

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и  
естественных наук

Кафедра  
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: заочная

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

**бакалаврская работа на тему:**

**«Изучение элементов теории чисел в школе»**

**Студент**

 25.05.26  
(подпись, дата)

Жильцова Яна Михайловна  
(фамилия, инициалы)

**Руководитель**

 25.05.26  
(подпись, дата)

Никитина О.Г.  
(фамилия, инициалы)

**Нормоконтролёр**

 - 30.06.26  
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.  
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 09.06.26 № 11)

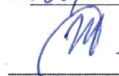
**И.о. заведующего кафедрой**

 09.06.26  
(подпись, дата)

Паньженский В.И.  
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 08.07.26 № 7)

**Секретарь ГЭК**

 -  
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.  
(фамилия, инициалы)

Пенза 2026

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>                                                                                                | <b>3</b>  |
| <b>ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ</b>                                                              |           |
| <b>ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ШКОЛЕ .....</b>                                                                                   | <b>6</b>  |
| 1.1 Роль и значение теории чисел в школьном курсе.....                                                              | 6         |
| 1.2 Свойства простых чисел.....                                                                                     | 11        |
| 1.3 Признаки и свойства делимости.....                                                                              | 15        |
| 1.4 Отражение теории чисел в учебниках математики и алгебры .....                                                   | 22        |
| <b>ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ</b>                                                               |           |
| <b>ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ШКОЛЕ .....</b>                                                                                   | <b>31</b> |
| 2.1 Дидактические условия, способствующие формированию у обучающихся предметных знаний в области теории чисел ..... | 31        |
| 2.2 Анализ заданий ЕГЭ по заданиям с элементами теории чисел.....                                                   | 39        |
| 2.3 Технологические карты .....                                                                                     | 51        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>                                                                                             | <b>68</b> |
| <b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....</b>                                                                       | <b>71</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

Элементы теории чисел занимают особое место в школьном курсе математики, поскольку формируют у обучающихся основы логического и алгоритмического мышления, необходимого для успешного освоения смежных дисциплин. Теория чисел, включающая свойства простых чисел, признаки делимости, сравнения по модулю, является фундаментом для решения олимпиадных задач и заданий ЕГЭ профильного уровня (в частности, задания №19). В условиях цифровизации общества возрастает потребность в специалистах, владеющих математическим аппаратом, лежащим в основе криптографии, кодирования информации, алгоритмики.

Вопросами элементарной теории чисел, так или иначе, занимались все авторы учебников, задачников и методических пособий по арифметике для средних школ: И. К. Андронов, М. И. Башмаков, В. М. Брадис, Е. А. Бунимович, Н. Я. Виленкин, Г. В. Дорофеев, В. В. Козлов, А. Г. Мерзляк, А. Г. Мордкович, Г. К. Муравин, С. М. Никольский, Л. Г. Петерсон, И. Ф. Шарыгин и др [6-9, 20-21, 24-25].

Однако, теория и практика обучения элементарной теории чисел в современной общеобразовательной школе до сих пор не были представлены в целостном виде. Элементы теории чисел представлены фрагментарно, недостаточно систематизированы, а методические подходы к их изучению требуют обновления. Обстоятельство обуславливает необходимость разработки и обоснования дидактических условий, способствующих эффективному формированию у обучающихся предметных знаний в области теории чисел.

Цель исследования – разработать и теоретически обосновать методические рекомендации по изучению элементов теории чисел в старшей школе с учетом требований профильного обучения и ЕГЭ.

Задачи исследования:

1. Определить роль и значение теории чисел в школьном курсе математики.
2. Систематизировать свойства простых чисел и признаки делимости, подлежащие изучению в школе.
3. Провести анализ отражения элементов теории чисел в современных учебниках математики и алгебры.
4. Выявить дидактические условия, способствующие формированию предметных знаний в области теории чисел у обучающихся.
5. Проанализировать задания ЕГЭ по математике, содержащие элементы теории чисел.
6. Разработать технологические карты уроков (занятий) по теме «Признаки делимости» и «Решение задач для подготовки к ЕГЭ», адаптированные для 11 класса.

Объект исследования – процесс обучения математике в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования – методика изучения элементов теории чисел в 11 классе.

Степень разработанности темы. Теоретические основы теории чисел представлены в классических трудах И. М. Виноградова, а также в современных учебных изданиях И. Ю. Жмуровой, А. В. Игнатовой [14], Л. Ю. Нестеровой, С. В. Напалкова [23]. Методические аспекты преподавания элементов теории чисел в школе раскрыты в работах Е. М. Вечтомова (числовые системы) [4-5], С. В. Морозовой, В. С. Прача (методика обучения) [27], Г. Г. Хамова и Л. Н. Тимофеевой (исследовательская деятельность) [29]. Прикладной аспект и связь с практикой отражены у Д. Н. Ашуровой, Б. А. Низомовой [2], Г. Бяшимовой [3], А. А. Джулаевой (задание №19 ЕГЭ) [13], С. Ю. Семеновой, Д. Р. Раяновой, М. Ю. Солощенко (олимпиадные задачи) [30]. Вопросы развития мотивации и одаренности рассматривали Е. А. Пичугина [26],

А. В. Аракелов [1], И. Ш. Могилевский [22], а частные вопросы теории чисел (простые и совершенные числа) – К. А. Бюрчиева, Б. С. Гаваева [15], А. Ю. Бобров и А. Ш. Гатауллин [11], И. Н. Ларина [16], Д. А. Токарев, М. В. Филоненко. Дидактические условия проанализированы Е. В. Лучниковой [28].

Методы исследования представлены теоретическим анализом психолого-педагогической и учебно-методической литературы по проблеме исследования, анализом школьных учебников и контрольно-измерительных материалов ЕГЭ. Применены методы классификации и систематизации материала, сравнительный анализ, проектирование технологических карт уроков.

Структура работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников. Первая глава включает четыре параграфа, в которых раскрываются роль теории чисел, свойства простых чисел, признаки делимости и анализ учебников. Вторая глава содержит три параграфа, посвященных дидактическим условиям, анализу заданий ЕГЭ и разработке технологических карт. В заключении подводятся итоги исследования, формулируются выводы и рекомендации.

# **ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ШКОЛЕ**

## **1.1 Роль и значение теории чисел в школьном курсе**

Современные подходы к обучению требуют, чтобы развитие личности учащегося, его логического мышления и творческих способностей занимало первое место в учебном процессе.

Изучение математики школьниками должно обеспечивать формирование представлений о математике как части человеческой культуры, формирование логического и математического мышления, владение проверенными методами и алгоритмами решения математических задач, умение находить нестандартные способы решения задач.

Теория чисел или высшая арифметика – фундаментальный раздел математики, изучающий свойства целых чисел, их взаимосвязи и закономерности, возникающие в структуре числовых систем. Как одна из древнейших научных дисциплин, она уходит корнями в эпоху античности, где первые систематические исследования чисел проводились пифагорейцами, Евклидом и Диофантом.

История теории чисел древнее большинства математических дисциплин. Евклид в своих «Началах» (около 300 г. до н. э.) доказал бесконечность множества простых чисел. Он же предложил алгоритм для нахождения наибольшего общего делителя. Алгоритмом люди пользовались еще до Евклида, однако именно он его описал первым. Математик Евклид доказал, существует бесконечное множество простых чисел. Исследователь Евклид изобрел способ находить наибольший общий делитель.

Диофант Александрийский в III веке н. э. составил «Арифметику» – сборник задач, решения которых искали в рациональных числах. В его честь уравнения в целых числах называют диофантовыми.

Новый импульс теория чисел получила в XVII-XVIII веках. Ферма сформулировал Великую теорему (1637 год), доказательство которой нашли только через 357 лет. Он же открыл малую теорему Ферма, но доказательство опубликовал Эйлер. Леонард Эйлер ввел понятие функции  $\varphi(n)$ , доказал теорему Эйлера (обобщение малой теоремы Ферма) и заложил основы аналитической теории чисел. Гаусс в 1801 году издал «Арифметические исследования» – эту книгу считают началом современной теории чисел. Гаусс же предложил сравнения по модулю и теорию квадратичных вычетов.

В XX веке теория чисел вышла на первый план благодаря криптографии. Система RSA (1977) основана на сложности разложения больших чисел на простые множители. Проблема распределения простых чисел до сих пор не решена до конца. Гипотеза Римана (1859) о нулях дзета-функции остается самой знаменитой нерешенной задачей.

В школе элементы теории чисел появляются уже в 5 классе. Без них не понять дроби. Если учащийся не умеет находить НОД, он не сократит дробь. Если не знает признаков делимости, не приведет дроби к общему знаменателю. В 6 классе проходят разложение простых чисел на множители. В 10 классе материал строится на процессе повторения и углубления.

Основными объектами изучения теории чисел являются простые числа, диофантовы уравнения, распределение числовых последовательностей, арифметические функции и модулярные формы. Важнейшие открытия в области – от Великой теоремы Ферма до гипотезы Римана – не только расширили границы человеческого знания, но и стимулировали развитие смежных наук. Работы Гаусса, Эйлера, Римана, Харди, Вейля и других ученых заложили основу для современных направлений, таких как алгебраическая и аналитическая теория чисел, а также арифметическая геометрия.

Теория чисел оперирует прежде всего множеством целых чисел. Изучаются свойства делимости, простые и составные числа, алгоритм

Евклида. Делимость определяется так:  $a$  делится на  $b$ , если существует целое  $k$ , при котором  $a = b \cdot k$ . На этом базируются признаки делимости. Например, число делится на 3, когда сумма цифр кратна трем. Доказательство использует разложение числа по степеням 10 и остатки от деления самой десятки на 3. Подобные рассуждения лежат в основе большинства признаков.

Центральное место занимает основная теорема арифметики. Всякое натуральное число, большее единицы, раскладывается на простые множители, и разложение единственно с точностью до порядка сомножителей. Без утверждения невозможно говорить о наибольшем общем делителе или о наименьшем общем кратном. Алгоритм Евклида дает эффективный способ нахождения НОД без разложения на множители. Его идея проста:  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, a \pmod{b})$ , где  $a \pmod{b}$  – остаток от деления  $a$  на  $b$ . Процесс повторяется до тех пор, пока остаток не станет равен нулю; последнее ненулевое число – НОД.

Другое важное направление – сравнения по модулю. Запись  $a \equiv b \pmod{m}$  означает, что  $m$  делит  $a-b$ . Сравнения можно складывать, вычитать, умножать. Малая теорема Ферма гласит: если  $p$  простое и  $a$  не кратно  $p$ , то  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Свойство лежит в основе многих криптографических протоколов. Теорема Эйлера обобщает ее на составные модули.

В обновленном ФГОС основного общего образования требования к предметным результатам по математике содержат, в частности, овладение понятиями, связанными с делимостью целых чисел. Учащимся необходимо выполнять арифметические действия с целыми числами, находить НОД и НОК, применять свойства делимости. Учителя часто проходят эти темы формально. На НОД и НОК отводят два-три урока. Поскольку время (в 2-3 урока) бывает часто недостаточно для усвоения материала, у учащихся возможны при сокращении дробей грубые ошибки.

Приходим к выводу, что теория чисел в школьном курсе математики – традиционный раздел математики, в котором изучаются, в числе прочего,

отношения на множестве натуральных чисел, главное из которых – отношение делимости.

В. С. Прач пишет: «Элементы теории чисел, как и сама наука «Теория чисел», оказывают большое влияние на интеллектуальное развитие человека и, прежде всего, таких его компонентов как способность к усвоению новой информации, сила и гибкость ума, умение планировать действия, способность к аргументации.» [27, с. 35].

Сформированность представлений о числах в целом способствуют правильному формированию у школьников «чувства числа» [21] и выстраиванию грамотных знаний о системе работы с видами чисел и системами мер.

В работе Е. А. Пичугиной утверждается, что: «Систематическое обращение к теории чисел на разных этапах изучения математики и в актуальных интересных формах будет способствовать росту интереса обучающихся к математике в целом, более глубокому пониманию математических основ программирования, повышению уровня информационной грамотности населения и в перспективе возможному открытию новых способов защиты информации» [26, с. 2].

То есть, теория чисел применяется еще и в другие сферы, кроме математических наук. Возьмем криптографию. Алгоритм RSA – асимметричная криптосистема, использующая пару ключей: открытый (публичный) для шифрования и закрытый (приватный) для расшифровки.

RSA основан на свойствах простых чисел и функции Эйлера. В базовой школе материал не дается. Но в профильных классах, на элективном курсе, можно показать основу шифрования. Зная два больших простых числа, легко вычислить их произведение. Обратная задача – разложение на множители – трудоемка. есть основа шифрования. Учащиеся, как правило, воспринимают с интересом. Факт небезоснователен. Сейчас криптография приобретает все большую популярность в век развития технологий. Также популяризируется

необходимость защиты информации (персональных данных, сведений организации или даже государства) в период напряженной геополитической обстановке и роста мошеннических махинаций.

Другой пример – генетика. Комбинаторный подсчет числа делителей через каноническое разложение аналогичен подсчету числа генотипов по независимым признакам. Прямой аналогии в учебнике нет, но учитель биологии может подсказать, а учитель математики – использовать. Формулировка «теория чисел помогает понять закономерности наследственности» выглядит преувеличенной, но некоторый параллелизм присутствует.

В информатике и ИКТ также есть отсылки к теории чисел. Решето Эратосфена – алгоритм, который реализуется в 9-10 классах на уроках программирования. Оценка сложности  $O(n \log \log n)$  не обязательна, но сам принцип «вычеркивания» полезен. В учебниках математики алгоритм дается в виде перебора, не как программная реализация.

Задачи по предмету физика в 7-8 классах на нахождение периода колебаний, частоты – там используются делители и кратные. Например, две шестеренки с разным числом зубцов. С теорией чисел их связывает НОК. Но на занятиях задания решаются перебором, без осознания теории чисел.

То есть, межпредметные связи теории чисел, как правило, остаются в школьном курсе скрытыми. В обычных учебниках они почти не прослеживаются. Но на элективных занятиях связь можно продемонстрировать, используя задачи из физики или информатики.

Теория чисел – важный раздел современной математики. Теория чисел в настоящее время широко используется и за пределами школы, СПО, ВУЗов для анализа алгоритмов, информационных потоков, исследования степени оптимальности различных комбинаторных алгоритмов, при проектировании и анализе различных криптосистем.

Таким образом, теория чисел играет важную роль в математическом образовании учащихся: с изучением свойств делимости завершается формирование понятия натурального числа – фундаментального понятия, при помощи которого строятся все другие числовые системы; теоретический и задачный материал элементарной теории чисел обладает значительными возможностями для развития логического мышления, позволяет увидеть взаимосвязь истории и современности. Интересно заметить, элементарная теория чисел – единственный модуль пропедевтического курса математики, позволяющий формировать все виды математического знания: теоретического, операционального и практического.

Изучение элементов теории чисел в школьном курсе математики имеет большое значение для развития математических способностей учеников и их применения в повседневной жизни. Освоив основные понятия исследуемого раздела математики, ученики смогут легче справляться с задачами и развивать свои навыки анализа и логического мышления.

## **1.2 Свойства простых чисел**

Согласно общепринятому определению: «Простое число – натуральное число, имеющее только два делителя: 1 и само число. Составное число – натуральное число, имеющее натуральный делитель, отличный от него самого и 1». Уникальным в данном контексте является число 1, который несмотря на то, что является важным для определения указанных категорий чисел, не относится ни к одной из них [3].

Основная теорема арифметики утверждает, что «любое целое число, которое больше единицы, можно разложить на простые множители». В формулировке и доказательстве указанной арифметической теоремы важное значение имеют две другие вспомогательные теоремы.

Натуральные числа – числа, используемые для счета предметов (1, 2, 3, 4, 5 и так далее). Это целые положительные числа, начиная с единицы.

Согласно определениям, множество натуральных чисел разбивается на подмножества:

1. Простые числа.
2. Составные числа.
3. Число, которое не причисляется ни к простым, ни к составным числам.

Натуральное число  $p \neq 1$  называется простым), если оно не имеет никаких нетривиальных делителей. Число 1 целесообразно не считать простым, так как каждое целое число делится на 1 в сколь угодно большой степени [16].

«Простое число – это натуральное число, большее 1, которое не может быть выражено как произведение двух меньших натуральных чисел. Например, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79 и т.д.» [25]

В программе математики 6 класса дается определение: натуральное число, большее единицы, называется простым, если у него нет других делителей, кроме 1 и самого себя. Иначе – составное. Единица не относится ни к тем, ни к другим.

Первое фундаментальное свойство – каждое натуральное число, большее 1, имеет хотя бы один простой делитель. Возьмем любое число  $n > 1$ . Если оно простое, то оно само и есть свой делитель. Если составное, то у него есть делитель, отличный от 1 и  $n$ . Среди всех таких делителей выберем наименьший. Обозначим его  $p$ . Этот  $p$  не может быть составным, так как иначе у него нашелся бы делитель меньше  $p$ , который также делил бы  $n$ . Значит,  $p$  – простое.

Теорема Евклида – основной элемент теории чисел. Она утверждает, что для любого конечного списка простых чисел найдется простое число, не

вошедшее в перечисленный список (то есть существует бесконечно много простых чисел).

Доказательство теоремы Евклида живет уже более двух тысяч лет. Предположим противное: простых чисел конечное число,  $p_1, p_2, \dots, p_k$ . Рассмотрим число  $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ . Оно не делится ни на одно из этих простых (остаток 1). Но по предыдущему свойству у  $N$  есть простой делитель – новое простое, не входящее в исходный список. Противоречие. Теорема доказана.

Количество простых чисел бесконечно, но их распределение среди натуральных чисел крайне неравномерно.

Лемма Евклида – классический результат элементарной теории чисел. Она сформулирована как предложение 30 в книге VII «Начал» Евклида и является ключевой для доказательства основной теоремы арифметики. Современная формулировка: если произведение нескольких сомножителей делится на простое число  $p$ , то по крайней мере один из сомножителей делится на  $p$ . Или если простое число  $p$  делит произведение двух целых чисел  $a \cdot b$ , то  $p$  делит хотя бы одно из них [28].

Доказательство опирается на свойство взаимной простоты. Пусть  $p$  не делит  $a$ . Тогда  $\text{НОД}(p, a) = 1$ . Существуют целые  $x, y$  такие, что  $px + ay = 1$  (линейное представление НОД). Умножаем на  $b$ :  $pbx + aby = b$ . По условию  $p$  делит  $ab$ , значит,  $p$  делит левую часть, следовательно,  $p$  делит  $b$ . Лемма доказана. Для школьного курса ее обычно дают без доказательства, только на примерах.

Основная теорема арифметики (теорема о единственности разложения на простые множители). Любое целое число  $n > 1$  может быть представлено в виде произведения простых чисел, и такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей. Существование разложения доказывается индукцией по  $n$ : если  $n$  простое, то разложение есть; если составное, то  $n = a \cdot b$ , где  $1 < a, b < n$ , и для  $a$  и  $b$  разложения существуют.

Единственность доказывается с помощью леммы Евклида. Предположим два разложения:  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$ . Поскольку  $p_1$  делит произведение  $q_1 \cdot \dots \cdot q_m$ , то  $p_1$  делит одно из  $q_i$ . После перестановки можно считать  $p_1 = q_1$ . Сокращаем и повторяем. В итоге  $k = m$  и множители совпадают. —

Каноническое разложение числа — представление числа в виде произведения простых множителей, упорядоченных по возрастанию, с использованием степеней  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ , где  $p_i$  — различные простые,  $\alpha_i$  — натуральные показатели. Запись удобна для вычисления числа делителей, суммы делителей, функции Эйлера. Отметим, это единственный способ записать число как произведение простых чисел (с учетом порядка).

Взаимно простые числа. Два числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1. Простые числа всегда взаимно просты с любыми числами, которые на них не делятся. Свойства — если  $a$  взаимно просто с  $b$  и  $a$  взаимно просто с  $c$ , то  $a$  взаимно просто с  $bc$ . Представлено следствие леммы Евклида.

Пример: 8 и 9 — взаимно просты, а 6 и 10 — нет ( $\text{НОД}(6; 8)=2$ ). Простые числа всегда взаимно просты с любыми числами, которые на них не делятся. Свойство: если  $a$  взаимно просто с  $b$  и  $a$  взаимно просто с  $c$ , то  $a$  взаимно просто с  $bc$ .

Существует достаточно много таблиц простых чисел (рисунок 1).

Известна таблица Д.Х. Лемера, содержащая простые числа до 10 000 000.

Также известен метод «решета Эратосфена». Метод заключается в выписывании всех целых чисел от 1 до  $n$  с вычеркиванием каждого четного числа, начиная с 2, третьего начиная с 3, пятого начиная с 5 и т.д. для каждого простого числа. Оставшаяся последовательность чисел будет представлять простые числа [20].

|     | 2   | 3   | 5   | 7   | 11  | 13  | 17  | 19  | 23  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 29  | 31  | 37  | 41  | 43  | 47  | 53  | 59  | 61  | 67  |
| 71  | 73  | 79  | 83  | 89  | 97  | 101 | 103 | 107 | 109 |
| 113 | 127 | 131 | 137 | 139 | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 |
| 173 | 179 | 181 | 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 | 227 |
| 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 | 269 | 271 | 277 |
| 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | 347 |
| 349 | 353 | 359 | 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 |
| 409 | 419 | 421 | 431 | 433 | 439 | 443 | 449 | 457 | 461 |
| 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 | 509 | 521 | 523 |
| 541 | 547 | 557 | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 | 599 |
| 601 | 607 | 613 | 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 |
| 659 | 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 | 709 | 719 | 727 |
| 733 | 739 | 743 | 751 | 757 | 761 | 769 | 773 | 787 | 797 |
| 809 | 811 | 821 | 823 | 827 | 829 | 839 | 853 | 857 | 859 |
| 863 | 877 | 881 | 883 | 887 | 907 | 911 | 919 | 929 | 937 |
| 941 | 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 991 | 997 |     |

Рисунок 1 - Таблица простых чисел от 1 до 1000

Простые и составные числа начинают изучать в 6 классе. Традиционным считается конкретно-индуктивный уровень объяснения, начинающийся с примеров (Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Александрова Л.А., Шварцбурд С. Математика, 6 класс) [6].

Предлагаемые по теме «Простые и составные числа» задачи предлагают подсчет количества делителей составных чисел, поиск простых чисел по соответствующим таблицам.

### 1.3 Признаки и свойства делимости

В теории чисел центральную роль играет теория делимости, которая занимает значительную часть арифметики. Делимость – главное свойство теории чисел. Еще более 2 тысяч лет назад до нашей эры древние египтяне знали признак делимости на 2. Вопросы делимости чисел изучались в Греции, в школе Пифагора (VI в. до н. э.). Основные свойства делимости

целых чисел описал Евклид (III в. до н. э.) в своих «Началах». Итальянским математиком Леонардо Пизанским – первым крупным математиком средневековой Европы, который был наиболее известен под прозвищем Фибоначчи (1170 – 1228), были раскрыты признаки делимости на 2.

Огромное влияние в исследование делимости внесено исследователем Блезом Паскалем (1623-1662). Паскаль нашел алгоритм, который позволяет находить признак делимости любого целого числа на любое другое целое число. Из алгоритма получаются все частные признаки. Вопросы делимости исследовали также П. Ферма и Л. Эйлер.

В XVIII-XIX вв. многие крупнейшие математики занимались развитием теории чисел, в частности теории делимости.

Элементарная теория чисел занимается в первую очередь натуральными числами 1, 2, 3, ... Присоединив нуль и целые отрицательные числа, получим область всех целых чисел, в которой неограниченно выполнимы операции сложения, вычитания и умножения. Для деления это не так, поэтому понятие делимости играет важную роль.

Важность изучения делимости в следующем. В математике есть целый ряд заданий и задач, ответы на которые могут быть получены без выполнения операции деления, а лишь установив, делится ли одно число на другое; овладение учащимися свойствами и признаками делимости позволит выполнить большой класс заданий на делимость, избежав здесь вычислительных ошибок и сэкономив время.

Делимость чисел – одна из важнейших тем математики, изучаемая, в основном, в 5-6 классах школы; в дальнейшем к ее изучению практически не возвращаются, в то время как на эту тему существует большое число самых разнообразных задач, которые часто встречаются на олимпиадах, входят в ЕГЭ по математике [30].

Обратимся к теоретическому аспекту. В литературе по теории чисел [4, 5, 23, 24] имеет место следующее определение делимости. Это – целое число

$a$  делится на не равное нулю целое число  $b$ , если существует такое число  $q$ , что  $a = b \cdot q$ .

При этом число  $a$  называется делимым,  $b$  – делителем, а  $q$  – частным.

Запись  $a:b$  обозначает, что число  $a$  делится на число  $b$ , т.е.  $b$  является делителем числа  $a$ , а запись  $a \text{ не } : c$  – что число  $a$  не делится на число  $c$ , т.е. не является делителем числа  $a$ .

С. В. Панюшкин и Л. М. Козичева доказывают, что если  $a : b$ ,  $b \neq 0$ , то существует лишь одно число  $c$  такое, что  $a = b \cdot c$ , называемое частным от деления  $a$  на  $b$ . Действительно, пусть  $a = b \cdot c_1$ ,  $a = b \cdot c_2$ , ( $c_1 \neq c_2$ ), то  $0 = b \cdot c_1 - b \cdot c_2 = b(c_1 - c_2)$ , чего не может быть, т.к.  $b \neq 0$ , а  $c_1 \neq c_2$ . Получили противоречие [17].

Понятие делимости применимо только к целым числам. Для рациональных чисел данное понятие не имеет смысла, так как для любых двух рациональных чисел  $a$  и  $b$ , где  $b \neq 0$  всегда существует рациональное число, являющееся их частным. Поэтому в дальнейшем, говоря о делимости, под «числом» будем подразумевать целое число.

Цель теории делимости – подготовка к выполнению действий над рациональными числами. При этом также параллельно изучаются пропорция, проценты.

Свойства делимости задают общие правила. Рассмотрим свойства делимости, широко применяемые при решении задач.

- 1) Если  $m$  – результат деления  $n$  на  $k$ , то  $m$  – единственное.
- 2) Любое число делится на само себя.
- 3) Если  $a$  делится на  $b$ ,  $b$  делится на  $c$ , то  $a$  делится на  $c$ .
- 4) Если  $a$  делится на  $b$  и  $b$  делится на  $a$ , то или  $a = \pm b$
- 5) Если  $m$  делится на  $k$  и  $k > m$ , то  $m = 0$ .
- 6) Если  $m$  делится на  $n$  и  $m \neq 0$ , то  $m \geq n$ .
- 7) Если каждое из  $n$  чисел делится на  $k$ , то их сумма (разность) также делится на  $k$ .

9) Если сумма чисел и  $k - 1$  слагаемое этой суммы делится на  $m$ , то и  $k - 1$  слагаемое делится на  $m$ .

Свойства делимости как таковые не изучаются в школьных учебниках в разрезе теории. Они изучаются через систему упражнений, а не в виде совокупности готовых правил. Так, например, предлагается ответить на систему истинных или ложных утверждений и выбрать верные (рисунок 2).

|   |                                                           |
|---|-----------------------------------------------------------|
| А | Если чётное число делится на 3, то оно делится на 6.      |
| Б | Если число делится на 9, то оно делится на 3.             |
| В | Если число оканчивается цифрой 3, то оно не делится на 3. |
| Г | Если число не делится на 3, то оно не делится на 9.       |

Рисунок 2 – Система упражнений, ориентированная на самостоятельные выводы о признаках делимости [6]

Признак делимости – правило, позволяющее определить, кратно ли одно число другому, по виду его записи в десятичной системе. Для разных делителей признаки различаются. Некоторые совсем простые. Другие требуют вычислений, но все равно проще, чем деление уголком.

Признак делимости на 2. Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра четная (0, 2, 4, 6, 8). Обоснование: любое число можно представить как  $10 \cdot k + r$ , где  $r$  – последняя цифра.  $10 \cdot k$  всегда четно. Значит, четность всего числа совпадает с четностью  $r$ . В 5 классе это объясняют на примерах, не вводя букв.

Признак делимости на 5. Последняя цифра 0 или 5. Потому что  $10 \cdot k$  делится на 5, и остается проверить только  $r$ .

Признак делимости на 10. Последняя цифра 0. Здесь все очевидно.

Следующая группа признаков связана с суммой цифр. Их доказательство требует свойств сравнений по модулю, но в школьной программе обычно дают готовое правило.

Признак делимости на 3 и на 9. Число делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (на 9). Почему это работает? Потому что  $10 \equiv 1 \pmod{3}$  и  $10 \equiv 1 \pmod{9}$ . Тогда любая степень десятки также дает остаток 1. Следовательно, число и сумма его цифр сравнимы по модулю 3 (или 9). В учебниках 6 класса исследуемое свойство формулируют без доказательства, но иногда приводят числовую проверку. Например, 123:  $1+2+3=6$ , делится на 3, значит, и 123 делится на 3. 123 на 9 не делится, так как сумма 6 не кратна 9.

Признак делимости на 4. Число делится на 4, если две его последние цифры образуют число, делящееся на 4. Объяснение: 100 делится на 4, поэтому число можно записать как  $100 \cdot a + b$ , где  $b$  – двузначное окончание. Первое слагаемое кратно 4, значит, все число делится на 4 тогда и только тогда, когда  $b$  делится на 4. Пример: 1324 – последние две цифры 24,  $24:4=6$ , значит, число делится на 4.

Признак делимости на 8. Аналогично, три последние цифры должны образовывать число, кратное 8, так как 1000 делится на 8. В школе признак дают факультативно, потому что трехзначные числа делить на 8 уже не так просто.

Признак делимости на 6. Число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3 одновременно. Поскольку 2 и 3 взаимно просты, это условие необходимо и достаточно. В задачах часто используют комбинацию признаков.

Для 7, 11, 13, 17, 19 признаки сложнее. В базовом курсе их обычно не проходят. Однако в олимпиадных задачах и в ЕГЭ (задание №19) они могут понадобиться. Остановимся на самых популярных и распространенных.

Признак делимости на 11. Число делится на 11, если разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр на четных местах делится на 11 (или равна 0). Отсчет позиций ведется справа (с единиц). Пример: число 123321. Сумма на нечетных (справа: 1,3,2) = 6, на четных (2,3,1) = 6, разность 0 – делится на 11. Иногда школьники ошибочно считают

слева, что приводит к неверному результату – есть типичная методическая проблема.

Признак делимости на 7. Существует несколько вариантов. Один из них: число делится на 7, если результат вычитания удвоенной последней цифры из числа без последней цифры делится на 7. Пример: 693. Отбрасываем 3, получаем 69.  $69 - 2 \cdot 3 = 63$ . 63 делится на 7, значит, и 693 делится на 7. Признак применяют для многозначных чисел, повторяя процедуру. В школе дается редко, но в элективных курсах рассматривается.

Признак делимости на 13. Аналогично, но коэффициент другой: число делится на 13, если сумма числа без последней цифры и учетверенной последней цифры делится на 13. Либо другой вариант: вычитание 9-последняя цифра. Универсального признака нет. Паскаль показал, для любого  $m$  можно подобрать множитель, но на практике пользуются табличными правилами для конкретных простых чисел.

Признаки делимости на 17 и 19. Для 17: число без последней цифры минус 5-последняя цифра делится на 17. Для 19: число без последней цифры плюс 2-последняя цифра делится на 19. Правила редко встречаются даже в олимпиадной литературе. В школе их изучать нецелесообразно из-за трудоемкости запоминания.

Вернемся к свойствам делимости, которые упоминались выше. Свойства 7 и 9 (о делимости суммы и разности) особенно важны. Приведем примеры из школьной практики.

Свойство 7: если каждое слагаемое делится на  $k$ , то и сумма делится на  $k$ . Например, 24, 36, 48 делятся на 12. Их сумма 108 тоже делится на 12. Обратное неверно: сумма может делиться, а слагаемые – нет ( $15+25=40$ , делится на 5, но 15 и 25 по отдельности делятся на 5 – здесь как раз обратное верно; нужен контрпример:  $14+21=35$  делится на 7, но 14 делится, 21 делится – тоже не подходит. Лучше:  $8+12=20$  делится на 4, но 8 делится, 12 делится. Контрпример, где сумма делится, а слагаемые нет:  $9+6=15$ , 15 делится на 3,

но 9 делится, 6 делится – опять не то. Нужно:  $10+15=25$ , 25 делится на 5, 10 и 15 также делятся на 5. Трудность. Возьмем  $7+14=21$ , делится на 7, оба слагаемых делятся на 7. На самом деле если каждое слагаемое делится, то сумма делится, а если сумма делится, то слагаемые могут и не делиться:  $8+12=20$ , 20 делится на 5, но 8 и 12 на 5 не делятся. Вот хороший пример.)

Свойство 9 (его часто называют свойством делимости линейной комбинации): если сумма чисел и все слагаемые, кроме одного, делятся на  $m$ , то и оставшееся слагаемое делится на  $m$ . Действительно, пусть  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S$ , причем  $S : m$  и  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} : m$ . Тогда  $a_n = S - (a_1 + \dots + a_{n-1}) : m$ . Представленное свойство используется при решении уравнений в целых числах, в задачах на остатки.

Как уже отмечалось, в школьных учебниках свойства делимости не даются в виде готового списка. Вместо этого – система упражнений, где ученик сам делает выводы. Например, в учебнике Н.Я. Виленкина предлагается ряд вопросов: «Верно ли, что если каждое слагаемое делится на 5, то и сумма делится на 5? Приведите пример». Или «Может ли сумма двух чисел делиться на 7, если каждое из них не делится на 7?» [8]

Деление с остатком тесно связано с делимостью. Если число не делится нацело, остается остаток. Теорема о делении с остатком: для любых целых  $a$  и  $b$  ( $b \neq 0$ ) существуют единственные  $q$  и  $r$ ,  $0 \leq r < |b|$ , такие что  $a = b \cdot q + r$ . В школе это изучают в 5 классе на примерах:  $17 : 5 = 3$  (ост. 2). Затем используют для признаков делимости, для нахождения НОД (алгоритм Евклида). Деление с остатком – база для сравнений по модулю, хотя сам термин «модуль» вводится позже.

Знание признаков делимости ускоряет устный счет, помогает при сокращении дробей, при решении задач на нахождение чисел по условиям делимости. В ЕГЭ (профильный уровень) задача 19 часто требует перебора вариантов с использованием признаков делимости на 3, 4, 5, 11, а также комбинации свойств. Например: «Найдите все трехзначные числа, которые

при делении на 2 дают остаток 1, на 3 – остаток 2, на 5 – остаток 3». Решение сводится к системе сравнений, которая решается перебором или методом подбора с учетом признаков [30].

Таким образом, делимость – важнейшее свойство теории чисел. В истории математики многие ученые занимались развитием теории чисел, в частности теории делимости. В школе теория делимости, используется во время изучения основных признаков делимости, наиболее важных понятий, и решения задач. Признаки и свойства делимости составляют инструментарий, которым должен владеть школьник к концу 6 класса. В старшей школе эти знания углубляются на элективных курсах и при подготовке к олимпиадам.

#### **1.4 Отражение теории чисел в учебниках математики и алгебры**

Понятие числа принадлежит к числу фундаментальных понятий, так как определяется потребностями практики. В современных математических теоретических построениях принята следующая последовательность изучения числовых множеств: натуральные числа; целые числа; рациональные числа; действительные числа; комплексные числа.

Утвержденный федеральный перечень учебников математики позволяет выделить ряд авторов и учебников, соотносимых с тематикой изучения элементов теории чисел, предлагаемые разными авторами, в разных классах. Рассмотрим некоторые из них.

Авторы современных учебников математики (арифметики) для 5-6 классов традиционно определяют место элементарной теории чисел в школьном курсе математики как необходимый теоретический базис теории обыкновенных дробей, изучение которого отнесено к курсу пятого или шестого классов, в зависимости от точки вхождения систематического изучения теории обыкновенных дробей в школьный курс математики [6-9, 20-21, 24-25]. В исключительных случаях изучение элементарной теории

делимости относят к разделу «Натуральные числа» (5 класс). Во всех случаях элементарная теория чисел выделена в отдельный раздел учебника математики.

Элементы теории чисел начинают изучать в 5-6 классах и, естественно, на первоначальном уровне, к тому же ни учебным планом, ни школьной программой не предусмотрено повторение на более высоком уровне. Поэтому конструирование заданий, создание системы задач для внеклассной работы по исследуемой теме является важной проблемой, которая требует своего решения. Необходимо дать учащимся основные определения числовых множеств и их подмножеств, свойства целых чисел, а также научить применять понятия и свойства для решения учебных и практико-значимых задач.

Анализ действующих учебно-методических комплектов (УМК) показывает, место и объем теории чисел сильно различаются. В одних линиях ей отводят отдельную главу, в других она «растворена» в темах об обыкновенных дробях. Ниже рассмотрим три наиболее распространенные линии для 5-11 классов: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир; С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин; Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд [6-9, 20-21, 24-25].

В программе линии 5-6 классов А. Г. Мерзляк и соавторов [20] в 5 классе элементы теории делимости фактически не рассматриваются, однако в качестве их пропедевтики, имеет место изучение в теме «Умножение и деление натуральных чисел» вопроса «Деление» в объеме 7 часов. В соответствии с программой в результате изучения данного вопроса учащиеся должны уметь формулировать свойства деления натуральных чисел, записывать эти свойства в виде формул. В 6 классе, как следует из указанной программы [10], изучение вопросов делимости натуральных чисел предусмотрено в теме «Делимость натуральных чисел».

Учебники математики А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонского, М. С. Якира для 5-6 классов входят в систему учебников «Алгоритм успеха» [20-21]. Содержание их соответствует ФГОС основного общего образования. В данных учебниках математики представлено разнообразие дидактических заданий на разном уровне сложности: простые, среднего уровня сложности (для формирования базовых знаний), сложные задания и задания высокой сложности. Выделены также задания, рекомендуемые для устной работы, задания, которые можно решать с помощью компьютера и задания, рекомендуемые для домашней работы. Для работы с преуспевающими по математике учащимися в конце каждого параграфа имеются особые задачи – так называемые «задачи от мудрой совы», решение которых поможет учащимся в подготовке к олимпиадам по математике.

Учебник авторства А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонского, М. С. Якира Математика. 5 класс [20] разделен на два больших раздела: «Натуральные числа и действия над ними» и «Дробные числа и действия с ними». В первом из названных разделов освещаются такие темы как натуральные числа, натуральный ряд, деление, делимое, делитель, частное. Во втором разделе изученные понятия делимости применяются при сокращении обыкновенных дробей и приведении дробей к общему знаменателю, деление с остатком используется как основа выделения целой части из неправильной дроби. В 6 классе отдельная глава «Делимость натуральных чисел» содержит параграфы: делители и кратные, признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10, простые и составные числа, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное. Признак делимости на 11 дан в рубрике «Это интересно», то есть не обязателен для всех.

Перейдем к анализу учебной линии С. М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова, А. В. Шевкина, отличающейся более академичным, теоретическим стилем. Уже в 5 классе в главе «Натуральные числа и шкалы» вводятся понятия делителя и кратного. Однако

систематическое изложение теории чисел начинается в 6 классе с главы «Делимость натуральных чисел». В отличие от А. Г. Мерзляка, С. М. Никольский дает доказательства признаков делимости на 3 и 9 через разложение числа по разрядам. В учебнике 6 класса присутствуют пункты: свойства делимости, признаки делимости (на 2,3,5,9,10,4,25,8,11 – последние в виде дополнительного материала), простые числа, разложение на простые множители, алгоритм Евклида (в явном виде под названием «Нахождение НОД с помощью алгоритма Евклида»), наименьшее общее кратное [24-25].

В линии исследуемого автора прослеживается логическая стройность. Каждая теорема доказывается. Однако практико-ориентированных задач меньше, чем у А. Г. Мерзляка. Отсутствует цветовое или звездочковое маркирование уровней сложности, однако дифференциация заданий прослеживается через систему нумерации (простые – без обозначения, более сложные – с точкой или двумя точками). В каждом пункте выделены задания для устной работы (серия «Устные упражнения»), задачи для самостоятельного решения на уроке и дома. Обычно, номера, рекомендованные для домашнего задания, не выделены специальным значком. Своеобразное упрощение ранжирования задач по сложности педагогом видится в предлагаемом примерном поурочном планировании с их перечнем.

Думается, в УМК С. М. Никольского есть и мотивационный аспект для ребят, кому интересны математические задачи. В конце каждой главы присутствует рубрика «Старинные занимательные задачи» и «Задачи повышенной трудности», в т. ч. на применение признаков делимости и свойства остатков. Некоторые из них по сложности сопоставимы с «задачами от мудрой совы» из линии А. Г. Мерзляка и могут использоваться для подготовки к олимпиадам. Компьютерные эксперименты в явном виде не выделены, однако в методических рекомендациях к линии предлагается использовать электронные таблицы для проверки делимости чисел.

То есть учебники 5-6 класса С. М. Никольского и соавторов соответствуют ФГОС, но требуют большего количества часов на прохождение. В последней редакции добавлены задания на восстановление цифр в числе с использованием признаков делимости – шаг навстречу требованиям ЕГЭ [24-25].

Еще необходимо уделить внимание УМК Н. Я. Виленкина, В. И. Жохова, А. С. Чеснокова, С. И. Шварцбурда. Учебно-методический комплекс Н. Я. Виленкина и его коллег – классическая линия, выдержавшая множество переизданий [6-9]. В учебнике 5 класса теория чисел представлена фрагментарно. Основной блок «Делимость чисел» вынесен в 6 класс. Признаки делимости даются без доказательств, в расчете на запоминание. Есть таблица простых чисел до 1000. Алгоритм Евклида не упоминается совсем – НОД и НОК находят разложением на простые множители. В учебнике для шестиклассников параграф «Делимость чисел» содержит пункты: делители и кратные, признаки делимости на 2, 5, 10, 3 и 9, простые и составные числа, разложение на простые множители, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.

Доказательства признаков делимости отсутствуют. Но приводятся образцы рассуждений (например, как определить, делится ли число на 3). В отличие от линий А. Г. Мерзляка и С. М. Никольского, здесь нет отдельных рубрик для устных упражнений или заданий с пометкой для домашней работы. Учитель сам определяет, какие номера решать устно, а какие письменно. Текст учебника насыщен теоретическим материалом, выделенным в рамочки и на цветном фоне.

Сильная сторона линии Н. Я. Виленкина в обилии задач на применение НОД и НОК в реальных ситуациях (шаги, расписание, деление на команды). Недостаток выявлен в отсутствии доказательств. Для обычного класса это преимущество (экономия времени), для профильного логично, что – недостаток. В последней редакции учебник приведен в соответствие с ФГОС:

добавлены задания на формирование УУД (умение работать с текстом, находить информацию). Но структура осталась прежней [6-9].

Дифференциация заданий в УМК Н. Я. Виленкина выражена слабо. Сложные задачи не отмечены звездочками или цветом. Однако в конце каждого параграфа есть раздел «Задачи на смекалку» [6-9]. В нем встречаются задания на применение признаков делимости в нестандартных ситуациях. Задачи можно использовать для работы с преуспевающими учащимися. Заданий, рекомендованных для выполнения с помощью компьютера, в учебнике нет.

В последних переизданиях добавлены упражнения на формирование регулятивных УУД (например, составление алгоритма нахождения НОД). Пропедевтика теории делимости в 5 классе у Н. Я. Виленкина минимальна. Освоение темы целиком переносится на 6 класс, требуя от педагога тщательного планирования времени [6-9].

В таблице 1 приведено сравнение УМК для 5-6 классов.

Таблица 1 – Сравнительная таблица для 5-6 классов

| № | Критерий                            | Учебно-методический комплекс |                            |                        |
|---|-------------------------------------|------------------------------|----------------------------|------------------------|
|   |                                     | А.Г. Мерзляк и др.           | С.М. Никольский и др.      | Н.Я. Виленкин и др.    |
| 1 | Отдельная глава по теории чисел     | Да, в 6 классе               | Да, в 6 классе             | Да, в 6 классе         |
| 2 | Доказательства признаков делимости  | Нет, даются правила          | Да, для 3 и 9              | Нет                    |
| 3 | Алгоритм Евклида                    | Нет                          | Да (явно)                  | Нет                    |
| 4 | Признак делимости на 11             | В дополнительной рубрике     | В дополнительном материале | Нет                    |
| 5 | Задачи на применение в жизни        | Мало                         | Единичные                  | Много (шаги, автобусы) |
| 6 | Уровневая дифференциация            | Есть (звездочки)             | Нет                        | Нет                    |
| 7 | Задачи для олимпиад («мудрая сова») | Да                           | Нет                        | Нет                    |
| 8 | Соответствие ФГОС                   | Да                           | Да                         | Да                     |

На рисунке 3 приведен количественный аспект исследуемых линий УМК 5-6 классов.

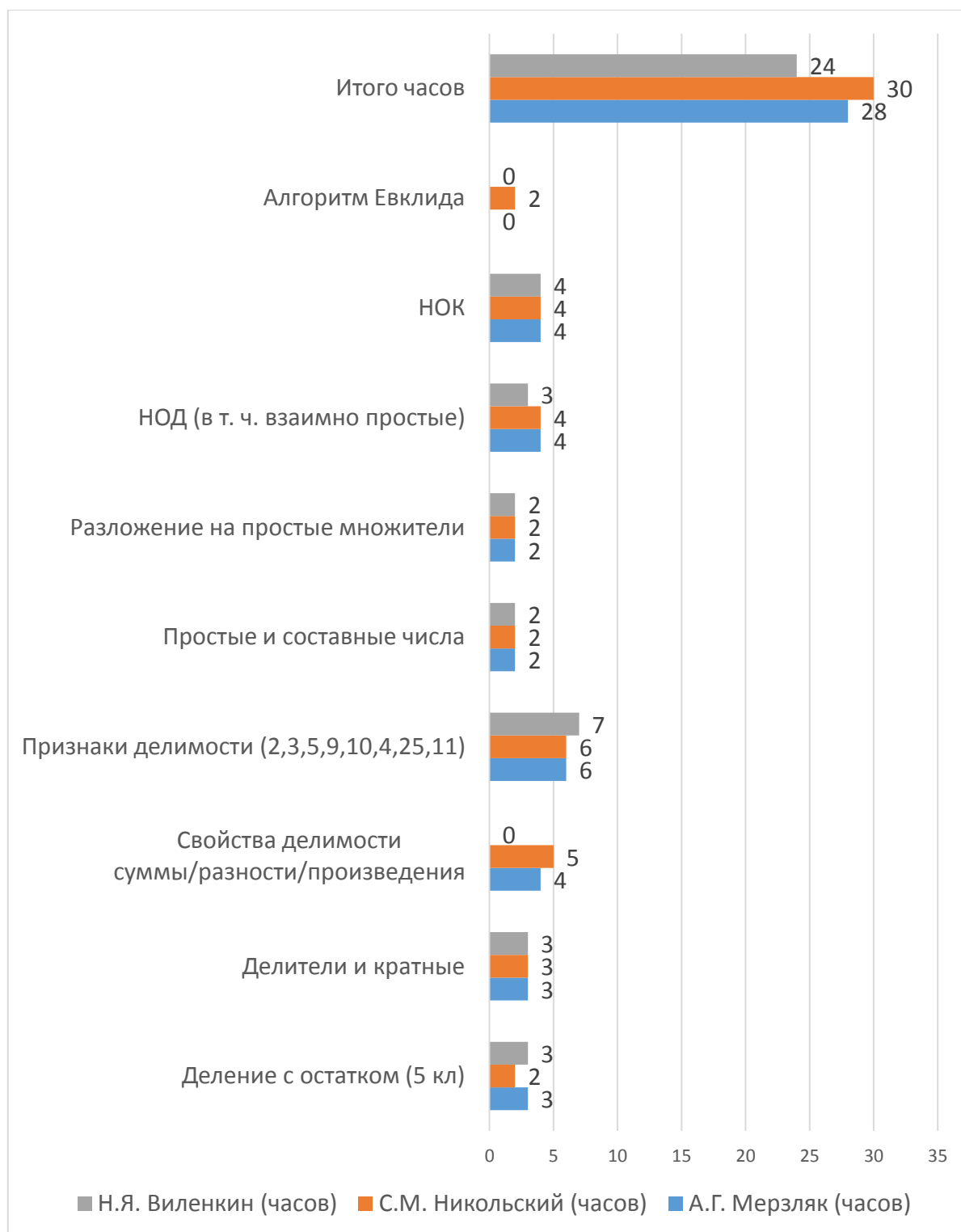


Рисунок 3 - Количественный аспект в тематике изучения элементов теории чисел в учебниках

Мы видим, практически все авторы подразделяют элементы теории чисел на 7-8 условных блоков, в которые входят понятие деления с остатком, делителей и кратного, свойств делимости суммы/разности/произведения, признаков делимости, НОД и НОК, простых и составных чисел и разложения на множители. Разными могут быть только логика последовательности их изучения.

Анализ УМК 5-6 классов по теме теории чисел позволяет сделать вывод – идеального учебника не существует. Если в классе нет уклона в инженерное, техническое направление, за основу учебной программы чаще всего берется линия Н. Я. Виленкина, поскольку тут жизненных задач много. Учащиеся быстро понимают, зачем нужны делители и кратные. Но в программе доказательств нет [6-9].

УМК С. М. Никольского имеет характеристику наличия большого количества доказательств, ясных, логичных. Алгоритм Евклида дан явно. То есть линия С. М. Никольского подходит для «сильных» профильных классов [24-25].

Линия А. Г. Мерзляка выглядит наиболее современной с точки зрения организации материала. Есть уровневая дифференциация – системы задач и олимпиадный компонент. Но тут есть нюанс – доказательств признаков делимости почти нет. Школьник просто запоминает правило [20-21].

УМК С. М. Никольского и соавторов имеет характеристику наличия большого количества доказательств, ясных, логичных. Алгоритм Евклида дан явно. То есть линия С. М. Никольского подходит для «сильных» профильных классов. Линия А. Г. Мерзляка выглядит наиболее современной с точки зрения организации материала. Есть уровневая дифференциация – системы задач и олимпиадный компонент. Но тут есть нюанс – доказательств признаков делимости почти нет. Школьник просто запоминает правило.

Таким образом, в 5-6 классах элементы теории чисел закладываются в каждой из рассмотренных линий, но с разной глубиной и акцентами.

Н. Я. Виленкин дает практические задания, С. М. Никольский – строгие доказательства, А. Г. Мерзляк – современную организацию материала и дифференциацию.

В 7-9 классах системное изучение теории чисел фактически отсутствует, ее элементы встречаются лишь эпизодически в отдельных задачах повышенной сложности.

В 10-11 классах полноценное содержание содержательная линия «Элементы теории чисел» доступно только в профильных учебниках. Базовый уровень ограничивается фрагментарным повторением. То есть необходимо использование элективных курсов для подготовки к ЕГЭ и развития математического мышления.

## **ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В ШКОЛЕ**

### **2.1 Дидактические условия, способствующие формированию у обучающихся предметных знаний в области теории чисел**

Под дидактическими условиями мы понимаем обстоятельства процесса обучения, которые представляют собой результат организационных форм обучения для достижения определенных дидактических целей, результат отбора, конструирования и применения элементов содержания и методов.

В современных педагогических исследованиях ученые - дидакты С. И. Архангельский, П. Я. Гальперин, К. Келли, Н. Ф. Талызина выделяют систему условий эффективности управления деятельностью учащихся по усвоению знаний.

Е. В. Лучникова пишет: «Система дидактических условий должна состоять из взаимосвязанных и взаимообусловленных дидактических средств и методов. Дидактическими условиями в образовательном процессе может выступать отбор и содержание материала урока. На сегодняшний день в условиях современного образовательного процесса дидактика обеспечивает взаимодействие форм, методов, средств обучения, в результате которого происходит взаимодействие учащихся с учителем и между учащимися. Результаты обучения достигаются тогда, когда педагог качественно выбирает подход, оптимально подходит к отбору содержания учебного материала, к достаточным методам и средствам обучения. Дидактические условия могут быть обеспечены методами обучения, направленных на эффективность обучения учащихся.

Таким образом, дидактические условия для развития личности создаются совокупностью педагогических средств. Обеспечивают в учебном

процессе образовательную среду посредством различных технологий, осуществляемых учителем» [17, с.1].

Перейдем непосредственно к дисциплине математике. Дидактические условия в математике 5-11 классов – специально создаваемые учителем обстоятельства обучения, которые обеспечивают эффективное усвоение материала, развитие логического мышления и формирование устойчивых вычислительных навыков. К таким условиям относятся систематическое повторение пройденного, уровневая дифференциация заданий, наглядность при введении абстрактных понятий, а также организация обратной связи на каждом уроке. Без целенаправленного создания этих условий даже самый талантливый ученик не сможет раскрыть свой потенциал в полной мере. В графическом формате принципы представлены на рисунке 4.

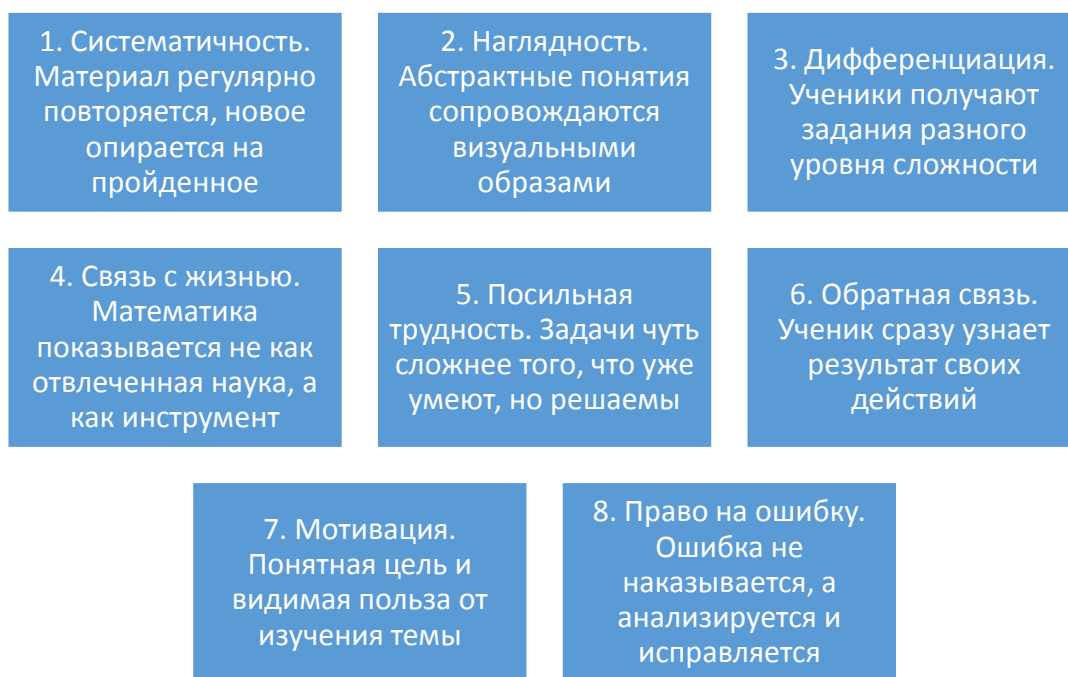


Рисунок 4 – Дидактические условия обучения математике в 5-11 классах

Элементы теории чисел начинают изучать еще в школе. Так, в пятом классе ученики знакомятся с понятием натурального числа; в шестом классе - осваивают признаки делимости, определение простого и составного числа.

Важно уделить внимание и методическому аспекту в работе педагога. К основным факторам развития интереса авторы методических рекомендаций для учителя относят: доступность материала учебника и ориентацию на успешность в его изучении; освобождение учебного материала от второстепенных деталей, затрудняющих концентрацию внимания школьников на основном содержании; порционную подачу материала; построение системы заданий на принципах их взаимосвязи, сглаживания дискретности уровней сложности усвоения и чередования видов деятельности: каждое следующее задание вытекает из результата выполнения предыдущего; соседние задания в системе упражнений, как правило, отличаются либо по содержанию, либо по формулировке; включение в систему: (а) задач, фабулы которых содержат интересные факты из географии, техники, биологии, истории, окружающего мира; (б) заданий, развивающих умения выделять общие свойства объектов, обосновывать свои действия, искать рациональные пути решения, строить контрпримеры; наличие рубрики «Задачи на смекалку», позволяющей углубить основное содержание курса и подготовить школьников к участию в предметных олимпиадах.

К основным факторам развития интереса авторы методических рекомендаций для учителя относят: доступность материала учебника и ориентацию на успешность в его изучении; освобождение учебного материала от второстепенных деталей, затрудняющих концентрацию внимания школьников на основном содержании; порционную подачу материала; построение системы заданий на принципах их взаимосвязи, сглаживания дискретности уровней сложности усвоения и чередования.

В школьном курсе математики теория чисел играет важную роль, особенно при подготовке учащихся к углубленному изучению математики, участию в олимпиадах и других конкурсах. Углубленное изучение теории чисел помогает развить у школьников логическое и абстрактное мышление, а

также способствует более глубокому освоению фундаментальных математических понятий.

Формирование предметных знаний по теории чисел не происходит само собой. Даже при наличии хорошего учебно-методического комплекса. Учащиеся запоминают признаки делимости, но не понимают, откуда они взялись. Сокращают дроби, но не видят связи с НОД. Школьники решают уравнения, но боятся диофантовых уравнений. Причина проста – отсутствие специально созданных условий. Поэтому важно уделить внимание вопросу – какие именно условия дидактики работают в заданиях, касающихся теории чисел на уроках математики.

1. Опора на исторический материал. Теория чисел родилась из практических задач. Пифагорейцы искали совершенные числа. Евклид доказывал бесконечность простых. Диофант решал уравнения в целых. Рассказывать это нужно не отдельным уроком, а короткими вставками по 3-5 минут. Например, когда проходим признак делимости на 11, можно сказать, что признак знали купцы в Средневековье для проверки расчетов.

2. Наглядность и визуализация. Теория чисел оперирует абстракциями. Таблицу простых чисел выносят на уроке на стенд. Алгоритм Евклида – в виде блок-схемы. Признаки делимости – в виде опорного конспекта с примерами. В 5-6 классах хорошо работает «решето Эратосфена», выполненное на листе А3 (рисунок 5). Учащиеся сами вычеркивают числа, видят, как «просеиваются» простые. Постепенно материал запоминается лучше любой лекции.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20  |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30  |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40  |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60  |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70  |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80  |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90  |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

Рисунок 5 – Решето Эратосфена

3. Связь с жизнью и другими предметами. Теория чисел – не про отвлеченные формулы. Она про четность автобусных маршрутов, про штрих-коды на товарах, про контрольные суммы в номерах банковских карт (алгоритм Луна), в т. ч. И про определение дня недели по дате. Учащиеся наблюдают, что исследуемая тема работает, важна, применима в формате здесь и сейчас.

4. Уровневая дифференциация заданий. Теория чисел может быть разной в заданиях по сложности. Кому-то достаточно научиться находить НОД двух чисел. Кто-то способен решать диофантовы уравнения с тремя неизвестными. В идеале учитель должен предложить задачи трех уровней. Базовый – на прямое применение правил. Повышенный – на комбинацию двух-трех правил. Высокий (олимпиадный) – на нестандартные ходы. В линии А.Г. Мерзляка это уже реализовано звездочками, у других авторов нет деления по сложности.

5. Регулярное повторение. Теория чисел забывается быстрее других разделов. После завершения 6 класса соответствующие темы практически не встречаются вплоть до 10 класса. К моменту начала подготовки к ЕГЭ многие выпускники не помнят даже признак делимости на 9, хотя он изучался пять лет назад. Следственно, необходимы короткие повторяющие

упражнения («пятиминутки») в 7-9 классах. Три примера на делимость в начале урока. Одна задача на нахождение НОД в конце. В 10-11 классах повторение делаем системным. Хотя бы одно задание №19 раз в две недели.

6. Использование игровых форм. Признаки делимости целесообразно отрабатывать в формате соревнования. Кто быстрее найдет все числа в предложенной таблице, делящиеся на 7? Кто больше назовет трехзначных чисел, кратных 13? Эффективна игра «Найди ошибку». Учитель намеренно допускает неточность в применении признака делимости при решении задачи. Учащиеся должны обнаружить и исправить ошибку. В инженерном профильном классе уместны задачи на восстановление пропущенных цифр в номерах банковских карт или проверку корректности штрих-кодов. Формат игры и полезен, и интересен, и в т.ч. чувствуется дух соревнований среди учащихся.

7. Система доказательств (для профильного уровня). Для базового класса достаточно правил с формулировками. Для профильного класса здесь отказ от доказательств неприемлем. Обучающийся должен понимать, почему число делится на 3, только когда сумма цифр кратна трем. Иначе в нестандартной ситуации признак не применить. Доказательства делаем краткими, ясными, без воды. На одно доказательство отводится не более 10 минут. Предпочтительная форма – цепочка наводящих вопросов, подводящая учеников к самостоятельному логическому выводу.

8. Наличие задач на моделирование. Теория чисел часто требует перевода текстовой задачи сюжетного характера на язык математических соотношений. Классический пример. Турист прошел в первый день 5 км. В каждый следующий день он проходил на одно и то же целое число километров больше, чем в предыдущий. За 7 дней пройдено 91 км. Требуется определить расстояние, преодоленное в последний день. Здесь не просто диофантово уравнение. Тут важно умение распознать в тексте арифметическую прогрессию и выделить неизвестную целочисленную

разность. Внедрение заданий такого типа важно и по причине того, что они готовят к выполнению задания 19 ЕГЭ, одновременно развивая математическое мышление.

9. Индивидуальные проекты. Для сильных и высокомотивированных учащихся предлагаются темы исследовательского характера. «Решето Эратосфена». «Дружественные числа». «Совершенные числа». «Алгоритм Евклида в музыке». «Применение сравнений по модулю в криптографии». Проект может быть небольшим по объему – 3-5 страниц печатного текста или в формате презентации. Главное требование – обучающийся самостоятельно добывает информацию, анализирует источники, формулирует выводы, далее учащиеся защищают проект, отвечая на вопросы.

10. Использование цифровых инструментов. Быстрый перебор делителей, проверка признаков делимости, построение таблиц простых чисел. Все это легко реализовать средствами электронных таблиц (Excel) или на языке программирования Python, если класс владеет основами алгоритмизации. Для инженерного профиля такое условие становится не дополнительным, а обязательным. Ученик пишет функцию – проверяет, простое число или нет. Или программу, раскладывающую число на простые множители.

Мы упомянули олимпиадные задания. Обратим внимание на их значение. Олимпиадные задачи – дидактический инструмент перехода от репродуктивных алгоритмов к эвристическому мышлению. Они заставляют применять теорию чисел в нестандартных ситуациях, где готовые алгоритмы не работают. Регулярное участие в олимпиадах (даже без призовых мест) ломает шаблон «выучил правило – решил пример». С другой стороны, выигрыш в олимпиадах сейчас дает поступление в ВУЗы без экзаменов или 100 баллов по ЕГЭ по предмету. Определенно, хорошая мотивация для учащихся. В инженерном профиле они служат мостиком между

академическим курсом и прикладными областями (криптография, теория кодирования). Решение нестандартных задач формирует навык многоходового рассуждения. Без этого инженерное мышление не развивается.

По словам А.В. Аракелова, который описывал эффективные способы внедрения олимпиадных задач в структуры уроков: «необходимо, чтобы эти задачи были с динамическим уровнем трудности и сложности (принцип развития задачи). Например, первую часть задачи решают многие, но полное решение с обоснованием доступно далеко не всем. Также легко развивается содержание многих задач (выход на исследовательский уровень)» [1, с. 14].

Во время урока в любой момент можно найти место для заданий, которые будут всесторонне развивать учеников, причем вне зависимости от возрастной категории. Запланированная программа занятий может включать в себя рассмотрение интересных задач, ребусов, анаграмм, криптограмм, софизмов, задач прикладного характера.

Теория чисел требует особого внимания. Необходимы систематическое повторение (без него признаки делимости забываются), уровневая дифференциация (база, повышенный, олимпиадный уровень), оперативная обратная связь и право на ошибку. Без этих условий олимпиадные задачи становятся сложными.

Еще среди дидактических условий особая ниша отводится математическому кружку. С. Ю. Семенова указывает: «Для того чтобы ученики полноценно раскрывали свой потенциал с самого начала, начали проводиться дополнительные занятия в математических кружках. Основная цель математического кружка – объединение учеников различной возрастной категории под руководством педагога, чтобы систематически проводить внеклассные уроки с будущими олимпиадниками по решению задач, которые основаны по большей мере на вычислении счетов, в навыках быстрых и безошибочных подсчетов, проведении конкурсов и викторин, которые в

первую очередь тесно переплетаются с миром математики» [30, с. 128]. На кружке ученик может полтора часа разбирать одно диофантово уравнение, пробовать ошибочные ходы и возвращаться к началу. Условие «безопасной пробы» – принципиально для формирования глубоких знаний в теории чисел, где нестандартных задач больше, чем алгоритмических.

Придем к выводу, перечисленные нами выше дидактические условия не функционируют изолированно. Чем больше используется принципов, тем выше результативность в достижении предметных знаний по теории чисел на уроках математики, алгебры. Невозможно давать доказательства, но игнорировать практическую отработку. Недопустимо использовать игровые формы, но пренебрегать систематическим повторением. Педагог, намеревающийся сформировать у школьников прочные предметные знания по теории чисел, обязан продумать целостную методическую систему. От первого знакомства с понятиями делителя и кратного в 5 классе до уверенного решения диофантовых уравнений и задач на сравнения по модулю в 11 классе. При соблюдении этих условий ЕГЭ перестает быть непреодолимым препятствием, а олимпиадные задания становятся посильными.

## **2.2 Анализ заданий ЕГЭ по заданиям с элементами теории чисел**

Единый государственный экзамен по математике профильного уровня в 2026 году сохранил привычную структуру. Экзаменационная работа включает 19 заданий, из которых первые 12 требуют краткого ответа, а оставшиеся 7 – развернутого решения. Разработчики контрольных измерительных материалов ЕГЭ по математике (базовый уровень) предлагают выпускникам задание №19, при решении которого необходимы базовые знания из теории чисел (например, признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10, 11, свойства делимости, основная теорема арифметики и т. д.) [18, 31].

Задание под номером 19 относится ко второй части и посвящено свойствам чисел. За него можно получить до 4 первичных баллов. Время на решение – около 40 минут. В демоверсии, опубликованной ФИПИ, задание 19 сформулировано так: на доске записано 10 различных натуральных чисел, среднее арифметическое любых четырех или пяти из них – целое число. Задача выступает типичным представителем «числовых наборов». Никаких комплексных чисел или матриц в варианте не было, хотя в кодификаторе они заявлены. Статистика выполнения задания 19 остается невысокой. Средний процент выполнения – около 2%. Причина не в сложности теории – она вся из 5-6 класса. Проблема в нестандартности подхода.

Основная теорема арифметики (теории чисел) явно не упоминается, но ее следствие (единственность разложения на простые множители) неявно используется при решении задач в №19 экзамена базового уровня. В задании необходимо найти трехзначное число по условиям кратности и суммы цифр. Без теории чисел там не обойтись.

Анализ открытых источников и тренировочных материалов за 2026 год позволяет выделить блоки знаний, без которых решение задания 19 невозможно.

1. Делимость и ее свойства. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11. Но на экзамене к ним редко обращаются на прямую. Обычно требуют применить признак в нестандартной ситуации. Например, определить делимость числа по его записи или по сумме цифр. Тут экзаменуемые часто ошибаются. Ученики помнят правило для 3, но не могут применить его к многозначному числу с пропущенными цифрами.

2. Простые и составные числа, разложение на множители. Основная теорема арифметики работает безотказно. Если в задаче фигурирует простое число, то необходимо использовать его свойства (делить произведение – значит, делить хотя бы один множитель).

3. НОД и НОК, алгоритм Евклида. Прямое нахождение НОД встречается редко. Чаще НОД используется как инструмент оценки. Например, если сумма нескольких чисел делится на  $d$ , и каждое слагаемое, кроме одного, тоже делится на  $d$ , то и оставшееся слагаемое делится на  $d$ .

4. Остатки по модулю, сравнения. В ЕГЭ 2026 года встречается чаще всего. Многие задания нацелены на работу с остатками. Причем не только с остатками от деления на 2, 3, но и на 4, 7, 11, 13. Ученик должен понимать:  $a \equiv b \pmod{m}$  означает, что  $a$  и  $b$  дают одинаковые остатки при делении на  $m$ .

5. Прогрессии и последовательности. В задании 19 часто маскируют теорию чисел под прогрессии. Например, задача о девочках и фотографиях (разобрана ниже) на поверку оказывается диофантовым уравнением.

6. Десятичная запись числа. Умение представить число в виде суммы разрядных слагаемых. Без этого не решить ни одну задачу про перестановку цифр или про числа с заданными свойствами.

Проанализируем конкретные примеры из открытых источников, позиционируемых как подготовка к ЕГЭ 2026 года.

Тип 1. Задачи на среднее арифметическое и наборы чисел. Пример из тренировочного варианта:

На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810.

- а) Может ли на доске быть ровно 24 четных числа?
- б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 7?
- в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?

Здесь проверяется четность, свойства окончаний чисел (модуль 10), метод от противного. Пункт (а) – достаточно привести пример. Пункт (б) – доказать невозможность, используя делимость суммы на 2. Пункт (в) –

оценка снизу через минимальную сумму. Наблюдается классическая типичная структура задания – от частного примера к общему доказательству.

Тип 2. Задачи на арифметические прогрессии и целые числа.

Пример – задача про девочек и фотографии.

В первый день Катя сделала  $m$  фотографий, а Маша –  $k$  ( $m, k \geq 1$ ). Каждый следующий день каждая делает на 1 фотографию больше, чем в предыдущий. Всего за время поездки Маша сделала на 715 фотографий больше, чем Катя.

- а) Могло ли это произойти за 5 дней?
- б) Могла ли Катя за 11 дней сделать 1000 фотографий?
- в) Определите максимальное количество фотографий, которое могла сделать Маша, если Катя в последний день сделала меньше 35 фотографий.

Задача с виду про прогрессии. На деле – про разность сумм арифметических прогрессий. Формула суммы:  $S = n \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d) / 2$ . Разность сумм Маши и Кати равна  $n \cdot (m - k)$ . Получаем  $n \cdot (m - k) = 715$ . Дальше – разложение на множители и перебор делителей. В пункте (в) добавляется условие  $k + (n-1) < 35$ . Здесь часто путаются: подставляют не те формулы или забывают, что разность прогрессии равна 1.

Тип 3. Задачи на квадраты и суммы квадратов

Еще один распространенный сюжет – последовательность квадратов. Дана последовательность квадратов натуральных чисел: 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

- а) Можно ли среди первых десяти ее членов выбрать шесть чисел так, чтобы одно равнялось сумме остальных?
- б) Можно ли среди первых десяти членов выбрать семь чисел так, чтобы одно равнялось сумме остальных?
- в) Можно ли среди членов этой последовательности выбрать 100 чисел так, чтобы одно равнялось сумме остальных?

Пункт (а) решается предъявлением примера ( $1+9+16+25+49=100$ ). Пункт (б) – доказательством от противного через оценку минимальной

суммы. Пункт (в) – конструктивным примером (используется формула суммы квадратов). Задача хороша тем, что показывает – даже если первые пункты не получились, третий может быть решен отдельно.

Тип 4. Задачи на делимость и свойства чисел

Пример из сборника заданий:

а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?

б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?

в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

$72 = 8 \cdot 9$ , причем 8 и 9 взаимно просты. Значит, число должно делиться на 8 и на 9. Признак на 9 – сумма цифр кратна 9. Признак на 8 – последние три цифры образуют число, кратное 8. Надо перебирать варианты. Здесь актуально не просто «примени правило», а цепочка рассуждений с перебором [18, 31].

Опираясь на анализ демоверсии и тренировочных вариантов, можно выделить несколько наиболее важных методов решения 19 задания ЕГЭ по математике (рисунок 6).

Успешное решение задания 19 базируется на владении пятью методами: перебор делителей (сведение произведения к константе), метод остатков (доказательство невозможности через сравнение по модулю), метод оценок (нахождение экстремальных значений с последующим примером), метод построения примера (для пункта «а»), а также метод от противного (для пункта «б»). Представленные методы не являются альтернативными – они дополняют друг друга. Освоение каждого требует специальной тренировки, поскольку стандартный курс алгебры уделяет им недостаточно внимания.



Рисунок 6 – Методы решения задания 19 ЕГЭ по математике профильного уровня

Уделим внимание и анализу структуры задания 19. Задание 19 всегда состоит из трех пунктов: а), б), в). Это не случайно. Пункт (а) обычно проверяет умение привести пример. Пункт (б) – умение доказать невозможность (контрпример или от противного). Пункт (в) – умение найти экстремальное значение (максимум или минимум).

Структура удобна для пошагового оценивания. Даже если ученик не решил весь номер, он может получить 1 балл за пункт (а). Или 2 балла за (а) и (б).

Рассмотрим ее на примере задачи про фотографии:

- Пункт (а) – «Могло ли это произойти за 5 дней?» – ответ «да», достаточно привести пример ( $m=144$ ,  $k=1$ ,  $n=5$ ).
- Пункт (б) – «Могла ли Катя за 11 дней сделать 1000 фотографий?» – ответ «нет», доказательство через неразрешимость уравнения.
- Пункт (в) – поиск максимального значения с дополнительным условием. Здесь уже нужно применить метод перебора и оценок.

Каждый следующий пункт сложнее предыдущего. Усложнение помогает экзаменатору дифференцировать выпускников. Полностью верное решение с обоснованием всех трех пунктов – уже показатель высокого уровня.

Обратимся к ошибкам учащихся, допускаемых при выполнении задания по теории чисел в профильном уровне ЕГЭ по математике (таблица 2).

Таблица 2 – Типичные ошибки при решении задания 19 ЕГЭ

| № | Название ошибки                       | Суть ошибки                                                                                                                        | Последствие                             |
|---|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1 | Неверный выбор метода                 | Ученик пытается решить диофантово уравнение перебором всех возможных значений, когда достаточно одного сравнения по модулю         | Потеря времени, нередко – срыв решения  |
| 2 | Путаница между «любое» и «существует» | В задаче сказано: «Все числа обладают свойством Р». Ученик приводит пример, где одно число обладает свойством Р                    | Логически неверный ответ, потеря баллов |
| 3 | Неполный перебор                      | При нахождении всех решений перебираются не все возможные делители; забываются отрицательные значения (в задачах с целыми числами) | Потеря части решений, неполный ответ    |
| 4 | Неумение строить примеры              | Пункт (а) не выполнен, хотя достаточно было взять маленькие числа и проверить                                                      | Потеря балла при наличии идеи решения   |
| 5 | Неаккуратное оформления               | В развернутом ответе не обосновано, почему найденное значение максимальное или минимальное; просто перечислены варианты            | Ответ не засчитывается как полный       |

Первая и третья ошибки связаны с нерациональной тактикой. Ученик либо выбирает слишком громоздкий способ, либо проводит перебор не полностью. Вторая ошибка – логическая. Экзаменуемый не различает кванторы «все» и «существует», т. е. наблюдается фундаментальное недоразумение. Четвертая ошибка логическая. Школьник переоценивает

сложность пункта (а) и не пытается подобрать простой пример. Пятая ошибка касается оформления. Формальное требование обоснования игнорируется.

Все эти недочеты устранимы. Достаточно систематической тренировки и разбора каждого типа ошибок на конкретных задачах. Без этого даже знающий ученик рискует потерять баллы.

Придем к выводам. Во-первых, теоретическая база задания 19 не выходит за рамки курса 5-6 классов (делимость, признаки, НОД, НОК, остатки). Однако применяются эти знания в нестандартных, замаскированных условиях. Ученик должен увидеть за фабулой задачи (фотографии, поездки, наборы чисел) чисто арифметическую структуру. Во-вторых, наиболее востребованными темами в 2026 году являются остатки по модулю и метод оценок. В демоверсии и тренировочных вариантах эти элементы встречаются постоянно. В-третьих, задание 19 проверяет не столько знание фактов, сколько умение рассуждать, приводить примеры, доказывать от противного, строить цепочки логических выводов. В-четвертых, без специальной подготовки решить задание 19 практически невозможно. Эпизодических знаний из 6 класса недостаточно. Нужна система: повторение признаков делимости в 7-9 классах, введение сравнений по модулю в 10 классе, регулярное решение задач на целые числа и остатки.

Кроме профильного уровня, выпускники сдают и базовый уровень ЕГЭ по математике, куда входит задание №19, посвященное числам и их свойствам. За это задание можно получить 1 первичный балл. Время на решение – около 15 минут. Уровень сложности – базовый. Средний процент выполнения – 45,6%. То есть, каждый второй учащийся допускает ошибку. В профиле задание 19 требует развернутого обоснования, иногда на несколько страниц. В базе достаточно привести пример или записать ответ. Никаких доказательств не требуют.

Для решения нужны признаки делимости на 2,3,4,5,8,9,10,11,25; умение раскладывать число на множители; понимание свойств четности. Материал, который проходят в 5-6 классах.

Нередко случается ситуация, где ученик знает правило, но не может применить его к нестандартной формулировке. Например, «число делится на 18» означает, что оно должно быть четным и сумма цифр кратна 9.

Разберем классификацию основных задания под №19 из базового варианта ЕГЭ по математике.

Тип 1. Нахождение числа по условиям кратности.

Найдите трехзначное число, кратное 70, все цифры которого различны, а сумма квадратов цифр делится на 2, но не делится на 4.

Решение:

Число кратно  $70 = 7 \cdot 10$ , значит, оно оканчивается на 0 (по признаку делимости на 10). Последняя цифра – 0.

Перебираем трехзначные числа, кратные 70, начиная с наименьшего: 140, 210, 280, 350, 420, 490, 560, 630, 700, 770, 840, 910, 980.

Проверяем условие: цифры различны.

- 140: цифры 1,4,0 – различны. Сумма квадратов:  $1+16+0=17$  – нечетная, а надо четную.
- 210: 2,1,0 – различны.  $4+1+0=5$  – нечетная.
- 280: 2,8,0 – различны.  $4+64+0=68$  – четная, но 68 делится на 4 ( $68:4=17$ ), а надо «не делится на 4».
- 350: 3,5,0 – различны.  $9+25+0=34$  – четная,  $34:4=8,5$  – не делится нацело. Подходит.

Ответ: 350.

Здесь важна системность. Надо перебирать аккуратно, не пропуская числа. И проверять три условия – кратность 70, различие цифр, свойство суммы квадратов.

Тип 2. Вычеркивание цифр.

Вычеркните в числе 58918749 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 18.

Решение:

Число делится на  $18 = 2 \cdot 9$ , значит, оно четное (последняя цифра четная) и сумма цифр кратна 9.

Исходное число: 5 8 9 1 8 7 4 9. Сумма цифр:  $5+8+9+1+8+7+4+9 = 51$ .

Нам нужно вычеркнуть три цифры. Оставшаяся сумма должна быть кратна 9.  $51 - \text{сумма вычеркнутых} = \text{число, кратное } 9$ .

Подбираем. Вариант: вычеркнуть 8, 7, 9 (одну из девяток). Остается 5,9,1,8,4,9? Не так. Лучше перебирать готовые варианты.

В ответе указаны: 59184, 89874, 58914.

Проверим 58914: последняя цифра 4 – четная. Сумма цифр:  $5+8+9+1+4=27$  – кратно 9. Следовательно, вариант подходит.

Этот тип задач любят за компактность. Ученик не вычисляет ничего сложного – только складывает цифры и проверяет четность.

Тип 3. Числа с заданными свойствами цифр.

Пример: Найдите четырехзначное натуральное число, кратное 44, все цифры которого различны и четны.

Решение:

$44 = 4 \cdot 11$ . Значит, число должно делиться на 4 и на 11.

- Делимость на 4: последние две цифры образуют число, кратное 4.
- Все цифры четные: возможные цифры – 2,4,6,8. Различные.

Четырехзначное число – значит, четыре разные четные цифры.

- Признак делимости на 11: разность суммы цифр на нечетных местах и суммы цифр на четных местах кратна 11.

Перебираем возможные комбинации. В ответе указано: 2068

Проверим:

Цифры: 2,0,6,8 – все четные? 0 – четный, но условие «цифры четные» обычно понимают как 2,4,6,8. 0 иногда исключают. В этом ответе

использовали 0 – значит, допустимо. Оканчивается на 68 – 68 делится на 4.  
Признак на 11:  $(2+6)=8$ ,  $(0+8)=8$ , разность 0 – кратно 11.

Здесь комбинаторика. Вариантов не так много, можно перебрать.

Тип 4. Разность чисел и обратный порядок цифр.

Пример: Цифры четырехзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырехзначное число. Затем из второго числа вычли первое и получили 3546. Найдите исходное число.

Решение:

Пусть исходное число:  $1000a + 100b + 10c + d$ . Кратно 5  $\rightarrow d=0$  или  $d=5$ . Если  $d=0$ , то при обратном порядке получим число, начинающееся с 0 (трехзначное). Значит,  $d=5$ .

Обратный порядок:  $1000 \cdot 5 + 100c + 10b + a = 5000 + 100c + 10b + a$ .

Вычитаем из второго первое:  $(5000+100c+10b+a) - (1000a+100b+10c+5) = 3546$ .

Упрощаем:  $4995 + 90c - 90b - 999a = 3546 \rightarrow 90c - 90b - 999a = -1449$ .

Делим на 9:  $10c - 10b - 111a = -161 \rightarrow 111a + 10(b-c) = 161$ .

$a$  – цифра от 1 до 9. Перебираем:  $a=1 \rightarrow 111 + 10(b-c)=161 \rightarrow 10(b-c)=50 \rightarrow b-c=5$ .  $a=2$  дает 222 – уже больше 161.

Значит,  $a=1$ ,  $b=c+5$ . Подбираем пары  $(b, c)$ :  $(5,0)$ ,  $(6,1)$ ,  $(7,2)$ ,  $(8,3)$ ,  $(9,4)$ .

Исходное число: 1 b c 5. Получаем: 1505, 1615, 1725, 1835, 1945. Все подходят.

Ответ: 1505 (или любое из перечисленных)

Здесь нужна аккуратность. Много букв, но вся алгебра – в пределах 6 класса.

Тип 5. Произведение и сумма цифр

Пример: Найдите четное пятизначное натуральное число, сумма цифр которого равна их произведению.

Решение:

Все цифры ненулевые – иначе произведение будет 0. Пятизначное число начинается не с 0.

Перебираем варианты. Число 11112: сумма=6, произведение=2. Не подходит.

11122: сумма=7, произведение=4.

11222: сумма=8, произведение=8. Подходит. Четное? 11222 – последняя цифра 2, четное.

Ответ: 11222

То есть тут без перебора не обойтись. Но перебор небольшой.

Таким образом, задание 19 на базовом ЕГЭ – проверка практического владения признаками делимости и умения вести целенаправленный перебор. Никаких сложных доказательств. Однако и здесь есть свои ловушки. Ученик часто теряет время на беспорядочный перебор. Надо учить системности: сначала отсеять заведомо неподходящие варианты по четности или последней цифре, потом перебирать остальное. Для подготовки достаточно повторить признаки делимости (на 2,3,4,5,8,9,10,11,25) и потренироваться на задачах из открытого банка.

Проведенный анализ заданий ЕГЭ по теории чисел (базового и профильного уровня) позволяет утверждать, требования к знаниям выпускников существенно различаются: в базе достаточно владения признаками делимости и аккуратного перебора, в профиле необходимо освоение сравнений по модулю, диофантовых уравнений и методов доказательства.

Задание 19 на профильном уровне структурно организовано по принципу «от частного к общему» (пример, доказательство невозможности, экстремальная оценка), требуя от ученика не вычислительных навыков, а логической гибкости. Базовый уровень, напротив, проверяет преимущественно алгоритмическую грамотность и умение быстро применять известные правила. Следовательно, система подготовки должна быть

дифференцированной: для базового уровня акцент делается на автоматизацию признаков делимости и тренировку перебора, для профильного – на освоение методов остатков, оценок и доказательства от противного, а также на регулярное решение трехпунктовых задач в формате ЕГЭ.

## 2.3 Технологические карты

Технологическая карта урока – тематический план учителя для обучения школьников математической теме, обобщенно-графическое выражение сценария урока, основа его проектирования, средство представления индивидуальных методов работы. Технологическая карта урока (как один из вариантов) составляется в виде таблицы, в которой прописываются (табл. 3).

Таблица 3 – Содержание технологической карты

| По вертикали этапы урока:                         | По горизонтали:            |
|---------------------------------------------------|----------------------------|
| Организационный момент                            | Задачи каждого этапа.      |
| Подготовка к активной познавательной деятельности | Методы                     |
| Установка познавательной задачи                   | Формы                      |
| Усвоение новых знаний                             | Виды деятельности учащихся |
| Первичная проверка понимания                      |                            |
| Закрепление знаний                                |                            |
| Самопроверка знаний                               |                            |
| Итог                                              |                            |
| Домашнее задание                                  |                            |

Единых требований к составлению технологических карт не существует; педагог выбирает ту форму, которая для него наиболее приемлема.

Технологическая карта является, но и обеспечивает условия учащемуся для планирования, организации своей учебной деятельности, контроля хода ее выполнения, анализа, оценки полученных результатов, коррекции выявленных пробелов в знаниях.

В таблицах 4-7 представлены технологические карты, структуры и ход занятий по исследуемым темам.

Таблица 4 – Технологическая карта занятия по теме «Признаки делимости»

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Тема                   | Признаки делимости на 11, 17, 19                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| Цель занятия           | Усвоение знаний в целостной системе, умение использовать имеющиеся знания для доказательства новых                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Задачи занятия         | <p>Образовательные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- сформировать представление о признаках делимости чисел 11, 17, 19;</li> <li>- отработать навыки решения задач на признаки делимости чисел 11, 17, 19.</li> </ul> <p>Развивающие:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– развивать умения логически подходить к решению задач, оперировать полученными сведениями;</li> <li>– развивать грамотную математическую речь.</li> </ul> <p>Воспитательные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– воспитывать систему математических доказательств, последовательность и аккуратность</li> </ul>                                                                                                       |
| Тип занятия            | Комбинированный                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Планируемые результаты | <p>Предметные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– применение различных признаков делимости к решению задач;</li> </ul> <p>грамотное использование терминологии и математической символики.</p> <p>Метапредметные:</p> <p>Личностные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– формировать учебную мотивацию;</li> <li>– развивать интерес к получению новых знаний.</li> </ul> <p>Регулятивные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– понимать учебную задачу урока;</li> <li>– умение давать оценку собственным действиям;</li> <li>– осуществлять поиск правильного решения учебной задачи под руководством преподавателя;</li> <li>– оценивать способы достижения учебной задачи.</li> </ul> |

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Планируемые результаты   | <p>Коммуникативные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– умение включаться в диалог с одноклассниками и учителем;</li> <li>– умение обосновывать собственную точку зрения;</li> <li>– умение слушать себя и других;</li> <li>– осуществлять контроль чужих и самоконтроль собственных действий.</li> </ul> <p>Познавательные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– ориентироваться в своей системе знаний;</li> <li>– осуществлять поиск и анализ объектов;</li> <li>– умение преобразовывать информацию из одной формы в другую: переводить естественный язык на язык условия, готовить письменные и устные ответы на вопросы.</li> </ul> |
| Организация пространства | Учебный кабинет                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Ресурсы                  | <p>1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и углубленный уровни / [С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин]. М.: Просвещение, 2023. 430 с.</p> <p>2. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО. 2004. 560 с.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                       |

Таблица 5 – Структура и ход занятия

| № | Этап занятия                                   | Задачи этапа                                     | Деятельность учителя                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Деятельность учащихся                                     | Формируемые УУД                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---|------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Организационный момент                         | Включение учащихся в учебную деятельность.       | Приветствует учащихся.<br>Проверяет подготовленность учащихся и кабинета к учебному занятию.<br>Озвучивает цели, тему и план занятия                                                                                                                                                                      | Приветствуют учителя.<br>Записывают тему урока в тетрадь. | <p>Личностные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– самоорганизация;</li> </ul> <p>Регулятивные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– организация своей учебной деятельности;</li> <li>– умение выделять целевой и нравственный аспекты в поведении;</li> <li>– целеполагание.</li> </ul> <p>Коммуникативные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– умение слушать и вести диалог;</li> </ul> <p>Познавательные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– мотивация к познанию нового.</li> </ul> |
| 2 | Этап актуализации и пробного учебного действия | Актуализация опорных знаний и способов действий. | <p>Фронтальный опрос, устная работа с классом.</p> <p>- Ответьте, пожалуйста, на следующие вопросы:</p> <p>1. Сформулируйте основные признаки делимости на 3,9,4,8,7,5,10.</p> <p>2. Выберите из чисел, написанных на доске, делящиеся на 9,4,7: 14500, 168, 175, 182</p> <p>3. Назовите все делители</p> | Учащиеся отвечают на поставленные вопросы.                | <p>Личностные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– самоопределение.</li> </ul> <p>Регулятивные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– целеполагание;</li> </ul> <p>- выделение и осознание уже изученного;</p> <p>- оценка затруднений в собственной и чужой работе.</p> <p>Коммуникативные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– умение грамотно выразить свои мысли;</li> <li>– умение слушать и вступать в</li> </ul>                                                                             |

|   |                             |                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---|-----------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   |                             |                                                                | <p>числа 36.<br/>5. Назовите все двузначные числа кратные числу 18.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>диалог.<br/>Познавательные:<br/>– анализ и выделение необходимой информации.</p>                                                                                                                                                                                      |
| 3 | Объяснение нового материала | Обеспечение мотивации учения детьми, принятие ими целей урока. | <p>- Темой нашего сегодняшнего задания будет «Признаки делимости на 11..17, 19». Это новая для вас тема. Однако признаки делимости на 2,3,4,5,6,7,8,9 мы уже знаем. Осталось разобраться с двузначными числами второго десятка. Как вы считаете, как можно сформулировать признак делимости на 12?</p> <p>Правильно. Почему?</p> <p>Верно.<br/>Давайте теперь попробуем сформулировать признак делимости на 14:</p> <p>Совершенно верно.<br/>Теперь давайте решим, к каким из оставшихся чисел</p> | <p>Учащиеся формулируют предположения и записывают правильные утверждения в тетрадь</p> <p>Учащиеся выдвигают свои предположения.<br/>Число будет делиться на 12, тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и 4 (без остатка).</p> <p>Потому что 3 и 4 – взаимно простые.</p> | <p>Личностные:<br/>– оценивание усваиваемого материала.<br/>Регулятивные:<br/>– контроль и оценка процесса и результатов деятельности.<br/>Коммуникативные:<br/>– умение слушать и вступать в диалог.<br/>Познавательные:<br/>– структурирование собственных знаний.</p> |

|  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |  |
|--|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  |  |  | <p>11, 13, 15, 17 можно применить такой же подход? Да, верно.</p> <p>В чем трудность формулировки правила для 11, 13 и 17?</p> <p>Верно.</p> <p>Признак делимости на 11: На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо отличается от нее на число, делящееся на 11.</p> <p>Примеры. (Учитель объясняет у доски)</p> <p>Так как в числе 123321 сумма цифр четных позиций равна сумме цифр нечетных, то оно делится на 11. По аналогичной причине число 123322 не удовлетворяет признаку делимости на 11</p> <p>Если в записи трехзначного числа сумма боковых цифр равна цифре в середине, значит, число делится на 11.</p> | <p>Число будет делиться на 14, тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и 7 (без остатка). Потому что 2 и 7 – взаимно простые.</p> <p>К 15, потому что <math>15 = 3 \cdot 5</math>, а 3 и 5 – взаимно простые</p> <p>Трудность в том, что эти числа простые сами по себе</p> <p>Записывают формулировку теоремы в тетрадь.</p> <p>Учащиеся записывают доказательство теоремы за учителем.</p> |  |
|--|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

|  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                       |  |
|--|--|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  |  |  | <p>А ответ будет состоять из тех самых боковых цифр.</p> <p>Например: (Учитель объясняет у доски) <math>198 \div 11</math>, т.к. сумма боковых: <math>1+8 = 9</math>, 9 – цифра в середине. При этом <math>198 = 11 \cdot 18</math>. <math>253 \div 11</math> т.к. сумма боковых: <math>2 + 3 = 5</math>, 5 – цифра в середине. При этом <math>253 = 11 \cdot 23</math>.</p> <p>Признак делимости на 13:<br/>Число делится на 13 <math>\Leftrightarrow</math> когда результат вычитания последней цифры умноженной на 9 из этого числа без последней цифры делится на 13.<br/>Например: 286 делится на 13 так как <math>28 - 9 \cdot 6 = -26 \div 13</math>.</p> <p>Признак делимости на 17:<br/>Число делится на 17 <math>\Leftrightarrow</math> когда если разность числа кроме последней цифры справа и последней цифры, умноженной на пять, делится на 17<br/>Пример: (Учитель объясняет у доски) <math>289 \rightarrow 28 - 5 \cdot 9 = -17 \div 17</math>.<br/>Подумайте, как можно</p> | <p>Записывают примеры</p> <p>число делится на 17 <math>\Leftrightarrow</math> когда разность между числом его десятков и упятеренным числом единиц делится на 17.</p> |  |
|--|--|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

|   |                       |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---|-----------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   |                       |                                                 | <p>сформулировать этот признак по другому? Верно</p> <p>Число делится на 19 <math>\Leftrightarrow</math> когда число его десятков (число без последней цифры) в сумме с удвоенной последней цифрой делится на 19.</p> <p>Например: 399: <math>39 + 2 \cdot 9 = 57</math> делится на 19</p>                                                                                                                                         |                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 4 | Первичное закрепление | Применение полученных знаний в процессе работы. | <p>- Мы частично изучили теоретический материал, и приступаем к решению задач.</p> <p>- Решим следующие задачи.</p> <p>1. Проверить делимость чисел на 11: 1354, 1356531</p> <p>2. Проверить делимость чисел на 12: 1479852, 1476</p> <p>3. Проверить делимость чисел на 13: 1598, 1603173:</p> <p>4. проверить делимость на 14: 15274, 1723</p> <p>5. проверить делимость на 17: 2091, 15274</p> <p>6. проверить делимость на</p> | Один из учащихся решает задачи на доске, остальные ведут запись в тетрадах. | <p>Личностные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– самоопределение;</li> <li>– смыслообразование.</li> </ul> <p>Регулятивные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– планирование своей деятельности для решения поставленной задачи;</li> <li>– контроль и коррекция полученного результата;</li> <li>– саморегуляция.</li> </ul> <p>Коммуникативные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– умение слушать и вступать в диалог;</li> <li>– участие в коллективном обсуждении проблем.</li> </ul> <p>Познавательные:</p> |

|   |                               |                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                               |
|---|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   |                               |                                                                                        | <p>19: 20729, 2338</p> <p>7. Сколько трехзначных натуральных чисел делятся на 11?</p> <p>Учитель обсуждает с учащимися план решения каждой задачи.</p> <p>Сопровождает ученика при решении задачи у доски.</p>                                                                           |                                                                                                | <ul style="list-style-type: none"> <li>– умение структуризировать знания;</li> <li>– выбор наиболее эффективных способов решения задач.</li> </ul>                                                                                            |
| 5 | Информация о домашнем задании | Обеспечение понимания детьми цели, содержания и способов выполнения домашнего задания. | <p>Задаёт дозированное домашнее задание.</p> <p>-Выучить признаки делимости. Решить следующие задания:</p> <p>1. Какие нечетные числа делятся на 19?</p> <p>2. Сколько трехзначных натуральных чисел делятся на 13?</p> <p>3. Самостоятельно сформулировать признак делимости на 16.</p> | Ученики записывают домашнее задание, задают вопросы по его выполнению.                         | <p>Личностные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– нравственно-этическая ориентация.</li> </ul> <p>Регулятивные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– оценка промежуточных результатов;</li> <li>– саморегуляция.</li> </ul> |
| 6 | Рефлексия                     | Дать качественную оценку работы класса и отдельных учеников.                           | Учитель подводит итоги работы в классе.                                                                                                                                                                                                                                                  | Учащиеся отвечают на вопросы, задают вопросы, если они есть, анализируют свою работу на уроке. | <p>Личностные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– смыслообразование.</li> </ul> <p>Регулятивные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– оценка осознания уровня и качества усвоения;</li> <li>– контроль.</li> </ul>          |

Таблица 6 – Технологическая карта занятия по теме «Решение задач для подготовки к ЕГЭ»

|                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Тема                   | Решение задач для подготовки к ЕГЭ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Цель занятия           | Развитие творческих способностей школьников при решении нестандартных задач.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| Задачи занятия         | <p>Образовательные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- формировать умения решать нестандартные задачи ЕГЭ с использованием математического аппарата теории чисел;</li> <li>- формировать умения применять теоретические положения математики к решению задач повышенного уровня.</li> </ul> <p>Развивающие:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- расширять кругозор школьников, развивать внутреннюю потребность к получению новых знаний по математике;</li> <li>- формировать потребность в решении нестандартных задач в целях подготовки к ЕГЭ и получения дальнейшего образования;</li> <li>- развивать грамотность математической речи, умение слушать себя и других, формулировать логические выводы.</li> </ul> <p>Воспитательные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- воспитывать уважение к чужому мнению;</li> <li>- воспитывать культуру математических записей и высказываний;</li> <li>- показать значимость знаний, возможность их применения на практике.</li> </ul> |
| Тип занятия            | Комбинированный                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Планируемые результаты | <p>Предметные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применение теоретических положений элементов теории чисел к решению задач;</li> <li>- грамотное использование терминологии и математической символики.</li> </ul> <p>Метапредметные:</p> <p>Личностные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- формировать учебную мотивацию;</li> <li>- развивать интерес к получению математических знаний.</li> </ul> <p>Регулятивные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- понимать учебную математическую задачу;</li> <li>- оценивать собственные действия;</li> <li>- производить поиск решения учебной задачи под руководством преподавателя;</li> <li>- производить оценку методов решения учебной задачи.</li> </ul> <p>Коммуникативные УУД:</p>                                                                                                                                                                                                                                    |

|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>- умение коммуницировать с одноклассниками и преподавателем;</li> <li>- умение обосновывать свою точку зрения;</li> <li>- умение выслушивать альтернативные решения и выносить им оценку;</li> <li>- осуществлять собственный самоконтроль и контроль действий одноклассников.</li> </ul> <p>Познавательные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- ориентироваться в собственной системе знаний;</li> <li>- осуществлять анализ и поиск информации и выделение математических объектов;</li> <li>- преобразовывать информацию из одной формы в другую: переводить естественный язык на язык математической модели, готовить письменные и устные ответы на вопросы.</li> </ul> |
| Организация пространства | Учебный кабинет                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| Ресурсы                  | <p>1. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2026. Профильный уровень. Мальцев Д. А. Книга 1 / Д. А. Мальцев, А. А. Мальцев, Л. И. Мальцева. М.: Народное образование, 2026. 328 с.</p> <p>2. ЕГЭ 2026. Математика. Профильный уровень. 36 типовых экзаменационных вариантов : задания и ответы / под ред. И. В. Ященко. М. : Национальное образование, 2026. 384 с. (ЕГЭ. Типовые экзаменационные варианты).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

Таблица 7 – Структура и ход занятия

| № | Этап занятия                                   | Задачи этапа                                     | Деятельность учителя                                                                                                                                                                                                                                                               | Деятельность учащихся                                     | Формируемые УУД                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---|------------------------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Организационный момент                         | Включение учащихся в учебную деятельность.       | Приветствует учащихся.<br>Проверяет подготовленность учащихся и кабинета к учебному занятию.<br>Озвучивает цели, тему и план занятия                                                                                                                                               | Приветствуют учителя.<br>Записывают тему урока в тетрадь. | Личностные:<br>– самоорганизация;<br>Регулятивные:<br>– организация своей учебной деятельности;<br>– умение выделять целевой и нравственный аспекты в поведении;<br>– целеполагание.<br>Коммуникативные:<br>– умение слушать и вести диалог;<br>Познавательные:<br>– мотивация к познанию нового. |
| 2 | Этап актуализации и пробного учебного действия | Актуализация опорных знаний и способов действий. | Фронтальный опрос, устная работа с классом.<br>- Ответьте, пожалуйста, на следующие вопросы:<br>1. Сформулируйте основные признаки делимости на 3,9,4,8,7,5,10.<br>2. Выберите из чисел, написанных на доске, делящиеся на 9,4,7: 14500, 168, 175, 182<br>3. Назовите все делители | Учащиеся отвечают на поставленные вопросы.                | Личностные:<br>– самоопределение.<br>Регулятивные:<br>– целеполагание;<br>- выделение и осознание уже изученного;<br>- оценка затруднений в собственной и чужой работе.<br>Коммуникативные:<br>– умение грамотно выражать свои мысли;<br>– умение слушать и вступать                              |

|   |                             |                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---|-----------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   |                             |                                                                | <p>числа 36.<br/>5. Назовите все двузначные числа кратные числу 18.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>в диалог.<br/>Познавательные:<br/>– анализ и выделение необходимой информации.</p>                                                                                                                                                                                    |
| 3 | Объяснение нового материала | Обеспечение мотивации учения детьми, принятие ими целей урока. | <p>- Темой нашего сегодняшнего задания будет «Признаки делимости на 11..17, 19». Это новая для вас тема. Однако признаки делимости на 2,3,4,5,6,7,8,9 мы уже знаем. Осталось разобраться с двузначными числами второго десятка. Как вы считаете, как можно сформулировать признак делимости на 12?</p> <p>Правильно. Почему?</p> <p>Верно.<br/>Давайте теперь попробуем сформулировать признак делимости на 14:</p> <p>Совершенно верно.<br/>Теперь давайте решим, к каким из оставшихся чисел</p> | <p>Учащиеся формулируют предположения и записывают правильные утверждения в тетрадь</p> <p>Учащиеся выдвигают свои предположения.<br/>Число будет делиться на 12, тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и 4 (без остатка).</p> <p>Потому что 3 и 4 – взаимно простые.</p> | <p>Личностные:<br/>– оценивание усваиваемого материала.<br/>Регулятивные:<br/>– контроль и оценка процесса и результатов деятельности.<br/>Коммуникативные:<br/>– умение слушать и вступать в диалог.<br/>Познавательные:<br/>– структурирование собственных знаний.</p> |

|  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |  |
|--|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  |  |  | <p>11, 13, 15, 17 можно применить такой же подход? Да, верно.</p> <p>В чем трудность формулировки правила для 11, 13 и 17?</p> <p>Верно.</p> <p>Признак делимости на 11: На 11 делятся только те числа, у которых сумма цифр, занимающих нечетные места, либо равна сумме цифр, занимающих четные места, либо отличается от нее на число, делящееся на 11.</p> <p>Примеры. (Учитель объясняет у доски)</p> <p>Так как в числе 123321 сумма цифр четных позиций равна сумме цифр нечетных, то оно делится на 11. По аналогичной причине число 123322 не удовлетворяет признаку делимости на 11</p> <p>Если в записи трехзначного числа сумма боковых цифр равна цифре в середине, значит, число делится на 11.</p> | <p>Число будет делиться на 14, тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и 7 (без остатка). Потому что 2 и 7 – взаимно простые.</p> <p>К 15, потому что <math>15 = 3 \cdot 5</math>, а 3 и 5 – взаимно простые</p> <p>Трудность в том, что эти числа простые сами по себе</p> <p>Записывают формулировку теоремы в тетрадь.</p> <p>Учащиеся записывают доказательство теоремы за учителем.</p> |  |
|--|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

|  |  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                    |  |
|--|--|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--|
|  |  |  | <p>А ответ будет состоять из тех самых боковых цифр.</p> <p>Например: (Учитель объясняет у доски) <math>198 \div 11</math>, т.к. сумма боковых: <math>1+8 = 9</math>, 9 – цифра в середине. При этом <math>198 = 11 \cdot 18</math>. <math>253 \div 11</math> т.к. сумма боковых: <math>2 + 3 = 5</math>, 5 – цифра в середине. При этом <math>253 = 11 \cdot 23</math>.</p> <p>Признак делимости на 13:<br/>Число делится на 13 <math>\Leftrightarrow</math> когда результат вычитания последней цифры умноженной на 9 из этого числа без последней цифры делится на 13.<br/>Например: 286 делится на 13 так как <math>28 - 9 \cdot 6 = -26 \div 13</math>.</p> <p>Признак делимости на 17:<br/>Число делится на 17 <math>\Leftrightarrow</math> когда если разность числа кроме последней цифры справа и последней цифры, умноженной на пять, делится на 17</p> <p>Пример: (Учитель объясняет у доски) <math>289 \rightarrow 28 - 5 \cdot 9 = -17 \div 17</math>.</p> <p>Подумайте, как можно</p> | Записывают примеры |  |
|--|--|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--|

|   |                       |                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---|-----------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   |                       |                                                 | <p>сформулировать этот признак по другому? Верно</p> <p>Число делится на 19 <math>\Leftrightarrow</math> когда число его десятков (число без последней цифры) в сумме с удвоенной последней цифрой делится на 19.</p> <p>Например: 399: <math>39 + 2 \cdot 9 = 57</math> делится на 19</p>                                                                                                                                         |                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 4 | Первичное закрепление | Применение полученных знаний в процессе работы. | <p>- Мы частично изучили теоретический материал, и приступаем к решению задач.</p> <p>- Решим следующие задачи.</p> <p>1. Проверить делимость чисел на 11: 1354, 1356531</p> <p>2. Проверить делимость чисел на 12: 1479852, 1476</p> <p>3. Проверить делимость чисел на 13: 1598, 1603173:</p> <p>4. проверить делимость на 14: 15274, 1723</p> <p>5. проверить делимость на 17: 2091, 15274</p> <p>6. проверить делимость на</p> | Один из учащихся решает задачи на доске, остальные ведут запись в тетрадах. | <p>Личностные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– самоопределение;</li> <li>– смыслообразование.</li> </ul> <p>Регулятивные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– планирование своей деятельности для решения поставленной задачи;</li> <li>– контроль и коррекция полученного результата;</li> <li>– саморегуляция.</li> </ul> <p>Коммуникативные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– умение слушать и вступать в диалог;</li> <li>– участие в коллективном обсуждении проблем.</li> </ul> <p>Познавательные:</p> |

|   |                               |                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                               |
|---|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   |                               |                                                                                        | <p>19: 20729, 2338</p> <p>7. Сколько трехзначных натуральных чисел делятся на 11?</p> <p>Учитель обсуждает с учащимися план решения каждой задачи.</p> <p>Сопровождает ученика при решении задачи у доски.</p>                                                                           |                                                                                                | <ul style="list-style-type: none"> <li>– умение структуризировать знания;</li> <li>– выбор наиболее эффективных способов решения задач.</li> </ul>                                                                                            |
| 5 | Информация о домашнем задании | Обеспечение понимания детьми цели, содержания и способов выполнения домашнего задания. | <p>Задаёт дозированное домашнее задание.</p> <p>-Выучить признаки делимости. Решить следующие задания:</p> <p>1. Какие нечетные числа делятся на 19?</p> <p>2. Сколько трехзначных натуральных чисел делятся на 13?</p> <p>3. Самостоятельно сформулировать признак делимости на 16.</p> | Ученики записывают домашнее задание, задают вопросы по его выполнению.                         | <p>Личностные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– нравственно-этическая ориентация.</li> </ul> <p>Регулятивные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– оценка промежуточных результатов;</li> <li>– саморегуляция.</li> </ul> |
| 6 | Рефлексия                     | Дать качественную оценку работы класса и отдельных учеников.                           | Учитель подводит итоги работы в классе.                                                                                                                                                                                                                                                  | Учащиеся отвечают на вопросы, задают вопросы, если они есть, анализируют свою работу на уроке. | <p>Личностные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– смыслообразование.</li> </ul> <p>Регулятивные:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– оценка осознания уровня и качества усвоения;</li> <li>– контроль.</li> </ul>          |

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория чисел – раздел математики, который изучает свойства целых чисел и закономерности в их поведении. В этот раздел входят теоретические вопросы и соответствующие задачи по разделам: теория делимости целых чисел и задачи на делимость (признаки делимости, простые числа, нахождение и использование НОД, НОК); теоретико-числовые функции и задачи на нахождение суммы делителей натурального числа, количества делителей натурального числа и др.; Диофантовы уравнения, задачи на решение уравнений в целых числах; аддитивные представления натуральных чисел.

Теория чисел играет значимую роль в формировании логического мышления, алгоритмической культуры и вычислительных навыков обучающихся. Ее элементы (свойства простых чисел, признаки делимости, сравнения по модулю) являются не только самостоятельной содержательной линией, но и инструментом для решения олимпиадных задач, заданий повышенной сложности ЕГЭ (№19), а также основой для понимания прикладных вопросов, таких как криптография и контрольные суммы.

Проведен сравнительный анализ трех линий учебников для 5-6 классов (А. Г. Мерзляк, С. М. Никольский, Н. Я. Виленкин) и их преемственности на старшей ступени. Выяснено, что в 7-9 классах теория чисел представлена фрагментарно, а полноценное углубленное изучение возможно только в профильных курсах 10-11 классов. В учебниках базового уровня элементы теории чисел ограничиваются признаками делимости и понятием НОД/НОК, в углубленных учебниках встречаются задачи на делимость, остатки, но без развернутой теоретической базы. Идеального УМК не существует, поэтому учителю необходимо комбинировать материал из разных источников.

Сформулированы дидактические условия, обеспечивающие формирование прочных знаний по теории чисел. Среди них:

- систематическое повторение («пятиминутки»);

- наглядность материала;
- уровневая дифференциация заданий, наглядность, связь с практикой (штрих-коды, контрольные суммы);
- связь заданий с жизнью;
- посильная трудность;
- наличие обратной связи;
- мотивационный аспект;
- право на ошибку.

Отдельно подчеркнута роль олимпиад и математического кружка как безопасной среды для проб и ошибок, расширения знаний.

Проанализированы задания ЕГЭ, касающиеся темы теории чисел в итоговой аттестации одиннадцатиклассников как профильного, так и базового уровня по математике. базовый уровень требует владения признаками делимости и аккуратного перебора, а профильный уровень (задание 19) – сравнений по модулю, диофантовых уравнений, метода остатков, оценок и доказательства от противного. Таким образом, без специальной систематической подготовки решить задание 19 практически невозможно.

Составлены технологические карты двух занятий по темам «Делимость чисел» и «Решение задач для подготовки к ЕГЭ». Задачи данного исследования решены в полной мере, цель достигнута.

Сформулируем методические рекомендации для педагога, необходимые для успешного освоения материала по теме теории чисел учащимися в школе:

– При изучении признаков делимости в 10-11 классах рекомендуется отказаться от репродуктивной подачи готовых правил в пользу самостоятельного вывода через разложение числа по степеням 10 и работу с остатками.

– Включить в содержание занятий задачи с параметром, задачи на восстановление цифр числа, задачи из открытого банка ЕГЭ (№19) начиная уже с 10 класса.

– Использовать межпредметные связи с информатикой (алгоритмы проверки контрольных сумм, простые числа в криптографии) для повышения мотивации учащихся.

– Применять технологические карты как инструмент планирования, фиксирующий не только содержание, но и формируемые УУД на каждом этапе урока.

– Регулярно проводить анализ типичных ошибок при решении задач на делимость, уделяя внимание обоснованию каждого шага решения.

В заключение отметим, методические разработки занятий могут быть востребованы учителями математики в организации и проведении занятий по теме «Теория чисел» в старших классах.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аракелов А. В. Олимпиадные задачи по физике и математике в развитии одаренности обучающихся // Педагогическая деятельность как творческий процесс. Материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. 2018. С. 14.
2. Ашурова Д. Н. Некоторые применения элементов теории чисел в школьной математике // Студенческий вестник. 2022. № 1-1 (193). С. 53–55.
3. Вечтомов Е. М. Числовые системы как основание теории чисел // Математический вестник Вятского государственного университета. 2024. № 2(31). С. 20–27.
4. Вечтомов Е. М. Числовые системы - основа изучения теории чисел // Математическая подготовка в школе и вузе: содержание и технологии. Сыктывкар: Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, 2024. С. 218–223.
5. Математика. 5 класс : учебник для общеобразовательных организаций : в 2 ч. Ч. 1 / Н. Я. Виленкин [и др.] ; 37-е изд., стер. М. : Просвещение, 2026. 160 с.
6. Математика. 5 класс : учебник для общеобразовательных организаций: в 2 ч. Ч. 2 / Н. Я. Виленкин [и др.] ; 37-е изд., стер. М. : Просвещение, 2026. 176 с.
7. Математика. 6 класс : учебник для общеобразовательных организаций: в 2 ч. Ч. 1 / Н. Я. Виленкин [и др.] ; М. : Просвещение, 2026. 160 с.
8. Математика. 6 класс : учебник для общеобразовательных организаций: в 2 ч. Ч. 2 / Н. Я. Виленкин [и др.] ; М. : Просвещение, 2026. 143 с.
9. Виноградов И. М. Основы теории чисел : учебное пособие [для вузов]. 15-е изд., стер. Санкт-Петербург; Москва; Краснодар : Лань, 2023. 176 с.
10. Гатауллин А. Ш. Совершенные числа : исторический обзор и современные вызовы в теории чисел // Научно-технические достижения

студентов, аспирантов, молодых ученых строительно-архитектурной отрасли. Макеевка: Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 2025. С. 57–62.

11. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. М. : МЦНМО, 2004. 560 с.

12. Джулаева А. А. Применение элементов теории чисел в 19 задании ЕГЭ по математике профильного уровня // Colloquium-Journal. 2020. № 8-4 (60). С. 18–20.

13. Жмурова И. Ю. Теория чисел : учебник для вузов. Москва : Юрайт, 2026. 52 с.

14. Курманова С. А. Теория чисел : учебно-методическое пособие : направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями)» / С. А. Курманова ; Департамент образования и молодежной политики Ханты-Мансийского автономного округа - Югры, БУ ВО ХМАО - Югры «Сургутский государственный педагогический университет». Сургут : Сургутский государственный педагогический университет, 2019. 44 с.

15. Ларина И. Н. Элементы теории чисел в школьном курсе математики // Инновационные аспекты социально-экономических и информационных процессов в условиях перехода к цифровому обществу. Ставрополь: АГРУС, 2022. С. 269–272.

16. Лучникова Е. В. Дидактические условия в образовательном процессе // Colloquium-journal. 2019. № 24 (48). С. 1–2.

17. Мальцев Д. А. Математика. Подготовка к ЕГЭ 2026. Профильный уровень. Книга 1. М. : Народное образование, 2026. 328 с.

18. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и углубленный уровни / С. М. Никольский [и др.] ; М. : Просвещение, 2023. 430 с.

19. Математика 5 класс : учебник ФГОС / Мерзляк А. Г. [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 304 с.
20. Математика 6 класс : учебник ФГОС / А. Г. Мерзляк, [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 336 с.
21. Могилевский И. Ш. Олимпиадные задачи по теории чисел // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации. Тверь : Тверской государственный университет, 2025. С. 86–89.
22. Нестерова Л. Ю. Теория чисел : учебник и практикум для вузов / 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Юрайт, 2026. 152 с.
23. Математика. 5 класс : учебник для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.] ; М. : Просвещение, 2026. 304 с.
24. Математика. 6 класс : учебник для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 256 с.
25. Пичугина Е. А. Повышение мотивации школьников к изучению теории чисел // Ratio et Natura. 2024. № 4 (12).
26. Прач В. С. Основные аспекты методики обучения подготовительному курсу «Элементы теории чисел» будущих учителей математики // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2024. Вып. 4 (64). С. 33–41.
27. Филоненко М. В. Теория чисел в школьном образовании: фундамент для будущих побед в эпоху цифровых технологий // Вестник научных конференций. 2025. № 10-6(122). С. 127–128.
28. Хамов Г. Г. Организация самостоятельной исследовательской деятельности в ходе изучения курса «Теория чисел» // Ярославский педагогический вестник. 2022. № 5 (128). С. 67–76.
29. Семенова С. Ю. Теория чисел в олимпиадных задачах по математике // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2023. № 3-1(78). С. 127–130.

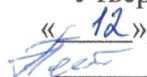
30. Яценко И. В. ЕГЭ 2026. Математика. Профильный уровень. 36 типовых экзаменационных вариантов: задания и ответы. М. : Национальное образование, 2026. 384 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
высшего образования учреждение  
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических  
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки  
44.03.01 Педагогическое образование  
Профиль подготовки «Математика»  
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой  
« 12 » 09 20 25 г.  
 Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Жильцовой Яны Михайловны

(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение элементов теории чисел в школе»

Утверждена приказом по университету от « 25.09 » 20 25 г. № 1102/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 25 » 05 20 26 г.

# КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

| № п/п | Перечень подлежащих разработке вопросов                        | Сроки выполнения      | Примечания                |
|-------|----------------------------------------------------------------|-----------------------|---------------------------|
| 1.    | Подбор и изучение литературы по теме ВКР.                      | 01.10.2025-31.10.2025 | выполнено<br><i>девет</i> |
| 2.    | Теоретические аспекты изучения элементов теории чисел в школе. | 01.11.2025-12.01.2026 | выполнено<br><i>девет</i> |
| 3.    | Методические аспекты изучения элементов теории чисел в школе.  | 13.01.2026-01.02.2026 | выполнено<br><i>девет</i> |
| 4.    | Анализ заданий ЕГЭ, связанных с теорией чисел.                 | 02.02.2026-15.03.2026 | выполнено<br><i>девет</i> |
| 5.    | Составление конспектов уроков.                                 | 16.03.2026-18.04.2026 | выполнено<br><i>девет</i> |
| 6.    | Оформление ВКР.                                                | 19.04.2026-15.05.2026 | выполнено<br><i>девет</i> |

Дата выдачи задания « 11 » 09 2025 г.

Руководитель *девет* Никитина О.Г.  
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению *девет* Минеева Е.М.  
(подпись) (Ф.И.О.)

И.о. ректора Пензенского  
государственного университета  
Васину С.М.  
студентки 5 курса ФФМЕН  
заочной формы обучения  
Жильцовой Яны Михайловны

### ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Жильцова Яна Михайловна, студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Изучение элементов теории чисел в школе», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

  
подпись  
22.05.2026  
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 22.05.2026  
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  О.Г. Никитина  
подпись И.О.Ф.

# Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Изучение элементов теории чисел в школе» студентки 5 курса Жильцовой Яны Михайловны

И.О. Фамилия

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля «Математика»

Руководитель ВКР

Ольга Геннадьевна Никитина

И.О. Фамилия



Отчет предоставлен сервисом  
«Антиплагиат» - <http://ru.zn.ru/antiplagiat.ru>



## Отчет о проверке

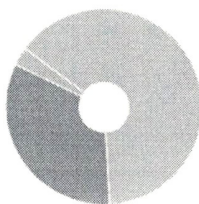
Автор: Жильцова Яна Михайловна

Название документа: Изучение элементов теории чисел в школе

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

### РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:  
33%

Оригинальность:  
63,7%

ИИ-контент:  
0%

Цитирование:  
3,3%

Самоцитирование:  
0%

1 «Совпадения», «Цитирование», «Самоцитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

1 Проверено: 80,05% текста документа, исключено из проверки: 19,95% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография, Таблицы

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирование** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирование** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

### ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 137

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 22.05.2026 16:26:14

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 74

Символов в тексте: 105786

Слов в тексте: 14654

Число предложений: 2487

22.05.2026

ДД.ММ.ГГГГ.

ПОДПИСЬ

О.Г. Никитина  
И.О.Ф. руководителя ВКР

**ОТЗЫВ**  
**РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ**  
**на тему: «Изучение элементов теории чисел в школе»**  
**студентки Жильцовой Яны Михайловны**  
**факультета физико-математических и естественных наук**  
**направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,**  
**профиль подготовки «Математика», гр. 213ФПМ1**

Выпускная квалификационная работа Жильцовой Яны Михайловны посвящена вопросам изучения элементов теории чисел в школе.

Актуальность темы исследования состоит в том, что элементы теории чисел занимают особое место в школьном курсе математики, поскольку формируют у обучающихся основы логического и алгоритмического мышления, необходимого для успешного освоения смежных дисциплин. Теория чисел, включающая свойства простых чисел, признаки делимости, сравнения по модулю, является фундаментом для решения олимпиадных задач и заданий ЕГЭ профильного уровня (в частности, задания №19).

Цель работы состоит в разработке методических рекомендаций по изучению элементов теории чисел в старшей школе с учетом требований профильного обучения и ЕГЭ.

Выпускная квалификационная работа Жильцовой Я.М. состоит из введения, основной части, заключения и списка использованных источников.

Основная часть состоит из двух глав. Первая глава включает четыре параграфа, в которых раскрываются роль теории чисел, свойства простых чисел, признаки делимости и анализ учебников. Вторая глава содержит три параграфа, посвященных дидактическим условиям, анализу заданий ЕГЭ и разработке технологических карт. В заключении подводятся итоги исследования, формулируются выводы и рекомендации.

Работа Жильцовой Я.М. является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Жильцовой Яны Михайловны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР доцент кафедры «Математическое образование»,  
к.ф.-м.н.  Никитина Ольга Геннадьевна