

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Изучение геометрических мест точек на плоскости как средство развития
критического мышления обучающихся классов с углубленным изучением
математики»**

Студент

 18.05.26 Родионова Елена Владимировна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

 18.05.26 Сорокина М. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

 15.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

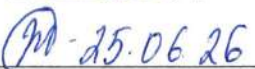
Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.2026 г. № 10)

И.о. заведующего кафедрой

 01.06.26 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 25.06.26 № 8)

Секретарь ГЭК

 25.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕК В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ	6
1.1 Психолого-педагогические основы развития критического мышления при обучении математике	6
1.2 Геометрическое место точек в курсе геометрии основной школы.....	9
1.3 Роль и место темы «Геометрические места точек» в углубленном курсе геометрии основной школы.....	17
1.4 Анализ учебно-методических пособий по теме «Геометрическое место точек».....	19
ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО ТЕМЕ: «ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК».....	25
2.1 Элективные курсы как средство развития обучающихся	25
2.2 Элективный курс по геометрии для обучающихся 8 класса с углубленным изучением математики по теме: «Геометрическое место точек». 26	
2.3 Разработка дидактических материалов для элективного курса по теме: «Геометрическое место точек».....	32
2.4 Рекомендации для педагогов по работе с дидактическими материалами по курсу	64
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	68

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире при большом и стремительном потоке информации людям для успешной жизни необходимо в ней самостоятельно ориентироваться, выделять самое главное, аргументировать свою позицию и принимать обоснованные решения. Критическое мышление является основой для развития всех этих навыков. Его важность также подчеркивается в Федеральном государственном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО). В документе прямо закрепляется необходимость формирования метапредметных результатов: «умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать», «умение делать выводы и умозаключения», «владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений». Развитие критического мышления становится приоритетной задачей современной школы [2].

Математика является одним из уникальных инструментов для развития логических способностей учащихся. Особенную роль играет в этом геометрия, которая в большей степени, чем алгебра, опирается на творческий подход, требует больших рассуждений, которые трудно свести к определенному алгоритму. В классах с углубленным изучением математики это выражается наиболее ярко. Учащиеся изучают материал на повышенном уровне сложности и решают задачи олимпиадного уровня.

Тема «Геометрические места точек» может стать наиболее значимой для развития критического мышления учащихся. Эта тема связана со всем курсом геометрии: от построений циркулем и линейкой до аналитического задания фигур. Ее более подробное изучение поможет учащимся лучше понять материал, углубить свое понимание предмета. ГМТ может выступать в том числе и как средство для решения широкого класса задач. Применение этого метода требует от учащихся решения большого количества мыслительных задач, тем самым способствуя развитию их критического мышления.

Однако в школе геометрические места точек часто изучаются формально, теме уделяется довольно мало внимания. Учащиеся запоминают только основные виды и способы их построения, редко уделяя внимание на применение ГМТ как метода решения задач и как способа доказательства. Выпускники не овладевают алгоритмом применения для решения задач, не умеют конструировать сложные геометрические места и не видят связи между множеством точек и уравнениями фигур.

Противоречие между высоким развивающим потенциалом темы и недостаточным вниманием к ней в реальном учебном процессе и определяет актуальность работы.

Объект исследования: процесс обучения геометрии учащихся 8-9 классов с углубленным уровнем изучения математики.

Предметом исследования является методика изучения геометрических мест точек как средства развития критического мышления у обучающихся в рамках элективного курса.

Цель исследования – теоретическое обоснование, разработка элективного курса по теме: «Геометрическое место точек» для 8-9 классов с углубленным изучением математики.

Для достижения цели были выделены следующие *задачи*:

- 1) провести анализ психолого-педагогической литературы по проблеме развития критического мышления при обучении математике;
- 2) раскрыть место темы «Геометрическое место точек» в углубленном курсе геометрии средней школы;
- 3) выполнить сравнительный анализ учебно-методических пособий по теме с позиции их пригодности для развития критического мышления;
- 4) разработать программу элективного курса «Геометрическое место точек» для 8-9 классов, включающего как классические, так и дополнительные виды ГМТ;

5) разработать комплект дидактических материалов (рабочие листы) и методические рекомендации для педагога по их использованию.

Методы исследования: теоретический анализ научной и методической литературы, сравнительный анализ учебно-методических пособий.

Практическая значимость состоит в разработке элективного курса и рабочих листов к нему, которые могут быть внедрены в учебный процесс классов с углубленным изучением математики.

Структура работы включает в себя введение, две главы, заключение, список литературы – 21 источник.

В первой главе «Теоретические основы изучения геометрического места точек в основной школе» рассмотрены психолого-педагогические основы развития критического мышления, понятие ГМТ и его характеристическое свойство, роль темы в углубленном курсе, а также проведен анализ учебных пособий.

Во второй главе «Разработка элективного курса по теме: «Геометрическое место точек»» охарактеризованы элективные курсы как средство развития обучающихся, представлена программа курса, подробно описаны дидактические материалы, а также даны рекомендации по работе с ними.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕСТА ТОЧЕК В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

1.1 Психолого-педагогические основы развития критического мышления при обучении математике

Федеральный государственный стандарт основного общего образования изменяет деятельность педагога с простой передачи знаний на формирование метапредметных компетенций обучающихся. В этих условиях важнейшими навыками школьника являются способности «определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать», «умения делать выводы и умозаключения», также подчеркивается необходимость «овладения логическими действиями» и «владения основами самоконтроля, самооценки и принятия решений» [2]. Эти мыслительные операции соотносятся с понятием критического мышления – способности человека анализировать ситуацию, подвергать сомнению утверждения, аргументировать свою позицию и принимать обоснованные решения.

Математика, как учебный предмет из-за присущей ей логической строгости и доказательности, обладает большим потенциалом для развития критического мышления. Однако его развитие невозможно без понимания психологических особенностей учащихся и применения актуальных педагогических технологий.

Современная психология рассматривает критическое мышление как целенаправленный, рефлексивный процесс, позволяющий субъекту эффективно действовать в нестандартных ситуациях. Д. Халперн определяет его как «использование когнитивных техник и стратегий, которые увеличивают вероятность получения желаемого конечного результата, подчеркивая его целенаправленность и контролируемость» [19]. В педагогической науке А. В. Хуторской подчеркивает оценочность и рефлексивность такого вида

мышления, и считает, что оно развивается путем наложения новой информации на имеющийся жизненный и учебный опыт субъекта, что приводит к формированию личностного знания [20].

Для развития критического мышления принято выделять три основные стадии, которые были описаны в методике развития критического мышления через чтение и письмо:

- 1) вызов – актуализация имеющихся знаний и пробуждение интереса;
- 2) осмысление – получение и анализ новой информации;
- 3) рефлексия – интеграция нового знания и самооценка [6].

Каждая из этих стадий требует специальных действий для успешного овладения навыками. Педагогу необходимо создать условия для выдвижения гипотез на стадии вызова, для осознания новой информации во время осмысления и проверки выполнимости сформулированных знаний на стадии рефлексии. При выполнении этих действий учащиеся овладевают компетенциями, которые и являются основой критического мышления.

Среди математических дисциплин для формирования критического мышления наиболее подходящей является геометрия, поскольку она, в отличие от более алгоритмизированной алгебры, требует постоянного анализа как условий задачи, так и чертежа к ней, выбора оптимального способа доказательства, проверки сделанных выводов и рассмотрения нескольких случаев, в том числе и особых. Как отмечал Г. И. Саранцев: «геометрическая задача редко подводится под готовый шаблон, она требует исследовательского подхода» [18]. Это создает естественную среду для развития критического мышления.

Однако для успешного формирования критического мышления необходимо учитывать возрастные особенности обучающихся, так как математика требует высокого уровня развитости мыслительных действий. Согласно теории Ж. Пиаже обучающиеся овладевают способностью к формально-логическим операциям в возрасте 12 – 15 лет, что соответствует 7 –

9 классу в общеобразовательной школе [14]. Именно в этот период обучающиеся начинают понимать логическую структуру определения, различать необходимые и достаточные условия, проводить более сложные доказательства. Этот возраст становится наиболее благоприятным для введения понятия «геометрическое место точек».

Также для развития критического мышления необходимо формирование способности к рефлексии – способности осознавать и анализировать собственные мыслительные действия. В математике рефлексия является важнейшим элементом для успешного решения задач различной сложности, поиска ошибок и доказательства теорем. Л. С. Выготский считал, что стимулирование зоны ближайшего развития в аспекте произвольности мышления возможно при решении задач, требующих волевого усилия и осознанного контроля [5]. То есть необходимо в процессе обучения использовать задания, требующие больших интеллектуальных усилий, например, с элементами неопределенности, с несколькими способами решения и допускающими различные конфигурации. Задачи на построение, решаемые методом ГМТ, становятся наиболее подходящими для достижения этих целей.

С точки зрения педагогики и методики преподавания объяснительно-иллюстративное обучение не эффективно для формирования критического мышления. Наиболее подходящим методом в данном случае является проблемное обучение. По мнению М. И. Махмутова, создание проблемных ситуаций заставляет учащихся выдвигать гипотезы, искать нестандартные способы решения, а не только следовать заученному алгоритму [9]. Именно эти навыки лежат в основе критического мышления. А в геометрии эти навыки развиваются, когда обучающиеся не могут сразу вывести доказательство, а для решения им необходимо изучить различные свойства и вывести их самостоятельно.

Для лучшего результата при развитии критического мышления педагогу важно организовывать учебный диалог и дискуссии, что станет основой для

развития у учащихся навыков к формированию собственного мнения и умения аргументировать свою позицию. Урок геометрии становится подходящей средой для организации обсуждения. Рассуждения и выдвижение гипотез при доказательстве теорем, решении задач, и их обсуждение стимулируют развитие коммуникативных способностей обучающихся.

Специфика математики, как предмета, требующего доказательности, алгоритмичности в сочетании с пониманием границ для применения алгоритмов, создает благоприятную среду для развития критического мышления учащихся, а грамотно подобранные педагогом приемы и методы обучения позволяют развивать эти способности наиболее эффективно.

Развитие критического мышления при обучении математике представляет собой комплексный психолого-педагогический процесс. С психологической стороны требуется учет возрастных особенностей мыслительных операций, способностей к рефлексии и саморегуляции. С педагогической стороны необходим подбор наиболее подходящих приемов и методик и их успешная реализация. Только при учете этих факторов возможно в полной мере раскрыть потенциал математики для развития критического мышления обучающихся.

1.2 Геометрическое место точек в курсе геометрии основной школы

Понятие «Геометрическое место точек» является одним из фундаментальных в школьном курсе геометрии. Оно служит основой для определения многих геометрических фигур и используется для решения большого количества задач: от построений циркулем и линейкой до аналитического задания объектов.

Фигуру можно определить несколькими способами. Если фигура задана через указание свойства, которыми обладают все точки фигуры, и не обладают точки, не принадлежащие ей, то речь идет о геометрическом месте точек.

Геометрическое место точек, обладающим некоторым свойством, – это фигура, состоящая из всех точек плоскости, для которых выполнено это свойство [20]. То есть это множество точек, включающее те и только те точки, которые обладают указанным свойством.

Свойство, определяющее фигуру, называется характеристическим свойством точек этого геометрического места.

Это определение имеет двойственный характер. Как отмечал В.В. Прасолов, решение задач на поиск ГМТ требует доказательства двух утверждений:

- 1) все точки, обладающие характеристическим свойством, принадлежат искомой фигуре;
- 2) все точки, не обладающие характеристическим свойством, не принадлежат фигуре [16].

То есть нужно доказать необходимость – первое утверждение и достаточность – второе, эти утверждения гарантируют, что мы не потеряли ни одной точки и не добавили лишних. Лишь при таком двойном доказательстве формируется математическая культура школьников и способствует развитию логичности мышления.

Многие фигуры рассматриваются в школьном курсе именно через понятие геометрических мест точек. Рассмотрим некоторые виды геометрических мест точек, при этом разделив их на несколько групп:

Первая группа – базовые ГМТ, которые изучаются большинством школьников, поскольку именно с их помощью доказываются и вводятся свойства геометрических фигур, например, центры вписанных и описанных окружностей:

- 1) геометрическое место точек, отстоящих на расстоянии, равном r , от данной точки O , есть окружность, описанная из центра O радиусом r (рисунок 1);

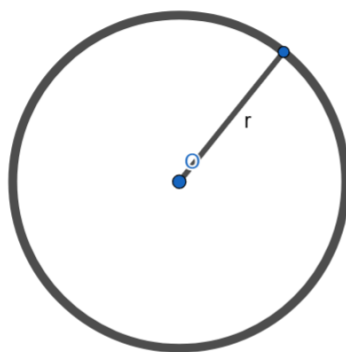


Рисунок 1

2) геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек M и N , есть перпендикуляр, восстановленный к отрезку MN в его середине (рисунок 2);

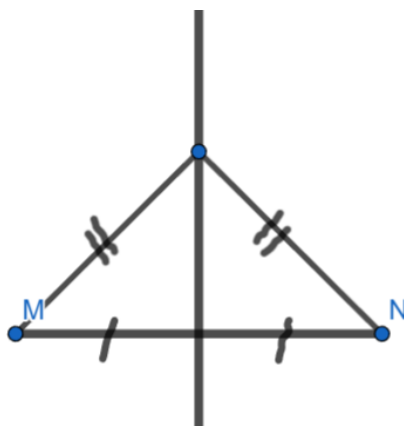


Рисунок 2

3) геометрическое место точек, отстоящих на данном расстоянии a от прямой AB , составляют две прямые CD и MN , отстоящие от AB на расстоянии a (рисунок 3);

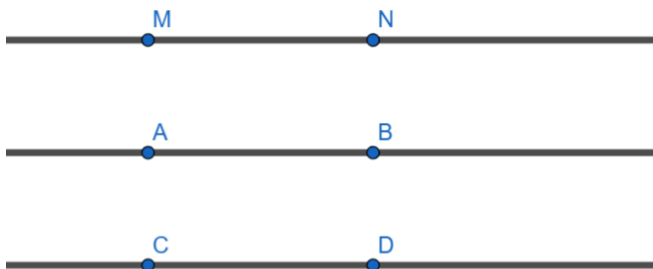


Рисунок 3

4) геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла (рисунок 4);

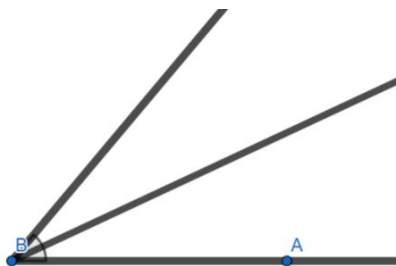


Рисунок 4

Вторая группа – конструктивные ГМТ, которые изучаются преимущественно в классах с углубленным изучением математики:

5) геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, составляют две дуги, описанные на данном отрезке и вмещающие данный угол (рисунок 5);

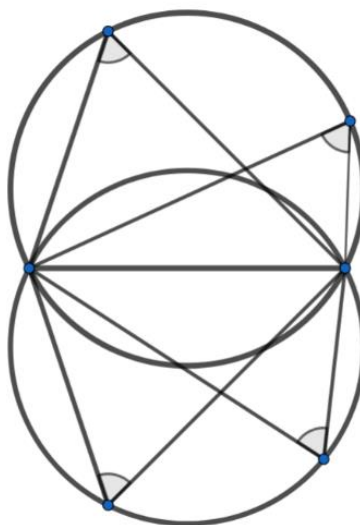


Рисунок 5

6) геометрическое место точек, расстояния которых до двух данных точек A и B находятся в данном отношении $m : n$, есть окружность определенного радиуса и центра (рисунок 6);

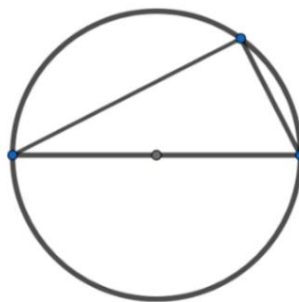


Рисунок 6

Третья группа – исследовательские ГМТ. Эти фигуры изучаются довольно редко. Их рассмотрение требует дополнительной пропедевтической работы со стороны педагога и организации исследовательской работы.

7) геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B равна a^2 , есть окружность определенного центра и радиуса (рисунок 7);

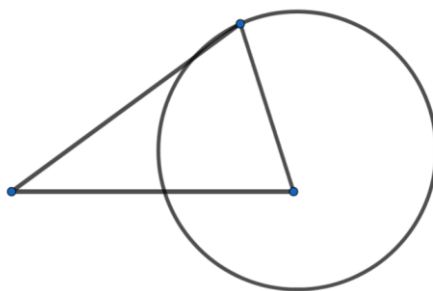


Рисунок 7

8) геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек M и N равна a^2 , есть перпендикуляр к MN в точке E , определяемой равенством $EM^2 - EN^2 = a^2$ (рисунок 8);

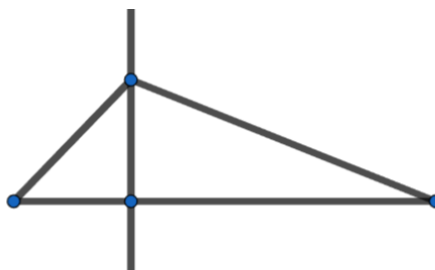


Рисунок 8

9) геометрическое место точек, у которых одинаковая степень

относительно двух неконцентрических окружностей, есть прямая, перпендикулярная к линии центров в определенной точке (рисунок 9).

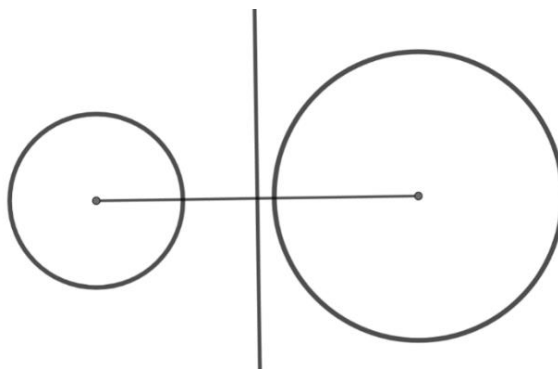


Рисунок 9

Согласно федеральной рабочей программе углубленного уровня и учебникам не все из вышеперечисленных фигур изучаются [1]. Основными являются фигуры первой группы, они изучаются как для базового, так и для углубленного уровня обучения. При углубленном уровне добавляются фигуры второй группы и некоторые из третьей группы, но главным отличием является изучение метода геометрических мест точек и его применение для решения задач [3].

Задачи на нахождение ГМТ, как и задачи на построение, решаемые методом ГМТ, могут быть решены двумя способами: геометрическим методом или методом координат. При углубленном изучении необходимо изучить оба метода решения [8].

Рассмотрим каждый метод подробнее. Геометрический метод заключается в выводе характеристического свойства из геометрических соотношений, без привлечения алгебраических вычислений. Этот метод эффективен для задач, в которых есть наглядная интерпретация.

Математическая сущность метода ГМТ, по мнению Д. И. Перепелкина, заключается в том, что искомая точка определяется через пересечение нескольких геометрических мест точек, которые определяются из условия задачи [15]. Этот метод является одним из основных при решении задач на построение.

Процесс решения задачи геометрическим методом включает себя четыре классических этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. Особо важным становится этап доказательства, где необходимо проверить выполнение необходимого и достаточного условий [18].

Пример:

Задача: Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Доказательство:

Пусть AB — данный отрезок, а данный угол равен α . Построим два треугольника ABC и ABC' так, чтобы точки C и C' лежали по разные стороны от прямой AB и $\angle ACB = \angle AC'B = \alpha$. Опишем окружности около этих треугольников. Докажем, что искомое геометрическое место точек — это две дуги построенных окружностей: дуга AB описанной окружности треугольника ABC , содержащая точку C , и дуга AB описанной окружности треугольника ABC' , содержащая точку C' .

Если точка M , отличная от A и B , лежит на первой из этих дуг, то по теореме о вписанных углах, опирающихся на одну и ту же дугу:

$$\angle AMB = \angle ACB = \alpha.$$

Аналогично, для точки, лежащей на второй дуге.

Обратно, пусть точка N такова, что $\angle ANB = \alpha$. Преположим, что при этом точки N и C лежат по одну сторону от прямой AB . Докажем, что точка N лежит на первой из построенных дуг. Допустим, что это не так. Если точка N расположена внутри окружности, то продолжив отрезок AN за точку N , получим точку K пересечения луча AN с окружностью.

Тогда $\angle AKB = \angle ACB = \alpha = \angle ANB$, что невозможно, т.к. $\angle ANB$ — внешний угол треугольника BKN , а тогда $\angle ANB = \angle AKB + \angle KBN > \angle AKB$.

Аналогично для случая, когда точка N лежит вне окружности.

Если точки N и C лежат по разные стороны от прямой AB , то рассуждая аналогично, докажем, что точка N лежит на второй из построенных дуг.

Таким образом, мы доказали, что из каждой точки построенных дуг (кроме А и В) отрезок АВ виден под углом α , и обратно, если из какой-то точки отрезок АВ виден под углом α , то эта точка лежит на одной из построенных дуг [4].

Метод координат или аналитический метод заключается в задании системы координат и записи условия задачи с помощью уравнений. Затем уравнение связывают с геометрической фигурой, например уравнение окружности, прямой и т. д. Этот метод часто позволяет избежать дополнительных построений, но может быть довольно сложен для вычислений. Особенно удобен, если известны метрические соотношения, например, расстояния или отношения [18].

Рассмотрим пример:

Найдите геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до двух данных точек относятся как $m : n$.

Решение:

Введём систему координат на плоскости так, чтобы точки А и В имели координаты $(-a;0)$ и $(a;0)$ соответственно.

Если точка Р имеет координаты $(x;y)$, то

$$\frac{AP^2}{BP^2} = \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

Уравнение $\frac{AP^2}{BP^2} = \frac{m^2}{n^2}$ приводится к виду:

$$\left(x + \frac{a(m^2 + n^2)}{n^2 - m^2}\right)^2 + y^2 = \frac{2mn}{n^2 - m^2}^2$$

Это уравнение окружности с центром $\left(\frac{a(m^2+n^2)}{n^2-m^2}; 0\right)$ и радиусом $\frac{2mn}{|n^2-m^2|}$.

Полученная окружность называется окружностью Аполлония для случая $m \neq n$, в противном случае мы получаем серединный перпендикуляр к отрезку [18].

Понятие геометрическое место точек включает в себя большое количество фигур, служит инструментом для решения задач различными способами и

развития мыслительных способностей учащихся. Однако большое количество объектов, которые могли бы стать инструментом для развития математических и исследовательских навыков обучающихся, не изучаются в образовательных учреждениях даже в классах с углубленным изучением дисциплины.

1.3 Роль и место темы «Геометрические места точек» в углубленном курсе геометрии основной школы

В условиях модернизации российского математического образования, осуществляемой в соответствии с обновленным Федеральным государственным стандартом основного общего образования и федеральными рабочими программами по математике углубленного уровня, особое значение приобретает выделение содержательно-методических линий, обладающих высоким развивающим потенциалом. К числу таких линий относится тема «Геометрические места точек». Ее изучение в углубленном курсе геометрии не ограничивается формированием узкопредметных знаний, а выступает действенным механизмом достижения комплекса личностных, метапредметных и предметных результатов, предусмотренных стандартом, обеспечивая подготовку обучающихся к продолжению образования и профессиональной деятельности в условиях цифровой экономики [1]. Определение роли и места данной темы в структуре школьного геометрического образования требует анализа ее дидактических функций в контексте требований ФГОС и особенностей построения углубленного курса на уровнях основного и среднего общего образования [2].

В курсе геометрии 7-9 классов тема «Геометрическое место точек» занимает важное положение, выступая основой для формирования начал теоретического мышления и овладения первыми математическими методами. Согласно ФРП ООО по математике углубленного уровня, изучение геометрических мест точек неразрывно связано с освоением с базовых

геометрических фигур (окружность, серединный перпендикуляр, биссектриса угла) и решением задач на построение с помощью циркуля и линейки. На данном этапе тема выполняет ряд ключевых функций, соответствующих требованиям ФГОС к результатам обучения [1].

Тема «Геометрическое место точек» реализует логику-развивающую функцию. В соответствии с ФГОС ООО, метапредметные результаты освоения программы должны отражать овладение логическими действиями определения понятий, обобщения, установления аналогий и классификаций [2]. Понятие ГМТ требует от учащихся понимания двойственного характера характеристического свойства: необходимости и достаточности. Как отмечает А. Д. Александров, формирование представления о замкнутости множества точек, заданного условием, и о необходимости доказательства двух взаимнообратных утверждений закладывает фундамент логической культуры школьников, готовит их к восприятию аксиоматического метода [3].

Метод геометрических мест является универсальным подходом к решению конструктивных задач. Овладение этим методом способствует формированию такого метапредметного результата, как умение создавать, применять и преобразовывать знаково-символические средства, модели и схемы для решения учебных задач [3]. Сведение задачи к нахождению точки пересечения двух линий развивает аналитические и синтетические способности учащихся [5].

На ступени основной школы тема ГМТ обеспечивает пропедевтику аналитических методов. Хотя в явном виде координатный метод в 7 – 9 классах только вводится, работа с характеристическими свойствами ГМТ подготавливает учащихся к восприятию идеи соответствия между геометрическими образами и алгебраическими уравнениями, что создает основу для дальнейшего изучения математики на уровне среднего общего образования.

В соответствии с системно-деятельностным подходом, положенным в основу ФГОС, изучение темы «Геометрических мест точек» должно быть организовано как процесс активного познания, включающий элементы

исследования и самостоятельного открытия знаний. В этом контексте особую роль приобретает использование цифровых образовательных ресурсов и инструментов динамической геометрии. Применение таких сред позволяет учащимся визуализировать процесс образования ГМТ, проводить компьютерные эксперименты, выдвигать и проверять гипотезы, что соответствует требованиям к формированию функциональной грамотности и цифровых компетенций [2].

Кроме того, тема «Геометрические места точек» создает благоприятные условия для организации проектной и учебно-исследовательской деятельности. Возможность самостоятельного изучения свойств различных множеств точек, построения сложных геометрических конфигураций, поиска оригинальных решений задач способствует развитию познавательной мотивации и творческих способностей школьников.

Таким образом, тема «Геометрические места точек» занимает одно из центральных мест в углубленном курсе геометрии основной школы. Ее содержание и методика изучения в полной мере соответствует требованиям ФГОС и федеральных рабочих по математике углубленного уровня, направленным на формирование у обучающихся целостной системы знаний, универсальных учебных действий и компетенций, необходимых для успешной социализации, продолжения образования и профессиональной самореализации в условиях современного информационного общества.

1.4 Анализ учебно-методических пособий по теме «Геометрическое место точек»

Понятие «Геометрическое место точек» выступает связующим звеном между многими темами школьного курса геометрии. Эта тема важна не только для определения фигур, но и для решения задач разного вида от конструктивных до вычислительных и доказательных. Для классов с углубленным изучением математики важно, чтобы тема была изложена наиболее полно, систематично и

строго. Также необходимо большое количество задач разного вида и уровня сложности.

При изучении темы «Геометрическое место точек» авторы подходят по-разному, и, хотя сейчас согласно федеральному перечню учебников рекомендуется использование учебника под редакцией Л. С. Атанасяна, в учебных заведениях встречаются и другие учебные пособия [4].

Учебник Л. С. Атанасяна и др. является наиболее распространённым и используется как для базового и углубленного уровней изучения. В 7 классе понятие «Геометрическое место точек» вводится в главе «Окружность». Понятие окружности, серединного перпендикуляра и биссектрисы рассматриваются как множество точек, удовлетворяющих характеристическому свойству. Метод ГМТ для решения задач используется для построения окружности, описанной и вписанной около треугольника. Также изучается дуга окружности, для которой отрезок виден под определенным углом, вводится в 9 классе при изучении темы «Вписанный угол», но не рассматривается как отдельная тема.

Достоинством учебника является доступность изложения и наличие вычислительных задач, обеспечивающих закрепление базовых навыков. Но главным недостатком является редкое доказательство обратных утверждений, отсутствие применения ГМТ как универсального приема для решения задач на построение, а также небольшое количество задач, в которых необходимо найти самостоятельно определить и найти ГМТ [4].

В углубленных классах используются учебные пособия под авторством А. Д. Александрова и других. Согласно учебнику в 8 классе, отдельный параграф посвящен понятию ГМТ, причем в определении подчеркивается необходимость доказательства взаимобратных утверждений. Рассматриваются серединный перпендикуляр, биссектриса угла, окружность, пара параллельных прямых как ГМТ. Дополнительно изучаются окружность Аполлония и дуга окружности, для которой отрезок виден под данным углом.

Среди достоинств можно выделить логическую строгость изложения, акцент на доказательстве характеристического свойства и наличие задач на применение метода ГМТ. Однако приведенные задачи довольно сложные, которые требуют дополнительного времени и некоторые дополнительные виды ГМТ не рассматриваются [3].

Учебники Шарыгина И. Ф. также предназначены для углубленного уровня изучения. Понятие ГМТ появляется в 7 классе и доопределяется в 8 классе при изучении тема «Окружность». Помимо основных фигур вводятся ГМТ, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна, и ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых. Метод ГМТ активно используется при решении задач на построение. Довольно много задач, в которых требуется самостоятельно определить множество точек, удовлетворяющих характеристическому свойству, и доказать полученный результат.

Достоинством учебника является большое количество исследовательских задач, способствующих развитию навыков самостоятельного открытия ГМТ, а также наличие задач, допускающих несколько способов решения. Как и в предыдущем случае недостатком является высокая сложность задачного материала, что также усложняет изучение темы в классах с более низким уровнем математической подготовки [21].

В учебнике А. Г. Мерзляка и В.М. Полякова понятие «ГМТ» вводится в 7 классе при изучении окружности. Далее в 8 и 9 классе материал пополняется и актуализируется при решении задач на построение, а также при доказательстве утверждений. В 9 классе тема рассматривается с точки зрения координатного метода: выводятся уравнения, а также решаются обратные задачи.

Учебник позволяет более успешно соотнести связи между геометрическим и аналитическим подходами, в нем также много задач на описание ГМТ и применение метода. Недостатком можно назвать пониженное внимание

доказательству необходимости и достаточности, также некоторые более сложные виды фигур не рассматриваются [10].

Иной подход рассматривается в учебнике А. В. Погорелова. Понятие вводится в 9 классе, доказываются основные теоремы. С помощью этих понятий и теорем рассматриваются типовые задачи на построение и на решение методом ГМТ.

Материал изложен довольно четко и лаконично, но понятие вводится поздно, в более ранних классах пропедевтическая работа не проводится, не устанавливается связь между разделами курса, а также недостатком является малое количество заданий для отработки материала [15].

Представим полученные результаты анализа в таблице для наиболее эффективного выбора пособий при изучении темы.

Таблица 1 - Сравнительная характеристика учебных пособий по теме "Геометрическое место точек"

Критерий	Л.С.Атанасян	А.Д.Александров	И.Ф.Шарыгин	А.Г.Мерзляк	А.В.Погорелов
Класс введения понятия	7	8	7	7	9
Наличие отдельного параграфа	нет, изучается в другой теме	есть	нет	нет	есть
Доказательство необходимости достаточности	эпизодически, без акцента	подчеркивается явно	частично	эпизодически	да, в теоремах

Наличие исследовательских задач	отсутст- вуют	присутст- вуют, среднее количе- ство	присутст- вуют, большое количе- ство	присутст- вуют, несколько	отсутст- вуют
Связь с координатным методом	нет	нет	нет	да, уравнения окружнос- ти, прямой	нет
Связь с другими темами курса	слабая, только с окружнос- тью	хорошая, с треуголь- ником, построе- ния	хорошая, с векторами, с преобра- зованиями	хорошая, с координа- тами, уравнения- ми	слабая, изолиро- ванная тема
Объем задач	среднее, около 15- 20	большое, более 20	большое, более 40	большое, более 30	малое, менее 10

Учебные пособия довольно подробно рассматривают эту тему, однако наиболее подходящим для углубленного изучения является учебник А. Д. Александрова с акцентом на доказательство взаимнообратных утверждений. Наиболее эффективным для развития критического мышления за счет большого количества исследовательских задач, требующих самостоятельного поиска и обоснования ГМТ, содержится в учебнике И. Ф. Шарыгина. Учебник А. Г. Мерзляка и В. М. Полякова успешно интегрирует геометрический и аналитический подходы, что способствует установлению связей между разделами геометрии. Учебник Л. С. Атанасяна несмотря на наиболее распространённость, не является наиболее подходящим для изучения ГМТ из-за

малого количества исследовательских задач. Учебник А. В. Погорелова также не является наиболее подходящим для изучения темы.

Можно сделать вывод, что наиболее подходящим для организации процесса изучения темы «Геометрическое место точек» в классах с углубленным уровнем обучения с целью развития критического мышления является учебник А. Д. Александрова в качестве основного теоретического источника, а задачный материал И. Ф. Шарыгина позволяет организовать исследовательскую и проектную деятельность обучающихся.

ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО ТЕМЕ: «ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МЕСТО ТОЧЕК»

2.1 Элективные курсы как средство развития обучающихся

В системе математического образования на уровне основного общего образования особое место занимают классы с углубленным изучением предмета. Для таких классов характерны повышенный уровень абстракции, опережающее введение теоретического материала, акцент на доказательстве и решении нестандартных задач [2]. В этих условиях элективные курсы выступают не просто дополнением к базовой программе, а необходимым инструментом систематизации и углубления знаний, развития математического мышления и подготовки к участию олимпиадах различного уровня.

Под элективным курсом понимается обязательный для посещения учебный курс, направление которого учащимися выбирается самостоятельно [8]. В отличие от факультативных занятий, элективные курсы входят в учебный план школы и оцениваются. Их содержание не дублирует основную образовательную программу, а расширяет и углубляет ее в рамках выбранной предметной области.

Элективный курс направлен на:

- 1) обеспечение перехода от репродуктивного усвоения материала к продуктивному, исследовательскому;
- 2) формирование умения анализировать геометрические конфигурации и выдвигать гипотезы;
- 3) подготовка к решению олимпиадных задач [6].

Содержание элективного курса определяется программой, разрабатываемой учителем с учетом специфики углубленного класса. Важной особенностью таких курсов является возможность включения исторического материала и межпредметных связей. Например, при изучении геометрических мест точек рассматриваются не только базовые конфигурации, но и

дополнительные. Это позволяет учащимся увидеть единство геометрического и аналитического подхода.

Формы организации занятий в углубленных классах должны соответствовать высокому познавательному интересу и развитому абстрактному мышлению. Рекомендуется сочетать:

- 1) лекции с элементами проблемного обучения;
- 2) практикумы по решению задач;
- 3) семинары-дискуссии;
- 4) групповые и индивидуальные исследовательские проекты;
- 5) мини-олимпиады и зачетные работы.

Методы обучения ориентированы на активацию мыслительной деятельности: проблемные ситуации, эвристические беседы, исследовательский метод, аналитико-синтетический подход при решении конструктивных задач [8]. Особое внимание уделяется доказательству необходимости и достаточности – ключевому моменту при изучении ГМТ.

Элективный курс является эффективным средством развития аналитического мышления, формирование логической культуры и подготовки к дальнейшему обучению. Учащиеся не только расширяют свои знания о множествах точек, заданных характеристическим свойством, но и овладевают новыми приемами решения задач.

2.2 Элективный курс по геометрии для обучающихся 8 класса с углубленным изучением математики по теме: «Геометрическое место точек»

1. Пояснительная записка

Математическая подготовка учащихся с углубленным изучением математики предполагает не только расширение фактического материала, но и формирование умений решать нестандартные, исследовательские задачи [2].

Геометрия в этом контексте играет особую роль, поскольку требует развитого пространственного воображения, логической строгости и способности к доказательным рассуждениям. Элективный курс «Геометрическое место точек» ориентирован на обучающихся 8 классов, проявляющих повышенный интерес к математике и имеющий базовую подготовку по планиметрии 7-8 классов.

Предполагаемый курс направлен на углубление и систематизацию знаний о геометрических местах точек – фундаментальном понятии, пронизывающем весь школьный курс геометрии. В рамках базовой программы изучаются лишь три основных ГМТ: окружность, серединный перпендикуляр и биссектриса [1]. Однако метод ГМТ является универсальным инструментом решения задач на построение, доказательство и вычисление, широко используемым на математических олимпиадах и в заданиях повышенной сложности.

Актуальность курса обусловлена тем, что учащиеся углубленных классов нуждаются в систематическом освоении метода ГМТ, включая такие темы как дуга окружности – ГМТ, на которой отрезок виден под данным углом, окружность Аполлония, принцип Карно, радикальная ось двух окружностей, а также координатный метод для описания ГМТ. Данные вопросы не рассматриваются в стандартных учебниках.

Цель курса: формирование у обучающихся целостного представления о геометрических местах точек, овладение методом ГМТ для решения геометрических задач, развитие аналитического и критического мышления.

Задачами курса являются:

- 1) углубить знание характеристических свойств основных ГМТ;
- 2) изучить связь ГМТ с другими геометрическими объектами;
- 3) познакомить с дополнительными видами ГМТ;
- 4) научить отыскивать ГМТ с помощью координатного метода;
- 5) сформировать умение решать задачи различного уровня сложности;
- 6) подготовить обучающихся к участию в математических олимпиадах.

2. Место курса в системе углубленного изучения математики

Курс рассчитан на учащихся 8-9 классов, изучающих математику на углублённом уровне. Элективный курс проводится за счет часов внеурочной деятельности или компонента образовательной организации. Общая трудоемкость курса – 18 часов, 1 час в неделю в течении полугодия. Курс носит предметную направленность и способствует обучающимся подготовиться к дальнейшему изучению технических и математических дисциплин в учебных заведениях [6].

3. Учебно-тематический план

№	Тема занятия	Количество часов
1	Понятие геометрического места точек. Характеристическое свойство. Необходимость и достаточность.	1
2	Биссектриса как ГМТ. Вписанная окружность.	2
3	Серединный перпендикуляр. Описанная окружность.	2
4	Дуга окружности – ГМТ, из которой отрезок виден под данным углом.	2
5	Окружность Аполлония.	2
6	Отыскание ГМТ метод координат	2
7	Принцип Карно	2
8	Радикальная ось как ГМТ	2
9	Применение метода ГМТ к решению задач	2
10	Итоговый зачет	1
Итого		18

4. Содержание программы

Тема 1. Понятие геометрического места точек.

Введение строго определения ГМТ. Анализ двойственного характера характеристического свойства: доказательство необходимого и достаточного условий. Разбор типичных ошибок при доказательстве.

Форма занятия: лекция с элементами беседы, решение простейших задач на распознавание ГМТ.

Тема 2. Биссектриса как ГМТ. Вписанная окружность.

Доказательство теоремы: биссектриса угла есть ГМТ, равноудаленных от сторон угла. Следствие: центр вписанной окружности треугольника. Признак вписываемости окружности в четырехугольник. Решение задач на нахождение точек, равноудаленных от сторон угла, и на доказательство принадлежности точек биссектрисе.

Форма: комбинированное занятие.

Тема 3. Серединный перпендикуляр как ГМТ. Описанная окружность.

Доказательство теоремы: серединный перпендикуляр к отрезку есть ГМТ, равноудаленных от концов отрезка. Следствие: центр описанной окружности треугольника. Признак описываемости четырехугольника. Решение задач на доказательство и нахождение объектов.

Форма: комбинированное занятие.

Тема 4. Дуга окружности – ГМТ, из которой отрезок виден под данным углом.

Теорема и вписанном угле и обратная ей. Рассмотрение частных случаев. Решение задач на нахождение точек, из которых виден под данным углом.

Форма: лекция с элементами практики, групповое решение задач.

Тема 5. Окружность Аполлония.

Определение окружности Аполлония. Свойства окружности Аполлония. Рассмотрение вырожденного случая $k=1$. Решение задач на нахождение ГМТ и доказательство.

Форма: комбинированное занятие.

Тема 6. Отыскание ГМТ методом координат.

Введение прямоугольной системы координат. Вывод уравнения ГМТ на основе метрических соотношений. Сравнение геометрического и аналитического методов. Решение задач на описание ГМТ с помощью уравнений.

Форма: лекция с элементами исследовательской работы.

Тема 7. Принцип Карно.

Формулировка принципа Карно. Рассмотрение принципа Карно с точки зрения аналитического метода. Применение принципа Карно к доказательству вписанного четырехугольника и принадлежности точки окружности.

Форма: лекция, решение задач повышенной сложности.

Тема 8. Радикальная ось как ГМТ.

Определение радикальной оси. Доказательство. Решение задач на нахождение радикальной оси и ее применение.

Форма: комбинированное занятие.

Тема 9. Применение метода ГМТ при решении задач.

Разбор задач различного уровня.

Форма: практикум, групповая работа, дискуссия.

Тема 10. Итоговый зачет.

Проведения зачетного занятия путем решения задач из открытого банка задач. Подведение итогов курса.

5. Основные требования к уровню освоения курса.

Учащиеся должны *знать*:

- 1) определение ГМТ и логическую структуру доказательства;
- 2) характеристические свойства рассматриваемых фигур;
- 3) формулы и выводы окружности Аполлония, принципа Карно;
- 4) связь вписанной и описанной окружности с точками пересечения биссектрис и серединных перпендикуляров.

Учащиеся должны *уметь*:

- 1) формулировать и доказывать является ли данная фигура ГМТ;

- 2) применять координатный метод для вывода уравнений ГМТ;
- 3) аргументировано обосновывать выбор метода решения.

Формы работы: индивидуальная, групповая.

Формы деятельности: лекция, практикум, дискуссия.

6. Календарно-тематическое планирование.

№	Тема	Часы	Форма работы
III четверть (9 часов)			
1	Понятие геометрического места точек. Характеристическое свойство. Необходимость и достаточность.	1	Лекция с элементами беседы
2-4	Биссектриса как ГМТ. Вписанная окружность.	2	Комбинированное занятие
5-6	Серединный перпендикуляр. Описанная окружность.	2	Комбинированное занятие
7-8	Дуга окружности – ГМТ, из которой отрезок виден под данным углом.	2	Комбинированное занятие
9	Окружность Аполлония.	2	Комбинированное занятие
IV четверть (9 часов)			
10-11	Отыскание ГМТ методом координат	2	Лекция с элементами исследовательской работы
12-13	Принцип Карно	2	Комбинированное занятие

14-15	Радикальная ось как ГМТ	2	Комбинированное занятие
16-17	Применение метода ГМТ к решению задач	2	Практикум
18	Итоговый зачет	1	Самостоятельная работа

2.3 Разработка дидактических материалов для элективного курса по теме: «Геометрическое место точек»

Для обеспечения систематической работы учащихся на занятиях элективного курса разработан комплект дидактических материалов, представленный набором рабочих листов по всем темам курса и банком задач для итогового зачета.

Каждый рабочий лист представляет собой лист с краткой теорией и задачами, которые необходимо решить, предназначенный для индивидуальной или групповой работы на уроке. Решения задач учащиеся оформляют в отдельных тетрадях, что позволяет сохранить черновики, аккуратно записывать доказательства и возвращаться к ранее решенным задачам.

Рабочий лист состоит из:

- 1) темы занятия;
- 2) краткой теории – сжатого изложения ключевых определений, теорем, формул, необходимых для решения задач по этой теме;
- 3) перечня задач различной сложности.

Всего разработано 9 рабочих листов. Листы печатаются перед занятием и раздаются каждому учащемуся. Учащиеся пользуются теоретической справкой и решают задания в зависимости от формы работы, выбранной педагогом. При

затруднении обращаются к учителю за консультацией. После завершения работы рабочие листы остаются у учащихся как опорный конспект.

Также к наиболее сложным темам представлены решения с комментариями, чтобы педагог мог их использовать при затруднениях в подготовке.

Рабочий лист 1. Понятие геометрического места точек. Необходимость и достаточность.

Геометрическое место точек (ГМТ) – это множество всех точек плоскости, обладающих заданным характеристическим свойством.

Чтобы доказать, что некоторая фигура F является геометрическим местом точек, обладающим свойством необходимо доказать два *утверждения*:

1. (*Необходимость*) Любая точка, обладающая указанным свойством, принадлежит фигуре F .
2. (*Достаточность*) Любая точка фигуры F обладает указанным свойством.

! Только после доказательства обоих утверждений можно утверждать, что фигура F является искомым ГМТ.

1. Является ли окружность ГМТ точек, равноудаленных от ее центра? Ответ обоснуйте.

2. Известно, что фигура F – ГМТ, удовлетворяющих некоторому свойству P . Что можно сказать о точка не принадлежащих фигуре F .

3. Назовите ГМТ, расположенных от данной точки O на расстояние 2,2 см.

4. Назовите ГМТ, расположенных на данном расстоянии от точек A и B .

5. Сформулируйте определение окружности как ГМТ. Докажите, что окружность действительно является ГМТ.

6. На данной прямой найдите точку, одинаково удаленную от двух данных точек. Всегда ли задача имеет решение? Сколько решений может быть?

7. Пусть M – произвольная точка внутри угла. Докажите, что множество точек, равноудаленных от сторон угла, является биссектрисой этого угла. В чем отличие этого ГМТ от серединного перпендикуляра?

Рабочий лист 2. Биссектриса угла как ГМТ. Вписанная окружность.

Биссектриса угла – геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

Центр вписанной окружности – точка, равноудаленная от всех сторон многоугольника, в который вписана окружность.

Центр вписанной окружности треугольника – точка пересечения его биссектрис

Теорема (признак). В выпуклый четырёхугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов A и B , пересекающиеся в точке O . Докажите, что точка O равноудалена от всех сторон треугольника.

2. В треугольнике ABC угол $\angle ABC = 120^\circ$. Проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

3. Докажите, что в любой треугольник можно вписать окружность.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $AB + CD = BC + AD$. Докажите, что тогда и только тогда в него можно вписать окружность.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC отложены равные отрезки AE и CF . Окружность через B , C , E и окружность через A , B , F пересекаются в точках V и D . Докажите, что BD – биссектриса угла ABC .

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ провели биссектрисы l_a , l_b , l_c и l_d внешних углов при вершинах A , B , C и D соответственно. Точки пересечения прямых l_a и l_b , l_b и l_c , l_c и l_d , l_d и l_a обозначили через K , L , M и N . Известно, что три перпендикуляра, опущенных из точки K на AB , из L на BC ,

из M на CD пересекаются в одной точке. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – вписанный.

Решения для задач из этого рабочего листа приведены ниже.

1. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов A и B , пересекающиеся в точке O . Докажите, что точка O равноудалена от всех сторон треугольника.

Решение:

Точка O лежит на биссектрисе угла A , значит, она равноудалена от сторон AB и AC .

Точка O лежит на биссектрисе угла B , значит, она равноудалена от сторон AB и BC .

Следовательно, O одинаково удалена от всех трёх сторон AB , BC и AC .
Утверждение доказано.

2. В треугольнике ABC угол $\angle ABC = 120^\circ$. Проведены биссектрисы AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$.

Решение:

Продолжим сторону AB за точку B , тогда BC биссектриса угла B_1BK , а значит точка A_1 равноудалена от сторон B_1B и BK . (рисунок 10)

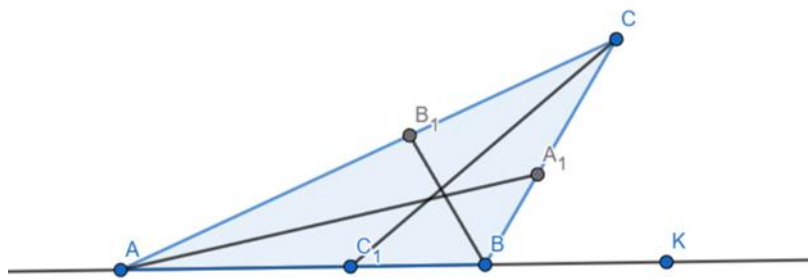


Рисунок 10

Учитывая, что точка A_1 лежит на биссектрисе угла BAC , а значит и равноудалена от его сторон получаем, что A_1 равноудалена от сторон B_1B и B_1C_1 ,

а значит лежит на биссектрисе $\angle BB_1C$. Аналогично доказываем, что B_1C_1 биссектриса $\angle AB_1B$.

Следовательно, $\angle A_1B_1C_1 = 90^\circ$, как угол между биссектрисами смежных углов.

3. Докажите, что в любой треугольник можно вписать окружность.

Решение:

Проведём биссектрисы углов A и B треугольника ABC . Так как внутренние углы меньше 180° , эти биссектрисы пересекаются в некоторой точке O внутри треугольника. По свойству ГМТ (биссектриса – множество точек, равноудалённых от сторон угла):

O лежит на биссектрисе $\angle A \Rightarrow O$ равноудалена от AB и AC ;

O лежит на биссектрисе $\angle B \Rightarrow O$ равноудалена от AB и BC .

Значит, точка O равноудалена от всех трёх сторон. Обозначим это расстояние через r . Опустим из O перпендикуляры на стороны – их основания лежат на сторонах (так как O внутри треугольника), а длины равны r . Окружность с центром O и радиусом r касается каждой из сторон треугольника (имеет с ней ровно одну общую точку). Таким образом, в любой треугольник можно вписать окружность.

4. В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB + CD = BC + AD$. Докажите, что тогда и только тогда в него можно вписать окружность.

Решение:

1. Воспользуемся методом от противного. Пусть для четырехугольника $ABCD$ выполняется условие $AB + CD = BC + DA$. Проведем биссектрисы углов A и B и обозначим через O точку их пересечения.

Точка O равноудалена от сторон AD и AB , а также от сторон BA и BC . Значит, точка O равноудалена от трех сторон AB , AD и BC , поэтому мы можем построить окружность с центром в O , касающуюся этих трех сторон четырехугольника $ABCD$. Пусть эта окружность не касается стороны CD . Для определенности можно считать, что она не пересекает стороны CD .

Проведем через C прямую, касающуюся этой окружности, и обозначим через D_1 ее точку пересечения с AD . Имеем два четырехугольника $ABCD$ и $ABCD_1$, в каждом из которых суммы противоположных сторон равны. В первом - по условию теоремы, во втором потому, что он описанный. Запишем оба эти равенства:

$$AB + CD = BC + AD, AB + CD_1 = BC + AD_1.$$

Вычтем второе равенство из первого. Получим: $CD - CD_1 = DD_1$ или $CD = CD_1 + DD_1$. Последнее равенство означает, что точки C , D и D_1 лежат на одной прямой, так как в противном случае оно противоречило бы неравенству треугольника. Значит, точки D и D_1 совпадают, и четырехугольник $ABCD$ является описанным.

2. Докажем, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеет место равенство $AB + CD = BC + AD$, то найдется точка, равноудаленная от всех сторон этого четырехугольника.

Для этого достаточно установить, что биссектрисы трех его углов, например углов A , B и D , пересекаются в одной точке. (Тогда точка пересечения соответствующих биссектрис равноудалена от AB и AD , BA и BC , AD и DC , т. е. равноудалена от всех четырех сторон.)

Пусть для определенности $AB > BC$. Из условия $AB + CD = BC + AD$ следует, что $AB - BC = AD - CD$. Возьмем на AB точку K так, что $BK = BC$, $AK = AB - BC$, а на AD - точку такую, что $MD = CD$, $AM = AD - CD$. Как видим, $AK = AM$.

Поскольку треугольники MAK , KBC и CDM - равнобедренные с основаниями MK , KC и CM , биссектрисы углов A , B и D являются серединными перпендикулярами к отрезкам MK , KC и CM . Это означает, что они пересекаются в одной точке - центре окружности, описанной около треугольника MKC .

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC отложены равные отрезки AE и CF . Окружность через B, C, E и окружность через A, B, F пересекаются в точках B и D . Докажите, что BD – биссектриса угла ABC . (рисунок 11)

Решение:

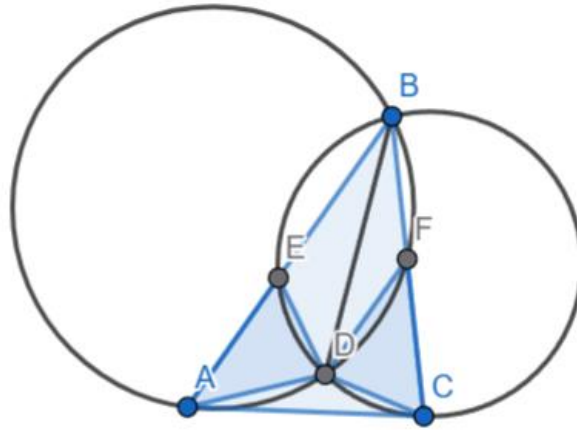


Рисунок 11

Четырёхугольник $BCDE$ – вписанный, поэтому $\angle FCD = \angle BCD = \angle AED$.

Аналогично $\angle DAE = \angle CFD$. Значит, треугольники CFD и EAD равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Высоты DP и DQ этих треугольников, проведённые из соответствующих вершин, равны, поэтому точка D равноудалена от сторон BA и BC угла ABC . Следовательно, BD – биссектриса этого угла.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ провели биссектрисы l_a, l_b, l_c и l_d внешних углов при вершинах A, B, C и D соответственно. Точки пересечения прямых l_a и l_b, l_b и l_c, l_c и l_d, l_d и l_a обозначили через K, L, M и N . Известно, что три перпендикуляра, опущенных из точки K на AB , из L на BC , из M на CD пересекаются в одной точке. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ – вписанный. (рисунок 12)

Решение:

Обозначим через O точку пересечения перпендикуляров, опущенных из точки K на AB , из L на BC , из M на CD .

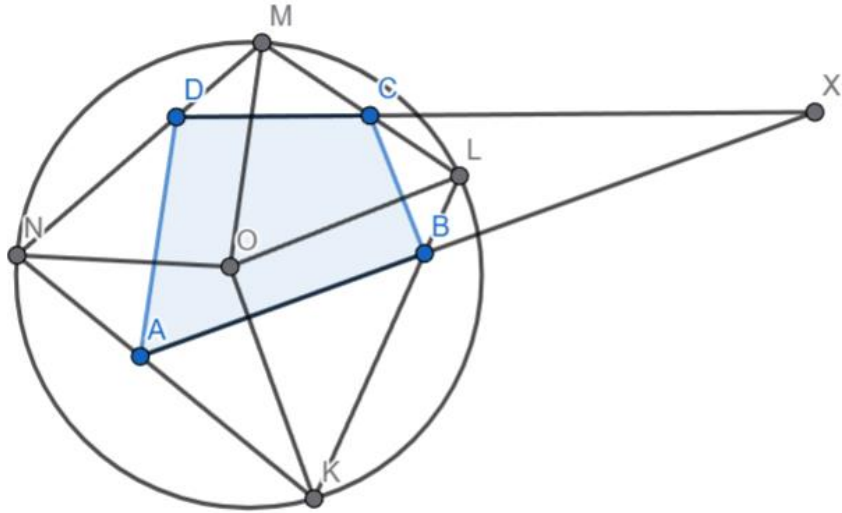


Рисунок 12

Обозначим также $\angle BAK = \angle DAN = \alpha$, $\angle CBL = \angle ABK = \beta$, $\angle DCM = \angle BCL = \gamma$, $\angle ADN = \angle CDM = \delta$.

Тогда $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360^\circ$ как сумма внешних углов четырёхугольника ABCD. Из треугольников АКВ и СМД находим, что $\angle АКВ + \angle СМД = (180^\circ - \alpha - \beta) + (180^\circ - \gamma - \delta) = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ$.

Значит, четырёхугольник KLMN – вписанный. По условию $LO \perp BC$ и $OM \perp CD$, поэтому $\angle CLO = \angle CMO = 90^\circ - \gamma$.

Значит, треугольник OLM – равнобедренный, $LO = OM$.

Аналогично, $LO = OK$. Следовательно, O – центр описанной окружности четырёхугольника KLMN. Поскольку LOM и LOK – центральные углы этой окружности, а LNM и LNK – вписанные, то $\angle LNM = \frac{1}{2} \angle LOM = \frac{1}{2} (180^\circ - 2(90^\circ - \gamma)) = \gamma$, $\angle LNK = \frac{1}{2} \angle LOK = \frac{1}{2} (180^\circ - 2(90^\circ - \beta)) = \beta$.

Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке X (для определённости будем считать, что X лежит на луче BA). Поскольку L – точка пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C треугольника BXC, то она лежит на биссектрисе внутреннего угла при вершине X этого треугольника. Аналогично, точка N лежит на той же биссектрисе. Таким образом, прямая LN содержит биссектрису угла, образованного прямыми AB и CD, либо параллельна AB и CD, если $AB \parallel CD$. В любом случае, прямая LN образует равные углы с AB и CD.

Рассмотрим случай пересечения прямых AB и CD . Поскольку $\angle LNM$ и $\angle LNK$ – внешние углы треугольников DXN и AXN , а по доказанному $\angle DXN = \angle AXN$, то $\angle LNM - \angle CDM = \angle LNK - \angle BAK$, или $\gamma - \delta = \beta - \alpha$.

Значит, $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 90^\circ$, а $\angle BAD + \angle BCD = (180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\gamma) = 360^\circ - 2(\alpha + \gamma) = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$.

Следовательно, $ABCD$ – вписанный четырёхугольник.

Рабочий лист 3. Серединный перпендикуляр. Описанная окружность.

Серединный перпендикуляр к отрезку – геометрическое место точек, равноудаленных от концов этого отрезка.

Центр описанной окружности — это точка, которая равноудалена от всех вершин многоугольника, вокруг которого эта окружность описана.

Центр описанной окружности треугольника – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Теорема (признак): около четырехугольника можно описать окружность т. и т. т., когда сумма его противоположных углов равна 180° .

1. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку является ГМТ, равноудаленных от его концов.

2. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

3. Из середины гипотенузы восставлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком, который делит угол треугольника в отношении $2 : 5$ (меньшая часть – при гипотенузе). Найдите этот угол.

4. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $AC = 10$. Из середины D стороны AB проведён перпендикуляр DE к стороне AB до пересечения со стороной BC в точке E . Периметр треугольника ABC равен 40. Найдите периметр треугольника AEC .

5. В треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают сторону AC в точках P и Q соответственно, причём точка P лежит на

отрезке AQ. Докажите, что описанные окружности треугольников PBC и QBA пересекаются на биссектрисе угла PBQ.

Решения приведены ниже.

1. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку является ГМТ, равноудаленных от его концов.

Решение:

Если точка М равноудалена от концов отрезка АВ и не принадлежит этому отрезку, то медиана МС равнобедренного треугольника АМВ является его высотой, следовательно, МС – серединный перпендикуляр к отрезку АВ. Для середины отрезка утверждение очевидно.

Обратно, каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку АВ, отличная от его середины, равноудалена от его концов, так как высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой. Для середины отрезка утверждение очевидно.

2. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Решение:

Проведём серединные перпендикуляры к сторонам АВ и АС треугольника АВС. Они пересекаются, так как перпендикулярные им прямые АВ и АС пересекаются.

Пусть О – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам АВ и АС. Тогда по свойству серединного перпендикуляра к отрезку $OA = OB$ и $OA = OC$, поэтому $OB = OC$. Значит, точка О лежит на серединном перпендикуляре к отрезку ВС, то есть серединный перпендикуляр к стороне ВС также проходит через точку О.

! Поскольку точка О равноудалена от всех вершин треугольника АВС, она является центром его описанной окружности.

3. Из середины гипотенузы восставлен перпендикуляр до пересечения с катетом, и полученная точка соединена с концом другого катета отрезком,

который делит угол треугольника в отношении $2 : 5$ (меньшая часть – при гипотенузе). Найдите этот угол.

Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Пусть M — середина гипотенузы AB . Из точки M восставлен перпендикуляр к AB , который пересекает катет BC в точке K . Отрезок AK делит угол A в отношении $2:5$, причём меньшая часть прилегает к гипотенузе AB . Требуется найти угол A .

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — это середина гипотенузы, поэтому $MA=MB=MC=R$. Множество точек, равноудалённых от концов отрезка, — его серединный перпендикуляр. По условию $MK \perp AB$ и M — середина AB , значит, MK — серединный перпендикуляр к гипотенузе. По свойству этого геометрического места точек любая точка на нём равноудалена от концов отрезка, следовательно, $KA=KB$, и треугольник AKB равнобедренный с основанием AB .

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle B = 90^\circ - \alpha$. В равнобедренном треугольнике AKB углы при основании равны: $\angle KAB = \angle KBA$. Отрезок AK делит угол A на две части с отношением $2:5$, меньшая часть при гипотенузе — это $\angle KAB$. Обозначим $\angle KAB = 2x$, $\angle CAK = 5x$, тогда $\alpha = 7x$.

В треугольнике AKB угол $\angle KBA = \angle KAB = 2x$. Точка K лежит на катете BC , поэтому луч BK совпадает с BC , и угол $\angle KBA$ есть не что иное, как угол B исходного треугольника. Отсюда получаем равенство $2x = 90^\circ - 7x$, то есть $9x = 90^\circ$ и $x = 10^\circ$. Искомый угол A равен $\alpha = 7x = 70^\circ$.

4. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC$, $AC = 10$. Из середины D стороны AB проведён перпендикуляр DE к стороне AB до пересечения со стороной BC в точке E . Периметр треугольника ABC равен 40. Найдите периметр треугольника AEC .

Решение:

Обозначим стороны равнобедренного треугольника ABC : $AB=BC=x$, основание $AC=10$. Периметр равен 40, поэтому $2x+10=40$, откуда $x=15$. Боковые стороны $AB=BC=15$, основание $AC=10$.

Точка D — середина стороны AB , значит $AD=DB=7,5$. Перпендикуляр DE к AB восстановлен из середины AB , поэтому DE — серединный перпендикуляр к отрезку AB . По свойству геометрического места точек, равноудалённых от концов отрезка, любая точка серединного перпендикуляра к AB равноудалена от A и B . Точка E лежит на этом перпендикуляре и на стороне BC , следовательно, $EA=EB$.

По условию E лежит на BC , значит, $BC=BE+EC$. Так как $BE=AE$, получаем $BC=AE+EC$.

Периметр треугольника AEC равен $AE+EC+AC=BC+AC=15+10=25$.

5. В треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают сторону AC в точках P и Q соответственно, причём точка P лежит на отрезке AQ . Докажите, что описанные окружности треугольников PBC и QBA пересекаются на биссектрисе угла PBQ . (рисунок 13)

Решение:

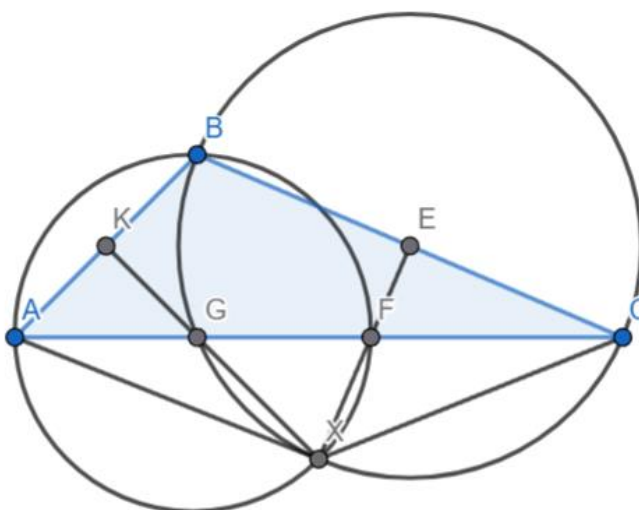


Рисунок 13

Пусть X — точка пересечения описанных окружностей треугольников PBC и QBA , а $\angle QBC = \angle BCP = \alpha$. Тогда $\angle AQB = 2\alpha$.

Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, получим, что $\angle PXB = \angle PCB = \alpha$ и $\angle AXB = \angle AQB = 2\alpha$. Следовательно, XP – биссектриса угла X в треугольнике AXB .

Докажем, что точки X , P и K лежат на одной прямой.

Серединный перпендикуляр KP к стороне AB и биссектриса XP угла X кроме общей точки P имеют ещё одну общую точку: середину дуги AB описанной окружности треугольника AXB . Следовательно, эти прямые совпадают.

Рабочий лист 4. Дуга окружности

Теорема. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Следствие. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны.

Геометрическим место точек, из которых *отрезок виден под данным углом*, представляет собой дугу окружности.

1. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

2. Дан равносторонний треугольник ABC . Из его внутренней точки M опущены перпендикуляры MA' , MB' , MC' на стороны. Найдите геометрическое место точек M , для которых треугольник $A'B'C'$ – прямоугольный.

3. Точка O лежит внутри ромба $ABCD$. Угол $\angle DAB$ равен 110° , углы $\angle AOD$ и $\angle BOC$ равны 80° и 100° соответственно. Чему может быть равен угол $\angle AOB$?

4. Через данную точку на плоскости проводятся всевозможные прямые, пересекающие данную окружность. Найти геометрическое место середин получившихся хорд.

5. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD . На отрезке AB взяли точку M так, что $AM=AC$, а на отрезке CD – точку N так, что $DN=DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD .

6. На стороне BC выпуклого четырёхугольника ABCD взяты точки E и F (точка E ближе к точке B, чем точка F). Известно, что $\angle BAE = \angle CDF$ и $\angle EAF = \angle FDE$. Докажите, что $\angle FAC = \angle EDB$.

Решения ниже.

1. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом.

Решение:

Пусть AB — данный отрезок, а данный угол равен α . Построим два треугольника ABC и ABC' так, чтобы точки C и C' лежали по разные стороны от прямой AB и $\angle ACB = \angle AC'B = \alpha$. Опишем окружности около этих треугольников. Докажем, что искомое геометрическое место точек — это две дуги построенных окружностей: дуга AB описанной окружности треугольника ABC, содержащая точку C, и дуга AB описанной окружности треугольника ABC', содержащая точку C'.

Если точка M, отличная от A и B, лежит на первой из этих дуг, то по теореме о вписанных углах, опирающихся на одну и ту же дугу $\angle AMB = \angle ACB = \alpha$.

Аналогично, для точки, лежащей на второй дуге.

Обратно, пусть точка N такова, что $\angle ANB = \alpha$. Предположим, что при этом точки N и C лежат по одну сторону от прямой AB. Докажем, что точка N лежит на первой из построенных дуг. Допустим, что это не так. Если точка N расположена внутри окружности, то продолжив отрезок AN за точку N, получим точку K пересечения луча AN с окружностью.

Тогда $\angle AKB = \angle ACB = \alpha = \angle ANB$, что невозможно, т.к. $\angle ANB$ — внешний угол треугольника BKN, а тогда $\angle ANB = \angle AKB + \angle KBN > \angle AKB$.

Аналогично для случая, когда точка N лежит вне окружности.

Если точки N и C лежат по разные стороны от прямой AB, то рассуждая аналогично, докажем, что точка N лежит на второй из построенных дуг.

Таким образом, мы доказали, что из каждой точки построенных дуг (кроме А и В) отрезок АВ виден под углом α , и обратно, если из какой-то точки отрезок АВ виден под углом α , то эта точка лежит на одной из построенных дуг.

2. Дан равносторонний треугольник ABC. Из его внутренней точки М опущены перпендикуляры МА', МВ', МС' на стороны. Найдите геометрическое место точек М, для которых треугольник А'В'С' – прямоугольный.

Решение:

Пусть точки А', В' и С' лежат на сторонах ВС, АС и АВ соответственно. Предположим, что $\angle A'C'B' = 90^\circ$.

Четырехугольник СА'МВ' вписанный, значит, $\angle B'A'M = \angle B'CM$. Аналогично $\angle C'A'M = \angle C'BM$.

Поэтому $\angle B'A'C' = 90^\circ \Leftrightarrow \angle B'CM + \angle C'BM = 90^\circ \Leftrightarrow \angle MCB + \angle C'BM = 60^\circ + 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ \Leftrightarrow \angle BMC = 150^\circ$.

Итак, множество точек М, для которых $\angle A'C'B' = 90^\circ$, – дуга окружности, проходящей через точки А и В, вмещающая угол в 150° . А полным ответом будет объединение трёх таких дуг.

3. Точка О лежит внутри ромба ABCD. Угол $\angle DAB$ равен 110° , углы $\angle AOD$ и $\angle BOC$ равны 80° и 100° соответственно. Чему может быть равен угол $\angle AOB$? (рисунок 14)

Решение:

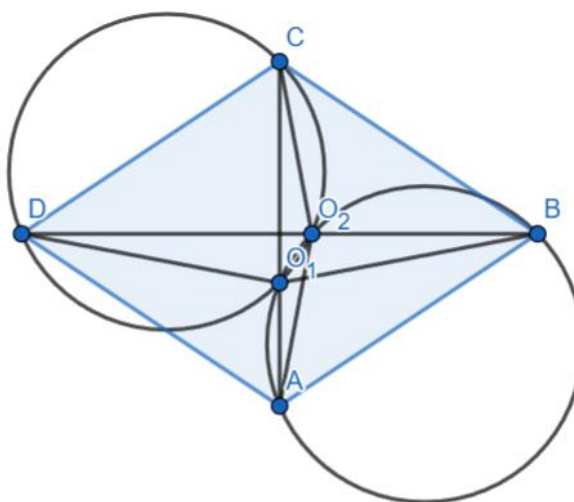


Рисунок 14

Заметим, что геометрическое место точек O , из которых отрезок AD виден под углом 80° , и лежащих по ту же сторону от AD , что и точка B , – это дуга окружности, проходящей через точки A и D , а геометрическое место точек O , из которых отрезок BC виден под углом 100° , и лежащих по ту же сторону от BC , что и точка A , – это дуга окружности, проходящей через точки B и C . Искомая точка O должна лежать на пересечении этих двух дуг.

Следовательно, таких точек может быть не более двух. Укажем две точки, удовлетворяющие условию задачи. Первая точка O_1 лежит на диагонали AC , причём $\angle BO_1C = 100^\circ$.

Тогда $\angle AO_1B = 180^\circ - \angle BO_1C = 80^\circ$, а т.к. точка D симметрична точке B относительно прямой AC , то $\angle AO_1D = \angle AO_1B = 80^\circ$, что и требуется в условии.

Аналогично, вторая точка O_2 лежит на диагонали BD , причём $\angle BO_2C = 100^\circ$. В этом случае $\angle AO_2D = 80^\circ$ и $\angle AO_2B = 100^\circ$.

Осталось заметить, что точки O_1 и O_2 различны (они лежат на разных диагоналях ромба и отличны от точки пересечения диагоналей) и обе лежат внутри ромба.

4. Через данную точку на плоскости проводятся всевозможные прямые, пересекающие данную окружность. Найти геометрическое место середин получившихся хорд. (рисунок 15)

Решение:

Искомое геометрическое место середин хорд – это дуга окружности, построенной на отрезке, соединяющем данную точку и центр данной окружности, как на диаметре, лежащая внутри данной окружности (в частности, если точка лежит внутри окружности, то получается вся окружность).

Пусть O – центр данной окружности, M – данная точка, l – произвольная прямая, пересекающая окружность и проходящая через точку M , N – середина хорды, получающейся при пересечении прямой окружности.

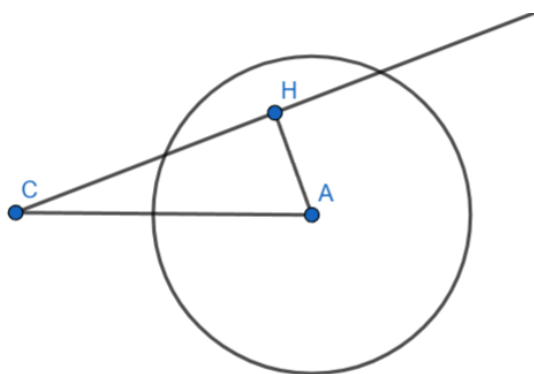


Рисунок 15

Воспользуемся известной теоремой: радиус перпендикулярен хорде тогда и только тогда, когда он делит ее пополам. Из этой теоремы следует, что угол МНО – прямой. Из обратной теоремы о величине угла, опирающегося на диаметр, следует, что точка Н лежит на окружности с диаметром ОМ. Обратно, пусть Н – точка, лежащая на окружности с диаметром ОМ и внутри данной окружности. По прямой теореме о величине угла, опирающегося на диаметр, получаем, что прямые МН и НО перпендикулярны. Применив теорему о радиусе, перпендикулярном хорде, еще раз, получим, что К – середина хорды, образованной прямой, проходящей через точку М.

5. В окружности проведены две пересекающиеся хорды АВ и CD. На отрезке АВ взяли точку М так, что $AM=AC$, а на отрезке CD – точку N так, что $DN=DB$. Докажите, что если точки М и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD. (рисунок 16)

Решение:

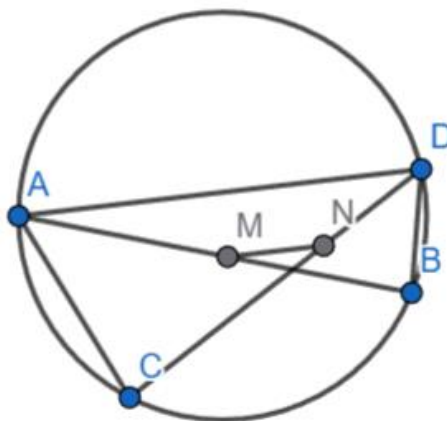


Рисунок 16

Поскольку $\angle CAB = \angle CDB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, то $\angle CMB = \angle CNB$ как внешние углы равнобедренных треугольников $\triangle ACM$ и $\triangle DBM$ с соответственно равными углами. Таким образом, отрезок BC виден из точек M и N под одним и тем же углом. Значит, эти точки лежат на одной окружности. Поэтому

$$\angle BMN = \angle BCN = \angle BAD.$$

Следовательно, $MN \parallel AD$.

6. На стороне BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки E и F (точка E ближе к точке B , чем точка F). Известно, что $\angle BAE = \angle CDF$ и $\angle EAF = \angle FDE$. Докажите, что $\angle FAC = \angle EDB$. (рисунок 17)

Решение:

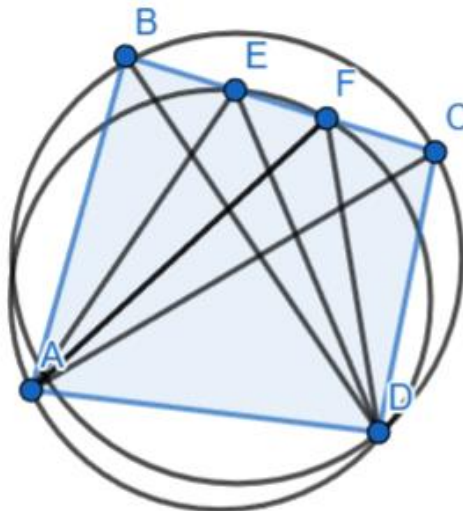


Рисунок 17

Поскольку $\angle EAF = \angle FDE$, то из точек A и D , лежащих по одну сторону от прямой EF , отрезок EF виден под одним и тем же углом. Значит, точки A, D, E и F лежат на одной окружности. Поэтому $\angle AEF + \angle ADF = 180^\circ$. Поскольку $\angle AEF$ – внешний угол треугольника ABE , то $\angle ABE = \angle AEF - \angle BAE = (180^\circ - \angle ADF) - \angle CDF = 180^\circ - (\angle ADF + \angle CDF) = 180^\circ - \angle ADC$.

Значит, четырёхугольник $ABCD$ – вписанный. Поэтому $\angle BAC = \angle BDC$.

Следовательно, $\angle FAC = \angle BAC - \angle BAE - \angle EAF = \angle BDC - \angle CDF - \angle FDE = \angle EDB$, что и требовалось доказать.

Рабочий лист 5. Окружность Аполлония

Окружностью Аполлония называется геометрическое место точек, для которых отношение до двух фиксированных точек А и В постоянно.

Свойство. Центр окружности Аполлония лежит на отрезке АВ.

1. Найдите геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до двух данных точек относятся как $m : n$

2. На плоскости даны точки А и В. Доказать, что множество всех точек М, удалённых от А в 3 раза больше, чем от В, есть окружность.

3. На плоскости дан отрезок ВС. Найдите геометрическое место точек А плоскости, для которых медиана, проведённая из вершины С треугольника АВС, равна стороне АВ.

4. Точки А, В и С последовательно расположены на одной прямой, причём точка В лежит между А и С, $AB \neq BC$. Возьмём произвольную окружность с центром В, не содержащую внутри себя точек А и С, и обозначим через М точку пересечения касательных к этой окружности, проведённых через А и С. Найдите геометрическое место точек М.

5. Докажите, что внутри остроугольного треугольника существует такая точка, что основания перпендикуляров, опущенных из неё на стороны, являются вершинами равностороннего треугольника.

Решения для задач ниже.

1. Найдите геометрическое место точек, расстояния от каждой из которых до двух данных точек относятся как $m : n$.

Решение:

Введём систему координат на плоскости так, чтобы точки А и В имели координаты $(-a;0)$ и $(a;0)$ соответственно.

Если точка Р имеет координаты $(x;y)$, то $\frac{AP^2}{BP^2} = \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$.

Уравнение $\frac{AP^2}{BP^2} = \frac{m^2}{n^2}$ приводится к виду:

$$\left(x + \frac{a(m^2 + n^2)}{n^2 - m^2}\right)^2 + y^2 = \frac{2mn}{n^2 - m^2}^2$$

Это уравнение окружности с центром $(\frac{a(m^2+n^2)}{n^2-m^2}; 0)$ и радиусом $\frac{2mn}{|n^2-m^2|}$.

Полученная окружность называется окружностью Аполлония для случая $m \neq n$, в противном случае мы получаем серединный перпендикуляр к отрезку.

2. На плоскости даны точки А и В. Доказать, что множество всех точек М, удалённых от А в 3 раза больше, чем от В, есть окружность.

Решение:

Решим задачу координатным методом. Введём систему координат таким образом, чтобы А находилась в начале координат, а В имела координаты (1,0).

Пусть точка М(х,у) – искомая. Тогда $1/3 = MB/MA = \sqrt{\frac{(x-1)^2+y^2}{x^2+y^2}}$. Отсюда

получаем $x^2+y^2=9((x-1)^2+y^2)$, $8x^2-18x+8y^2+9=0$,

$$x^2-9/4 x+y^2+9/8=0;$$

$$x^2-2 \cdot 9/8 x+(9/8)^2+y^2+9/8-(9/8)^2=0;$$

$$(x-9/8)^2+y^2=(9/8)^2-9/8.$$

Получили уравнение окружности. Следовательно, все точки М данного множества лежат на окружности. Далее, так как все наши преобразования были равносильными, то любая точка, лежащая на окружности, заданной получившимся уравнением, будет принадлежать данному множеству.

3. На плоскости дан отрезок ВС. Найдите геометрическое место точек А плоскости, для которых медиана, проведённая из вершины С треугольника АВС, равна стороне АВ.

Решение:

На продолжении данного отрезка ВС за точку С отложим отрезок CD=BC. Пусть А - точка, для которой медиана СМ треугольника АВС равна стороне АВ. Тогда по теореме Фалеса AD=2CM=2AB. Это означает, что точка А лежит на окружности Аполлония для точек В, D и отношения AD : AB=2 : 1. Обратно, если точка А лежит на этой окружности, то CM=1/2AD=AB.

4. Точки А, В и С последовательно расположены на одной прямой, причём точка В лежит между А и С, АВ ≠ ВС. Возьмём произвольную окружность с

центром В, не содержащую внутри себя точек А и С, и обозначим через М точку пересечения касательных к этой окружности, проведённых через А и С. Найдите геометрическое место точек М.

Решение:

Пусть М - точка пересечения касательных из А и В к одной из таких окружностей. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому МВ - биссектриса угла АМС. Тогда $МА:МС=АВ:ВС$. Следовательно, точка М лежит на окружности Аполлония отрезка АС и отношения АВ:ВС. Диаметр этой окружности - отрезок ВQ, где Q - точка на прямой АС, причём $AQ:QC=AB:BC$. Обратно, пусть точка М, отличная от В и Q, лежит на указанной выше окружности Аполлония. Тогда, т.к. $МА:МС=АВ:ВС$, то МВ - биссектриса угла АСМ. Значит, точка В равноудалена от сторон угла АМС, т.е. МА и МС – касательные к некоторой окружности с центром В и радиусом, равным расстояниям от точки В до сторон угла АМС.

Рабочий лист 6. Отыскание ГМТ методом координат

Метод координат или аналитический метод заключается в задании системы координат и записи условия задачи с помощью уравнений. Затем уравнение связывают с геометрической фигурой, например уравнение окружности, прямой и т. д.

1. Написать уравнение геометрического места точек, удаленных от прямой $x + 2y - 5 = 0$ на расстояние $\sqrt{5}$.

2. Составить уравнение линии, расстояние каждой точки которой от начала координат и от точки (5;0) относятся как 2:1.

3. Составить уравнение геометрического места точек, сумма квадратов расстояний которых до точек А(-3,0) и В(0,3) равна 26. Построить эту линию.

4. Наименьший из углов прямоугольного треугольника равен α . Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найдите отношение площадей круга и треугольника.

5. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине A . На плоскости нашлась точка X , для которой $AX = BX$ и $AX = XC$. Какой может быть градусная мера угла BAX , если $\angle BXC = 108^\circ$? Укажите все возможные варианты.

Рабочий лист 7. Принцип Карно

Геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B равна a^2 , есть окружность определенного центра и радиуса.

1. На плоскости даны точки A и B . Найдите ГМТ M , для которых разность квадратов длин отрезков AM и BM постоянна.

2. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из произвольных точек плоскости A' , B' и C' на прямые BC , CA и AB соответственно пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A'C'^2 + C'B'^2 + B'A'^2 = A'B'^2 + C'A'^2 + B'C'^2$.

3. Докажите, что если перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис соответствующим сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.

4. Сторона AC треугольника ABC касается вписанной окружности в точке K , а соответствующей внеписанной в точке L . Точка P – проекция центра вписанной окружности на серединный перпендикуляр к AC . Известно, что касательные в точках K и L к описанной окружности треугольника BKL пересекаются на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямые AB и BC касаются окружности PKL .

5. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1 , B_1 , C_1 на стороны BC , CA , AB треугольника ABC , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$

Решения задач:

1. На плоскости даны точки A и B . Найдите ГМТ M , для которых разность квадратов длин отрезков AM и BM постоянна.

Решение:

Пусть P — проекция точки M на прямую AB и $AM > BM$. Тогда по теореме Пифагора $AM^2 - AP^2 = BM^2 - BP^2 = MP^2$. Следовательно, $AM^2 - BM^2 = AP^2 - BP^2$.

Ясно, что если M_1 — любая точка прямой MP , то $AM_1^2 - BM_1^2 = AP^2 - BP^2 = AM^2 - BM^2$.

Таким образом, достаточно на прямой AB найти точку P такую, что разность $AP^2 - BP^2$ равна заданной величине. Тогда искомое геометрическое место точек есть прямая, проходящая через точку P перпендикулярно данной прямой AB .

2. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из произвольных точек плоскости A' , B' и C' на прямые BC , CA и AB соответственно пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A'C'^2 + C'B'^2 + B'A'^2 = A'B^2 + C'A^2 + B'C^2$.

Решение:

Необходимость. Пусть перпендикуляры из точек A' , B' и C' пересекаются в одной точке M . Применим принцип Карно. Для отрезка, соединяющего точку M с точками на прямых, можно записать три равенства, основанные на теореме о разности квадратов наклонных и их проекций. Сложив эти равенства почленно, получим требуемое равенство.

Достаточность. Пусть выполняется равенство $A'C'^2 + C'B'^2 + B'A'^2 = A'B^2 + C'A^2 + B'C^2$. Покажем, что это означает пересечение перпендикуляров в одной точке. Рассмотрим точку M — точку пересечения двух перпендикуляров. Для отрезка, соединяющего точку M с третьей точкой на стороне треугольника, также будет выполняться соотношение Карно. Это означает, что M является перпендикуляром к этой стороне, то есть все три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

3. Докажите, что если перпендикуляры, восстановленные из оснований биссектрис соответствующим сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, то треугольник равнобедренный.

Решение:

Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 - биссектрисы треугольника ABC . Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Биссектриса треугольника разбивает его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, поэтому $AC_1/C_1B=AC/BC=b/a$, $BA_1/A_1C=c/b$, $CB_1/B_1A=a/c$, значит, $AC_1=bc/a+b$, $C_1B=ac/a+b$, $BA_1=ac/b+c$, $A_1C=ab/b+c$, $CB_1=ab/a+c$, $B_1A=bc/a+c$. Перпендикуляры, восстановленные из точек A_1 , B_1 и C_1 к сторонам треугольника ABC , пересекаются в одной точке, поэтому по теореме Карно $AC_1^2 - C_1B^2 + BA_1^2 - A_1C^2 + CB_1^2 - B_1A^2 = 0$,

Следовательно, по крайней мере две стороны треугольника равны. Что и требовалось доказать.

4. Сторона AC треугольника ABC касается вписанной окружности в точке K , а соответствующей внеписанной в точке L . Точка P – проекция центра вписанной окружности на серединный перпендикуляр к AC . Известно, что касательные в точках K и L к описанной окружности треугольника BKL пересекаются на описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что прямые AB и BC касаются окружности PKL . (рисунок 18)

Решение:

Будем считать, что $AB > BC$. Пусть M – середина AC , N – середина дуги ABC , NW и KD – диаметры описанной и вписанной окружностей соответственно.

Из условия получаем, что касательные к окружности BKL в точках K и L пересекаются в точке W , т.е. BW – симедиана треугольника BKL . Кроме того, точки B , D , L лежат на одной прямой, а прямая BW делит отрезок KD пополам.

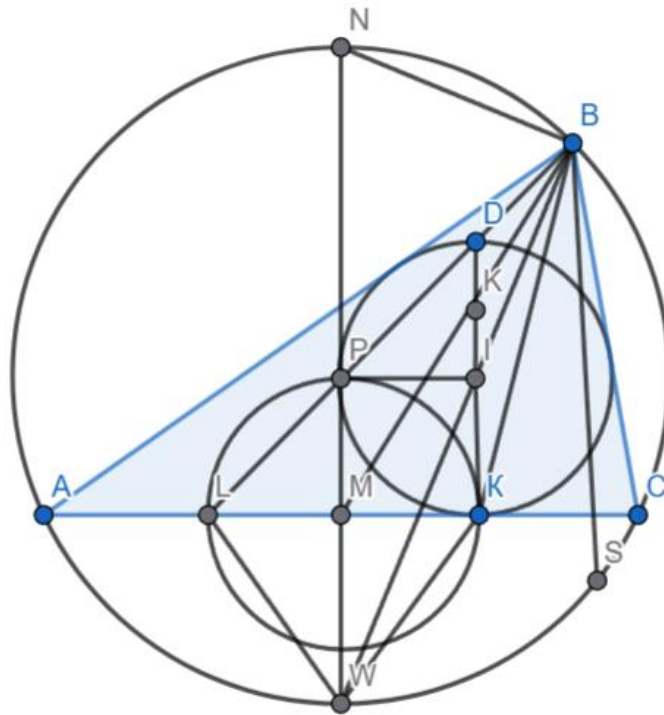


Рисунок 18

Поэтому треугольники BKL и BDK подобны, т.е. $\angle BMC = \angle BID = (\angle C - \angle A)/2$.

Тогда $\angle BMN = (\pi - \angle C + \angle A)/2 = \angle BNM$ и $BM = BN$. Пусть S – такая точка на дуге AWC , что $\angle SBC = \angle ABM$.

Тогда $\angle SNB = \angle ABM + \angle BAC = \angle BMC = \angle NSB$, т.е. $BS = BN = BM$.

Из подобия треугольников ABM и SBC получаем, что $AB \cdot BC = BM \cdot BS = BM^2 = (2AB^2 + 2BC^2 - AC^2)/4$.

Следовательно, $AC^2 = 2(AB + BC^2)$ или $AC = 2 - \sqrt{KL}$. Применив теорему Стюарта к треугольнику AWC и чевиане WK , получаем $WK^2 = WC^2 - AK \cdot KC = WI^2 - (AM^2 - MK^2) = WI^2 - MK^2 = WI^2 - PI^2 = WP^2$ (по теореме о трезубце $WC = WI$).

Таким образом, точки P, K, L лежат на окружности с центром W .

Пусть R, r – радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC .

Тогда расстояние от W до прямой AB равно $BW \sin \angle B = 2R \cos \angle C - \angle A \sin \angle B = R(\sin \angle A + \sin \angle C)$.

По теореме Карно $R + r = R(\sin \angle A + \sin \angle B + \sin \angle C)$, следовательно, это расстояние равно $R(1 - \cos \angle B) + r = WM + MP = WP$, что равносильно утверждению задачи.

5. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1, C_1 на стороны BC, CA, AB треугольника ABC , пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$. (рисунок 19)

Решение:

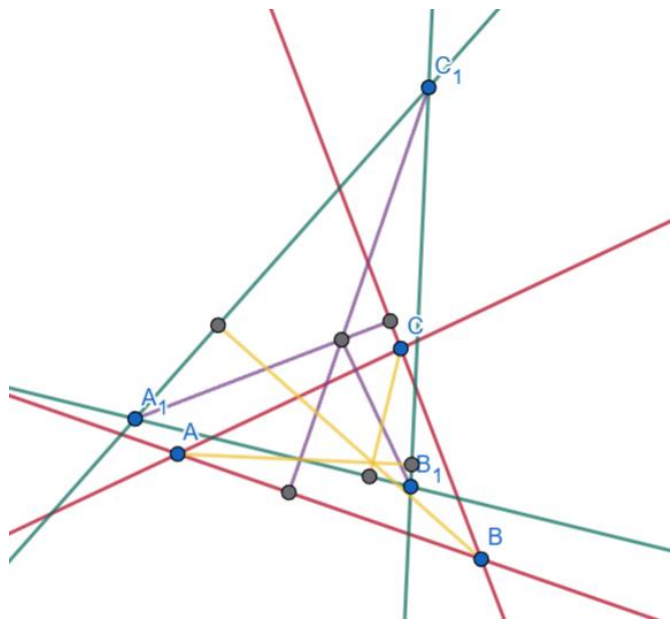


Рисунок 19

Если перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, AC и AB соответственно, пересекаются в одной точке, то по теореме Карно $AB_1^2 - B_1C^2 + CA_1^2 - A_1B^2 + BC_1^2 - C_1A^2 = 0$.

Через точки A, B и C проведены прямые a, b и c , перпендикулярные прямым B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 соответственно, и при этом $A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = -(AB_1^2 - B_1C^2 + CA_1^2 - A_1B^2 + BC_1^2 - C_1A^2) = 0$.

Следовательно, по теореме Карно прямые a, b и c пересекаются в одной точке.

Рабочий лист 8. Радикальная ось

Степенью точки P относительно окружности ω радиуса r с центром в точке O называется величина равная $OP^2 - r^2$.

Геометрическое место точек, у которых одинаковая степень относительно двух неконцентрических окружностей, есть *прямая*, перпендикулярная к линии центров в определенной точке.

1. Докажите, что геометрическое место точек M , степень, которых относительно окружностей S_1 и S_2 одинакова, является прямой.

2. Даны две окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что геометрическим местом точек M , для которых касательные к данным окружностям равны, есть прямая, перпендикулярная O_1O_2 , или часть такой прямой.

3. Одна окружность проходит через вершины A и C прямоугольника $ABCD$, а другая - через вершины B и D . Докажите, что их общая хорда проходит через центр прямоугольника.

4. Дана окружность и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

5. Четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB , а другая – хорду CD , отметим их точку касания X . Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности.

Решения задач ниже:

1. Докажите, что геометрическое место точек M , степень, которых относительно окружностей S_1 и S_2 одинакова, является прямой.

Пусть O – центр окружности, R – радиус, PQ – диаметр, проходящий через точку M . Тогда, если точка M лежит внутри окружности, то по теореме о

произведениях отрезков пересекающихся хорд для любой хорды АВ, проходящей через точку М, $AM \cdot BM = PM \cdot QM = (OP - OM)(OQ + OM) = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$.

Если точка М лежит вне окружности, то по теореме о произведении всей секущей на её внешнюю часть $AM \cdot BM = MP \cdot MQ = (OM - OP)(OM + OQ) = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2$. В каждом из этих случаев $MA \cdot MB = |d^2 - R^2|$, причём величина $d^2 - R^2$ и степень точки М относительно окружности имеют одинаковые знаки.

Если же точка М лежит на окружности, то её степень равна 0. Пусть O_1 и O_2 – центры неконцентрических окружностей S_1 и S_2 радиусов R_1 и R_2 соответственно.

Рассмотрим прямоугольную систему координат, в которой точки O_1 и O_2 имеют координаты $(-a; 0)$ и $(a; 0)$. Степени точки $M(x; y)$ относительно этих окружностей равны $(x + a)^2 - R_1^2$ и $(x - a)^2 - R_2^2$. Тогда $(x + a)^2 - R_1^2 = (x - a)^2 - R_2^2 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2 - R_1^2 = x^2 - 2ax + a^2 - R_2^2 \Leftrightarrow x = \frac{R_1^2 - R_2^2}{4a}$.

Следовательно, искомое геометрическое место точек есть прямая, перпендикулярная линии центров данных окружностей.

2. Даны две окружности с центрами O_1 и O_2 . Докажите, что геометрическим местом точек М, для которых касательные к данным окружностям равны, есть прямая, перпендикулярная O_1O_2 , или часть такой прямой.

Решение:

Пусть R и r – радиусы данных окружностей с центрами O_1 и O_2 соответственно, MA и MB – отрезки касательных, проведённых к этим окружностям из точки М (A и B – точки касания, лежащие на первой и второй окружностях соответственно), причём $MA = MB$.

Тогда $O_1M^2 = MA^2 + O_1A^2 = MA^2 + R^2$, $O_2M^2 = MB^2 + O_2B^2 = MB^2 + r^2$, поэтому $O_1M^2 - O_2M^2 = R^2 - r^2$. Это означает, что точка М лежит на прямой, перпендикулярной O_1O_2 и проходящей через некоторую точку отрезка O_1O_2 .

Положение этой точки однозначно определяется радиусами окружностей и расстоянием между их центрами.

Если одна окружность расположена вне другой, то каждая точка этой прямой удовлетворяет данному условию. Если окружности пересекаются, то данному условию удовлетворяют только точки, не лежащие на общей хорде. Таким образом, искомое ГМТ либо прямая, либо два луча.

3. Одна окружность проходит через вершины A и C прямоугольника $ABCD$, а другая – через вершины B и D . Докажите, что их общая хорда проходит через центр прямоугольника. (рисунок 20)

Решение:

Пусть окружность S_1 проходит через точки A и C , окружность S_2 проходит через точки B и D , а S – описанная окружность прямоугольника $ABCD$. Пусть EF – общая хорда окружностей S_1 и S_2 .

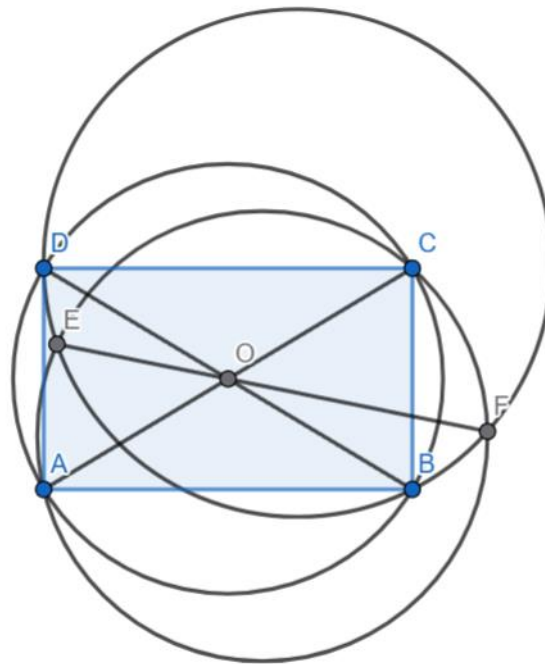


Рисунок 20

Тогда EF – радикальная ось этих окружностей. Прямая AC – радикальная ось окружностей S и S_1 , а прямая BD – радикальная ось окружностей S и S_2 . Эти прямые пересекаются в центре O прямоугольника $ABCD$. Тогда O – радикальный

центр окружностей S , S_1 и S_2 . Следовательно, радикальная ось окружностей S_1 и S_2 , т.е. прямая EF , проходит через точку O .

4. Дана окружность и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям. (рисунок 21)

Решение:

Пусть X – точка пересечения касательных. Проведем окружность с центром X и радиусом XP и рассмотрим инверсию относительно нее.

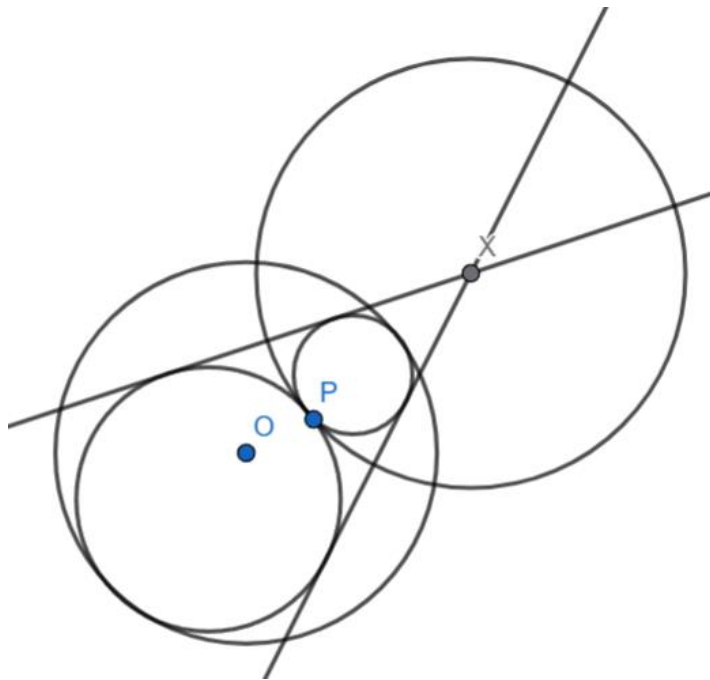


Рисунок 21

При этой инверсии окружности, касающиеся в точке P , перейдут друг в друга, так как они касаются окружности инверсии и двух прямых, переходящих в себя. Следовательно, исходная окружность перейдет в себя. Значит, окружность инверсии ортогональна исходной, т.е. касательная из X к исходной окружности равна XP и X лежит на радикальной оси точки P и исходной окружности. Очевидно, что любая точка радикальной оси может быть получена таким образом, т. е. искомое ГМТ совпадает с радикальной осью точки P и исходной окружности.

5. Четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB , а другая – хорду CD , отметим их точку касания X . Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности. (рисунок 22)

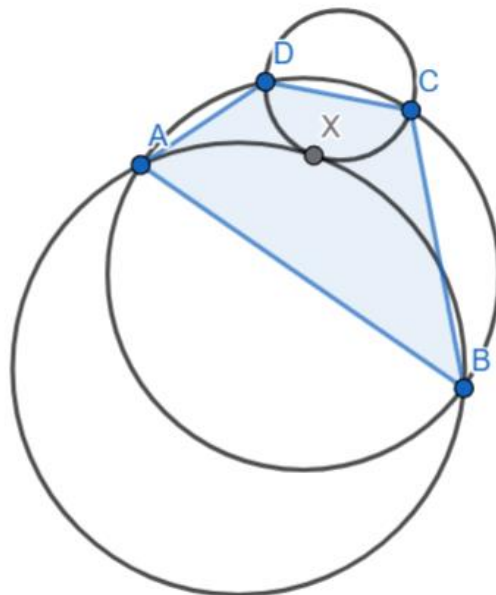


Рисунок 22

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 касающиеся окружности, содержащие соответственно хорды AB и CD , а через Ω – описанную окружность четырёхугольника $ABCD$. Пусть O – точка пересечения прямых AB и CD . Тогда прямая AB – радикальная ось окружностей Ω_1 и Ω , CD – радикальная ось окружностей Ω_2 и Ω , а общая касательная окружностей Ω_1 и Ω_2 – их радикальная ось. Эти три радикальные оси пересекаются в радикальном центре O всех трёх окружностей.

Рабочий лист 9. Применение метода ГМТ

Математическая сущность *метода ГМТ* заключается в том, что искомая точка определяется через пересечение нескольких геометрических мест точек, которые определяются из условия задачи.

1. С помощью циркуля и линейки постройте на данной прямой точку, равноудаленную от двух данных точек.

2. С помощью циркуля и линейки постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, причём одной из них — в данной точке.

3. С помощью циркуля и линейки постройте окружность, проходящую через две данные точки А и В так, чтобы угол между радиусом круга, проведённым в точку А, и хордой АВ был равен 30° .

4. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проводится прямая, параллельная другой диагонали. Эти прямые пересекаются в точке О. Докажите, что отрезки, соединяющие точку О с серединами сторон четырехугольника, делят его площадь на равные части.\

5. Пусть D и E — середины сторон АВ и ВС остроугольного треугольника ABC, а точка М лежит на стороне AC. Докажите, что если $MD < AD$, то $ME > EC$.

6. Внутри выпуклого многоугольника взяты точки Р и Q. Докажите, что существует вершина многоугольника, менее удаленная от Q, чем от Р.

7. Для двух данных различных точек плоскости А и В найдите геометрическое место таких точек С, что треугольник ABC остроугольный, а его угол А - средний по величине. (Под средним по величине углом мы понимаем угол, который не больше одного из углов, и не меньше другого. Так, например, мы считаем, что у равностороннего треугольника любой угол - средний по величине.)

Помимо приведенных выше рабочих листов, предполагается разработка открытого банка заданий для итогового зачета. Он представляет собой список задач, разобранных на занятиях.

Итоговый зачет проходит путем решения учащимися задания, выбранного случайным образом. Педагог проверяет решение задачи и оценивает подробные комментарии ученика. При правильном выполнении задания, курс считается успешно освоенным.

2.4 Рекомендации для педагогов по работе с дидактическими материалами по курсу

Разработанные дидактические материалы, состоящие из 9 рабочих листов, каждый из которых содержит краткую теорию и перечень задач, дифференцированных по уровню сложности. Эффективное использование этих материалов предполагает учет специфики углубленного уровня, а также учет возрастных особенностей обучающихся.

Правильно выстроенная структура занятия с использованием рабочего листа является ключевым условием успешности курса. Рекомендуется следующий алгоритм, рассчитанный на урок 40-45 минут. На первом этапе – актуализации и знакомства с теорией (5-7 минут) – учащиеся самостоятельно читают приведенную на листе теорию, педагог в это время дает комментарии по материалу и отвечая на вопросы. Следующий этап – разбор образца (10-12 минут) – учитель разбирает несколько задач у доски, может организовать дискуссию или групповое обсуждение, а также демонстрирует полное оформление. Третий этап – самостоятельное решение базовых задач (15-18 минут) – обучающиеся решают задачи, педагог отвечает на вопросы и акцентирует внимание на самых важных моментах, при необходимости организует групповое обсуждение решения. На последующих занятиях происходит разбор более сложных задач, олимпиадного уровня, с групповым обсуждением, поиском решения и дискуссией для наиболее оптимального развития и метапредметных навыков обучающихся. Завершающий этап занятия включает устное или письменное обсуждение вопросов, что способствует развитию самооценки учеников.

Предлагается уровневая дифференциация задач: 1-4 задачи – это задачи базового уровня, 5 и далее – задачи повышенного уровня сложности и олимпиадные задачи. Выполнение задач базового уровня сложности является обязательным минимальным условием для получения зачета по курсу. Решения

оформляются в отдельных тетрадах, с указанием темы и номера задания. Проверка тетрадей по усмотрению педагога.

Особая работа проводится по темам, которые традиционно являются более сложными для учащихся. При изучении темы «Дуга окружности» рекомендуется рассмотреть частные случаи, например случай прямого угла. Также возможна использование электронных ресурсов – сервиса «Geogebra», для рассмотрения случая углов разных величин. Также в этой теме подчеркнуть, что ГМТ – это две симметричные дуги окружности.

В теме «Окружность Аполлония» следует обратить внимание на вырожденный случай, а также сравнить координатный и геометрический подходы для введения ГМТ. При возникновении затруднений полезно рассмотреть конкретные значения, чтобы углубить понимание учащихся. Также важно акцентировать внимание на положении центра окружности.

Тема «Принцип Карно» может быть использована для организации исследовательской работы наиболее сильных обучающихся.

При рассмотрении темы «Радикальная ось» следует начать с понятия степени точки и рассмотреть различные примеры. Использовать геометрический и аналитический методы для определения прямой, целесообразно может быть вывести ее уравнение. Наиболее сложные задачи на радикальную ось следует решать коллективно, привлекая сильных обучающихся к обсуждению.

Использование электронных ресурсов – «Geogebra», «Живая геометрия» и т.п. – значительно повысит наглядность курса. Перед введением понятия «Геометрическое место точек» полезно обратиться к динамической модели, чтобы показать выполнение характеристического свойства при перемещении точки. При должном техническом оснащении школы можно организовать исследовательскую деятельность на каждом занятии для всех учеников, включающую построение и доказательство с помощью возможностей электронного ресурса. Это также благоприятно влияет на развитие критического

мышления обучающихся, и стимулирует их познавательную активность. Однако важно соблюдать баланс, чтобы не потерять строгость доказательства.

Текущий контроль может проводится путем выборочной проверки тетрадей после завершения крупных тем, устного собеседования или иных методических приемов, выбранных педагогам.

Элективный курс предоставляет большие возможности для организации исследовательской работы обучающихся при дальнейшей учебной деятельности или во время прохождения курса. Возможными темами проектов являются; «Окружность Аполлония и задачи на построение», «Принцип Карно и прямая Симпсона», «Радикальная ось в олимпиадных задачах» и другие. Однако важно учитывать уровень обучающихся.

Разработанные материалы не являются жестким алгоритмом для проведения занятия. Педагог достаточно просто их может адаптировать под свой класс, сокращая количество задач, меняя их порядок или используя методические приемы для наиболее эффективной организации деятельности на уроке. Однако важно сохранить ядро тем, подчеркивать важность строгого доказательства и рассмотреть нетипичные для школьного курса задачи. Использование разработанных рабочих листов позволяет развивать не только уровень математических знаний, но и критическое мышление учащихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы была достигнута заявленная цель: на основе анализа психолого-педагогической и методической литературы были разработаны элективный курс для 8-9 классов с углубленным изучением математики и рабочие листы к нему.

Теоретический анализ позволил уточнить понятие ГМТ, выделить его двойственную структуру, классифицировать изучаемые в школе виды ГМТ и охарактеризовать два основных метода их нахождения. Сравнительный анализ учебно-методических пособий показал, что наиболее подходящим для углубленного уровня обучения является сочетание теоретической базы учебника А.Д. Александрова и задачного материала И.Ф. Шарыгина.

Разработанный элективный курс на 18 часов включает в себя пояснительную записку, тематическое планирование, содержание всех разделов, требования к результатам освоения и календарно-тематическое планирование. В качестве дидактического обеспечения созданы девять тематических рабочих листов, содержащих краткую теорию и задачи. Подготовлены методические рекомендации, которые помогут педагогу эффективно организовать занятия, указания по организации дифференциального обучения, советы по применению динамической геометрии и темы для исследовательской работы учащихся при дальнейшем обучении.

Таким образом, все задачи исследования решены, цель достигнута. Разработанный элективный курс и дидактические материалы обладают практической значимостью и могут быть непосредственно внедрены в учебный процесс классов с углубленным изучением математики для систематизации знаний о ГМТ, развития критического мышления и подготовки учащихся к участию в математических олимпиадах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральная рабочая программа по математике основного общего образования (углублённый уровень) : [утв. приказом Минпросвещения России от 18.05.2022 № 370]. М., 2022. 101 с.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования : [утв. приказом Минпросвещения России от 31.05.2021 № 287]. М., 2021. 56 с.
3. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия для 8–9 классов : учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики. М. : Просвещение, 1991. 415 с.
4. Геометрия. 7–9 : учебник для общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян [и др.]. 7-е изд. М. : Просвещение, 2017. 383 с.
5. Выготский Л. С. Мышление и речь. М. : Лабиринт, 1999. 352 с.
6. С. И. Заир-Бек, И. В. Муштавинская. Развитие критического мышления на уроке : пособие для учителей общеобразовательных учреждений : 2-е изд., дораб. М. : Просвещение, 2011. 223 с.
7. Задачи по геометрии : информационно-поисковая система МЦНМО. URL: <https://problems.ru> (дата обращения: 01.04.2026)
8. Кравцов С. С. Элективные курсы в системе предпрофильной подготовки // Педагогика. 2008. № 5. С. 12–18.
9. Махмутов М. И. Проблемное обучение. М. : Педагогика, 1975. 368 с.
10. Мерзляк А. Г., В. М. Поляков. М. Геометрия. 7–9 классы : учебник для углублённого изучения : Вентана-Граф, 2017. 400 с.
11. Московский центр непрерывного математического образования. Интернет-проект «Задачи». URL: <https://zadachi.mcsme.ru> (дата обращения: 01.03.2026)
12. Орлов В. В. Организация элективных курсов в школе // Математика в школе. 2005. № 8. С. 33–38.

13. Перепелкин Д. И. Геометрические построения в средней школе. М. : Учпедгиз, 1955. 171 с.
14. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. М. : Международная педагогическая академия, 1994. 680 с.
15. Погорелов А. В. Геометрия : учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. 6-е изд. М. : Просвещение, 2018. 240 с.
16. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии : учебное пособие. 4-е изд. М. : МЦНМО, 2002. 640 с.
17. Савин А. П. Метод геометрических мест // Факультативный курс по математике : учебное пособие для 7–9 классов средней школы / сост. И. Л. Никольская. М. : Просвещение, 1991. С. 74–98.
18. Саранцев Г. И. Методика обучения математике : методология и теория. Казань : Центр инновационных технологий, 2012. 288 с.
19. Халперн Д. Психология критического мышления. СПб. : Питер, 2000. 512 с.
20. Хуторской А. В. Дидактическая эвристика. М. : Изд-во РАО, 2003. 368 с.
21. Шарыгин И. Ф. Геометрия. 7–9 классы : учебник для общеобразовательных учреждений. 2-е изд. М. : Дрофа, 1998. 352 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения : очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 12 » 09 2025 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Родионовой Елены Владимировны
(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение геометрических мест точек на плоскости как средство развития
критического мышления обучающихся классов с углубленным изучением математики»

Утверждена приказом по Университету от « 25.09 » 2025 г. № 1103/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 18 » 05 20 26 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1	Теоретический анализ и обоснование актуальности	Ноябрь - декабрь 2025	Выполнено 
2	Анализ учебно-методических пособий и места темы в школьном курсе	Январь 2026	Выполнено 
3	Разработка структуры элективного курса	Февраль 2026	Выполнено 
4	Создание рабочих листов (дидактических материалов)	Март 2026	Выполнено 
5	Методические рекомендации и разработка системы контроля	Апрель 2026	Выполнено 
6	Оформление второй главы и заключения	Май 2026	Выполнено 
7	Итоговое оформление работы, списка литературы и приложений	Май-июнь 2026	Выполнено 

Дата выдачи задания « 11 » 09 2025 г.

Руководитель  Сорокина М.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

 Родионова Е. В.
(подпись) (Ф.И.О.)

И.о. ректора Пензенского
государственного университета
Васину С.М.
студента 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
гр. 22ФПМ1 Родионовой
Елены Владимировны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Родионова Елена Владимировна,
Ф.И.О. студента

студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему *«Изучение геометрических мест точек на плоскости как средство развития критического мышления обучающихся классов с углубленным изучением математики»*, выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


ПОДПИСЬ
15.05.2026
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 16.05.2026
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР


ПОДПИСЬ

М. В. Сорокина
И.О.Ф.

Протокол
проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной
квалификационной работы на тему
«Изучение геометрических мест точек на плоскости как средство развития
критического мышления обучающихся классов с углубленным изучением
математики»

студентки 4 курса Родионовой Елены Владимировны
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Сорокина Марина Валерьевна

Отчет о проверке

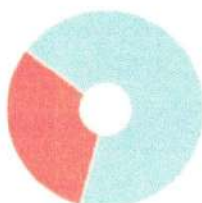
Автор: Родионова Е.В.

Название документа: g1ava_1

Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет»

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
30.63%

Оригинальность:
69.37%

Цитирование:
0%

Самодитирование:
0%

Самодитирование:
0%

1 «Совпадения», «Цитирование», «Самодитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

2 Есть подозрения на следующие группы маскировки заимствований: Сгенерированный текст на страницах: 6, 7, 18, 19, 24, 25, 43, 44, 45, 46.

3 Проверено 97.53% текста документа, исключено из проверки 2.47% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Библиография, Таблицы.

- **Совпадения** – фрагменты проверенного текста, полностью совпадающие с фрагментами из проверяемой базы данных или фрагментами, которые уже были отмечены как совпадения при предыдущей проверке. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов, совпадающих с текстом, взятым из общей базы текстов.
- **Самодитирование** – фрагменты проверенного текста, совпадающие с фрагментами из проверяемой базы данных или фрагментами, которые уже были отмечены как совпадения при предыдущей проверке. Показатель «Самодитирование» – это доля фрагментов, совпадающих с текстом, взятым из общей базы текстов.
- **Цитирование** – фрагменты проверенного текста, совпадающие с фрагментами из проверяемой базы данных или фрагментами, которые уже были отмечены как совпадения при предыдущей проверке. Показатель «Цитирование» – это доля фрагментов, совпадающих с текстом, взятым из общей базы текстов.
- **Самодитирование** – фрагменты проверенного текста, совпадающие с фрагментами из проверяемой базы данных или фрагментами, которые уже были отмечены как совпадения при предыдущей проверке. Показатель «Самодитирование» – это доля фрагментов, совпадающих с текстом, взятым из общей базы текстов.
- **Текстовое перечисление** – фрагменты, текст из проверяемого документа, совпадающий с текстом, взятым из общей базы текстов.
- **Источники** – фрагменты, совпадающие с текстом, взятым из проверяемого документа, совпадающий с текстом, взятым из общей базы текстов.
- **Оригинальный текст** – фрагменты, совпадающие с текстом, взятым из проверяемого документа, совпадающий с текстом, взятым из общей базы текстов.

Обратите внимание, что система не может выявить совпадения фрагментов с текстами, сгенерированными искусственным интеллектом. Поэтому, если вы подозреваете, что документ содержит сгенерированный текст, рекомендуется использовать другие методы проверки.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 111

Количество страниц: 69

Тип документа: Не указано

Символов в тексте: 61315

Дата проверки: 16.05.2026 21:38:24

Слов в тексте: 7932

Дата корректировки: 01.06.2026 10:13:26

Число предложений: 1756

16.05.2026

(дата)

(подпись)

М. В. Сорокина

(ИОФ руководителя ВКР)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Изучение геометрических мест точек на плоскости как средство
развития критического мышления обучающихся классов с углубленным
изучением математики»

студентки Родионовой Елены Владимировны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль подготовки
«Математика», гр. 22ФПМ1

Математика является одним из уникальных инструментов для развития логических способностей учащихся. Тема «Геометрические места точек» может стать наиболее значимой для развития критического мышления учащихся. Эта тема связана со всем курсом геометрии: от построений циркулем и линейкой до аналитического задания фигур. Выпускная квалификационная работа Родионовой Е.В. посвящена изучению геометрических мест точек на плоскости.

В первой главе «Теоретические основы изучения геометрического места точек в основной школе» рассмотрены психолого-педагогические аспекты развития критического мышления, понятие ГМТ и его характеристическое свойство, роль темы в углубленном курсе, а также проведен анализ учебных пособий.

Во второй главе дана характеристика элективных курсов как средства развития обучающихся. Разработан элективный курс по теме «Геометрическое место точек» для учащихся 8-9 классов. Представлена программа курса, подробно описаны дидактические материалы, а также даны рекомендации по работе с ними.

Работа Родионовой Е.В. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть использованы в работе учителя математики при организации подготовки школьников к олимпиадам.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «отлично».

Научный руководитель,
доцент кафедры «МО»,
к.ф.м.н., доцент



М.В. Сорокина