МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Курсовая работа
по дисциплине «Математический анализ»
на тему «Операционное исчисление. Преобразование Лапласа. Решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом»

Направление подготовки – 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки – Математика

Выполнил студент: _____ **Сидорова К. А.**
(подпись, дата) (Ф.И.О.)
Группа: **18ФПМ1**

Руководитель:
д.п.н., профессор каф. МО _____ **Яремко Н. Н.**
(подпись, дата) (Ф.И.О.)

Работа защищена с оценкой _____

Преподаватели _____

_____

Дата защиты _____

Пенза, 2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«_____»_____20___ г.
_____

Задание

По КР студента Сидоровой Ксении Алексеевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Операционное исчисление. Преобразование Лапласа. Решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом»

Распоряжение по кафедре от «_____» 20___ г. № _____

Срок сдачи студентом законченной работы «____»_____20____ г.

Перечень подлежащих разработке вопросов

1. Понятие операционного исчисления, преобразования Лапласа. Примеры. Основные теоремы операционного исчисления.

2. Решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

2.1. Классификация дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Постановка начальной задачи. Примеры.

2.2. Решение дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Метод шагов. Примеры.

2.3. Периодические решения линейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Примеры.

2.4. Приближенный метод разложения неизвестной функции с запаздывающим аргументом по степеням запаздывания. Примеры.

Дата выдачи задания «__» _____20___ г.

Руководитель _____ /_____
(подпись) Ф.И.О.

Задание принял к исполнению_____ /_____
(подпись) Ф.И.О.

Оглавление

Введение……..…...4
Глава 1. Операционное исчисление. Преобразование Лапласа…….……6
1.1 Понятие операционного исчисления, преобразования Лапласа. Примеры……..6
1.2 Основные теоремы операционного исчисления……..9
Глава 2. Решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом……..…..14
2.1 Классификация дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Постановка начальной задачи. Примеры……14
2.2 Решение дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Метод шагов. Примеры…….....……16
2.3 Периодические решения линейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.
Примеры……19
2.4 Приближенный метод разложения неизвестной функции с запаздывающим аргументом по степеням запаздывания. Примеры……..……22
Заключение…….....24
Список литературы……..……25

Введение

Операционное исчисление в настоящее время является одной из важнейших глав практического математического анализа. В физике, механике, электротехнике и в других науках при решении различных задач используются методы операционного исчисления.

Операционный метод непосредственно используется при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, а также их систем.

Основоположниками данного метода считают русских ученых М. Е. Ващенко-Захарченко и А. В. Летникова. Однако обратило на себя внимание оно только после того, как английский инженер-электрик Хевисайд, используя символическое исчисление, получил ряд важных результатов. Недоверие к операционному исчислению сохранялось до тех пор, пока Джорджи, Бромвич, Карсон, А. М. Эфрос, А. И. Лурье, В. А. Диткин и другие не установили связи операционного исчисления с интегральными преобразованиями.

Идея решения дифференциального уравнения операционным методом состоит в том, что от дифференциального уравнения относительно искомой функции-оригинала $f(t)$ переходят к уравнению относительно другой функции $F(p)$, называемой изображением $f(t)$. Полученное уравнение обычно уже алгебраическое, т.е. более простое в сравнении с исходным. Решая его относительно изображения $F(p)$ и переходя затем к соответствующему оригиналу, находят искомое решение данного дифференциального уравнения.

Однако существует множество разнообразных процессов, описанных в современной литературе, которые основаны и на передаче массы, энергии, информации (как пример, наследственной), сопровождающиеся наличием запаздывания. Оно может быть обусловлено самыми различными причинами и явлениями – ограниченностью скорости распространения взаимодействия, "немгновенностью" реакции, наличием инерционности некоторых явлений (например, индуктивности в электрических цепях), ограниченностью скорости протекания технологических процессов и т. д.

В некоторых случаях исключение запаздывания из рассмотрения позволяет адекватно описывать реальные процессы. Но иногда, отбрасывая запаздывание, можно прийти к абсурдным (по крайней мере, не эквивалентным реальности) выводам. Таким образом, некоторые процессы не могут быть адекватно описаны обыкновенными дифференциальными уравнениями. В связи с этим возникает необходимость рассматривать, а также решать уравнения, в которых неизвестная функция входит при различных значениях аргумента. Одним из представителей таких уравнений является простейшее дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом.

Поэтому тема данной курсовой работы «Операционное исчисление. Преобразование Лапласа. Решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом» имеет весьма актуальное значение.

Объектом данной курсовой работы являются дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.

Предмет курсовой работы – методы решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Целью данной работы является выявление, обоснование и практическое применение различных методов решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

В соответствии с объектом, предметом и целью были поставлены следующие задачи:

- изучить научную литературу по заданной теме;
- раскрыть суть каждого из методов решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;
- рассмотреть на конкретных примерах использование каждого из методов решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Курсовая работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Глава 1. Операционное исчисление. Преобразование Лапласа.

1.1 Понятие операционного исчисления, преобразования Лапласа.

Операционное исчисление – один из методов математического анализа, открытый во второй половине XIX века, позволяющий в ряде случаев с помощью простых средств решать сложные математические задачи. Строгое обоснование он получил в 20-х годах прошлого столетия.

Учёные связывали этот метод с известным из теории функций комплексного переменного методом интегральных преобразований. При этом операционный метод получил новую трактовку как метод, основанный на преобразовании Лапласа.

Преобразование Лапласа – это интегральное преобразование, которое определяется соотношением

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (1.1)$$

Интеграл в правой части (1.1) называется интегралом Лапласа. Изображение интегрального преобразования Лапласа называют изображением по Лапласу. Взаимосвязь оригинала $f(t)$ и его изображения $F(p)$ записывают следующим образом:

$$F(p) = L[f(t)](p) \text{ или } f(t) \doteqdot F(p).$$

При этом $f(t)$ называют функцией-оригиналом или просто оригиналом. Условимся обозначать оригиналы малыми буквами $f(t)$, $\varphi(t)$, …, а их изображения – соответствующими заглавными буквами $F(p)$, $\Phi(p)$. Предполагается, что функция-оригинал удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ для $t < 0$;
2) $f(t)$ кусочно-непрерывна на действительной оси, т.е. она может иметь только разрывы I рода, причем каждый конечный интервал содержит конечное число точек разрыва;

3) $f(t)$ при $t \to +\infty$ имеет неограниченный показательный рост, т.е. существуют такие постоянные M>0 и σ, что $|f(t)| \le Me^{\sigma t}$ при $t > 0$.

С физической точки зрения, условие 1) оправдано тем, что в роли параметра t обычно выступает время. Дифференциальные уравнения, описывающие физические процессы, решаются с заданными начальными условиями, поэтому считают, что история процесса до момента начала наблюдения «заложена» в начальных условиях. Условие 2) естественно, однако оно может заменяться более легким (интегрируемость на любом конечном интервале) или более жестким – условиями Дирихле. Третье условие для физических процессов всегда справедливо.

Пример 1. Простейшим оригиналом является функция Хэвисайда

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

Она подчиняется условиям 1), 2), а условие 3) выполнено с $M = 1$ и $\sigma = 0$. Функция $\eta(t)$ играет важную роль в пространстве оригиналов Лапласа, являясь в нём единичной функцией: если $f(t)$ – функция-оригинал, то $f(t)\eta(t) \equiv f(t)$.

Замечание. Если функция $f(t)$ не удовлетворяет хотя бы одному из условий 1)-3), то она не является оригиналом.

Пример 2. Функция $f(t) = \frac{1}{t}$ не является оригиналом, поскольку она не определена при $t = 0$. В этой точке функция терпит разрыв второго рода, а значит и условие 2) нарушается.

Для любой функции-оригинала $f(t)$ параметр σ в условии 3) определяется неоднозначно. Число σ_0, являющееся нижней гранью всех таких σ, называется порядком роста функции $f(t)$.

Пример 3. Функция $f(t) = e^{t^2}$ не является оригиналом, поскольку

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\ln(e^{t^2})}{t} = \lim_{t \to +\infty} t = +\infty$$

В таком случае говорят, что $f(t)$ имеет неограниченный рост.

Рассмотрим важные теоремы из теории операционного исчисления.

Теорема 1 (об области существования изображения).

Если $f(t)$ – оригинал и имеет порядок роста σ_0, то интеграл (1.1) сходится абсолютно всюду в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > \sigma_0$, при этом сходимость равномерная в любой области $\mathrm{Re}\, p \geq \sigma > \sigma_0$. Функция $F(p)$, являющаяся изображением $f(t)$, аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > \sigma_0$.

Доказательство. Выберем произвольные σ и σ_1, $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma$. Существует такое значение M, что $|f(t)| \leq Me^{\sigma_1 t}$ при $t > 0$. Следовательно, функция $f(t)e^{\sigma_1 t}$ ограничена на действительной оси. Поэтому для любого $p = \xi + i\eta, \xi \geq \sigma$, получаем

$$\int_0^{+\infty} \left| f(t)e^{-pt} \right| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-\xi t} dt \leq \int_0^{+\infty} Me^{-(\sigma-\sigma_1)t}\, dt, \quad (1.2)$$

Т.е. подынтегральная функция имеет сходящийся интеграл, не зависящий от p. Это значит, что несобственный интеграл сходится всюду в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p \geq \sigma$, абсолютно и равномерно. Можно также показать, что возможно дифференцирование интеграла (1.2) по параметру p. Это и означает, что $F(p)$ является аналитической.

Таким образом, данная теорема устанавливает условия, при которых для функции $f(t)$ действительного переменного ставится в соответствие единственная функция $F(p)$ комплексного переменного – её изображение. Но будет ли каждому изображению соответствовать единственный интеграл? Ответом на данный вопрос является следующая теорема.

Теорема 2 (о единственности оригинала).

Если $F(p)$ является изображением двух оригиналов $f(t)$ и $\varphi(t)$, то эти оригиналы совпадают во всех точках, в которых они непрерывны.

Замечание. Различные разрывные функции могут иметь одинаковое изображение.

Рассмотрим теперь основные свойства изображений по Лапласу:

1. Изображение $F(p)$ является функцией комплексного переменного, аналитической в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p > \sigma_0$, где σ_0 – показатель роста оригинала. Это следует из теоремы 1.
2. Существует предел

$$\lim_{\mathrm{Re}\, p \to +\infty} F(p) = 0.$$

Что следует из доказательства теоремы 1 при σ_0:

$$|F(p)| \leq \int_0^{+\infty} \left| f(t) e^{-pt} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} M e^{-(\mathrm{Re}\, p - \sigma)t} dt = \frac{M}{\mathrm{Re}\, p - \sigma}$$

3. Если функция-оригинал f(t) удовлетворяет условиям Дирихле, то имеет место формула обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} dp, \qquad (1.3)$$

где по определению

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} dp = \lim_{\omega \to +\infty} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\omega} F(p) e^{pt} dp,$$

а $\sigma > \sigma_0$ может быть выбрана произвольно. Равенство 1.3 выполняется в каждой точке t, в которой функция $f(t)$ непрерывна.

Замечание. Интеграл в правой части формулы обращения (1.3) называют интегралом Меллина, а саму формулу – формулой Римана-Меллина.

1.2 Основные теоремы операционного исчисления

1. Линейность

Если $f_1(t)$, …, $f_k(t)$– функции-оригиналы, $f_i(t) \doteqdot F_i(p)$, $i = 1, \dots, k$, то для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ функция $\alpha_1 f_1(t) + \cdots + \alpha_k f_k(t)$ есть функция-оригинал и

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(t) \doteqdot \sum_{i=1}^{k} \alpha_i F_i(p).$$

Это свойство – констатация того, что преобразование Лапласа линейно.

2. Теорема подобия.

Если $f(t)$ – функция-оригинал, то для любого положительного числа α функция $f(\alpha t)$ – тоже оригинал, и, если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Доказательство. Выполнив в интеграле замену переменной $\tau = \alpha t$, получим

$$L[f(\alpha t)](p) = \int_0^{+\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\frac{\tau}{\alpha}} \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3. Теорема смещения.

Если $f(t)$ – функция-оригинал, $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого комплексного числа λ функция $e^{\lambda t} f(t)$ – тоже оригинал и

$$e^{\lambda t} f(t) \doteqdot F(p - \lambda).$$

Доказательство.

$$L\left[e^{\lambda t} f(t)\right](p) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-\lambda)t} dt = F(p - \lambda).$$

4. Теорема запаздывания.

Если $f(t)$ – функция-оригинал, $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого положительного числа a функция $f(t - a)$ – тоже оригинал и

$$f(t - a) \doteqdot e^{-ap} F(p).$$

Доказательство. Условия 1)–3) определения оригинала выполняются. Учитывая $f(t - a) = 0$ при $t < a$, при помощи замены переменной $\tau = t - a$ получаем

$$L[f(t - a)](p) = \int_0^{+\infty} f(t - a) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau)\, e^{-p(\tau + a)} d\tau =$$

$$= e^{-ap} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{-ap} F(p).$$

5. Интегрирование оригинала.

Если $f(t)$ – функция – оригинал, $f(t) \doteqdot F(p)$, то функция

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

является оригиналом и

$$g(t) \doteqdot \frac{1}{p}F(p).$$

Доказательство. Первые два условия для функции-оригинала выполняются. Остаётся лишь проверить выполнимость условия 3). Получим:

$$|g(t)| = \left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| \le \int_0^t |f(\tau)|d\tau \le \int_0^t Me^{\sigma\tau}d\tau = \frac{M}{\sigma}(e^{\sigma\tau} - 1).$$

Можно считать, что $\sigma > 0$. Тогда

$$|g(t)| \le \frac{M'}{\sigma}e^{\sigma\tau}.$$

Отсюда можем сделать вывод, что показатель роста функции не превосходит $max\{\sigma(f), 0\}$. Проверим также формулу перехода к первообразной:

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \int_0^{\tau} f(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} e^{-pt}f(\tau)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(\tau)\frac{e^{-p\tau}}{p}d\tau = \frac{1}{p}F(p).$$

Порядок интегрирования можно изменить также потому, что несобственный двойной интеграл от функции $f(\tau)e^{-pt}$ по угловой области $0 < t < \infty$, $0 < \tau < t$ сходится абсолютно.

6. Дифференцирование оригинала.

Пусть функция $f(t)$ непрерывна при $t > 0$, имеет производную всюду, кроме множества, имеющего конечное число точек на любом конечном интервале. Если $f(t)$ и $f'(t) -$ функции-оригиналы, $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(+0),$$

где $f(+0) = \lim\limits_{t\to+0} f(t)$.

Доказательство. Из условия вытекает равенство

$$f(t) = f(+0)\eta(t) + \int_0^t f'(\tau)d\tau.$$

Остаётся только к функции $f'(t)$ применить теорему об интегрировании оригинала и воспользоваться соотношением $\eta(t) \doteqdot p^{-1}$:

$$L[f(t)](p) = \frac{f(+0)}{p} + \frac{L[f'(t)](p)}{p},$$

что и приводит к нужному соотношению.

Необходимо отметить, что при дифференцировании оригинала главное, чтобы производная $f'(t)$ была оригиналом и чтобы для неё была верна формула Ньютона-Лейбница.

Дифференцирование оригинала может применяться также многократно. Если функция $f(t)$ имеет $k-1$ производную, непрерывную при $t>0$, то существует k-я производная всюду, кроме, быть может, некоторого множества (имеющего конечное число точек на любом конечном интервале), и если все эти производные являются оригиналами, то

$$f^{(k)}(t) \doteqdot p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \cdots - f^{(k-1)}(+0),$$

где $f(t) \doteqdot F(p)$.

7. Интегрирование изображения.

Если $f(t)$ – функция – оригинал, $f(t) \doteqdot F(p)$, функция $\frac{f(t)}{t}$ ограничена в окрестности 0, то она является оригиналом и

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} F(p)dp.$$

Доказательство. Функция $\frac{f(t)}{t}$ не может быть оригиналом потому, что она не ограничена при $t \to +0$. По условию,

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = F(p).$$

Проинтегрируем данное равенство по p от точки $p_0 = \xi + i\eta$ до ∞ по отрезку горизонтальной прямой:

$$\int_{p_0}^{\infty} dp \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt =$$

$$= \int_{\xi}^{+\infty} d\sigma \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\eta)t}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} dt \int_{\xi}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\eta)t}d\sigma =$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-i\eta t}dt \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\sigma t}d\sigma = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-(\sigma+i\eta)t}dt =$$

$$= \int_{p_0}^{\infty} F(p)dp.$$

Изменение порядка интегрирования возможно также потому, что несобственный двойной интеграл сходится абсолютно.

8. Дифференцирование изображения.

Если $f(t)$ – оригинал, $f(t) \doteqdot F(p)$, то функция $-tf(t)$ – тоже оригинал, причем

$$-tf(t) \doteqdot F'(p).$$

Доказательство. Понятно, что функция $tf(t)$ является оригиналом, причем с тем же порядком роста, что и функция $f(t)$. Применим теорему об интегрировании изображения к функции $\phi(t) = tf(t)$. Если $\phi(t) \doteqdot \Phi(p)$, то

$$f(t) = \frac{\phi(t)}{t} \doteqdot \int_p^{\infty} \Phi(p)dp = F(p).$$

Дифференцируя по p, находим $F'(p) = -\Phi(p)$, что и доказывает это утверждение.

9. Свертка оригиналов.

Это свойство преобразования Лапласа является одним из важнейших в плане возможности практических приложений.

Свёрткой двух функций-оригиналов $f(t)$ и $g(t)$ называют функцию

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Свёртка оригиналов f и g является оригиналом, причем показатель роста свёртки не превосходит максимального из показателей для f и g. Если $f(t) \fallingdotseq F(p), g(t) \fallingdotseq G(p)$, то

$$(f * g)(t) \fallingdotseq F(p)G(p).$$

10. Предельные значения оригинала и изображения.

Для любой функции-оригинала $f(t)$ с изображением $F(p)$ выполняется равенство $\lim\limits_{p\to\infty} pF(p) = f(+0)$, где предельный переход $p \to \infty$ осуществляется внутри угловой области $|\arg p| \le \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, теория преобразований Лапласа на данный момент достаточно развита и на базе неё могут решаться различные задачи теоретического и практического характера.

Глава 2. Решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

2.1 Классификация дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Постановка начальной задачи. Примеры.

Дифференциальными уравнениями с отклоняющимся аргументом называются дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция $x(t)$ входит при различных значениях аргумента.

Примеры.

1. $\dot{x}(t) = f\{t, x(t), x[t - \tau(t)]\}$.
2. $\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2)\ ]$.
3. $\ddot{x}(t) = f\{t, x(t), \dot{x}(t), x[t - \tau(t)], \dot{x}[t - \tau(t)]\ \}$.
4. $\ddot{x}(t) = f\left[t, x(t), \dot{x}(t), x\left(\frac{t}{2}\right), \dot{x}\left(\frac{t}{2}\right)\right]$.

Дифференциальным уравнением с запаздывающим аргументом называется дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, в которое производная наивысшего порядка от неизвестной функции входит при одинаковых значениях аргумента и этот аргумент не меньше, чем все аргументы неизвестной функции и её производных, входящих в уравнение.

Согласно этому определению уравнения (1) и (3) при условиях $\tau(t) \geq 0, t - \tau(t) \geq 0$, будут уравнениями с запаздывающим аргументом. Уравнение (2) будет уравнением с запаздывающим аргументом, если $\tau_1 \geq 0,\ \tau_2 \geq 0,\ t \geq \tau_1,\ t \geq \tau_2$. Уравнение (4) – это уравнение с запаздывающим аргументом, так как $t \geq 0$.

Дифференциальным уравнением с опережающим аргументом называется дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, в котором производная наивысшего порядка от неизвестной функции входит при одинаковых значениях аргумента и этот аргумент не больше остальных аргументов неизвестной функции и ее производных, входящих в уравнение.

Примеры.

1. $\dot{x}(t) = f\{t, x(t), x[t + \tau(t)]\}$.
2. $\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t + \tau_1), x(t + \tau_2)]$.
3. $\ddot{x}(t) = f\{t, x(t), \dot{x}(t), x[t + \tau(t)], \dot{x}[t + \tau(t)]\}$.

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, не являющиеся уравнениями с запаздывающим или опережающим аргументом называются дифференциальными уравнениями нейтрального типа.

Примеры.

1. $\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau)]$.
2. $\ddot{x}(t) = f\{t, x(t), x[t - \tau(t)], \dot{x}[t - \tau(t)], \ddot{x}[t - \tau(t)]\}$.

Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом:

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t - \tau)],$$

где $\tau \geq 0$ и $t - \tau \geq 0$. Тогда перед нами – дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом. Основная начальная задача при решении этого уравнения заключается в следующем: определить непрерывное решение $x(t)$ уравнения для $t > t_0$ (t_0 – фиксированное время) при условии, что $x(t) = \varphi_0(t)$, когда $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, где $\varphi_0(t)$ – заданная непрерывная начальная функция. Сегмент $[t_0 - \tau, t_0]$ называется начальным множеством, t_0 называется начальной точкой. Предполагается, что $x(t_0 + 0) = \varphi_0(t_0)$.

Если запаздывание в уравнении зависит от времени $t\big(\tau = \tau(t)\big)$, то начальная задача ставится следующим образом: найти решение уравнения при $t > t_0$, если известна начальная функция $x(t) = \varphi_0(t)$ при $t_0 - \tau(t_0) \le t \le t_0$.

Пример 3. Найти решение уравнения

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t - \cos^2 t)],$$

при $t \ge t_0 = 0$, если начальная функция $x(t_0) = \varphi_0(t)$ при $(t_0 - \cos^2 t_0)|_{t_0=0} \le$ $\le t_0|_{t_0=0}$ (или $1 \le t \le 0$).

Пример 4. Найти решение уравнения

$$\dot{x}(t) = f\left[t, x(t), x\left(\frac{t}{2}\right)\right],$$

при $t \ge t_0 = 1$, если начальная функция $x(t_0) = \varphi_0(t)$ при $(t_0 - \frac{t_0}{2})\Big|_{t_0=1} \le$ $\le t_0|_{t_0=1}$ (или $\frac{1}{2} \le t \le 1$).

Начальная функция в задачах обычно задаётся или находится экспериментально.

2.2 Решение дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Метод шагов. Примеры.

Наиболее естественным методом решения уравнения с отклоняющимся аргументом является так называемый метод шагов, который заменяет дифференциальное уравнение с запаздыванием серией дифференциальных уравнений без запаздывания.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t - \tau)],$$

где $\tau \ge 0$, $t - \tau \ge 0$, с заданной начальной функцией $x(t) = \varphi_0(t)$, при $t_0 - \tau \le$ $\le t \le t_0$. Требуется найти решение уравнения при $t \ge t_0$.

Для нахождения решения данного уравнения при $t \ge t_0$ будем пользоваться методом шагов (методом последовательного интегрирования).

Суть метода шагов состоит в том, что сначала необходимо найти решение уравнения для $t_0 \le t \le t_0 + \tau$, потом для $t_0 + \tau \le t \le t_0 + 2\tau$ и т.д. При этом заметим, например, что так как в области $t_0 \le t \le t_0 + \tau$ аргумент $t - \tau$ меняется

в пределах $t_0 - \tau \le t - \tau \le t_0$, то в уравнении в данной области вместо $x(t-\tau)$ можно взять начальную функцию $\varphi_0(t-\tau)$. Тогда получим, что для нахождения решения данного уравнения в области $t_0 \le t \le t_0 + \tau$ нужно решить обыкновенное дифференциальное уравнение без запаздывания в виде:

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), \varphi_0(t-\tau)],$$

при $t_0 \le t \le t_0 + \tau$ с начальным условием $x(t_0) = \varphi(t_0)$.

Теперь, найдя решение этой начальной задачи в виде $x(t) = \varphi_1(t)$, можем поставить задачу нахождения решения на отрезке $t_0 + \tau \ge t \ge t_0 + 2\tau$ и т.д.

Имеем:

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), \varphi_0(t-\tau)],$$

при $t_0 \le t \le t_0 + \tau$, $x(t_0) = \varphi(t_0)$,

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), \varphi_1(t-\tau)],$$

при $t_0 + \tau \le t \le t_0 + 2\tau$, $x(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau)$,

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), \varphi_2(t-\tau)],$$

при $t_0 + 2\tau \le t \le t_0 + 3\tau$, $x(t_0 + 2\tau) = \varphi_2(t_0 + 2\tau)$,

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), \varphi_n(t-\tau)],$$

при $t_0 + n\tau \le t \le t_0 + (n+1)\tau$, $x(t_0 + n\tau) = \varphi_n(t_0 + n\tau)$,

где $\varphi_i(t)$ есть решение рассматриваемой начальной задачи на отрезке $t_0 + +(i-1)\tau \le t \le t_0 + i\tau$, где $i = 1,2,3, \dots, n, \dots$

Такой метод шагов решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом позволяет определить решение $x(t)$ на некотором конечном отрезке изменения t.

Пример 1. Методом шагов найти решение дифференциального уравнения 1-го порядка с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = 6 \cdot x(t-1)$$

в области $1 \le t \le 3$, если начальная функция при $0 \le t \le 1$ имеет вид:

$$x(t) = \varphi_0(t) = t.$$

Решение. Сначала найдём решение исходного уравнения в области $1 \le t \le 2$. Для этого заменим в нём $x(t-1)$ на $\varphi_0(t-1)$, т.е.

$$x(t-1) = \varphi_0(t-1) = t|_{t\to t-1} = t-1$$

и учтём, что $x(1) = \varphi_0(1) = t|_{t=1} = 1$.

Таким образом, в области $1 \le t \le 2$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) = 6 \cdot (t-1) \text{ или } \frac{dx(t)}{dt} = 6(t-1).$$

Решая его, учитывая $x(1) = \varphi_0(1) = t|_{t=1} = 1$, получим решение исходного уравнения при $1 \le t \le 2$ в виде

$$x(t) = 3t^2 - 6t + 4 = 3(t-1)^2 + 1.$$

Теперь для нахождения решения исходного уравнения в области $2 \le t \le 3$ заменим $x(t-1)$ на $\varphi_1(t-1) = 3(t-1)^2 + 1|_{t\to t-1} = 3(t-2)^2 + 1$. Получим также дифференциальное уравнение:

$$\dot{x}(t) = 6 \cdot [3(t-2)^2 + 1)], x(2) = \varphi_1(2) = 4,$$

решение которого имеет вид:

$$x(t) = 6(t-2)^3 + 6t - 8.$$

Пример 2. Методом шагов найти решение дифференциального уравнения 2-го порядка с запаздывающим аргументом

$$\ddot{x}(t) = 6 \cdot \dot{x}(t-1)$$

в области $1 \le t \le 2,$ если начальная функция при $0 \le t \le 1$ имеет вид

$$x(t) = \varphi_0(t) = t.$$

Решение. Обозначим $\dot{x}(t) = y(t), \ddot{x}(t) = \dot{y}(t)$. Подставляя их в исходное уравнение, получим уравнение 1-го порядка относительно $y(t)$:

$$\dot{y}(t) = 6 \cdot y(t-1)$$

с начальной функцией $\ddot{\varphi}_0(t) = 1$ при $0 \le t \le 1$.

Для того, чтобы найти решение этого уравнения в области $1 \le t \le 2$, заменим в нём $y(t-1) = \ddot{\varphi}_0(t-1) = 1$. Получим:

$$\dot{y}(t) = 6 \cdot 1, y = 6t + C$$

Так как $y(1) = 1,$ то из последнего уравнения находим $C = -5$. Тогда $y = 6t - -5$ или $\dot{x}(t) = 6t - 5$. Интегрируя последнее уравнение с учётом $x(1) = 1$, получим решение исходного уравнения в области $1 \le t \le 2$ в виде

$$x(t) = 3t^2 - 5t + 3.$$

Пример 3. Методом шагов найти решение дифференциального уравнения 1-го порядка с переменным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = 2x \cdot (t - \cos t)$$

в области $0 \le t \le 1$, при $t_0 = 0$, если начальная функция в области $(t_0 - -\cos t_0)|_{t_0=0} \le t \le t_0|_{t_0=0}$ (или $-1 \le t \le 0$) имеет вид

$$x(t) = \varphi_0(t) = t.$$

Решение. Согласно методу шагов при $0 \le t \le 1$ в исходном уравнении заменим $x \cdot (t - \cos t)$ на $\varphi_0 \cdot (t - \cos t) = t - \cos t$. Тогда мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\dot{x}(t) = 2 \cdot (t - \cos t), x(0) = t|_{t=0} = 0.$$

Интегрируя его, получим решение исходного уравнения в области $0 \le t \le 1$ в виде $x(t) = t^2 - 2\sin t$.

2.3 Периодические решения линейного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Примеры

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с запаздывающим аргументом

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{d^k x(t-\tau)}{dt^k} = 0, \qquad 2.1$$

где a_k, b_k, τ – постоянные величины и $\tau > 0$.

Найдём решение данного уравнения методом Эйлера в виде $x(t) = e^{\lambda t}$, где λ – неизвестная действительная или комплексная величина.

Понятно, что если $x(t) = e^{\lambda t}$, то $\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, …, $x^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t}$; $x(t-\tau) = e^{\lambda(t-\tau)} = e^{\lambda t} \cdot e^{-\tau\lambda}$, $\dot{x}(t-\tau) = \lambda e^{\lambda t} \cdot e^{-\tau\lambda}$, …, $x^{(n-1)}(t-\tau) = = \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda\tau}$.

Подставляя эти выражения в уравнение 2.1 и разделив обе части уравнения на $e^{\lambda t} \neq 0$, получим характеристическое уравнение в виде

$$\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda^k e^{-\lambda\tau} = 0.$$

Далее будут иметься в виду чисто периодические решения уравнения (2.1).

Такие решения будут существовать в случае наличия у характеристического уравнения чисто мнимых корней $\pm i\lambda_k (k = 1,2, \dots, l)$, где λ_k – действительные числа $l \leq n$. В этом случае среди решений исходного уравнения будут иметься чисто периодические независимые решения

$$\cos \lambda_1 t, \cos \lambda_2 t, \dots, \cos \lambda_l t,$$
$$\sin \lambda_1 t, \sin \lambda_2 t, \dots, \sin \lambda_l t$$

И общее периодическое решение уравнения (2.1) будет иметь вид

$x(t) = C_1 \cos \lambda_1 t + C_2 \cos \lambda_2 t + \cdots + C_n \cos \lambda_n t + \overline{C_1} \sin \lambda_1 t + \overline{C_2} \sin \lambda_2 t + \cdots +$
$+ \overline{C_n} \sin \lambda_n t$, где C_k и $\overline{C_k}$ $(k = 1,2, \dots, l)$ – произвольные постоянные.

Из исследований известного математика Л. Э. Эльсгольца известно, что число различных независимых решений (и не только периодических) исходного уравнения не превосходит n.

Пример 1. Найти периодические решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом

$$\ddot{x}(t) - 2\dot{x}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + 3x(t) = 0.$$

Решение. Найдём решение данного уравнения методом Эйлера в виде $x(t) = e^{\lambda t}$, где $\lambda -$ пока неизвестные числа. Найдём первую и вторую производную $x(t)$: $\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$; а также производную функции $x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = e^{\lambda t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}\lambda}$: $\dot{x}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}\lambda}$.

Подставляя найденные значения в исходное уравнение и разделив обе части на $e^{\lambda t} \neq 0$, получим характеристическое уравнение исходного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\lambda^2 - 2\lambda e^{-\frac{\pi}{2}\lambda} + 3 = 0$$

Это уравнение имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_{3,4} = \pm 3i$. Подставляя их в характеристическое уравнение, пользуясь известными формулами Эйлера $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$, получим:

При $\lambda_1 = i$ имеем

$$i^2 - 2ie^{-\frac{\pi}{2}i} + 3 = -1 - 2i\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) + 3 = -1 - -2i(-i) + 3 =$$
$$= -1 + 2i^2 + 3 = -1 - 2 + 3 = 0,$$

при $\lambda_2 = -i$ имеем

$$i^2 + 2ie^{-\frac{\pi}{2}i} + 3 = -1 + 2i\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) + 3 = -1 + 2i^2 + 3 =$$
$$= -1 - 2 + 3 = 0,$$

при $\lambda_3 = 3i$ имеем

$$(3i)^2 - 2\cdot 3ie^{-\frac{3\pi}{2}i} + 3 = -9 - 6i\left(\cos\frac{3\pi}{2} - i\sin\frac{3\pi}{2}\right) + 3 =$$
$$= -9 + 6i^2 + 3 = -9 + 6 + 3 = 0,$$

при $\lambda_4 = -3i$ имеем

$$(-3i)^2 + 2\cdot 3ie^{\frac{3\pi}{2}i} + 3 = -9 + 6i\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) + 3 =$$
$$= -9 - 6i^2 + 3 = -9 + 6 + 3 = 0.$$

Тогда корням характеристического уравнения будут соответствовать линейно независимые решения исходного уравнения:

$$x_1(t) = \cos t,\ x_2(t) = \sin t,\ x_3(t) = \cos 3t,\ x_4(t) = \sin 3t.$$

При этом общее периодическое решение исходного дифференциального уравнения можно представить в виде $x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3\cos 3t + +C_4\sin 3t$, где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные.

Пример 2. Найти периодические решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с запаздывающим аргументом

$$2\ddot{x}(t) - x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + 2\dot{x}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \dot{x}(t) = 0.$$

Решение. Найдём решение данного уравнения методом Эйлера в виде $x(t) = e^{\lambda t}$, где $\lambda -$ пока неизвестные числа, с учётом того, что $\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$; а $x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = e^{\lambda t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}\lambda}$ и её производная $\dot{x}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}\lambda}$.

Подставляя найденные значения в исходное уравнение и разделив обе части на $e^{\lambda t} \neq 0$, получим характеристическое уравнение исходного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом:

$$2\lambda^2 + (2\lambda - 1) \cdot e^{-\frac{\pi}{2}\lambda} - \lambda = 0.$$

Это уравнение имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Тогда линейно независимые решения исходного уравнения, соответствующие этим корням характеристического уравнения имеют вид

$$x_1(t) = \cos t\,, x_2(t) = \sin t,$$

а общее периодическое решение исходного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом представляется в виде $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, где C_1 и $C_2 -$ произвольные постоянные.

2.4 Приближенный метод разложения неизвестной функции с запаздывающим аргументом по степеням запаздывания. Примеры

Пусть нам дано дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом $\dot{x}(t) = f[t, x(t), x(t-\tau)]$, $\tau > 0$, разрешенное относительно функции $x(t-\tau)$:

$$x(t-\tau) = F[t, x(t), \dot{x}(t)]. \qquad 2.2$$

Если при малом запаздывании τ разложить функцию $x(t-\tau)$ в ряд Тейлора вокруг значения $\tau_0 = 0$

$$x(t-\tau) \cong x(t) - \dot{x}(t)\tau + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}\tau^2 + \cdots + \frac{(-1)^n x^n(t)}{n!}\tau^n + \cdots,$$

то вместо исходного дифференциального уравнения 2.2 будет уравнение

$$x(t) - \dot{x}(t)\tau + \frac{\ddot{x}(t)}{2!}\tau^2 + \cdots + \frac{(-1)^n x^n(t)}{n!}\tau^n + \cdots \cong F[t, x(t), \dot{x}(t)] \qquad 2.3$$

Исследования показали, что довольно хорошие результаты можно получить, если ограничиваться двумя членами разложения

$$x(t-\tau) \cong x(t) - \dot{x}(t)\tau.$$

Тогда вместо уравнения 2.3 будет дифференциальное уравнение уже без отклонения аргумента:

$$x(t) - \dot{x}(t)\tau = F[t, x(t), \dot{x}(t)].$$

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом

$$\ddot{x}(t) - \dot{x}(t) + x(t) - x\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$$

методом разложения функции от запаздывания по формуле Маклорена.

Решение. Разложив функцию $x\left(t - \frac{1}{2}\right)$ по формуле Маклорена и, ограничиваясь двумя первыми членами этого разложения, получим линейное дифференциальное уравнение без запаздывания

$$\ddot{x}(t) - \frac{1}{2}x(t) = 0.$$

Решая его методом Эйлера ($x(t) = e^{kt}$), получим

$$x(t) = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 e^{\frac{t}{2}}.$$

Заключение

Таким образом, обобщая всё вышесказанное, можно сделать вывод о том, что в настоящее время существует множество методов решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, основанных на различных математических теориях. Все они значительно упрощают вычисления сложных математических конструкций, описывающих разнообразные нетривиальные практические задачи и процессы.

Нами были проанализированы соответствующие литературные источники по заданной теме. В процессе анализа были выявлены и зафиксированы основные понятия данной темы, а также методы решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, раскрыта их основная суть и использование их в зависимости от конкретного вида уравнения.

Подводя итог всему вышеупомянутому, хотелось бы отметить особую роль дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при решении многих задач математики, физики и химии, так как в задачах не всегда удается установить функциональное соответствие между искомыми и данными переменными величинами, но зато удается вывести данное дифференциальное уравнение, позволяющее точно обозначить протекание определенного процесса при определенных условиях.

Список литературы

1. Боярчук А. К., Головач Г. П., Дифференциальные уравнения в примерах и задачах, т. 5; Справочное пособие по высшей математике. – М. Эдиториал УРСС, 1999. — 384 с.
2. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб, для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - М., 2002. - 228 с. (Сер, Математика в техническом университете; Вып. XI).
3. Геворкян, Э.А. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом: Учебное пособие, руководство по изучению дисциплины, сборник задач по дисциплине, учебная программа по дисциплине / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики – М.: 2004. – 79 с.
4. Дубков А.А., Агудов Н.В. Преобразование Лапласа: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2016. - 36 с.
5. Мышкис, А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом// УМН, 1949, том 4, выпуск 5(33), 99–141
6. Мышкис, А.Д. "Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом"// Гостехиздат, М. 1951
7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2; Учебное пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.
8. Эльсгольц, Л. С. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [Текст] : монография / Л.С. Эльсгольц, С.Б. Норкин. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : Наука, 1971. - 296 с. : ил. - Библиогр.: с. 257-296.