <p>Оцените свою работу на уроке. Что вам было трудным? Что показалось наиболее интересным?</p>	Анализируют свои результаты

Заключение

Тема моей выпускной квалификационной работы «Обучение методам доказательства при изучении элементов теории чисел в школе». В ходе ее выполнения я ориентировалась на поставленную цель: разработать систему упражнений направленную на обучение методам доказательств при изучении элементов теории чисел в школе. Для этого были решены поставленные задачи: описаны методы доказательств, применяемые в теории чисел, выделены этапы работы при обучении доказательствам, составлена система упражнений для реализации этапов обучения доказательствам, а также были разработаны 2 технологические карты уроков, на которых используется разработанная система упражнений.

В ходе работы были рассмотрены различные виды и методы доказательств, различные подходы к определению понятия обучение доказательствам и способы формирования мотивации и развития доказательных навыков. Во второй главе рассмотрены темы, на которых можно вводить разработанную систему упражнений, приведена сама система упражнений для реализации усвоения и закрепления различных методов доказательств для 5-9 классов и технологические карты: введения нового материала и обобщения и систематизации знаний, где наглядно показано как можно применять данную систему заданий в ходе изучения основного материала школьного курса.

Разработанная система упражнений поможет учителям постепенно интегрировать задания на различные методы доказательств в уже существующую программу и обучать учеников доказывать уже с 5-6 классов. А так как данные задания имеют тестовый характер, на их основе можно составлять задания в различных электронных программах, что позволит строить учебный процесс в рамках обучения с помощью информационно-коммуникационных технологий.

Список литературы

1. Айвазян Э. И. Методологические основы обучения математическим доказательствам. Ереван : Изд-во Айпетрат, 2007. 306 с.
2. Байдак В. А. Обучение доказательству теорем: теорема, доказательство теоремы, методы доказательства теорем // Современные проблемы методики преподавания математики; сборник статей / Составители Н. С. Антонов, В. А. Гусев М. : Просвещение, 1985. С.176–192.
3. Волкова, Т. С. Задачи элементарной теории чисел в содержании профессиональной подготовки современного учителя математики // Вестник ТГПУ. 2015. № 7. С. 85–88.
4. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре: Учебное пособие для 8-9 классов с углубленным изучением математики. М. : Просвещение, 2001. 269 с.
5. Игошин В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. М. : ИЦ Академия, 2006. 305 с.
6. Игошин В. И. Математическая логика и теория алгоритмов. М. : ИЦ Академия, 2004. 452 с.
7. Канин Е. С. Индукция. Метод математической индукции и его эквиваленты // Математика для школьников . 2009. № 3. С. 20 – 25.
8. Колоскова М. А. Применяем принцип математической индукции // Математика. 2007. №4. С. 31–45
9. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов: Книга для учителя. М. : Просвещение, 1991. 239 с.
10. Математика. 5 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.]. М. : Мнемозина, 2013. 280 с.
11. Математика. 6 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, [и др.]. М. : Мнемозина, 2013. 288 с.
12. Математика: учебник для 5 класса общеобразовательных учреждений / Г. В. Дорофеев [и др.]. М. : Просвещение, 2011. 175 с.

13. Математика: учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений / Г. В. Дорофеев [и др.]. М. : Просвещение, 2007. 270 с.
14. Мостовой А. И. Различные способы доказательств в курсе геометрии восьмилетней школы : пособие для учителей. М. : Просвещение, 1965. 103 с.
15. Муравин О. В. Математика 5-9 классы: учебно-методическое пособие. М. : Дрофа, 2012. 126 с
16. Родионов М. А. Мотивация учения математике и пути ее формирования: монография. Саранск : Изд-во МГПИ им. М.Е. Евсевьева, 2001. 252 с
17. Саранцев Г. И. Обучения математическим доказательствам и опровержениям в школе. М. : Изд-во ВЛАДОС, 2006. 187 с.
18. Столяр А. А. Формирование элементарных математических представлений у дошкольников. М. : Просвещение, 1988. 303 с.
19. Тимофеева И. Л. О косвенных доказательствах в обучении математике// Математика в школе. 2007. №1. С. 15–20.
20. Успенский В. А. Простейшие примеры математических доказательств. М. : Издательство Московского центра непрерывного математического образования, 2012. 58 с
21. Феокистов И. Е. Делимость чисел // Математика в школе. 2009. № 8. С. 47 – 58.
22. Шахно К. У. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности. Минск : Высшая школа, 1965. 523 с.

Приложение

Тест к уроку закрепления материала.

1. Какое из чисел 5, 6, 7 и 31 является кратным числа 93? 1) 5 2) 6 3) 7 4) 31
2. Верно ли высказывание: сумма двух натуральных чисел кратна каждому из слагаемых? 1) Да 2) Нет 3) Затрудняюсь ответить
3. Запишите все двузначные делители числа 24.
4. Заполните пропуски

Докажите, что число 67 925 является составным.

Доказательство.

67 925 – у этого числа в разряде единиц стоит цифра 5, это значит, что оно _____. Всякое натуральное число делится _____, можно утверждать, что у числа 67 925 есть, по крайней мере, еще один делитель. Следовательно, число составное;

5. Определите, каким методом проведено доказательство.

Строитель делает разметку участка, для этого он вбил в землю 15 кольшков и связал их веревками. Докажите, что к каждому кольшку не может быть привязано ровно по три веревки.

Доказательство. Предположим, что к каждому кольшку привязано ровно по три веревки. Тогда всего концов веревок привязано к кольшкам $15 \times 3 = 45$. У каждой веревки два конца, значит, число концов всех веревок должно делиться на 2 нацело. Но 45 – не делится на 2. Следовательно, наше предположение неверно и к каждому кольшку не может быть привязано ровно по три веревки.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой

«25» сентября 2020 г.

Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента

Юдиной Надеждой Олеговной

(ФИО полностью)

Тема работы

Обучение методов доказательства
при изучении элементов теории
чисел в школе

Утверждена приказом по Университету от «25.11» 2020г. №0883/0

Срок сдачи студентом законченной работы «4» 06 2021г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Предоставление списка тем по ВКР. Выбор темы «Обучение методам доказательства при изучении элементов теории чисел в школе».	29.09.20	выполнено
2.	Подбор списка литературы по данной теме.	11.10.20	выполнено
3.	Составление примерного плана содержания дипломной работы.	13.11.20	выполнено
4.	Формирование теоретической части ВКР.	15.01.21	выполнено
5.	Оформление первой главы. Проверка научным руководителем.	2.03.21	выполнено
6.	Составление фрагментов уроков и подбор системы упражнений для второй главы.	5.04.21	выполнено
7.	Оформление ВКР с учётом требований.	4.06.21	выполнено
8.	Проверка ВКР на оригинальность.	9.06.21	выполнено
9.	Сдача ВКР для проверки на оформление.	29.06.21	выполнено

Дата выдачи задания «25» 09 2020г.

Руководитель Мол Монахов Д.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

Юдина Юдина Н.О.
(подпись) (Ф.И.О.)

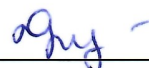
Ректору Пензенского
государственного университета
А. Д. Гулякову
студента 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Юдиной Надежды Олеговны

ЗАЯВЛЕНИЕ.

Я, Юдина Надежда Олеговна, студент 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика», прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат» бакалаврской работы на тему *«Обучение методам доказательства при изучении элементов теории чисел в школе»*, выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



подпись студента

4.06.21

дата

ВКР представлена на проверку (дата) 4.06.21

Руководитель ВКР  Монахова О. А.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему:

«Обучение методам доказательства при изучении элементов
теории чисел в школе»

студента 4 курса Юдиной Надежды Олеговны направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Монахова Оксана Александровна

Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Юдина Надежда Олеговна
Проверяющий: Монахова Оксана Александровна (oxmonakh@mail.ru / ID: 428)
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»: <https://antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 37
Начало загрузки: 9.06.2021 11:01:47
Длительность загрузки: 00:00:14
Имя исходного файла: антиплагиат —
копия.pdf
Название документа: антиплагиат — копия
Размер текста: 52 кБ
Символов в тексте: 52958
Слов в тексте: 6797
Число предложений: 394

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 9.06.2021 11:02:02
Длительность проверки: 00:00:31
Комментарий: не указан
Поиск с учетом редактирования: да
Модуль поиска: Шаблонные фразы, Кольцо вузов, Перефразирование по
eLIBRARY.RU, Сводная коллекция РГБ, eLIBRARY.RU, Сводная коллекция ВБС,
Перефразирование по Интернету, Интернет. Плюс, Модуль поиска "ПГУ", Медицина,
ИПС Адилет, Библиография, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn),
Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по
Интернету (EnRu), СПС ГАРАНТ, Диссертации НББ, Патенты СССР, РФ, СНГ,
Переводные заимствования

ЗАИМСТВОВАНИЯ
33.88%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
0.42%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
65.9%

Дата 9.06.21 (Монахова Оксана Александровна)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Обучение методам доказательства
при изучении элементов теории чисел в школе»
студентки Юдиной Надежды Олеговны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 17ФПМ1

На современном этапе главной задачей учителя становится развитие мыслительной деятельности обучаемых. Математические доказательства – один из инструментов в руках учителя, позволяющий формировать мышление учащихся. Работа Юдиной Н.О. посвящена изучению особенностей обучения доказательству при изучении теории чисел в школе.

В первой главе рассмотрены теоретические основы обучения доказательству. Описаны виды и методы доказательств. Рассмотрены методические аспекты и различные подходы к обучению доказательству.

Во второй главе выделены этапы работы при обучении доказательству, разработана система упражнений для реализации этапов обучения. Составлены технологические карты уроков, где показана интеграция составленных заданий в учебный процесс.

Работа представляет собой самостоятельное исследование Юдиной Н.О. Фрагменты работы опубликованы в сборнике трудов XVII Всероссийской с международным участием научно-практической конференции «Артемовские чтения» (21-22 апреля 2021 года). Считаю, что работа заслуживает оценки «отлично» и может быть рекомендована к использованию учителем при обучении школьников.

Руководитель ВКР:
Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,
доцент, кандидат физико-математических наук

