

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная (заочная)

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
бакалаврская работа на тему:

«Уравнения и неравенства с параметром в курсе алгебры основной школы»

Студент

Максаева Е.Д. 16.04.26
(подпись, дата)

Максаева Елизавета Дмитриевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Никитин Н.Д. 16.04.26
(подпись, дата)

Никитин Н.Д.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева Е.Г. 15.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И. о. заведующего кафедрой

Паньженский В.И. 01.06.26
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 26.06.26 № 16)

Секретарь ГЭК

Журавлева Е.Г. 26.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРОМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ.	5
1.1 Уравнения и неравенства с параметром как элемент школьного курса алгебры	5
1.2 Основные методы решения уравнений и неравенств с параметром	8
1.3 Анализ учебников на наличие уравнений и неравенств с параметром.	23
1. 4 Задачи с параметром в заданиях ОГЭ	33
1.5 Олимпиадные задачи, содержащие уравнения и неравенства с параметрами	37
ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ».....	42
2.1 Место и роль элективных курсов в системе школьного обучения	42
2.2 Тематическое планирование элективного курса	45
2.3 Разработка двух конспектов занятий в рамках элективного курса	51
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	65
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	66
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	68
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	69

ВВЕДЕНИЕ

Раздел, посвящённый уравнениям и неравенствам с параметром, имеет фундаментальное значение в математике, однако в рамках школьной программы изучается фрагментарно. Для успешного решения параметрических задач необходимо владение такими умениями, как анализ взаимосвязей переменных, рассмотрение множественности возможных сценариев и формулировка строгих выводов. Эта деятельность служит основой для формирования у учащихся независимого аналитического мышления, исследовательских компетенций и математической культуры.

Задачи с параметрами встречаются в олимпиадных заданиях, а также используют на вступительных экзаменах в ведущие вузы. Данный факт не только повышает интерес школьников к данной теме, но и доказывает необходимость её полноценного изучения уже в основной школе.

Актуальность подкрепляется современной образовательной парадигмой, делающей упор на прикладное знание. Поскольку математика сегодня — это инструмент для работы с данными и моделирования, а задачи с параметром развивают навык анализа многовариантных сценариев и оценки влияния параметров, то эти задачи подготавливают школьников к решению реальных проблем в науке и технологиях.

Существующие сегодня школьные курсы практически не задействуют интерактивные программы и платформы (например, GeoGebra, Desmos, Математические этюды и так далее), которые могли бы существенно помочь в понимании уравнений и неравенств с параметрами. Поэтому учащиеся хуже осваивают базовые принципы и современные методы решения подобных задач. Внедрение инновационных программ могло бы значительно улучшить качество усвоения материала и развить аналитические способности школьников.

Объект исследования – процесс обучения математике в школе.

Предмет исследования – уравнения и неравенства с параметром в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования - На основании проведённого анализа научно-методической литературы разработать программу элективного курса «Уравнения и неравенства с параметром» для учащихся основной школы.

Таким образом, основной целью выпускной квалификационной работы является изучение уравнений и неравенств с параметром и методов их решения с последующим составлением тематического планирования элективного курса, готового к практическому применению.

Основные задачи ВКР.

1. Рассмотреть уравнения и неравенства с параметром, раскрыть определение и математическую сущность данных задач в курсе алгебры основной школы.
2. Изучить основные методы решения уравнений и неравенств с параметром.
3. Проанализировать школьные учебники по алгебре на наличие уравнений и неравенств с параметром.
4. Изучить роль уравнений и неравенств с параметром в заданиях ОГЭ и олимпиадных заданиях.
5. Обосновать важность и актуальность разработки элективного курса по теме «Уравнения и неравенства с параметром» в системе школьного образования.
6. Разработать программу элективного курса, отражающую методику изучения уравнений и неравенств с параметром в основной школе.
7. Разработать примерные конспекты занятий в рамках элективного курса.

Выпускная квалификационная работа состоит из двух глав.

В первой главе рассмотрены теоретические основы изучения уравнений и неравенств с параметром, проанализированы основные методы решения: аналитический (алгебраических преобразований), графический, метод интервалов и метод условного раскрытия модуля.

Во второй главе разработан элективный курс «Уравнение и неравенства с параметром» и приведены конспекты двух занятий в рамках данного курса.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРОМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1 Уравнения и неравенства с параметром как элемент школьного курса алгебры

Параметр (от греч. «parametron» – измеряющий) представляет собой величину, значение которой позволяет различать элементы некоторого множества и задавать набор возможных математических ситуаций.

Параметрические уравнения или неравенства – это уравнения и неравенства, содержащие наряду с основной переменной (например, x или y) дополнительную числовую величину – параметр (как правильно, a , b , c), который может принимать различные значения.

Решение таких задач предполагает выполнение двух последовательных действий.

1. Определение всех значений параметра, при которых уравнение или неравенство имеет решение;
2. Нахождение соответствующих решений относительно основной переменной для каждого допустимого значения параметра.

Задачи с параметром занимают особое место в школьном курсе алгебры и обладают значительным развивающим потенциалом. Их изучение углубляет понимание переменных величин, способствует выявлению зависимостей и формирует умение анализировать динамику математических моделей при изменении исходных данных. Важная особенность таких задач – это то, что ход решения и конечных результатов напрямую зависят от значения параметра, не фиксируемого заранее.

Освоение данной темы связано с определенными трудностями. Понятие параметра достаточно абстрактно и не имеет бытового аналогов, что усложняет

его первичное понимание учащимися. Недостаток наглядных примеров требует продуманного методического введения. При этом необходимо не только выполнять алгебраические преобразования, но и анализировать влияние изменения параметра на структуру решения и ход рассуждений.

Отсутствие единого универсального алгоритма является принципиальной особенностью параметрических задач. Каждое уравнение или неравенство требует индивидуального подхода.

1. Выделения области допустимых значений.
2. Выбор метода решения (аналитического, графического, метода интервалов и др.)
3. Строгое обоснование каждого шага.

Даже в пределах узкой темы изменение параметра может существенно менять ход решения, что требует гибкости мышления, развитых аналитических навыков и владения различными математическими инструментами.

В основной школе учащиеся знакомятся с параметрическими задачами постепенно, через уже изученные типы уравнений и неравенств. При этом параметр выступает в роли величины, задающей множество возможных математических ситуаций. На уровне 8-9 классов обычно рассматриваются следующие виды уравнений и неравенств с параметром

1. Линейные уравнения с параметром.

Это уравнение вида $ax = b$, где a и b – параметры, а x – переменная. При изучении линейных уравнений важно учитывать значения параметра, при которых коэффициент a обращается в нуль. В случае $a = 0$ возможны две ситуации: если $b \neq 0$, уравнение не имеет решений, а если $b = 0$, множество решений - бесконечно. Таким образом, учащиеся учатся анализировать не только само решение уравнений, но и условия его существования.

2. Линейные неравенства с параметром.

Рассмотрим неравенства $ax < b$, $ax > b$, где a и b – параметры, а x – переменная.

При нахождении решения таких неравенств важно учитывать, что:

- знак неравенства сохраняется при делении на $a > 0$ и меняется при $a < 0$;
- значение $a = 0$ требует отдельного анализа, поскольку неравенство переходит в простое числовое сравнение.

Этот тип задач формирует умение разбивать решение на случаи, что является важным элементом логической культуры.

3. Квадратные уравнения с параметром.

Это уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где все коэффициенты a, b, c могут содержать параметры. Важно уделить внимание анализу дискриминанта как функции параметров, что позволяет определить количество корней уравнения при различных значениях параметра. Учащиеся осваивают умение находить решение не только в числовой форме, но и в условном виде, устанавливая, что при $D > 0$ уравнение имеет два корня, при $D = 0$ – один корень, а при $D < 0$ действительных решений не существует. Данный вид параметрических задач доступен для учащихся основной школы и широко используется при подготовке к олимпиадам.

4. Квадратные неравенства с параметром.

Это неравенства вида $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$. При изучении квадратичных неравенств с параметром важную роль играет построение графика соответствующей параболы и анализ её положения относительно оси абсцисс при различных значениях параметра. Существенное значение имеет также использование дискриминанта и учёт знака коэффициента a , что позволяет определить множество решений неравенства. Решение подобных задач развивает умение рассуждать о множестве решений как с геометрической, так и с аналитической точек зрения.

5. Рациональные уравнения и неравенства с параметром.

Уравнения и неравенства вида $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ и $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$, $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$, где числитель и знаменатель содержат параметры. В 8-9 классах рациональные выражения с

параметром используются для анализа области допустимых значений, поскольку знаменатель не должен быть обращаться в нуль, а также для разбиения решения на отдельные случаи в зависимости от значения параметра. В процессе решения таких задач широко применяется метод интервалов, что требует от учащихся строгого и последовательного анализа всех условий. Данный вид параметрических задач является одним из наиболее методически ценных, так как формирует навыки логического рассуждения и аккуратной работы с ограничениями.

6. Уравнения и неравенства с модулем.

Уравнения и неравенства вида $|x - a| = b$, и $|x - a| > b$, $|x - a| < b$ где a и b являются параметрами. При решении задач с модулем параметр анализируется по отдельным случаям, что помогает учащимся овладеть приемом условного раскрытия модуля. Найденные множества решений наглядно представляются на координатной прямой, что облегчает их интерпретацию.

Параметрические уравнения и неравенства служат уникальным образовательным инструментом. Они целенаправленно развивают критическое мышление, приучая учеников не к механическому применению формул, а к исследованию: анализу условий, корректному определению граничных случаев и построению логически безупречных выводов в зависимости от значений параметра. В результате даже скромный набор таких задач в школьной программе становится мощным катализатором интеллектуального роста, формируя не столько «решателя», сколько думающего исследователя.

1.2 Основные методы решения уравнений и неравенств с параметром

Методы решения параметрических задач в школьном курсе алгебры базируются на фундаменте, уже заложенном при изучении обычных уравнений и неравенств. Ключевое отличие заключается в том, что параметр превращает

стандартный алгоритм в исследование: он требует от ученика не просто найти ответ, а проанализировать, как наличие и значение параметра влияют на существование и множество решений. В рамках школьной программы для этого используется ряд основных методов.

1. Аналитический метод

Аналитический метод составляет ядро методики работы с параметрическими задачами. Его суть — в последовательном применении алгебраических преобразований, которые приводят уравнение или неравенство к виду, явно демонстрирующему зависимость решения от параметра. Ключевым и наиболее содержательным этапом становится последующий анализ: требуется не просто получить формулу, а исследовать, как меняется логика решения при критических значениях параметра (например, когда коэффициент при неизвестной становится нулевым). Именно эта фаза анализа, позволяющая корректно классифицировать все возможные случаи, делает метод незаменимым для исследования линейных и квадратных уравнений с параметром. Разберем на конкретных примерах.

Пример 1. Решите уравнение $a^2(x - 1) + 6x = (5x - 2)a$.

Решение. В результате преобразований исходное уравнение приводится к виду

$$(a - 2)(a - 3)x = a(a - 2).$$

Для нахождения значения переменной x необходимо разделить выражение $a(a - 2)$ на коэффициент $(a - 2)(a - 3)$. Однако данное деление возможно не при всех значениях параметра, так как деление на нуль недопустимо. Это обстоятельство определяет дальнейший ход решения и требует рассмотрения случаев, при которых коэффициент при x равен нулю, а также случаев, когда он отличен от нуля.

При $a = 2$ уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, следовательно, его решением является любое действительное число.

При $a = 3$ получаем уравнение $0 \cdot x = 3$, которое не имеет решений.

Если $a \neq 2$ и $a \neq 3$, то $x = \frac{a(a-2)}{(a-2)(a-3)} = \frac{a}{a-3}$.

Ответ: при $a = 2$ $x \in \mathbb{R}$; при $a = 3$ решений нет; при $a \neq 2$ и $a \neq 3$ $x = \frac{a}{a-3}$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{x-a}{x(x-1)} = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x = a, \\ x(x-1) \neq 0 \end{cases}$.

Подставляя зависимость x от a в неравенство системы, получаем неравенство $a(a-1) \neq 0$ относительно a и приходим к выводу, что если $a \notin \{0; 1\}$, то $x = a$ – корень уравнения, если $a = 0$ или $a = 1$, то корней нет.

Пример 3. Решить уравнение $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) = 0$.

Решение. Для начала рассмотрим случай, когда $a-1 = 0$. В этом случае контрольным значением параметра a является единица. Дело в том, что при $a = 1$ уравнение становится линейным, а при $a \neq 1$ оно приобретает квадратичную форму. Следовательно, целесообразно рассматривать уравнение как семейство уравнений, получаемых при различных значениях параметра: 1) $a = 1$; 2) $a \neq 1$.

Теперь рассмотрим эти случаи.

1. При $a = 1$ уравнение примет вид $6x + 7 = 0$, из которого находим $x = -\frac{7}{6}$.

2. Для значений параметра $a \neq 1$ выделим те, при которых дискриминант уравнений равен нулю.

Если дискриминант $D = 0$ при $a = a_0$, то при изменении значения a через точку a_0 дискриминант может поменять знак. Например, при $a < a_0$, $D < 0$, а при $a > a_0$, $D > 0$. Это приводит к изменению количества действительных корней уравнений: при $a < a_0$ корней нет (так как $D < 0$), а при $a > a_0$ уравнение имеет два корня. Таким образом, можно говорить о качественном

изменении квадратичного уравнения. Поэтому значения параметра, при которых дискриминант становится равным нулю, также считается контрольным.

Составим дискриминант уравнения:

$$\frac{D}{4} = (2a + 1)^2 - (a - 1)(4a + 3). \text{ После упрощений получаем } \frac{D}{4} = 5a + 4.$$

Из уравнения $\frac{D}{4} = 0$ находим $a = -\frac{4}{5}$ – второе контрольное значение параметра a . При этом если $a < -\frac{4}{5}$, то $D < 0$; если $a \geq -\frac{4}{5}$, то $D \geq 0$; $a \neq 1$.

Значит, осталось решить уравнение в случае, когда $a < -\frac{4}{5}$ и в случае, когда $a \geq -\frac{4}{5}$ и $a \neq 1$.

Если $a < -\frac{4}{5}$, то уравнение не имеет действительных корней;

если же $a \geq -\frac{4}{5}$ и $a \neq 1$, то находим $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$; если $a = -\frac{4}{5}$, то

$D = 0$ и тогда $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: 1) если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет; 2) если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$;

3) если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$; 4) если $\begin{cases} a > -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1 \end{cases}$, то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Пример 4. Решить уравнение $ax^2 - 2(a - 1)x - 4 = 0$.

Решение. Сначала рассмотрим случай, когда $a = 0$. В данном случае контрольным значение параметра a является ноль. При $a = 0$ уравнение становится линейным, а при $a \neq 0$ оно приобретает квадратную форму, что и является качественным изменением уравнения. Следовательно, разумно рассматривать уравнение как семейство из уравнений с разными значениями параметра: 1) $a = 0$; 2) $a \neq 0$.

Проанализируем эти случаи.

1. При $a = 0$ уравнение принимает вид $2x - 4 = 0$, из которого находим $x = 2$.

2. Для значений параметра $a \neq 0$ выделим те, при которых дискриминант уравнений равен нулю. Если дискриминант $D = 0$ при $a = a_0$, то при изменении значения a через точку a_0 дискриминант может поменять знак (например, при $a < a_0$, $D < 0$, а при $a > a_0$, $D > 0$). При этом количество действительных корней уравнения также изменяется (например, при $a < a_0$ корней нет, так как $D < 0$, а при $a > a_0$ уравнение имеет два корня). Это свидетельствует о качественном изменении уравнения. Таким образом, значения параметра, при которых дискриминант становится равным нулю, также считается контрольным.

Найдем дискриминант: $D = (a - 1)^2 + 4a = (a + 1)^2$.

Если $a = -1$, то $D = 0$ – один корень. Подставляем $a = -1$ в уравнение: $-x^2 + 4x - 4 = 0$, то есть $x^2 - 4x + 4 = 0$, находим, что $x = 2$.

Если $a \neq -1$, то $D > 0$. По формуле для нахождения корней получим: $x = \frac{(a-1) \pm (a+1)}{a}$; $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2}{a}$.

Ответ: при $a = 0$ и $a = -1$ уравнение имеет один корень $x = 2$; при $a \neq 0$ и $a \neq -1$ уравнение имеет два корня $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2}{a}$.

2. Аналитико-графический метод

Сущность аналитико-графического метода заключается в визуализации параметрических зависимостей. Путем построения и сопоставления графиков функций, содержащих параметр, становится возможным геометрический анализ условий задачи. Изменение значения параметра приводит к трансформации графического образа, что позволяет установить число и тип решений для уравнений, неравенств, в том числе квадратных. Данная методика играет ключевую роль в формировании умения переводить алгебраические соотношения в геометрические образы, обогащая математическую культуру учащихся.

Пример 5. Для каждого значения параметра a решите неравенство $ax^2 - (2a + 1)x + 2 > 0$.

Решение. Сразу заметим, что при $a = 0$ неравенство будет линейным, а при $a \neq 0$ – квадратным. В случае квадратного неравенства важен знак числа a , потому что именно он будет определять, куда направлены ветви параболы – графика квадратичной функции $y = ax^2 - (2a + 1)x + 2$.

При $a = 0$, исходное неравенство примет вид: $-x + 2 > 0$, откуда $x < 2$.

При $a \neq 0$, то данное неравенство является квадратным. Корнями квадратной функции $y = ax^2 - (2a + 1)x + 2$ являются $x = 2$ или $x = \frac{1}{a}$.

При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз. Кроме того, из условия $a < 0$ следует, что $2 > \frac{1}{a}$. В этом случае решением неравенства будут все $x \in \left(\frac{1}{a}; 2\right)$

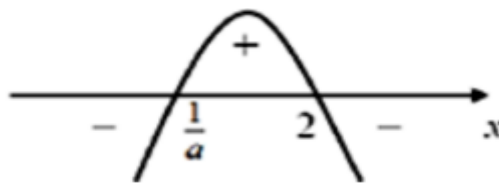


Рисунок 1 – Иллюстрация к решению неравенства

При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, однако нельзя однозначно указать, какой корень квадратичной функции больше, а какой меньше. Необходимо рассмотреть все возможные варианты.

При $a = 0,5$ корни квадратной функции совпадают, и решением неравенства являются все $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

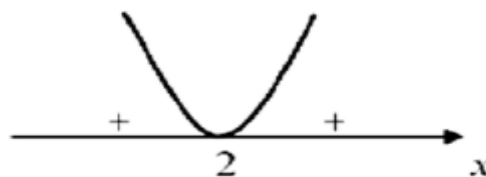


Рисунок 2 – Иллюстрация к решению неравенства

При $0 < a < 0,5$ $2 < \frac{1}{a}$. В этом случае решения $x \in (-\infty; 2) \cup \left(\frac{1}{a}; +\infty\right)$.

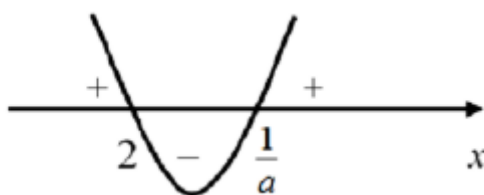


Рисунок 3 – Иллюстрация к решению неравенства

При $a > 0,5$ $2 > \frac{1}{a}$. Решением неравенства является множество $(-\infty; \frac{1}{a}) \cup (2; +\infty)$.

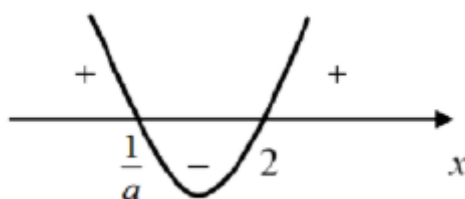


Рисунок 4 – Иллюстрация к решению неравенства

Ответ: при $a < 0$ $x \in (\frac{1}{a}; 2)$; при $a = 0$ $x < 2$; при $0 < a < 0,5$ $x \in (-\infty; 2) \cup (\frac{1}{a}; +\infty)$; при $a = 0,5$ $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; $a > 0,5$ $x \in (-\infty; \frac{1}{a}) \cup (2; +\infty)$.

Пример 6. («Шаг в будущее», 2020, 9 класс) Определите количество решений уравнения $a(x + |x| - 2) = x^2 + 4x - 5$ в зависимости от значений параметра a .

Решение. Уравнение равносильно двум системам:

$$1) \begin{cases} x \geq 0, \\ a(x + x - 2) = x^2 + 4x - 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 0, \\ a(x - x - 2) = x^2 + 4x - 5. \end{cases}$$

Рассмотрим систему 1):

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a(2x - 2) = x^2 + 4x - 5. \end{cases}$$

Обратим внимание на уравнение и найдем его корни:

$$\begin{aligned} a(2x - 2) &= x^2 + 4x - 5, \\ x^2 + (4 - 2a)x + 2a - 5 &= 0, \end{aligned}$$

$$D = 4a^2 - 24a + 36 = (2(a - 3))^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 + 2a \pm 2(a - 3)}{2},$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2a + 2a - 6}{2} = 2a - 5,$$

$$x_2 = \frac{-4 + 2a - 2a + 6}{2} = 1.$$

Получается, что $a = \frac{x+5}{2}$ и $x = 1$.

Изучим систему 2):

$$\begin{cases} x < 0, \\ a(x - x - 2) = x^2 + 4x - 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0, \\ -2a = x^2 + 4x - 5. \end{cases}$$

Из системы следует, что $a = \frac{-x^2 - 4x + 5}{2}$, $a = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + \frac{9}{2}$. Графиком этой функции является парабола с вершиной в точке $O'(-2; \frac{9}{2})$.

Построим графики функций $a = \frac{x+5}{2}$, $x = 1$, $a = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 + \frac{9}{2}$.

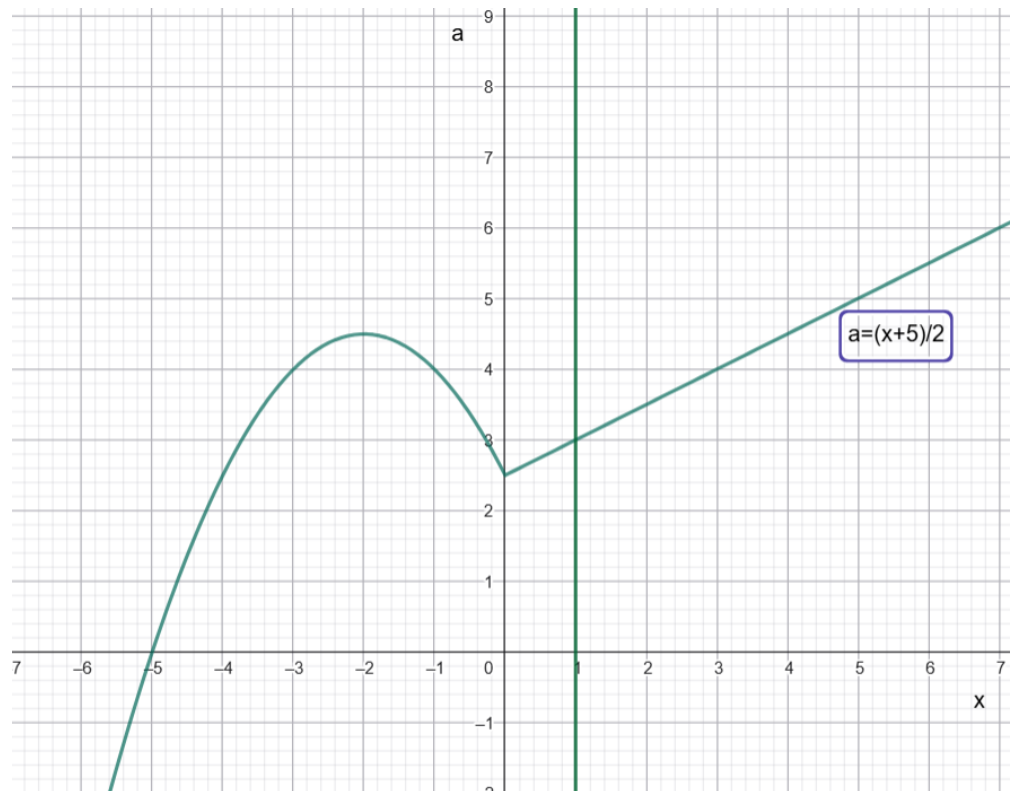


Рисунок 5 – Графическая иллюстрация к решению уравнения

Анализ графика показывает, что количество решений исходного уравнения зависит от параметра a следующим образом: два решения – при $a \in (-\infty; 2,5) \cup (4,5; +\infty)$; три решения – при $a = 2,5$, $a = 3$, $a = 4,5$; четыре решения – при $a \in (2,5; 3) \cup (3; 4,5)$.

Ответ: два решения – при $a \in (-\infty; 2,5) \cup (4,5; +\infty)$; три решения – при $a = 2,5$, $a = 3$, $a = 4,5$; четыре решения – при $a \in (2,5; 3) \cup (3; 4,5)$.

Пример 7. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $3 - x^2 > |x - a|$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение. Перепишем задачу с использованием графического языка: необходимо определить все значения параметра a , при которых существует хотя бы одна точка на графике функций $y = 3 - x^2$ с отрицательной абсциссой, расположенная выше точки графика функции $y = |x - a|$ с той же абсциссой.

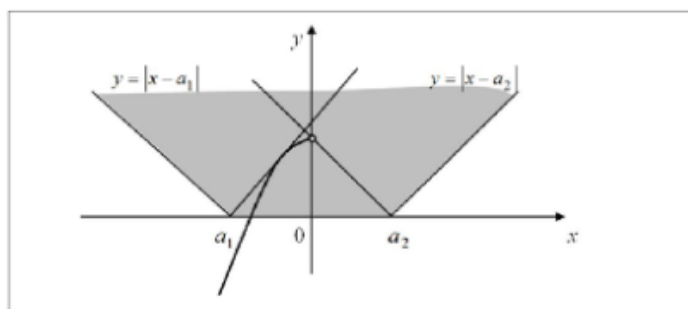


Рисунок 6 – Графическая иллюстрация к решению неравенства

С графической точки зрения видно, что искомые значения a лежат в интервале $a \in (a_1; a_2)$. Значение a_2 соответствует ситуации, когда левый луч уголка проходит через точку $(0; 3)$. Подставляя координаты этой точки в уравнение $y = a_2 - x$, получаем $a_2 = 3$. Значение a_1 соответствует случаю, когда правый луч уголка касается параболы, то есть уравнение $3 - x^2 = x - a_1$ имеет ровно один корень. Дискриминант этого уравнения равен $13 + 4a_1$ и обращается в нуль при $a_1 = -\frac{13}{4}$. Таким образом, $a \in \left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.

3. Метод интервалов как частный случай аналитического метода

Метод интервалов является основным способом решения рациональных неравенств с параметром. Его суть заключается в анализе знака выражения на числовой оси, разбитой на интервалы точками, которые зависят от параметра. Это требует особого внимания, так как при изменении параметра эти точки могут смещаться, менять порядок или совпадать.

Работа по методу включает определение нулей числителя и знаменателя, разбиение области определения на интервалы и исследование знака выражения на каждом из них. Ключевая особенность при работе с параметром – необходимость рассматривать различные случаи, которые возникают в зависимости от его значений, а также строго учитывать область допустимых значений.

Данный метод не только даёт алгоритм решения, но и развивает логическое мышление, наглядное понимание математических зависимостей и навык системного анализа. Он позволяет наглядно проследить, как изменение параметра влияет на множество решений неравенства, формируя у учащихся исследовательский подход к решению задач.

Пример 8. Решите неравенство с параметром $\frac{x-a}{x-1} \geq 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $f(x) = 0$ при $x = a$. Точки 1 и a разбивают числовую прямую на интервалы, в каждом из которых функция сохраняет знак. Так как определить порядок расположения этих точек на числовой прямой однозначно нельзя, то необходимо рассмотреть все возможные случаи: $a < 1$, $a = 1$ и $a > 1$.
Если $a < 1$, то $x \in (-\infty, a] \cup (1; +\infty)$.

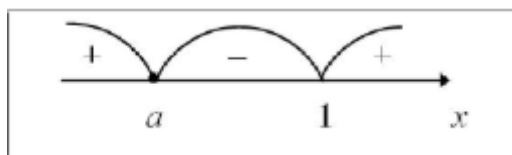


Рисунок 7 – Иллюстрация к решению неравенства

Если $a = 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

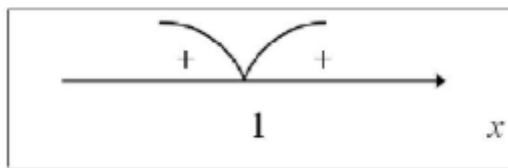


Рисунок 8 – Иллюстрация к решению неравенства

Если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup [a, +\infty)$.

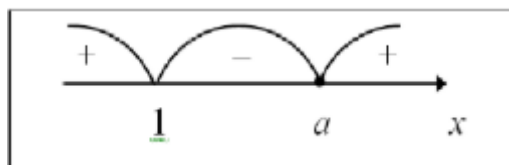


Рисунок 9 – Иллюстрация к решению неравенства

Ответ: при $a < 1$ $x \in (-\infty, a] \cup (1; +\infty)$; при $a = 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
при $a > 1$ $x \in (-\infty; 1) \cup [a, +\infty)$.

Пример 9. При всех a решите неравенство

$$\frac{x - a}{x - a - 1} \leq 0.$$

Решение. При каждом фиксированном значении параметра a данное неравенство представляет собой обычное рациональное неравенство, к которому может быть применён метод интервалов. Для этого на числовой оси необходимо отметить точки a и $a + 1$, в которых соответственно обращаются в нуль числитель и знаменатель выражения. Поскольку для любого значения параметра выполняется неравенство $a + 1 > a$, порядок расположения этих точек на числовой оси остается неизменным, что позволяет определить соответствующие интервалы для дальнейшего анализа. Поэтому получаем:



Рисунок 10 – Иллюстрация к решению неравенства

Ответ: $x \in [a; a + 1)$ при любом a .

Пример 10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $\frac{x-2a-3}{x-(a-2)} < 0$ выполняется для всех x из промежутка $1 \leq x \leq 2$.

Решение. Задачу будем решать с помощью метода интервалов, рассматривая несколько случаев для значения параметра a . Для этого рассмотрим три случая.

$$1) 2a + 3 < a - 2 \Leftrightarrow a < -5.$$



Рисунок 11 – Иллюстрация к решению неравенства $(2a + 3, a - 2)$ - решение неравенства.

Чтобы выполнялось условие задачи, точки $x = 1$ и $x = 2$ должны находится в заданном промежутке. Тем самым, имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} a < -5, \\ 2a + 3 < 1, \\ a - 2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -5, \\ a < -1, \\ a > 4 \end{cases} \Rightarrow a \in \emptyset.$$

$$2) a - 2 < 2a + 3 \Leftrightarrow a > -5.$$

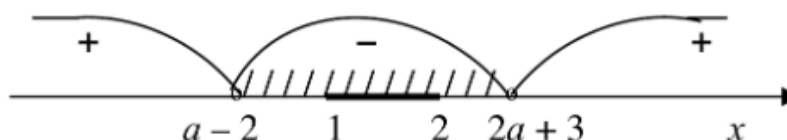


Рисунок 12 – Иллюстрация к решению неравенства $x \in (a - 2; 2a + 3)$.

Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} a > -5, \\ a - 2 < 1, \\ 2a + 3 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -5, \\ a < 3, \\ a > -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 3.$$

3) $a - 2 = 2a + 3 \Leftrightarrow a = -5$. В этом случае неравенство имеет вид:

$$\frac{x + 7}{x + 7} < 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Ответ: $-\frac{1}{2} < a < 3$.

4. Метод условного раскрытия модуля как частный случай аналитического метода

Метод условного перебора (раскрытия модуля) применяется для решения задач с модулями, содержащими параметр. Алгоритм основан на логическом разбиении области возможных значений переменной и параметра на подмножества, где подмодульное выражение имеет постоянный знак. На каждом таком подмножестве модуль раскрывается однозначно, что позволяет свести исходную задачу к серии стандартных уравнений или неравенств. Итоговое решение формируется как объединение полученных результатов с обязательной проверкой на соответствие условиям разбиения. Данная методика формирует навык системного анализа ситуаций и построения строгих доказательных рассуждений.

Пример 11. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$5|x - 3a| + |x - a^2| + 4x = a$$

1) имеет бесконечное множество решений, 2) не имеет решений.

Решение. Исходное уравнение равносильно совокупности четырех систем:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} 5(x - 3a) + (x - a^2) + 4x = a, \\ x \geq 3a, \\ x \geq a^2; \end{cases} & 2) \begin{cases} 5(3a - x) + (x - a^2) + 4x = a, \\ x < 3a, \\ x \geq a^2; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 5(x - 3a) + (a^2 - x) + 4x = a, \\ x \geq 3a, \\ x < a^2; \end{cases} & 4) \begin{cases} 5(3a - x) + (a^2 - x) + 4x = a, \\ x < 3a, \\ x < a^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Преобразуем систему 1):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{10}(a^2 + 16a), \\ \frac{1}{10}(a^2 + 16a) \geq 3a, \\ \frac{1}{10}(a^2 + 16a) \geq a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + 16a}{10}, \\ a(a - 14) \geq 0, \\ a(-9a + 16) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + 16a}{10}, \\ a \in (-\infty; 0] \cup [14; +\infty), \\ a \in \left[0; \frac{16}{9}\right]. \end{cases}$$

Данная система совместна только при $a = 0$. При этом также $x = 0$.

Система 2) равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} 14a - a^2 = 0, \\ x < 3a, \\ x \geq a^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=0, \\ a=14, \end{cases} \\ x < 3a, \\ x \geq a^2. \end{cases}$$

Система 2) не имеет решения.

Система 3) сводится к системе

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8}(16a - a^2), \\ \frac{1}{8}(16a - a^2) \geq 3a, \\ \frac{1}{8}(16a - a^2) < a^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16a - a^2}{8}, \\ a(a + 8) \leq 0, \\ a(9a - 16) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16a - a^2}{8}, \\ a \in [-8; 0], \\ a \in (-\infty; 0) \cup (\frac{16}{9}; +\infty). \end{cases}$$

Два последних ее неравенства системы имеют общее множество решений

$$-8 \leq a < 0.$$

Для каждого a из этого отрезка первое уравнение даёт единственное значение x . Наконец, система 4) принимает вид

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a^2 + 14a), \\ \frac{1}{2}(a^2 + 14a) < 3a, \\ \frac{1}{2}(a^2 + 14a) < a^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + 14a}{2}, \\ a(a + 8) < 0, \\ a(-a + 14) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + 14a}{2}, \\ a \in (-8; 0), \\ a \in (-\infty;) \cup (; +\infty). \end{cases}$$

Два последних неравенств системы также имеют общее множество решений $-8 < a < 0$. При каждом значении a из первого уравнения находим единственное значение x .

Сделаем вывод о том, что при $a < -8$ и при $a > 0$ ни одна система 1) - 4) не имеют решений и исходное уравнение тоже не имеет решений. При $-8 \leq a \leq 0$ имеют решение системы 3) и 4), а при $a = 0$ имеют решения все системы 1), 3), 4). Но множество решений каждой из систем при фиксированном $a \in [-8; 0]$ конечное, поэтому исходное уравнение не может иметь бесконечное множества решений ни при каком значении a .

Ответ: 1. Уравнение не имеет бесконечное множества решений ни при каком значении a . 2. При $a \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$ уравнение не имеет решений.

Пример 12. («Шаг в будущее», 2020, 9 класс) Определите количество решений уравнения $a(x + |x| - 2) = x^2 + 4x - 5$ в зависимости от значений параметра a .

Решение. Уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x \geq 0, \\ a(x + x - 2) = x^2 + 4x - 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 0, \\ a(x - x - 2) = x^2 + 4x - 5. \end{cases}$$

Рассмотрим систему 1):

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a(2x - 2) = x^2 + 4x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 2a(x - 1) = (x - 1)(x + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ (x - 1)(2a - x - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 5 \geq 0, \\ \begin{cases} x = 1, \\ x = 2a - 5. \end{cases} \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда два получившихся корня не совпадают, тогда

$$\begin{cases} 2a - 5 \geq 0, \\ 2a - 5 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2,5, \\ a \neq 3. \end{cases}$$

Получаем, что при $a \in [2,5; 3) \cup (3; +\infty)$ уравнение имеет 2 решения.

Если $a = 3$, то эти корни совпадают, уравнение имеет 1 решение.

Рассмотрим теперь систему 2):

$$\begin{cases} x < 0, \\ -2a = x^2 + 4x - 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 4x - 5 + 2a = 0. \end{cases}$$

Найдем дискриминант квадратного уравнения: $D = 4^2 - 4(-5 + 2a) = 36 - 8a = 4(9 - 2a)$. Если $D = 0$, то $a = 4,5$ и уравнение имеет один корень $x = -2$. Если $D > 0$, то корни уравнения имеют вид $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9 - 2a}$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -4$ и $x_1 \cdot x_2 = -5 + 2a$ видно, что оба корня должны быть либо отрицательными, либо разного знака.

Если $x_1, x_2 < 0$ и $x_1 \cdot x_2 > 0$, то $\begin{cases} 2a - 5 > 0, \\ D > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2,5, \\ a < 4,5. \end{cases} \Leftrightarrow 2,5 < a < 4,5$,

уравнение будет иметь 2 решения.

Если x_1, x_2 – разного знака и $x_1 \cdot x_2 \leq 0$, то $\begin{cases} 2a - 5 \leq 0, \\ D > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 2,5, \\ a < 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq 2,5$,

уравнение имеет одно решение.

Объединим два решения, нанеся их на числовые прямые.

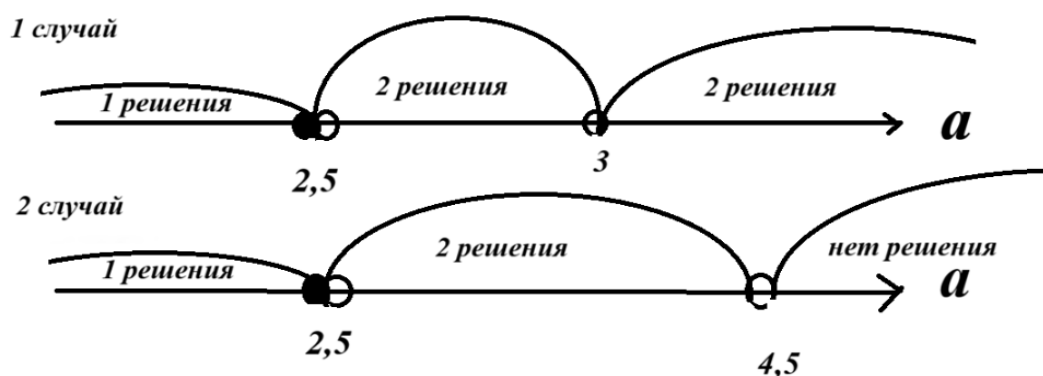


Рисунок 13 – Иллюстрация к решению уравнения

Из рисунка видно, что при $a \in (-\infty; 2,5) \cup (4,5; +\infty)$ уравнение имеет 2 решения, при $a = 2,5$ или $a = 3$ или $a = 4,5$ имеет 3 решения, при $a \in (2,5; 3) \cup (3; 4,5)$ – 4 решения.

Ответ: 2 решения при $a \in (-\infty; 2,5) \cup (4,5; +\infty)$; 3 решения при $a = 2,5$ или $a = 3$ или $a = 4,5$; 4 решения при $a \in (2,5; 3) \cup (3; 4,5)$.

1.3 Анализ учебников на наличие уравнений и неравенств с параметром

Сравнение учебников по алгебре – ключевой этап, так как именно они задают подход к изучению уравнений и неравенств с параметром. Анализ методик помогает оценить полноту изложения темы и выявить возможные недостатки. В разделе рассматривается, как задания с параметром представлены в учебниках, что служит основой для создания дополнительных материалов и специальных курсов.

В ходе работы проводится сравнение учебников алгебры для 7–9 классов под редакцией Ю.Н. Макарычева, А.Г. Мерзляка и А.Г. Мордковича, которые активно применяются в школах и соответствуют ФГОС. Их выбор связан с широкой распространённостью и различиями в методических подходах.

Анализ охватывает такие темы, как линейные, квадратные и рациональные уравнения и неравенства с параметром, а также задания с

модулем, которые часто становятся первой ступенью в освоении параметрических задач. Критериями оценки служат место темы в курсе, объём и содержание материала, типы упражнений, предлагаемые методы решения, уровень сложности и методическая поддержка. Такой подход помогает выявить общие черты и уникальные особенности в освещении темы параметров в современных учебниках.

Таблица 1 – Сравнительный анализ учебников алгебры 7 класса по теме «Линейные уравнения с параметром»

Критерий анализа	Учебник Ю. Н. Макарычева	Учебник А. Г. Мерзляка	Учебник А. Г. Мордковича
Наличие темы в курсе	Прямо не выделена как отдельная тема, представлена в виде отдельных заданий повышенной сложности	Включена в содержание темы «Линейные уравнения» через систему упражнений	Не выделена явно в курсе 7 класса, носит эпизодический характер
Место в структуре курса	Задания с параметром встречаются при изучении линейных уравнений	Параметрические задания органично встроены в основной материал	Основной акцент сделан на функциях и моделях, параметр не является ключевым элементом
Объём материала	Небольшое количество заданий, чаще в конце параграфа	Достаточное количество упражнений различного уровня	Минимальное количество заданий с параметром
Типы заданий	Уравнение вида $ax = b$, анализ случаев $a = 0, a \neq 0$	Уравнение вида $(a + k)x = b$, задания на число решений	В основном стандартные линейные уравнения без системного анализа параметра
Метод решения	Аналитический метод с разбором особых значений параметра	Аналитический метод, разбиение на случаи	Аналитический метод используется неявно
Формируемые умения	Анализ условий существования решения	Классификация уравнений по числу решений, логический анализ	Базовые навыки решения линейных уравнений
Уровень сложности	Повышенный, рассчитан на подготовленных учащихся	Доступен для большинства учащихся	Базовый
Связь с подготовкой к ОГЭ	Косвенная, через развитие аналитического мышления	Прямая, задания соответствуют формату экзаменационных	Слабая

Продолжение Таблицы 1

Методическое сопровождение	Пояснения минимальны, требуется комментарий учителя	Чёткие формулировки, логичная система упражнений	Методическая линия по параметру не прослеживается
Общая оценка представленности темы	Тема представлена фрагментарно	Тема представлена наиболее системно	Тема представлена эпизодически

Сравнение учебников показывает, что учебник Мерзляка подходит к теме линейных уравнений с параметром наиболее системно и понятно для учеников. В учебнике Макарычева такие задачи встречаются реже и требуют дополнительных объяснений от учителя. Учебник Мордковича почти не затрагивает эту тему в 7 классе, поэтому нужных навыков у учащихся не формируется.

После анализа линейных уравнений логично перейти к неравенствам с параметром.

Таблица 2 – Сравнительный анализ учебников алгебры 7 класса по теме «Линейные неравенства с параметром»

Критерий анализа	Учебник Ю. Н. Макарычева	Учебник А. Г. Мерзляка	Учебник А. Г. Мордковича
Наличие темы в курсе	Не выделена как отдельная тема, представлена отдельными заданиями	Включена в систему упражнений по теме «Линейных неравенств»	Явно не выделена, носит эпизодический характер
Место в структуре курса	Рассматривается при изучении линейных неравенств как задания повышенной сложности	Органично встроена в основную материал темы	Основное внимание уделено стандартным линейным неравенствам
Объём материала	Небольшое количество заданий с параметром	Достаточное количество упражнений разного уровня сложности	Минимальный объём или отсутствие системных заданий
Типы заданий	Уравнение вида $ax > b$, анализ случаев $a = 0, a > 0, a < 0$	Задания на определение множества решений при различных значениях параметра	Преимущественно задания без параметра

Продолжение Таблицы 2

Метод решения	Аналитический метод с учётом изменения знака неравенства	Аналитический метод, разбиение на случаи	Аналитический метод используется без акцента на параметр
Формируемые умения	Анализ знака коэффициента, учет особых значений параметра	Логический анализ условий, классификация решений	Базовые навыки решения линейных неравенств
Уровень сложности	Повышенный, требует комментариев учителя	Доступен для большинства учащихся	Базовый
Связь с подготовкой к ОГЭ	Косвенная, через развитие аналитического мышления	Прямая, задания соответствуют формату экзаменационных	Слабая
Методическое сопровождение	Ограниченное, без подробных пояснений	Чёткие формулировки, последовательная система упражнений	Методическая линия по параметру не прослеживается
Общая оценка представленности темы	Представлена фрагментарно	Представлена наиболее системно	Представлена эпизодически

Сравнение учебников показывает, что наиболее полный подход к линейным неравенствам с параметром представлен у А.Г. Мерзляка. У Ю.Н. Макарычева тема раскрыта недостаточно и требует доработки, а в курсе А.Г. Мордковича для 7 класса она не получает системного освещения, что указывает на необходимость привлечения дополнительных материалов и элективных занятий.

После линейных задач учащиеся переходят к квадратным уравнениям и неравенствам с параметром, где он влияет и на старший коэффициент, и на дискриминант, значительно усложняя анализ. Далее будет рассмотрено, как учебники организуют этот переход и формируют алгоритмический подход.

Таблица 3 – Сравнительный анализ учебников алгебры по теме «Квадратные уравнения с параметром».

Критерий анализа	Учебник Ю. Н. Макарычева	Учебник А. Г. Мерзляка	Учебник А. Г. Мордковича
------------------	-----------------------------	---------------------------	-----------------------------

Продолжение Таблицы 3

Наличие темы в курсе	Не выделена как самостоятельная тема, представлена отдельными заданиями	Представлена системно в рамках темы «Квадратные уравнения»	Прямо не выделена, встречается эпизодически
Место в структуре курса	Задания с параметром размещены среди упражнений повышенной сложности	Параметрические уравнения органично встроены в основную тему	Основной акцент сделан на свойства квадратных уравнений без параметра
Объём материала	Ограниченное количество заданий	Достаточный объём упражнений различного уровня	Небольшой объём или отсутствие системной линии
Типы заданий	Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ с параметром в коэффициентах	Задания на исследование числа корней в зависимости от параметра	Преимущественно стандартные квадратные уравнения
Метод решения	Аналитический метод, использование дискриминанта	Аналитический метод, анализ дискриминанта как функции параметра	Аналитический метод без акцента на параметр
Формируемые умения	Определение условий существования корней	Исследование зависимости числа корней от параметра	Закрепление базовых навыков решения квадратных уравнений
Уровень сложности	Повышенный, рассчитан на подготовленных учащихся	Доступен для большинства учащихся, есть дифференциация	Базовый
Связь с подготовкой к ОГЭ	Косвенная, через развитие аналитического мышления	Прямая, задания соответствуют формату экзаменационных	Слабая
Методическое сопровождение	Минимальные пояснения, требуется помощь учителя	Чёткие формулировки, логичная система упражнений	Методическая линия по параметру не прослеживается
Общая оценка представленности темы	Представлена фрагментарно	Представлена наиболее полно и системно	Представлена эпизодически

Анализ показывает, что наиболее системный подход к изучению квадратных уравнений с параметром представлен в учебнике А.Г. Мерзляка, где задания формируют навык исследования корней. У Ю.Н. Макарычева такие

задачи фрагментарны и отнесены к повышенной сложности. В курсе А.Г. Мордковича тема не развита целостно, что требует привлечения дополнительных материалов.

Логичным продолжением является переход к квадратным неравенствам с параметром, что означает новый уровень сложности. Здесь акцент смещается с количества корней на расположение параболы, а параметр начинает управлять областью решений. Далее исследуется, как учебники помогают учащимся освоить этот комплексный анализ.

Таблица 4 – Сравнительный анализ учебников алгебры по теме «Квадратные неравенства с параметром»

Критерий анализа	Учебник Ю. Н. Макарычева	Учебник А. Г. Мерзляка	Учебник А. Г. Мордковича
Наличие темы в курсе	Не выделена как самостоятельная тема, представлена отдельными заданиями	Представлена в системе упражнений по теме квадратных неравенств	Прямо не выделена, встречается эпизодически
Место в структуре курса	Задания с параметром размещены среди упражнений повышенной сложности	Органично встроена в основной материал темы	Основной акцент сделан на стандартных квадратных неравенствах
Объём материала	Небольшое количество заданий	Достаточный объём упражнений разного уровня сложности	Ограниченный объём, без системной линии
Типы заданий	Уравнение вида $ax^2 + bx + c > 0, < 0$ с параметром в коэффициентах	Задания на исследование множества решений в зависимости от параметра	Преимущественно неравенства без параметра
Метод решения	Графический метод, использование дискриминанта	Графический и аналитический методы, анализ дискриминанта и знака коэффициента a	Графический метод без акцента на параметр
Формируемые умения	Анализ положения параболы относительно оси абсцисс	Исследование зависимости множества решений от параметра	Закрепление базовых навыков решения квадратных неравенств
Уровень сложности	Повышенный, требует дополнительных пояснений	Доступен для большинства учащихся, есть дифференциация	Базовый

Продолжение Таблицы 4

Связь с подготовкой к ОГЭ	Косвенная, через развитие аналитического мышления	Прямая, задания близки к экзаменационному формату	Слабая
Методическое сопровождение	Пояснения минимальны, значительная роль отводится учителю	Чёткие формулировки, логичная система упражнений	Методическая линия по параметру выражена слабо
Общая оценка представленности темы	Представлена фрагментарно	Представлена наиболее полно и системно	Представлена эпизодически

Анализ выявил существенные различия в подходах учебников к теме квадратных неравенств с параметром. Наиболее глубоко и методически последовательно этот материал проработан в учебнике А.Г. Мерзляка, где соответствующие задачи являются органичной частью курса и развивают умение анализировать множество решений. В учебнике Ю.Н. Макарычева задания с параметром в этом разделе немногочисленны и рассматриваются преимущественно как задачи для углублённого изучения, что ограничивает возможности для их массового освоения. В свою очередь, курс А.Г. Мордковича не уделяет квадратным неравенствам с параметром системного внимания в основной школе, вследствие чего для полноценного знакомства с темой требуются дополнительные учебные материалы и специальные занятия.

Переход к рациональным уравнениям и неравенствам с параметром вводит новый ключевой аспект – анализ области допустимых значений (ОДЗ). Здесь параметр влияет не только на коэффициенты, но и на ограничения, связанные со знаменателем, что требует многоэтапного исследования. Рассмотрим, как учебники формируют у учащихся навык решения таких комплексных задач.

Таблица 5 – Сравнительный анализ учебников алгебры по теме «Рациональные уравнения и неравенства с параметром»

Критерий анализа	Учебник Ю. Н. Макарычева	Учебник А. Г. Мерзляка	Учебник А. Г. Мордковича
Наличие темы в курсе	Не выделена как самостоятельная тема, представлена отдельными заданиями	Представлена в системе упражнений по рациональным выражениям и неравенствам	Прямо не выделена, встречается эпизодически
Место в структуре курса	Задания с параметром включены как материал повышенной сложности	Органично встроена в основной материал соответствующих тем	Основной акцент сделан на стандартных рациональных уравнениях и неравенствах
Объём материала	Ограниченное количество заданий	Достаточный объём упражнений разного уровня сложности	Минимальный объём, без системной линии
Типы заданий	Рациональные уравнения и неравенства с параметром в числителе и знаменателе	Задания на анализ области допустимых значений и множества решений	Преимущественно задания без параметра
Метод решения	Аналитический метод, метод интервалов	Аналитический метод, метод интервалов, разбиение на случаи	Аналитический метод без акцента на параметр
Формируемые умения	Учёт области допустимых значений, анализ особых значений параметра	Исследование зависимости решений от параметра, логический анализ	Закрепление базовых навыков работы с рациональными выражениями
Уровень сложности	Повышенный, требует дополнительных пояснений	Дифференцированный, доступен большинству учащихся	Базовый
Связь с подготовкой к ОГЭ	Косвенная, через развитие аналитического мышления	Прямая, задания соответствуют формату экзаменационных	Слабая
Методическое сопровождение	Пояснения минимальны, значительная роль отводится учителю	Чёткие формулировки, логичная система упражнений	Методическая линия по параметру выражена слабо
Общая оценка представленности темы	Представлена фрагментарно	Представлена наиболее полно и системно	Представлена эпизодически

Суммируя оценку подходов к рациональным уравнениям и неравенствам с параметром, можно констатировать следующее. Учебник А.Г. Мерзляка демонстрирует наиболее интегрированный подход, планомерно развивая умение работать с ОДЗ и методом интервалов в контексте параметрических задач. В пособии Ю.Н. Макарычева подобные упражнения носят скорее иллюстративный характер и предназначены для продвинутых учащихся, не обеспечивая массового охвата темы. Что касается УМК А.Г. Мордковича, то в нём данное направление не получает достаточного развития, выступая подтверждением тезиса о целесообразности создания специализированных учебных модулей для восполнения этого пробела в основной школьной программе.

Переход к задачам с модулем и параметром обобщает все изученные принципы, добавляя анализ абсолютной величины. Параметр влияет как на выражение под модулем, так и на геометрическую интерпретацию расстояния на числовой прямой, требуя от учащихся высшего уровня исследовательских навыков. Проанализируем подход учебников к этой теме.

Таблица 6 – Сравнительный анализ учебников алгебры по теме «Параметрические уравнения и неравенства с модулем»

Критерий анализа	Учебник Ю. Н. Макарычева	Учебник А. Г. Мерзляка	Учебник А. Г. Мордковича
Наличие темы в курсе	Не выделена как самостоятельная тема, представлена отдельными заданиями	Представлена в системе упражнений по теме «Модуль»	Прямо не выделена, носит эпизодический характер
Место в структуре курса	Задания с модулем и параметром предлагаются как материал повышенной сложности	Органично встроена в основной материал соответствующих тем	Основной акцент сделан на уравнениях и неравенствах с модулем без параметра
Объём материала	Небольшое количество заданий	Достаточный объём упражнений разного уровня сложности	Минимальный объём, без системной линии
Типы заданий	Уравнения и неравенства с модулем, содержащие параметр в коэффициентах	Задания на исследование решений при различных значениях параметра	Преимущественно задания с фиксированными коэффициентами

Продолжение Таблицы 6

Метод решения	Условное раскрытие модуля, аналитические преобразования	Условное раскрытие модуля, разбиение на случаи	Аналитический метод без исследования параметра
Формируемые умения	Анализ условий существования решений	Исследование зависимости решений от параметра, логический анализ	Отработка стандартных приёмов работы с модулем
Уровень сложности	Повышенный	Дифференцированный	Базовый
Связь с подготовкой к ОГЭ	Косвенная	Выраженная	Слабая
Методическое сопровождение	Минимальные пояснения, значительная роль учителя	Чёткие формулировки и последовательная система упражнений	Методическая поддержка ограничена
Общая оценка представленности темы	Тема представлена фрагментарно	Тема раскрыта наиболее полно и системно	Представлена эпизодически

Проведённое сравнение показывает, что наиболее целостный и методически выстроенный подход к изучению параметрических уравнений и неравенств с модулем реализован в учебнике А. Г. Мерзляка, где задания с параметром органично включены в основное содержание и направлены на развитие логического анализа и исследовательских умений учащихся. В учебнике Ю. Н. Макарычева данный материал носит дополнительный характер и требует активного методического сопровождения со стороны учителя. В курсе А. Г. Мордковича задачи с модулем и параметром представлены в минимальном объёме и не образуют самостоятельной методической линии, что подтверждает целесообразность использования дополнительных форм обучения.

Анализ учебников алгебры основной школы авторских линий Ю.Н. Макарычева, А.Г. Мерзляка и А.Г. Мордковича показывает, что уравнения и неравенства с параметром представлены в школьном курсе неравномерно и не выделяются в качестве самостоятельной темы. Наиболее системно параметрические задания включены в учебник А.Г. Мерзляка, где они

охватывают различные виды уравнений и неравенств и используются для формирования аналитического мышления учащихся. В учебнике Ю.Н. Макарычева такие задания носят фрагментарный характер и рассматриваются как материал повышенной сложности, тогда как в курсе А.Г. Мордковича параметрические задачи представлены эпизодически и не образуют целостной методической линии.

Основными видами параметрических задач в учебниках являются линейные уравнения и неравенства, в то время как квадратные, рациональные задачи и задания с модулем представлены ограниченно. В качестве основного способа решения используется аналитический метод. Применение методов разбиения на случаи, интервалов и графического анализа наиболее последовательно реализовано в учебнике А.Г. Мерзляка.

Таким образом, несмотря на высокую педагогическую ценность, в курсе алгебры основной школы отсутствует целостная система изучения уравнений и неравенств с параметром. Это подтверждает необходимость разработки дополнительного методического сопровождения и элективных курсов по данной теме.

1.4 Задачи с параметром в заданиях ОГЭ

В ОГЭ задачи с параметрами предназначены не только проверки вычислений, а для оценки логики и аналитических способностей. У таких задач нет единого шаблона решения, поскольку условие меняется в зависимости от значения параметра, поэтому ученику приходится последовательно разбирать все возможные варианты.

На экзамене такие задания имеют повышенный уровень сложности. Чаще всего они строятся на основе линейных или квадратных уравнений и неравенств, где параметр является частью коэффициентов. Хотя для них не

отведен отдельный тематический блок, они регулярно встречаются в разделах, посвящённых исследованию функций, уравнений и неравенств.

Основная суть подобных заданий – определить, при каких значениях параметра условие выполняется. Сложность для учащихся заключается в разборе случаев и нахождении тех «критических» значений параметра, при которых меняется тип задачи (к примеру, квадратное уравнение превращается в линейное).

Анализ задач с параметром из открытого бланка ФИПИ показывает их разнообразие по формулировкам, методам решений и охвату тем школьной алгебры. Всё это говорит о необходимости их классификации (по содержанию, методам решения и проверяемым умениям). Такая систематизация поможет точно определить роль параметрических задач в ОГЭ и выстроить эффективную подготовку к ним. Ниже представлена таблица, в которой задания из банка ФИПИ сгруппированы по основным типам, характерным для экзамена.

Таблица 7 – Классификация заданий с параметром в открытом бланке ФИПИ (ОГЭ).

Вид заданий	Краткая характеристика	Типичные формулировки заданий ОГЭ	Основные методы решения	Формируем умения
Линейные уравнения с параметром	Параметр входит в коэффициент при переменной или свободный член	«При каких значениях a уравнение имеет решение (одно/нет/бесконечно много)?»	Аналитический метод, разбиение на случаи	Анализ условий существования решения
Линейные неравенства с параметром	Зависимость решения от знака параметра	«Решите неравенство в зависимости от значения a »	Аналитический метод, разбиение на случаи	Учет знака параметра, логический анализ
Квадратные уравнения с параметром	Параметр входит в коэффициенты квадратного уравнения	«Найдите значения a , при которых уравнение имеет два корня»	Анализ дискриминанта, аналитический метод	Исследование зависимости числа корней от параметра

Продолжение Таблицы 7

Квадратные неравенства с параметром	Исследование множества решений в зависимости от параметра	«Решите неравенство при различных значениях a »	Графический метод, анализ дискриминанта	Геометрическая интерпретация решений
Рациональные уравнения с параметром	Дробные выражения с параметром в числителе или знаменателе	«Найдите решения уравнения при различных a »	Аналитический метод, учет ОДЗ	Работа с областью допустимых значений
Рациональные неравенства с параметром	Знаки выражений зависят от параметра	«Решите неравенство в зависимости от параметра»	Метод интервалов, разбиение на случаи	Последовательный логический анализ
Уравнения с модулем и параметром	Параметр находится под знаком модуля или в правой части	«Найдите решения при разных a »	Условное раскрытие модуля	Анализ нескольких случаев
Неравенства с модулем и параметром	Модуль и параметр определяют множество решений	«Решите неравенство в зависимости от a »	Условное раскрытие модуля, графический метод	Геометрическое и логическое мышление
Графические задания с параметром	Параметр влияет на положение графика	«При каком a графики имеют одну точку пересечения?»	Графический анализ, аналитический метод	Связь алгебры и геометрии

Анализ задач из открытого банка ФИПИ свидетельствует, что в ОГЭ встречается большое разнообразие уравнений и неравенств с параметром. Диапазон варьируется от простых линейных уравнений до более сложных заданий с рациональными выражениями и модулями, имеющих исследовательский компонент. Подобные упражнения развивают у школьников ключевые умения: анализировать условие, рассматривать различные частные случаи и обоснованно выбирать стратегию решения.

Проведённая систематизация типовых заданий подтверждает важность планомерного и углублённого знакомства с задачами с параметром в рамках основной школьной программы по алгебре.

Для иллюстрации представленной классификации приведём примеры заданий с параметром из открытого банка ФИПИ разных лет.

Пример 13. Линейное неравенство с параметром (ОГЭ, 2021 г.)

Решите неравенство

$$ax + 4 > 0$$

в зависимости от значения параметра a .

Задание проверяет умение учитывать знак параметра и корректно менять знак неравенства при делении на отрицательное число.

Пример 14. Квадратное уравнение с параметром (ОГЭ, 2023 г.)

При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$$

имеет два различных корня?

Для решения необходимо исследовать дискриминант как функцию параметра.

Пример 15. Квадратное неравенство с параметром (ОГЭ, 2020 г.)

Решите неравенство

$$ax^2 - x + 1 > 0$$

в зависимости от значения параметра a .

Задание предполагает анализ знака старшего коэффициента и дискриминанта, а также использование графической интерпретации.

Пример 16. Рациональное неравенство с параметром (ОГЭ, 2024 г.)

Решите неравенство

$$\frac{x - a}{x - 2} \leq 0$$

в зависимости от значения параметра a .

Задача требует строгого учёта области допустимых значений и применения метода интервалов с анализом взаимного расположения точек, зависящих от параметра.

Пример 17. Уравнение с модулем и параметром (ОГЭ, 2023 г.)

Решите уравнение

$$|x - a| = 2$$

в зависимости от значения параметра a .

Задание направлено на проверку умения условного раскрытия модуля и геометрической интерпретации решения на координатной прямой.

Представленные примеры демонстрируют, что задачи с параметром в ОГЭ включают различные типы уравнений и неравенств. Для их выполнения от учеников требуется способность анализировать условие, проводить разбор случаев и логически обосновывать каждый этап решения. Таким образом, системная работа с подобными заданиями — необходимое условие для качественной подготовки девятиклассников к экзамену.

Проведённый анализ подтверждает важную роль этих задач в оценке развития у учащихся аналитического и логического мышления, а также исследовательских навыков. Однако, несмотря на стабильное присутствие в экзаменационных вариантах, тема параметров часто остаётся фрагментарной в рамках основной школьной программы. Это делает актуальной разработку специальных учебных материалов, элективных курсов и тренировочных систем, которые позволят сформировать у школьников прочные умения для решения подобных заданий.

1.5 Олимпиадные задачи, содержащие уравнения и неравенства с параметрами

Олимпиадные задачи играют ключевую роль в математической подготовке, развивая у учащихся не только навыки решения стандартных задач,

но и креативный подход к нестандартным проблемам. Эти задачи помогают выявлять талантливых учеников, формировать аналитическое мышление и готовить к академическим достижениям.

Задания с уравнениями и неравенствами с параметрами встречаются на разных уровнях олимпиады. На начальном уровне они развивают логическое мышление и основы алгебры, требуя нахождения параметров, при которых уравнение или неравенство имеет решение или доказывая их отсутствие.

На среднем уровне задачи становятся более сложными, требуя применения методов индукции, подбора решений и преобразования уравнений для нахождения нужных параметров.

На продвинутом уровне задачи требуют глубоких знаний в области теории чисел, комплексного анализа, теории вероятностей и других дисциплин, предлагая нестандартные подходы к решению.

Рассмотрим несколько примеров олимпиадных задач, связанных с уравнениями и неравенствами с параметрами:

Пример 18. («Будущие исследователи — будущее науки», 2023, 9 класс)

При каких значениях параметра a уравнения $ax + a = 7$ и $3x - a = 17$ имеют общий целый корень?

Решение. Решая эти два уравнения как систему с неизвестными x и a , выразим параметр a через x из второго уравнения и подставим его в первое. Получим квадратное уравнение $3x^2 - 14x - 24 = 0$, которое имеет два корня: 6 и $-\frac{4}{3}$. Для целого корня $x = 6$ соответствующее значение $a = 3x - 17 = 1$.

Ответ: $a = 1$.

Пример 19. («Шаг в будущее», 2022, 8 класс)

Найти все значения параметра a , при которых выполнено $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$, где x_1, x_2 — корни уравнения $2x^2 - (a + 2)x - 2a - 4 = 0$.

Решение. Преобразуем $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$ с учетом $x_1 + x_2 = \frac{a+2}{2}$ и $x_1x_2 = -(a+2)$, получим $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{(a+2)^2 + 2(a+2)}{(a+2)^2} = 2$, откуда $a = -\frac{6}{7}$. Найдем

дискриминант $D = (a + 2)^2 + 16(a + 2) = (a + 2)(a + 18)$, при $a = -\frac{6}{7}$ он положителен, при $a = -2$ корни равны нулю.

Ответ: $a = -\frac{6}{7}$.

Пример 20. («Шаг в будущее», 2017, 9 класс)

При каких a неравенство $x^2 + |x + a| < 2$ имеет хотя бы одно положительное решение?

Решение. На плоскости xOa изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + |x + a| < 2$.

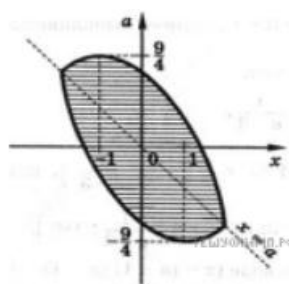


Рисунок 14 – Иллюстрация к решению неравенства

При $x + a \geq 0$ неравенство имеет вид $a < 2 - x - x^2$; при $x + a < 0$ вид $a > x^2 - x - 2$. В заштрихованной области точки с положительной абсциссой существуют при $a \in \left[-\frac{9}{4}; 2\right)$.

Ответ: $a \in \left[-\frac{9}{4}; 2\right)$.

Пример 21. («Физтех», 2019, 9 класс)

При каких значениях параметра a среди решений неравенства

$(x + 2)\sqrt{ax + x - x^2 - a} \geq 0$ найдутся два решения, разность между которыми равна 4?

Решение. Выражение под корнем раскладывается как $(x - 1)(a - x)$. Значит корни находятся между 1 и a , поэтому если их разность 4, то либо $a \geq 5$, либо $a \leq -3$.

Если $a \geq 5$, то корни $x = 1$ и $x = 5$ нам подходят, так как корень будет определен и будет неотрицательным и $x + 2$ будет положительным.

Если $a \leq -3$, то корни будут лежать в отрезке $[a, 1]$. Так как один из корней будет меньше другого на 4, то меньший корень будет не больше -3 .

Значит, если мы его подставим, то $x + 2 < 0$ и $\sqrt{ax + x - x^2 - a} \geq 0$. Единственный случай, когда их произведение будет ≥ 0 , если $\sqrt{ax + x - x^2 - a} = 0$. Отсюда меньший корень равен a . Тогда больший корень равен $a + 4$ и $(a + 6)\sqrt{-4(a + 3)} \geq 0$. Отсюда либо $a = -3$, либо $a < -3$ и $a \geq -6$.

Ответ: $a \in [-6; -3] \cup [5; +\infty)$.

Пример 22. («Шаг в будущее», 2019, 9 класс) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 6x + 7, \\ y = |x - a| - 2 \end{cases}$ имеет четыре различных решения.

Решение. Приравняем соответствующие выражения относительно одной и той же переменной y :

$$x^2 + 6x + 7 = |x - a| - 2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = |x - a| \Leftrightarrow (x + 3)^2 = |x - a|$$

То есть наша система имеет вид: $\begin{cases} y = (x + 3)^2, \\ y = |x - a|. \end{cases}$

Рассмотрим случаи раскрытия модуля:

$$1) \begin{cases} x \geq a, \\ x^2 + 6x + 9 = x - a. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < a, \\ x^2 + 6x + 9 = -x + a. \end{cases}$$

В рамках первой системы проанализируем уравнение и определим его дискриминант.

$$x^2 + 6x + 9 = x - a$$

$$x^2 + 5x + 9 + a = 0$$

$$D = 25 - 4(9 + a) = -11 - 4a \geq 0 \Rightarrow -11 - 4a \geq 0 \Rightarrow a \leq -2,75$$

При $a = -2,75$ прямая $y = x + 2,75$ является касательной к параболе, поэтому это значение нам не подходит, так как количество корней будет равно 3, то есть $a < -2,75$. Также при $a = -3$ количество корней будет равно 3. Значит, при $-3 < a < -2,75$ будет 4 решения. Покажем это на рисунке.

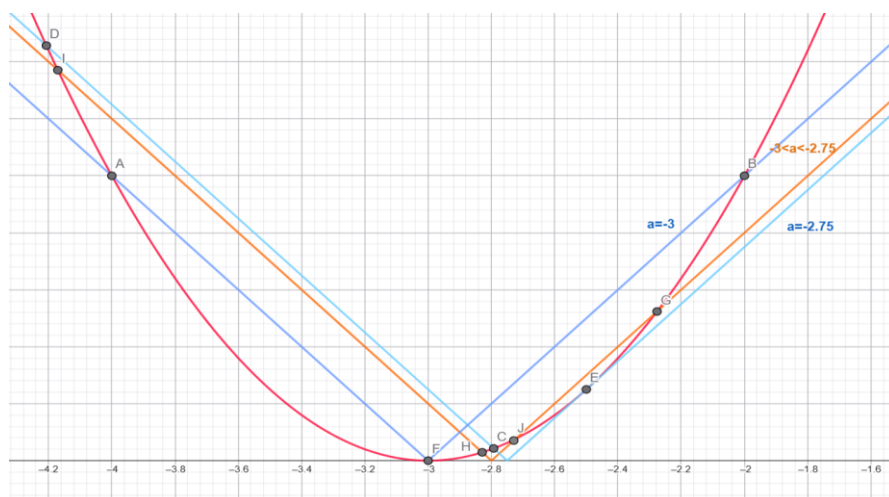


Рисунок 15 – Графическая иллюстрация к решению системы уравнений

По аналогии рассмотрим систему 2):

$$\begin{cases} x < a, \\ x^2 + 6x + 9 = -x + a. \end{cases}$$

$$x^2 + 6x + 9 = -x + a$$

$$x^2 + 7x + 9 - a = 0$$

$$D = 49 - 4(9 - a) = 13 + 4a \geq 0 \Rightarrow a \geq -3,25$$

Значение $a = -3,25$ не подходит, так как прямая касается параболы и получается 3 корня (как и при $a = -3$). Таким образом, 4 решения существует только при $-3,25 < a < -3$. График это наглядно демонстрирует.

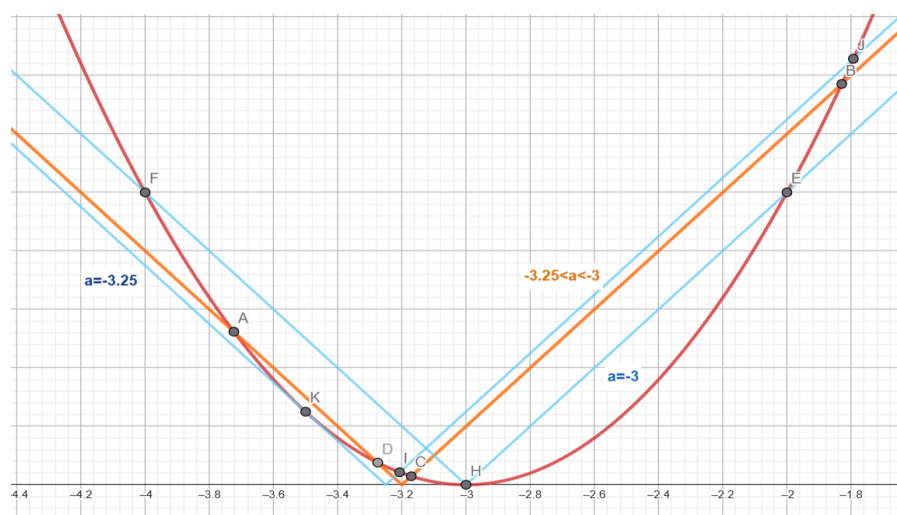


Рисунок 16 – Графическая иллюстрация к решению системы уравнений

Объединяя полученные решения, получаем, что при $a \in (-3,25; -3) \cup (-3; -2,75)$, исходная система имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in (-3,25; -3) \cup (-3; -2,75)$.

ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ»

2.1 Место и роль элективных курсов в системе школьного обучения

В основной школе элективные курсы играют ключевую роль: они поддерживают интерес к знаниям и помогает подростку сделать первые выбор будущего направления. Это переходный этап между целостным восприятием мира в начальной школе и углубленным изучением предметов в старших классах. Курсы помогают подростку лучше понять себя, попробовать разные направления и сделать первый шаг к профессиональному направлению.

Потребность в таких курсах продиктована самой логикой взросления. Обычная школьная программа часто обходит стороной сложные или прикладные темы, что ограничивает возможности учеников для углубленного изучения интересующих их областей. Кроме того, в 5 – 7 классах элективы могут выполнять пропедевтическую функцию, готовя учеников к восприятию новых предметов (например, физики или химии), которые появятся позже.

Элективные курсы одновременно решают несколько задач: углубляют профильные и базовые знания, осваивают смежные дисциплины, формируют практические навыки и проводят профориентацию, помогая ученику осознать свой жизненный путь, удовлетворить познавательный интерес и получить результаты, необходимые для трудоустройства.

Понимание места и роли элективных курсов в основной школе невозможно без учета ориентации на возраст учеников и задач предпрофильной подготовки. В связи с этим структура учебного плана приобретает следующий вид:

Таблица 8 – Структура учебного плана.

Тип предмета /курса	Обязательность	Цель
Базовые образовательные предметы	Обязательные для всех.	Обеспечить фундаментальную подготовку по всем основным дисциплинам, заложив основу общего образования и широкого кругозора.

Продолжение Таблицы 8

Элективные курсы (в 5 – 7 классах)	Могут быть как обязательными по выбору или рекомендательным и.	Развить познавательный интерес, дать первичное знакомство с различными областями знаний, поддержать мотивацию к учебе.
Элективные курсы (в 8 – 9 классах)	Обязательные для посещения в рамках предпрофильной подготовки.	Выполнить роль профильных проб, помочь ученикам сделать осознанный выбор будущего профиля в старшей школе.
Факультативы	Необязательные, по желанию.	Удовлетворить познавательные интересы или устранить проблемы в знаниях вне обязательной программы.

Из таблицы видно, что курсы – система профессиональных проб, реализуемых за счет школьного компонента и ресурсов школы. Ученик 8 – 9 классов сам делает выбор, прислушиваясь к личным интересам и сомнениям.

Важно обратить внимание на различие между «элективными курсами» и «факультативами». Факультатив не входит в обязательную программу и посещается по желанию, оставаясь делом сугубо добровольным. Элективный курс, напротив, является обязательным для посещения, при этом ученик имеет право добровольно выбрать его тематику из предложенного школой списка, выстраивая свою образовательную траекторию.

Роль элективных курсов в основной школе меняется по мере взросления учеников. В 5 – 7 классах курсы становятся разжигателями любопытства: они выводят ребенка за рамки стандарта, готовя к новым сложным дисциплинам и тренируя навыки проектной работы. К 8 – 9 классу фокус сменяется на инструмент самоопределения, что помогает сориентироваться в мире профессий, примерить на себя углубленное изучение предметов и увидеть воплощение знаний в реальных продуктах. Поэтому на протяжении всей основной школы элективные курсы выполняют одну миссию: превращают учебу в пространство для поиска себя и подготовки к первому взрослому выбору.

В зависимости от целей и задач элективные курсы могут быть разделены на несколько типов:

- Исследовательские курсы, которые включают практические и лабораторные работы с элементами исследования.
- Организация обобщающего повторения – курсы, обобщающие и систематизирующие полученные в рамках основных предметов знания.
- Ориентирующие и тематические курсы, направленные на знакомство с конкретной темой, помогающие в выборе профессии и подготавливающие к профессиональной деятельности.

А. Г. Каспаржак разделяет программы элективов на три категории по основной задаче:

1. Предметные курсы: направлены на углубление и расширение знаний по конкретному предметам, среди которых есть курсы повышенного уровня, узкоспециализированные курсы по отдельным разделам программы, прикладные курсы, показывающие, как теория работает на практике, и исторические, посвящённые истории науки и открытий.

2. Межпредметные курсы: их цель – интеграция знаний из разных областей, помогая школьникам развивать системное мышление.

3. Надпредметные курсы, ориентированные на профориентацию и знакомящие с различными видами профессиональной деятельности и требованиями к этим профессиям.

Элективные курсы в школьном образовании являются важным инструментом для обеспечения индивидуализации учебного процесса. Они помогают ученикам развивать навыки полезные не только в учебе, но и в будущей профессиональной жизни. Благодаря разнообразию курсов школьники могут углубить знания по интересующим их предметам, а также получить полезный опыт, способствующий их успешной карьере.

2.2 Тематическое планирование элективного курса

1. Пояснительная записка

Элективный курс по математике «Уравнение и неравенства с параметрами» для учащихся 8 – 9 классов представляет собой форму углубленного изучения раздела алгебры, традиционно вызывающего повышенную сложность в освоении. Курс направлен на расширение теоретических знаний школьников, формирование устойчивых навыков решения задач с параметрами, а также на развитие аналитического мышления как ключевой компетенции, необходимой для дальнейшего изучения математических дисциплин.

Уравнения и неравенства с параметрами занимают ключевое место в системе алгебраического образования, поскольку их решение предполагает от учащихся способность классифицировать условия, использовать разнообразные методы анализа и синтеза, а также строить логически обоснованные рассуждения. Освоение данного курса способствует развитию гибкости мышления и служит основой для изучения функционального и математического анализа.

Цель элективного курса – рассмотреть основные методы решения уравнений и неравенств с параметром, систематизировать знания о параметрических задачах, развить навыки решения задач повышенной сложности и углубить математические знания учеников.

В рамках курса решаются следующие задачи:

- углубить знаний о методах решения уравнений и неравенств с параметрами;
- развить навыки самостоятельной работы, аналитического мышления и логической аргументации;
- сформировать способности применять полученные знания в практических и экзаменационных ситуациях;

- развить коммуникативные и общеучебные навыки;
- подготовить учащихся к участию в олимпиадах по математике и углубленному изучению математических дисциплин.

Актуальность разработки и реализации данного элективного курса обусловлена недостаточным объемом учебного времени, отводимого на изучение уравнений и неравенств с параметрами в рамках базовой образовательной программы. Освоение методов работы с параметрами способствует формированию математической грамотности, развитию абстрактного мышления и успешному решению задач повышенного уровня сложности, в том числе олимпиадных и экзаменационных.

2. Место элективного курса в учебном плане.

Данный элективный курс ориентирован на учащихся 8 – 9 классов основной школы. Программой предусмотрены еженедельные занятия; общая продолжительность курса составляет 22 часа.

3. Тематическое планирование.

В рабочей программе элективного курса «Уравнения и неравенства с параметром» тематическое планирование представлено в форме таблице 9.

Таблица 9 – Учебно-тематический плана.

№	Тема раздела	Количество часов
1.	Введение в уравнения и неравенства с параметром. Основные понятия и виды.	2
2.	Основные методы решения уравнений и неравенств с параметрами.	14
3.	Задачи с параметром в заданиях ОГЭ.	2
4.	Олимпиадные задачи, содержащие уравнения и неравенства с параметрами.	4
Итого:		22

4. Содержание программы.

Тема 1. Введение в уравнения и неравенства с параметром. Основные понятия и виды. (2 часов)

Раздел посвящен введению в тему уравнений и неравенств с параметрами. В нем раскрываются следующие вопросы:

- определение параметра в уравнениях и неравенствах и его роль;
- виды уравнений и неравенств с параметрами: линейные, квадратичные, рациональные и модульные;

Основная цель – формирование у учащихся базовый понятийный аппарат и ознакомление с типами параметрических задач и их значениями в математике.

Тема 2. Основные методы решения уравнений и неравенств с параметрами (15 час)

В рамках данной темы рассматриваются следующие методы решения уравнений и неравенств с параметрами:

- аналитический метод;
- аналитико-графический метод.
- метод интервалов как частный случай аналитического метода;
- метод условного раскрытия модуля как частный случай аналитического метода.

Основная цель – развитие навыков применения различных методов решения уравнений и неравенств с параметрами, освоение алгоритмов решения задач, а также научить эффективно выбирать методы для решения различных типов задач.

Тема 3. Задачи с параметром в заданиях ОГЭ (2 часа)

Содержание данного раздела составляют уравнения с параметром, представленные в контрольно-измерительных материалах основного государственного экзамена (ОГЭ). В его рамках изучаются следующие вопросы:

- разбор типичных примеров заданий ОГЭ, содержащих уравнения с параметром;
- особенности решения таких задач в условиях ограниченного времени экзамена;
- стратегии решения задач на экзамене, включая упрощение уравнений и анализ возможных решений;

Основная цель – подготовка к выполнению заданий с параметром на ОГЭ и развитие навыков быстрого и точного решения таких задач.

Тема 4. Олимпиадные задачи, содержащие уравнения и неравенства с параметрами (3 часа)

Данный раздел посвящен решению олимпиадных задач, содержащих параметры. Рассматриваются нестандартные задачи, требующие творческих методов и нешаблонного подхода, а также формирование умения самостоятельно находить решения в сложных ситуациях.

Основная цель – развитие у учащихся творческого математического мышления, подготовка к участию в олимпиадах, углубление предметных знаний и освоение методов решения исследовательских задач с параметрами.

5. Формы организации учебных занятий.

Реализация темы «Уравнения и неравенства с параметрами» строится на сочетании лекции, практикумов, консультаций и групповых обсуждений. В основе обучения лежит исследовательский подход, нацеленный на развитие критического мышления и самостоятельности в поиске решений.

В работе учитывается индивидуальный темп усвоения и особенности восприятия материала. Регулярная проверка знаний и обратная связь позволяют корректировать ход занятий. Системное повторение и обращение к ранее изученным темам обеспечивают не просто запоминание, а осмысленное встраивание нового содержания в целостную систему знаний учащихся.

6. Формы контроля

Оценка достижений учащихся основывается на следующих факторах:

- наблюдение за активностью на практических занятиях;
- беседы с учениками;
- проверка домашнего задания;
- выполнение тестовых и контрольных работ.

7. Календарно-тематическое планирование курса

В рамках рабочей программы элективного курса «Уравнения и неравенства с параметрами» составлено тематическое планирование, которое представлено в таблицы 10.

Таблица 10 – Календарно-тематическое планирование.

№ урока	Тема	Часы	Форма занятий
1	Введение в уравнения и неравенства с параметром. Основные понятия.	1	Лекция с элементами практики
2	Виды параметрических уравнений и неравенств.	1	Лекция с элементами практики
3 - 6	Аналитический метод.	4	Лекция с элементами практики
7 - 10	Аналитико-графический метод решения уравнений с параметром.	4	Лекция с элементами практики
11 - 13	Метод интервалов в решении уравнений и неравенств с параметром.	2	Лекция с элементами практики
14 - 15	Метод условного раскрытия модуля в решении уравнений с параметром.	2	Лекция с элементами практики

Продолжение Таблицы 10

16	Контрольная работа	1	Самостоятельная работа
17 - 18	Задачи с параметром в заданиях ОГЭ.	2	Практикум
19	Контрольная работа	1	Самостоятельная работа
20-22	Олимпиадные задачи, содержащие уравнения и неравенства с параметрами.	4	Практикум
Итого:		22	

8. Планируемые результаты

В результате освоения курса учащиеся должны овладеть следующими умениями:

- грамотно излагать теоретический материал и обосновывать собственные рассуждения при работе с параметрическими уравнениями и неравенствами;
- свободно ориентироваться в различных методах и алгоритмах решения параметрических задач и применять их на практике;
- решать задачи с параметрами разного типа и уровня сложности, сочетая стандартные и нестандартные подходы.

5. Материально-техническое обеспечение элективного курса.

Современное техническое оснащение аудиторий, включая ноутбуки, мультимедийные проекторы и интерактивные доски, являются важным для успешного обучения. Неотъемлемую часть технической базы составляет программное обеспечение (операционная система, файловый менеджер, антивирус, браузер), которое обеспечивает комфортную работу с оборудованием и обмен информацией. Такое оснащение повышает

продуктивность занятий и позволяет учащимся не только работать с материалом, но и развивать навыки использования компьютерных технологий.

Следовательно, современное техническое оснащение выступает фактором повышения качества образования, делая обучение более динамичным и формируя у учащихся необходимые компетенции для успешного продолжения учебы и будущей профессиональной деятельности.

2.3 Разработка конспектов занятий в рамках элективного курса

Конспект занятия по теме: «*Параметр. Количество корней.*»

Класс: 8 – 9

Тема: «Параметр. Количество корней.».

Тип: урок ознакомления с новым материалом.

Форма работы: фронтальная, индивидуальная.

Цели: формирование знаний о параметре и его роли в уравнениях и неравенствах; развитие умений анализировать влияние параметра на графики и решения уравнений; обучения исследованию графиков с использованием программы GeoGebra; развитие способности самостоятельно исследовать влияние параметра на количество корней и их расположение; воспитание внимательности и ответственности при работе с задачами и формирование самостоятельности в поиске решений.

Оборудование: опорный конспект по теме: «Параметр», компьютер с установленной программой GeoGebra, проектор, раздаточный материал, мел, доска, печатный материал для домашнего задания.

Структура занятия:

1. Организационный момент.
2. Актуализация опорных знаний.
3. Формулирование темы и целей урока.
4. Введение нового материала.
5. Первичное осмысление и применение изученного материала.

6. Подведение итогов урока.

7. Постановка домашнего задания.

Ход занятия

1. Организационный момент.

Учитель: Добрый день, дорогие ребята! Рада приветствовать вас на элективном курсе, который посвящён уравнениям и неравенствам с параметрами. Мы узнаем их методы решения и научимся решать задачи разного уровня сложности. Но как вы думаете, почему важно изучать эту тему?

Дети: Это поможет на ОГЭ и ЕГЭ, для олимпиад, для поступления в ВУЗы и т.д.

Учитель: Совершенно верно! Уравнения и неравенства с параметрами широко применяются в математике, физике, экономике, инженерии, а также в программировании.

Однако прежде, чем углубиться в решение таких уравнений и неравенств, важно понять, что такое параметр и как его изменение влияет на решение. Давайте начнем с основ и постепенно разберемся, как работать с такими задачами.

2. Актуализация опорных знаний.

Учитель: Как вы понимаете, что такое параметр? Приведите примеры из жизни, где вы сталкивались с ним.

Ученики: Параметр – это изменяемая величина. Например, характеристики персонажа в компьютерной игре, температура воды, количество топлива в баке и так далее.

Учитель: Правильно! Параметр – это величина, влияющая на результат. В математике параметр часто используется для изменения формы графика. Какие виды уравнений и неравенств вы знаете? Какие виды решений могут быть у уравнений?

Ученики: Линейные, квадратичные, рациональные, модульные. Они могут иметь одно решение, несколько решений или вовсе не иметь решений.

Учитель: Верно! Как вы думаете, влияет ли параметр на количество корней у уравнения? Или он не изменяет его?

(Ученики обсуждают и приходят к выводу, что параметр влияет уравнение и количество корней)

Давайте проверим нашу гипотезу на конкретном примере. В программе GeoGebra я создала несколько графиков, которые зависят от некоторого параметра a .

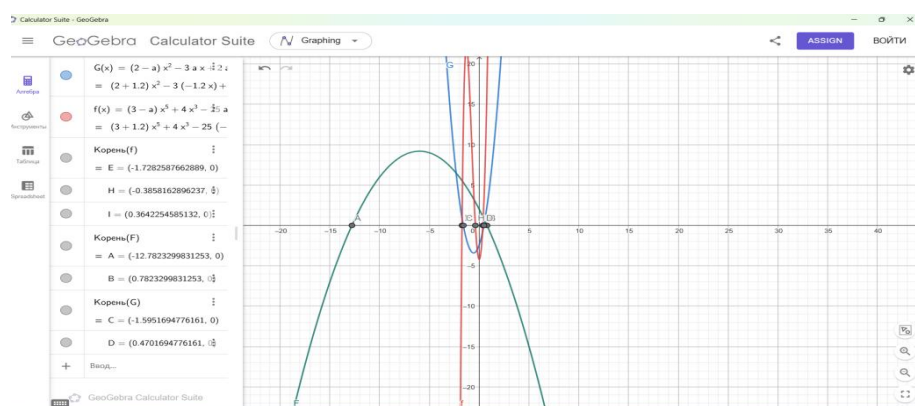


Рисунок 17 – Использование GeoGebra для анализа числа решений уравнений с параметром a

Что вы можете заметить, ребята?

Ученики: Когда изменяется параметр, график меняется, и количество корней также изменяется. Иногда их один, два или три, а иногда вовсе нет.

3. Формулирование темы и целей урока

Учитель: Теперь, когда мы немного разобрались, как параметр влияет на уравнение, давайте подумаем, о чем мы будем сегодня говорить?

(Ученики предлагают: Параметр. Количество корней)

Учитель: Правильно! Запишем тему урока: Параметр. Количество корней. Какие задачи мы перед собой поставим?

Ученики: Мы будем изучать, как параметр влияет на количество корней, как он изменяет график, а также научимся решать уравнения и неравенства с параметром.

3. Введение нового материала.

Учитель: Молодцы! А теперь давайте запишем определение.

Определение: Параметр – это величина, значение которой в рамках задачи принимается как заданное, фиксированное или произвольное число, либо элемент заранее оговорённого множества.

Обозначение: $a, b, c \dots$

Теперь, что такое уравнение и неравенство с параметрами?

Ученики: Параметрические уравнения или неравенства – это выражение, которое содержит не только переменную x , но и некоторый параметр.

Учитель: Правильно! А что значит решить такие уравнение и неравенства?

Ученики: Нужно определить все значения параметра, при котором уравнение и неравенство имеет решение, и для этих значений найти соответствующие решения основной переменной.

Учитель: Верно. Мы уже с вами говорили о видах уравнений и неравенств, давайте запишем их через параметры.

Виды уравнений и неравенств:

1. Линейные ($ax = b$, $ax < b$, $ax > b$, где a и b – параметры, а x – переменная);

2. Квадратные ($ax^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c могут быть параметрами);

3. Рациональные ($\frac{p(x)}{q(x)} = 0$, $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$, $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$ где числитель и знаменатель содержат параметры);

4. Модульные ($|x - a| = b$, $|x - a| > b$, $|x - a| < b$, где a и b являются параметрами).

Учитель: Хорошо, мы разобрались с определением и видами уравнений и неравенств с параметрами. Теперь давайте исследуем, как параметры влияют на количество и расположение корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c могут быть параметрами. Для этого используем программу GeoGebra,

чтобы наглядно увидеть эти изменения. Я построю график и постепенно начну изменять параметры, сначала один, а затем другой. Что вы можете заметить?

Ученики: Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то вниз. Изменение параметра b сдвигает график вдоль оси x , а параметр c сдвигает его вдоль оси y .

Учитель: Вы молодцы! А что происходит с корнями при изменении параметров?

Ученики: Количество корней изменяется. Количество пересечений с осью x меняется: то в двух точках, то в одной, а может и не пересекать.

Учитель: Верно. Давайте подумаем, что, если корни уравнения должны удовлетворять каким-то дополнительным условиям, например, быть положительными или отрицательными? В таком случае, мы можем исследовать, как параметры влияют на выполнение этих условий. Сегодня мы будем исследовать расположение корней в зависимости от параметров A и B , то есть каких-то чисел, при которых корни уравнения должны удовлетворять заданным условиям, например, быть больше A или находится в промежутке от A до B . Вместе с вами, с помощью программы, мы составим таблицу, в которой будет показано расположение корней при различных значениях параметров, а также какие условия выполняются в каждом случае.

Начнем наше исследование с одного параметра A и при $a > 0$, а затем перейдем и ко 2 параметру.

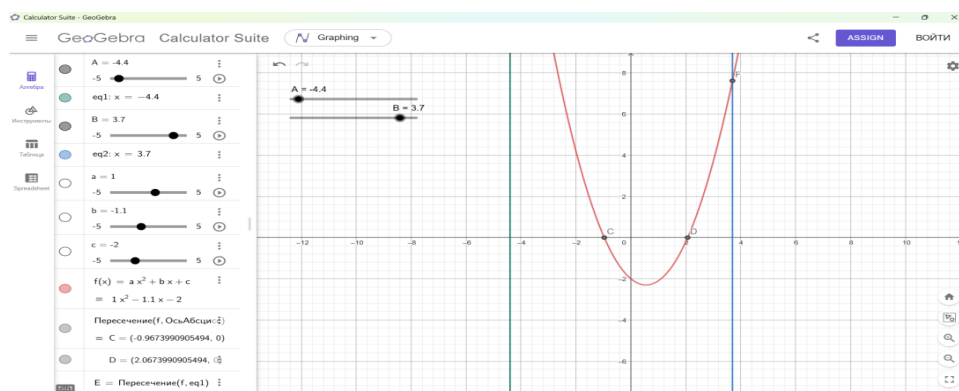
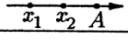
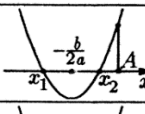
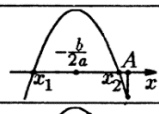
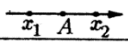
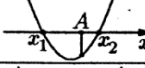
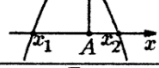
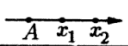
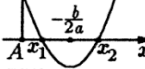
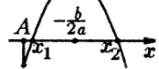
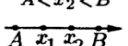
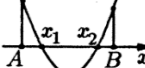
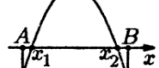
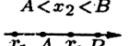
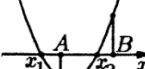
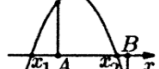
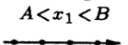
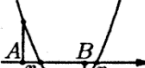
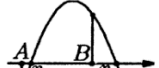
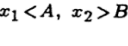
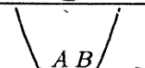
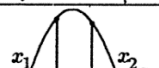


Рисунок 18 - Использование GeoGebra для исследования влияния параметров на расположение корней квадратного трёхчлена

Таблица 11 – Расположение корней квадратного трехчлена

Т а б л и ц а

x_1 и x_2 – корни многочлена $f(x)=ax^2+bx+c$, $D=b^2-4ac>0$, $a\neq 0$

Условия на корни	$a>0$	$a<0$
$x_1 < A, x_2 < A$ 	$-\frac{b}{2a} < A$, $f(A) > 0$ 	$-\frac{b}{2a} < A$, $f(A) < 0$ 
$x_1 < A < x_2$ 	$f(A) < 0$ 	$f(A) > 0$ 
$x_1 > A, x_2 > A$ 	$-\frac{b}{2a} > A$, $f(A) > 0$ 	$-\frac{b}{2a} > A$, $f(A) < 0$ 
$A < x_1 < B$ $A < x_2 < B$ 	$A < -\frac{b}{2a} < B$, $f(A) > 0$, $f(B) > 0$ 	$A < -\frac{b}{2a} < B$, $f(A) < 0$, $f(B) < 0$ 
$x_1 < A$ $A < x_2 < B$ 	$f(A) < 0$, $f(B) > 0$ 	$f(A) > 0$, $f(B) < 0$ 
$B < x_2$ $A < x_1 < B$ 	$f(A) > 0$, $f(B) < 0$ 	$f(A) < 0$, $f(B) > 0$ 
$x_1 < A, x_2 > B$ 	$f(A) < 0$, $f(B) < 0$ 	$f(A) > 0$, $f(B) > 0$ 

(Ученики: Записывают в тетради то, что учитель пишет на доске и составляют таблицу вместе с учителем)

4. Первичное осмысление и применение изученного материала

Учитель: Вы большие молодцы, а теперь давайте решим следующие задачи.

Задача 1. При каких значениях параметра a один корень уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$ меньше 2, а другой больше 2?

Задача 2. При каких a корни уравнения $x^2 + 2(a - 2)x - 4a + 5 = 0$ различны и оба больше -1?

Задача 3. Найти все значения a , при которых все корни уравнения $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше 0,5?

Задача 4. При каких a существует единственный корень уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$, удовлетворяющих условию $x \in (1; 3)$?

Учитель управляет работой обучающихся, просит не торопиться и быть внимательными, следит за дисциплиной в классе. Отмечает, какие ошибки

были сделаны и почему. Анализирует, еще раз обращает внимание на ключевые моменты.

Ученики выполняют задания на местах, сверяют ответы, с доской, дают устные пояснения, почему был выбран тот или иной вариант.

5. Подведение итогов урока.

Учитель: Подведем итоги сегодняшнего занятия. Что нового вы узнали?

Ученики: Мы изучили уравнения и неравенства с параметром, исследовали как параметр влияет на количество и расположение корней уравнения. Мы рассмотрели, как параметр изменяет график функции.

Учитель: Теперь, после того как мы обсудили основные моменты урока, расскажите, с какими трудностями вы столкнулись, и что было полезным для вас в ходе выполнения заданий?

(Ученики делятся своими впечатлениями.)

6. Постановка домашнего задания

Учитель: Спасибо за ваши ответы и продуктивную работу. Прошу вас записать домашнее задание у себя в тетрадях.

Задача 1: При каких значениях a один корень уравнения $ax^2 + 2x + 2a + 1 = 0$ меньше 1, а другой больше 1?

Задача 2: При каких a корни уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$ принадлежат интервалу $(1; 3)$?

А теперь я разделю вас на несколько групп, и каждая группа будет исследовать один из видов уравнения или неравенства с параметром. Я дам вам листок, на котором будет указано уравнение или неравенство, а также небольшой план исследования. В вашей задаче будет не только исследование, но и построение графика в программе GeoGebra, чтобы наглядно показать, как изменяется график и количество корней. На следующем занятии каждая группа представит свои результаты.

Листы с домашним заданием находятся в приложении 2.

Конспект занятия по теме: «Виды параметрических уравнений и неравенств.»

Класс: 8 – 9

Тема: «Виды параметрических уравнений и неравенств».

Тип: урок ознакомления с новым материалом.

Форма работы: фронтальная, групповая, индивидуальная.

Цели: формирование знаний о видах уравнений и неравенств, развитие умений анализировать влияние параметра на графики и решения уравнений и развитие самостоятельности и ответственности при исследовании параметра.

Оборудование: опорный конспект по теме: «Виды параметрических уравнений и неравенств», компьютер с установленной программой GeoGebra, проектор, мел, доска.

Структура занятия:

1. Организационный момент.
2. Актуализация опорных знаний.
3. Формулирование темы и целей урока.
4. Введение нового материала.
5. Первичное осмысление и применение изученного материала.
6. Подведение итогов урока.
7. Постановка домашнего задания.

Ход занятия

1. Организационный момент.

Учитель: Здравствуйте, ребята! Рада приветствовать вас на уроке, на котором мы будем рассматривать виды уравнений и неравенств с параметрами. Тема нашего занятия – «Виды параметрических уравнений и неравенств».

На предыдущем занятии вы получили домашнее задание, в котором по группа исследовали один из видов уравнений и неравенств. Каждая группа будет выступать по очереди и представлять о своё исследование. Остальные в это время будут записывать. К концу выступлений у каждого из вас должны

быть записаны все виды уравнений и неравенств. Также я задавала вам несколько примеров для самостоятельного решения. У всех получилось их решить? Или у кого-то возникли вопросы?

(Если есть вопросы учитель отвечает на них и разбирает примеры)

2. Актуализация опорных знаний.

Прежде чем мы перейдем к вашим выступлениям, давайте вспомним, о чем мы говорили на прошлом уроке. Проведем игру «Верю – не верю», в которой я буду говорить утверждения, а ваша задача решить, верно это или нет. Если утверждение верное, говорите «верю», если нет – «не верю».

Учитель: Параметр – это переменная, которая не изменяется и влияет на решение.

Ученики: Не верю.

Учитель: Правильно! Параметр – это величина, которая изменяется, и изменение её значения влияет на решение уравнения.

Параметрические уравнения всегда имеют единственное решение.

Ученики: Не верю, так как количество решений может изменяться.

Учитель: Молодцы! Следующее утверждение – неравенства с параметром всегда имеют одно решение.

Ученики: Не верю!

Учитель: Правильно, потому что количество корней может изменяться в зависимости от значения параметра. И последнее – параметры влияют только на количество корней и расположение графика.

Ученики: Верю.

Учитель: Молодцы, а теперь приступим к вашим исследованиям и начнем с линейных уравнений.

3. Введение нового материала.

Группа 1: Для уравнения $ax = b$ (где a, b – параметры) проанализируйте, как количество и вид решений зависят от параметров.

1. Если $a \neq 0$, то существует единственное решение $x = \frac{b}{a}$. При $a = 0$ и $b \neq 0$ решений нет, так как возникает противоречие. Если $a = 0$ и $b = 0$, решений бесконечно много.

2. Параметр b отвечает за вертикальный сдвиг прямой, но не влияет на количество корней, при постоянном a . Параметр a отвечает за наклон графика относительно оси x , при $a > 0$ функция возрастает, при $a < 0$ – убывает.

3. Нулевое значение a приводит либо к отсутствию решений, либо к бесконечному числу решений.

Можем заметить это графически.

Группа 2: Для неравенства $ax < b$ (где a, b – параметры) опишите, как меняется множество решений.

1. При $a > 0$ решения лежат слева: $x < \frac{b}{a}$. При $a < 0$ – справа: $x > \frac{b}{a}$.

2. Параметр b сдвигает граничную точку $\frac{b}{a}$ вдоль оси x .

3. Если $a = 0$ и $b > 0$, то решением является любое действительное число. Если $a = 0$ и $b \leq 0$, решений нет, так как $0x < 0$ невыполнимо при любом значении x .

4. Покажем это графически в программе GeoGebra.

Группа 3: Для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (где a, b, c – параметры) объясните, как параметры влияют на наличие и количество корней.

1. Знак a определяет направление ветвей параболы: вверх ($a > 0$) или вниз ($a < 0$). Это влияет на то, где возможны пересечения с осью x .

2. Параметр b сдвигает вершину параболы по горизонтали, параметр c – по вертикали.

3. Дискриминант $D = b^2 - 4ac$ задает число корней: $D > 0$ – два различных корня, $D = 0$ – один корень (кратный), $D < 0$ – нет корней.

В GeoGebra видно, как изменение параметров перемещает параболу и меняет количество пересечений с осью Ox .

Группа 4: Для неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ (где a, b, c – параметры) опишите, как форма и положение параболы определяют множество решений.

1. Если $D > 0$, то при $a > 0$ множество решений – промежуток между корнями (парабола ниже оси), а при $a < 0$ – объединение промежутков вне корней.

2. Изменение b и c сдвигает параболу, меняя расположение корней, а значит, и интервалы решений.

3. Если $D < 0$, то при $a > 0$ решений нет (вся парабола выше оси), а при $a < 0$ – любое действительное число является решением (вся парабола ниже оси). При $D = 0$ решений нет.

График в GeoGebra наглядно демонстрирует, как меняется область, где парабола лежит ниже оси x .

Группа 5: Для уравнения $|x - a| = b$ (где a, b – параметры) опишите зависимость решений от параметра.

1. Параметр a задает центр симметрии (точку, от которой отсчитывается расстояние), параметр b – само расстояние.

2. При $b > 0$ уравнение имеет два решения: $x = a \pm b$. При $b = 0$ – одно решение $x = a$. При $b < 0$ решений нет.

3. Чем больше b , тем дальше корни от точки a .

Посмотрим в программе GeoGebra на изменение графика.

Группа 6: Для неравенства $|x - a| < b$ (где a, b – параметры) проанализируйте, как параметры влияют на множество решений.

1. Если $b > 0$, то решением неравенства открытый интервал с центром в точке a : $a - b < x < a + b$.

2. При $b = 0$, решений также нет, потому что модуль неотрицателен.

3. При изменении b интервала решения меняется: чем больше b , тем интервал решений шире. Изменение a сдвигает интервал решений вдоль оси Ox без изменения его длины.

График в GeoGebra наглядно показывает, как изменение a и b сдвигает и расширяет/сужает интервал решений на числовой оси.

Группа 7: Для неравенства $|x - a| > b$ (где a, b – параметры) проанализируйте, как параметры влияют на множество решений.

1. При $b = 0$ решением неравенства $|x - a| > b$ является любое действительное число, кроме $x = a$.

2. При $b < 0$ неравенству удовлетворяет любое действительное число.

3. При $b > 0$ решением неравенства является объединение двух промежутков: $(-\infty, -b + a) \cup (b + a, \infty)$.

(Ученики представляют свои решения домашнего задания. Если кто-то забыл или не смог найти нужную информацию, учитель помогает им и подсказывает, что нужно записать).

4. Первичное осмысление и применение изученного материала

Учитель: Вы прекрасно справились! А теперь – следующее задание. Перед вами представлены несколько уравнений и неравенств с параметрами, вам нужно сопоставить каждое из них с соответствующим видом. Внимательно посмотрите на каждое уравнение и выберите правильный ответ.

Уравнения	Виды уравнений и неравенств
1. $(a + 1)x^2 - 4x + (a - 2) = 0$	A. Линейное уравнение.
2. $\frac{3x+a}{x-b} = c$	B. Квадратичное уравнение.
3. $ x - 3a < 17$	C. Рациональное уравнение.
4. $(a - 1)x + 33 > 0$	D. Модульное уравнение.
5. $a^2 - 4x + (a - 2) = 0$	E. Линейное неравенство.
6. $\frac{x+a}{x-3} > 1$	F. Квадратичное неравенство.
7. $x^2 + (b + 3)x + a > 0$	G. Рациональное неравенство.
8. $ x - 2a = 45$	H. Модульное неравенство.

После самостоятельного размышления ученики приходят к ответам: 1 – В, 2 – С, 3 – Н, 4 – Е, 5 – А, 6 – G, 7 – F, 8 – D.

Учитель: Вы отлично поработали, я вами горжусь! А давайте разберем теперь следующие задания. Первую задачу мы решим вместе, остальные вы выполните самостоятельно у доски.

Задача 1. Решите уравнение $a^2(x - 1) + 6x = (5x - 2)a$.

Решение. В результате преобразований исходное уравнение приводится к виду

$$(a - 2)(a - 3)x = a(a - 2).$$

Для нахождения значения переменной x необходимо разделить выражение $a(a - 2)$ на коэффициент $(a - 2)(a - 3)$. Однако данное деление возможно не при всех значениях параметра, так как деление на нуль недопустимо. Это обстоятельство определяет дальнейший ход решения и требует рассмотрения случаев, при которых коэффициент при x равен нулю, а также случаев, когда он отличен от нуля.

При $a = 2$ уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, следовательно, его решением является любое действительное число.

При $a = 3$ получаем уравнение $0 \cdot x = 3$, которое не имеет решений.

Если $a \neq 2$ и $a \neq 3$, то $x = \frac{a(a-2)}{(a-2)(a-3)} = \frac{a}{a-3}$.

Ответ: при $a = 2$ $x \in \mathbb{R}$; при $a = 3$ решений нет; при $a \neq 2$ и $a \neq 3$ $x = \frac{a}{a-3}$.

Задача 2. Решить уравнение $\frac{x-a}{x(x-1)} = 0$.

Задача 3. Для всех значений параметра k решить неравенство $(k + 4)x \leq 2k - 1$.

Задача 4. Для всех значений параметра a решите неравенство $|x + a| < x$.

Задача 5. Решить уравнение $ax^2 - 2(a - 1)x - 4 = 0$.

Учитель организует работу учеников, просит их не торопиться, быть предельно внимательными и соблюдать дисциплину. Он анализирует ошибки, объясняет их причины и еще раз проговаривает опорные моменты.

Школьники выполняют задания на месте, сверяют полученные ответы с доской.

5. Подведение итогов урока.

Учитель: Давайте подведем итог. Что нового вы сегодня узнали?

Ученики: Мы познакомились с видами параметрических уравнений и неравенств, выяснили, как параметр влияет на количество корней, а также на форму и положение графика функции.

Учитель просит их назвать возникшие трудности и наиболее полезные моменты в работе. Учащиеся высказывают свое мнение.

6. Постановка домашнего задания

Учитель: Спасибо за ваши ответы и продуктивную работу. Прошу вас записать домашнее задание у себя в тетрадях.

Задача 1. Для всех значений параметра a решите уравнение $ax = 5x - 1$.

Задача 2. Решите уравнение с параметром $x^2 - 2x + a = 0$.

Задача 3. Для всех значений параметра a решите неравенство $|x + 1| < a - 3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена тема «Уравнения и неравенства с параметром», которая, несмотря на свою важность в математике, в школьной программе представлена фрагментарно. Целью исследования являлась разработка программы элективного курса по данной теме и разработка конспектов двух уроков этого курса.

В ходе работы были получены следующие результаты:

1. Раскрыта сущность параметрических уравнений и неравенств в рамках курса алгебры основной школы.
2. Изучены основные методы решения: аналитический, графический, интервальный методы и метод условного раскрытия модуля.
3. Проведён анализ учебных материалов, позволяющий выявить недостатки в изучении темы в рамках школьной программы.
4. Оценена роль задач с параметрами в олимпиадах и ОГЭ.
5. Разработана программа элективного курса «Уравнения и неравенства с параметром», включающие примеры конспектов уроков.

Исследование подтвердило, что изучение параметров способствует развитию аналитического мышления школьников и готовит их к решению прикладных задач. Внедрение разработанного элективного курса является актуальным и необходимым шагом для повышения математической грамотности и формирования исследовательских компетенций учащихся.

Таким образом, все поставленные задачи были решены, и цель исследования достигнута. Реализация курса позволит углубить понимание темы и повысить уровень подготовки учащихся в решении задач с параметром.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра. 7 класс : учеб. / А. Г. Мерзляк [и др.] ; под ред. В. Е. Подольского. 7-е изд., стер. М. : Просвещение. 2022. 256 с.
2. Алгебра. 7 класс : базовый уровень : учеб. / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 15-е изд., стер. М. : Просвещение, 2023. 255 с.
3. Алгебра. 7 класс : в 2 частях. Часть 1 : учеб. / А. Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. 19-е изд., стер. М. : Просвещение, 2023. 223 с.
4. Алгебра. 7 класс : в 2 частях. Часть 2 : учеб. / А. Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. 19-е изд., стер. М. : Просвещение, 2023. 191 с.
5. Алгебра. 8 класс. : учеб. / А. Г. Мерзляк [и др.] ; под ред. В. Е. Подольского. 7-е изд., стер. М. : Просвещение. 2022. 256 с.
6. Алгебра. 8 класс : базовый уровень : учеб. / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 17-е изд., стер. М. : Просвещение, 2023. 319 с.
7. Алгебра. 8 класс : в 2 частях. Часть 1 : учеб. / А. Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. 19-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2015. 315 с.
8. Алгебра. 8 класс : в 2 частях. Часть 2 : учеб. / А. Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. 18-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2015. 271 с.
9. Алгебра. 9 класс. : учеб. / А. Г. Мерзляк [и др.] ; под ред. В. Е. Подольского. 7-е изд., стер. М. : Просвещение. 2022. 318 с.
10. Алгебра. 9 класс : базовый уровень : учеб. / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 4-е изд., стер. М. : Просвещение, 2017. 287 с.
11. Алгебра. 9 класс : в 2 частях. Часть 1 : учеб. / А. Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. 12-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2010. 224 с.
12. Алгебра. 9 класс : в 2 частях. Часть 2 : учеб. / А. Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. 12-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2010. 223 с.

13. Элементарная математика. Рациональные уравнения и неравенства / А. В. Фирер [и др.] ; отв. ред. Н. К. Игнатьева. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2019. 146 с.
14. Власова А. А., Барышенский Д. С. Методика обучения решению задач с параметрами в основной школе: учебно-методическое пособие. Краснодар : ГБОУ ИРО Краснодарского края, 2023. 96 с.
15. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике : учеб. пособие для студентов мат. специальностей пед. вузов и ун-тов. М. : Наука, 1986. 370 с.
16. Коннова Е. Г. Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром. Ростов-на-Дону : Легион, 2014. 64 с.
17. Маликова О. Л. Методический анализ содержания темы «Неравенства» в курсе алгебры основной школы // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы : сбор. ст. XIV межд. науч.-практ. конф. «Артемовские чтения» : ПГУ, 2018, №2. С. 183-188.
18. Мельников И. И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства : учебное пособие. М. : Наука, 2017. 73 с.
19. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие для студентов мат. специальностей пед. вузов и ун-тов. М. : Просвещение, 2015. 305 с.
20. Цыпкин А. Г. Справочник по методам решения задач по математике : учебное пособие. М. : Наука, 2019. 116 с.
21. Фалилеева М. В. Методические аспекты обучения решению уравнений и неравенств с параметрами // Фундаментальные исследования : научн. метод. журн. 2013, № 4-5. 125 с.
22. Фалилеева М. В. Первые шаги в решении уравнений и неравенств с параметром: учебное пособие. Казань: Казан. ун-т, 2014. 111 с.
23. Шахмейстер А. Х. Уравнения и неравенства с параметрами. С.- Птб. : Виктория плюс, 2019. 304с.

Памятка «Построение графиков с параметрами в GeoGebra»

1. Откройте программу GeoGebra.
2. Выберите режим «Графический калькулятор» (при необходимости очистите рабочее поле от предыдущих объектов).
3. Ввод функций или неравенств:
 - для уравнений введите $y = f(x)$ (линейная, квадратная, модульная, рациональная);
 - для неравенств используйте инструмент «Неравенство» или «Заштрихованная область»;
 - добавьте ползунки для всех параметров ($a, b, c \dots$), чтобы динамически изменять график.
4. Перемещайте ползунки параметров, чтобы увидеть, как меняются корни уравнения. Отметьте их с помощью команды «Корни уравнения».

Домашнее задание к уроку по теме «Параметр. Количество корней уравнения.»

Группа 1: Уравнение $ax = b$.

1. Какие случаи нужно рассмотреть для анализа решения уравнения в зависимости от параметров a и b ?
2. Как зависит количество решений от значения параметра a ?
3. Как влияет параметр b на решение уравнений?
4. Какие особенности возникают при $a = 0$ и $b \neq 0$ или $b = 0$?
5. Постройте график функции $y = ax - b$ в программе GeoGebra.

Группа 2: Неравенство $ax < b$.

1. Как знак параметра a влияет на множество решений неравенства?
2. Как изменение параметра b отражается на положении графика функции $y = ax - b$?
3. Что является решением неравенства при $a = 0$?
4. Какие особенности решения нужно учитывать при отрицательных и положительных значениях параметров?
5. Постройте график функции $y = ax - b$ в программе GeoGebra.

Группа 3: Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Как параметра a влияет на форму параболы $y = ax^2 + bx + c$ и количество возможных решений?
2. Как b и c сдвигают параболу и её вершину?
3. Как число корней уравнения зависит от дискриминанта уравнения ?
4. Как меняются решения при изменении параметров в уравнении?
5. Постройте график $y = ax^2 + bx + c$ в программе GeoGebra.

Группа 4: Неравенство $ax^2 + bx + c < 0$.

1. Как знак параметра a влияет на множество решений, когда дискриминант D уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ больше нуля.
2. Как изменение параметра b и c сдвигает интервалы решений?
3. Что можно сказать о решении неравенства при $D = 0$ и $D < 0$ для случаев $a < 0$ и $a > 0$?
4. Постройте график функции $y = ax^2 + bx + c$ в GeoGebra.

Группа 5: Уравнение $|x - a| = b$.

1. Как параметра a влияет на расположение решений?
2. Как параметр b влияет на количество решений?
3. Какие случаи нужно рассмотреть для $b = 0$, $b > 0$ и $b < 0$?
4. Как увеличивается расстояние между корнями при увеличении b ?
5. Постройте график функции $y = |x - a| - b$ в программе GeoGebra.

Группа 6: Неравенство $|x - a| < b$.

1. Как параметр a влияет на положение интервала решений?
2. Как параметр b влияет на ширину интервала?
3. Что происходит при $b = 0$?
4. Какие закономерности можно выявить для интервалов с модулем?
5. Постройте график функции $y = |x - a| - b$ в программе GeoGebra.

Группа 7: Неравенство $|x - a| > b$.

1. При каких значениях параметра b решением неравенства является любое действительное число, кроме $x = a$?
2. При каких значениях параметра b решением неравенства является любое действительное число?
3. Что можно сказать о решении неравенства, когда параметр $b > 0$?
4. Постройте график функции $y = |x - a| - b$ в программе GeoGebra.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 12 » 09 20 25 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Максаевой Елизаветы Дмитриевны
(ФИО полностью)

Тема работы Уравнения и неравенства с параметром в курсе алгебры основной школы»

Утверждена приказом по университету от « 25.09 » 20 25 г. № 1103/0

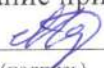
Срок сдачи студентом законченной работы « 16 » 04 20 26 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение и анализ литературы по теме исследования	Ноябрь 2025 г.	Выполнено 
2.	Изучение и систематизация основных методов решения уравнений и неравенств с параметром	Декабрь 2025 г.	Выполнено 
3.	Анализ школьных учебников, заданий ОГЭ и олимпиадных задач с параметром	Январь 2026 г.	Выполнено 
4.	Обоснование роли и цели элективного курса	Февраль 2026 г.	Выполнено 
5.	Разработка тематического планирования	Март 2026 г.	Выполнено 
6.	Разработка двух конспектов урока	Март-апрель 2026 г.	Выполнено 
7.	Оформление библиографического списка	Май 2026 г.	Выполнено 
8.	Оформление работы, подготовка презентации и выступления	Май-июнь 2026 г.	Выполнено 

Дата выдачи задания «11» 29 2025 г.

Руководитель  Никитин Н.Д.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
 Максеева Е.Д.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Максаевой Елизаветы Дмитриевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Максаева Елизавета Дмитриевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Уравнения и неравенства с параметром в курсе алгебры основной школы», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



подпись
15.04.26

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 15.04.26

ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР 

подпись

Никитин Н. Д.

Ф.И.О.

ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему: «Уравнения и неравенства с параметром в курсе алгебры основной школы» студентки 4 курса Максаева Елизаветы Дмитриевны

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

профиля подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Никитин Н. Д.



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://onax.u.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

Автор: Максаева Елизавета Дмитриевна

Название документа: ВКР Максаевой Елизаветы

Проверяющий: Никитин Николай Дмитриевич

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:

33,87%

Цитирование:

0%

Оригинальность:

66,13%

Самоцитирование:

0%

Итого совпадений:

24,1%

«Совпадения», «Цитирование», «Самоцитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 92,65% текста документа, исключено из проверки: 7,35% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография, Приложение, Таблицы

- Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- Самоцитирование** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирование» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- Цитирование** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированию относятся также шаблонные фразы, библиографические фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирование» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 9

Тип документа: Не указано

Дата проверки: 16.04.2026 12:22:51

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 67

Символов в тексте: 95982

Слов в тексте: 13024

Число предложений: 2615

Комментарий: не указано

16.04.26

ДД.ММ.ГГГГ.

Никитин Н.Д.

подпись

Никитин Н.Д.

И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: « Уравнения и неравенства с параметром в курсе алгебры
основной школы»
студентки Максаевой Елизаветы Дмитриевны факультета физико-
математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика», гр. 22ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Максаевой Елизаветы Дмитриевны посвящена вопросам методики обучения школьников решению уравнений и неравенств с параметром в курсе алгебры основной школы. Этим вопросам в школьном курсе алгебры основной школы мало уделяют внимания. Это влияет в первую очередь на успешное участие учащихся 9 класса в олимпиадах различного уровня, так как в заданиях многих олимпиад встречаются задачи по этой теме.

Этот пробел в обучении ученик может ликвидировать, посещая элективный курс «Уравнения и неравенства с параметром».

Актуальность выбранной темы состоит и в том, что для успешного решения параметрических задач необходимо владение такими умениями, как анализ взаимосвязей переменных, рассмотрение множественности возможных сценариев и формулировка строгих выводов. Эта деятельность служит основой для формирования у учащихся независимого аналитического мышления, исследовательских компетенций и математической культуры.

Работа Максаевой Елизаветы Дмитриевны состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений. В первой главе изложены основные методы решения уравнений и неравенств с параметром. В этой же главе проведен подробный сравнительный анализ учебников по алгебре для 7 - 9 классов на наличие уравнений и неравенств с параметром. Приводятся примеры решения таких уравнений и неравенств из олимпиад для школьников.

Во второй главе рассмотрено место и роль элективных курсов в системе школьного обучения. Приведено учебно-тематическое планирование элективного курса «Уравнения и неравенства с параметром». Разработаны конспекты двух занятий по темам элективного курса и два приложения к этим занятиям.

Работа Максаевой Елизаветы Дмитриевны является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Максаевой Елизаветы Дмитриевны заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР Никитин Николай Дмитриевич, доцент кафедры
«Математическое образование», к.ф.-м.н. 