МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Изучение элементов теории вероятностей в школе»

Студент Петр- 06.05.25 Петрушкина Яна Александровна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель 06.05.25 Никитина О.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 23.06.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой 2.06.25 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 5(отл) (протокол заседания ГЭК от 26.06.25 № 6)

Секретарь ГЭК 26.06.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..... 3
ГЛАВА 1 РОЛЬ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ 6
1.1 Цели обучения и место теории вероятностей в курсе математики 6
1.2 Анализ нормативных документов по теме исследования 10
1.3 Анализ заданий, содержащих элементы комбинаторики и вероятности, из Основного государственного экзамена (ОГЭ) и Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике..... 17
1.4 Анализ вероятностно-статистической линии в учебной литературе 24
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ ОСНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ШКОЛЕ..... 32
2.1 Методика изучения вопросов стохастики в школе 32
2.2 Методические особенности изучения условной вероятности..... 45
2.3 Технологическая карта урока 54
ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... 69
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 70

ВВЕДЕНИЕ

В современном цифровом мире теория вероятностей и статистика занимает важное место как в науке, так и в прикладной деятельности. Каждый человек на протяжении своей жизни сталкивается с ситуациями неопределенности, в которых нужно оперативно и взвешенно принимать верные решения. В таких случаях важно грамотно собрать и проанализировать информацию, изучить статистические данные и сделать правильную вероятностную оценку события, на основе которой будет выбран наилучший вариант. В некоторых профессиях это особенно важно, а количество таких профессий постоянно растет. Именно поэтому для успешной жизни и развития профессиональной карьеры каждому человеку необходимо иметь хорошую базовую подготовку в области вероятности и статистики.

Актуальность темы выпускной квалификационной работы определяется растущей ролью вероятностного мышления и статистической грамотности обучающихся в последние десятилетия. Таким образом, изучение вопросов стохастики в школьном курсе математики становится не просто освоением очередного раздела науки, а является важным шагом к формированию образованного и компетентного человека, способного умело ориентироваться в сложном динамичном мире.

Часто бывает так, что события, которые происходят вокруг нас взаимосвязаны, поэтому чтобы правильно оценить вероятность наступления того или иного события, необходимо учитывать его связь с другими событиями. Современные обучающиеся это понимают и активно интересуются тем, как их оценить. На все вопросы, касающихся зависимых событий, отвечает такой раздел как «Условная вероятность». Однако задачи подобного рода зачастую вызывают немало сложностей у обучающихся из-за своей абстрактности.

Цель данной работы: разработать методику изучения темы «Условная вероятность» и методические рекомендации для эффективного усвоения темы.

Объект исследования – процесс обучения математике в школе.

Предмет исследования – методические особенности преподавания элементов теории вероятностей в школе.

В соответствии с целью, объектом и предметом обозначим **задачи** исследования**:**

1) изучить и проанализировать литературу по теме исследования;

2) определить цели обучения и место теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики;

3) проанализировать методику изучения вопросов теории вероятностей и статистики;

4) разработать методические рекомендации изучения условной вероятности;

5) спроектировать технологическую карту урока по теории вероятностей и статистике.

Для достижения цели и поставленных задач использовались следующие **методы исследования:**

1) изучение и анализ психолого-педагогической, научно-методической и математической литературы по теме исследования;

2) обобщение и систематизация теоретических и практических знаний по исследуемой теме;

3) проектирование технологической карты урока.

Практическая значимость работы состоит в том, что:

1) в соответствии с психолого-педагогическими особенностями обучающихся даны методические рекомендации для работы по теме: «Условная вероятность»;

2) разработана технологическая карта урока и презентация по теме: «Условная вероятность».

Результаты данной работы могут использоваться как учителями, так и студентами при самостоятельной подготовке к практическим занятиям по методике преподавания математике.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части (две главы), заключения и списка литературы.

Основная часть состоит из двух глав. В первой главе рассмотрены цели обучения и место теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики. Было осуществлено теоретическое обобщение и систематизация информации по исследуемой теме. Сделаны выводы содержательно-методического характера о реализации стохастической линии в школьном курсе математики.

Во второй главе была проанализирована методика изучения вопросов теории вероятностей и статистики, разработаны методические рекомендации по изучению условной вероятности. Также была спроектирована и приведена технологическая карта урока.

ГЛАВА 1 РОЛЬ И ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 Цели обучения и место стохастики в курсе математики

Одним из мотивирующих факторов введения стохастической линии в школьный курс математики является связь с реальными жизненными ситуациями. События и явления имеют вероятностный характер, что очевидным образом влияет на поведение человека и во многом определяет его. В соответствии с этим возникает необходимость формирования соответствующих практических ориентиров и вероятностной интуиции у обучающихся для дальнейшей успешной жизни.

Анализировать реальные ситуации, связанные со случайностью и неопределенностью помогает хорошо развитое вероятностное мышление. Помимо уже перечисленных умений обучающимся важно научиться и постоянно развивать умение извлекать, анализировать и обрабатывать разнообразную информацию и исходя из нее принимать взвешенные осознанные решения. Изучение вероятностно-стохастической линии положительно влияет на развитие интереса к предмету, вероятностного мышления и интеллектуальных способностей в целом.

Вероятностное мышление – это вид мышления, в структуру которого входят суждения о степени вероятности ожидаемых событий. Его характерной особенностью является критичность. Изучение элементов стохастики способно сформировать и развить у обучающихся умение оценивать возможность происхождения какого-либо события, а также отличать достоверные события от невозможных.

Каждый обучающийся должен овладеть не только теоретическими знаниями о данном разделе науки, но и способностью их применить на практике.

Важно научить обучающихся различать разные виды событий и показать, что не все события можно предсказать наверняка. Также задачей учителя является развитие способностей оценивать и сравнивать вероятности событий, что несомненно поможет принимать обоснованные решения. А также сформировать привычку анализировать статистические данные, распознавать ложные закономерности и избегать часто встречающиеся ошибки при оценке вероятностей. Для формирования данных умений необходимо систематическое целенаправленное длительное обучение стохастике, сочетающее теорию и практику. Именно поэтому некоторые вопросы стохастики в современных реалиях начинают рассматривать в курсе математики начальной школы [22].

Уроки теории вероятности и статистики, на которых происходит обучение решению вероятностно-статистических задач, предоставляет отличную возможность для формирования и развития у обучающихся определенного склада ума, так как постоянное обращение к миру, где все подчинено случаю и нет четкой определенности, заставляет абстрагироваться, оценивать и постоянно анализировать. Также стоит отметить, что эти же факторы способствует формированию критического мышления.

Критическое мышление – это способность к анализу информации, оценке ее достоверности и применению логики для формирования обоснованных выводов и дальнейшего принятия решений. Развитие этой формы мышления поможет обучающемуся не принимать на веру все, что говорят или пишут, а самостоятельно исследовать и проверять полученную информацию. Формирование и развитие критического мышления является одной из важнейших задач всего процесса обучения.

Это свидетельствует о том, что вероятностный стиль мышления требуется как обучающимся основной школы, так и обучающимся старших классов. 5–7 класс является хорошим периодом для активного развития вероятностной интуиции и статистических представлений. 8–9 класс станет отличным временем для обобщения, систематизации и формализации знаний,

так как психика обучающихся на данном этапе развития становится более стабильной. В старших классах учителю стоит обратить внимание на необходимость становления у обучающихся более качественной оценки случайным событиям.

Развивать вероятностное мышление у обучающихся профильных классов можно с помощью решения функционально-прикладных и профессионально-прикладных задач, проведения различных статистических исследований и экспериментов [26]. Следует помнить о том, что стохастические задачи сильно отличаются от стандартных математических задач, к которым привыкли обучающиеся. Однако это не является их минусом, наоборот, это дает большой простор для развития всех вышеперечисленных умений и навыков, так необходимых для развития вероятностного мышления.

Именно поэтому с 1 сентября 2023 года в российских школах в 7–9 классах изучается учебный курс «Вероятность и статистика», в который входят разделы: «Представление данных и описательная статистика», «Вероятность», «Элементы комбинаторики», «Введение в теорию графов». На углубленном уровне более подробно рассматриваются вышепе-речисленные разделы, а также такие разделы, как «Множества» и «Логика». На изучение учебного курса «Вероятность и статистика» отводится 102 часа: в 7 классе – 34 часа (1 час в неделю), в 8 классе – 34 часа (1 час в неделю), в 9 классе – 34 часа (1 час в неделю).

Учебный курс «Вероятность и статистика» для 10–11 класса базового уровня является продолжением и развитием одноимённого учебного курса базового уровня основной школы. В соответствии с указанными целями в структуре учебного курса «Вероятность и статистика» средней школы на базовом уровне выделены следующие основные содержательные линии: «Случайные события и вероятности», «Случайные величины и закон больших чисел». Важную часть курса занимает изучение геометрического и

биномиального распределений и знакомство с их непрерывными аналогами (показательным и нормальным распределениями).

На углубленном уровне обучающиеся более подробно знакомятся с элементами теории графов и теории множеств, необходимых для полноценного освоения материала данного учебного курса и смежных математических учебных курсов. Ещё один элемент содержания, который предлагается на ознакомительном уровне – последовательность случайных независимых событий, наступающих в единицу времени. Ознакомление с распределением вероятностей количества таких событий носит развивающий характер и является актуальным для будущих абитуриентов, поступающих на учебные специальности, связанные с общественными науками, психологией и управлением. На изучение учебного курса «Вероятность и статистика» отводится 68 часов: в 10 классе – 34 часа (1 час в неделю), в 11 классе – 34 часа (1 час в неделю) [16].

Кроме большого спектра умений работы с информацией вопросы теории вероятности и статистики развивают коммуникативные умения, которые занимают важное место среди навыков, которыми должен овладеть каждый обучающийся. Изучение стохастики способствует формированию умения обсуждать и аргументировать свои решения в контексте вероятностных задач. Это повышает речевую и математическую культуру обучающихся.

Существует еще одна важная задача, которая ставится перед учителем в рабочей программе данного учебного предмета. Учитель должен показать обучающимся, что методы и результаты стохастики находят свое применение не только в естественных и технических науках, но и в таких науках, как демография, социология, экономика, лингвистика, археология и многих других. Продуктивная деятельность человека в какой-либо сфере жизни в современном мире невозможна без представления о вопросах вероятности и статистики [17].

Включение элементов теории вероятностей в курс математики основной и старшей школы является важным шагом на пути к развитию вероятностного

мышления, формированию математической и функциональной грамотности и полноценной личности и гражданина.

1.2 Анализ нормативных документов по теме исследования

Изучение дисциплин и составление рабочих программ, также, как выбор содержания и структуры теоретического и практического материала по предметам диктуется современными нормативными документами. «Законом об образовании» формируются основные направления образовательной деятельности и ее обеспечения, основанные на требованиях современного общества. На основе этого документа построен Федеральный государственный образовательный стандарт, который положен в основу разработки местных, региональных нормативных документов, программ и календарных планов учителя.

В современном мире трудно обойтись без базовых вероятностно-статистических знаний, которые являются важным подспорьем в изучении вопросов социальной, экономической, политической и других сфер жизни. Знания о статистике и теории вероятности необходимы для полноценного всестороннего развития личности и умения принимать взвешенные решения. Именно поэтому после утверждения федерального компонента государственного общеобразовательного стандарта 2004 года стало обязательным включение в школьные программы вопросов статистики, элементов комбинаторики и теории вероятностей.

В последние годы международные исследования математической и функциональной грамотности обучающихся содержат все больше заданий на представление данных, оценку правдоподобности гипотез и вероятностей событий. Поэтому Приказом Министерства просвещения Российской Федерации №287 от 31.05.2021 г. Утвержден новый ФГОС, в котором учебный предмет «Математика» в 7–9 классах разделен на три учебных курса:

«Алгебра», «Геометрия» и «Вероятность и статистика». Однако курс «Вероятность и статистика» непосредственно в школы был введён с 1 сентября 2023 года**.**

Курс «Вероятность и статистика» изучается на базовом и углубленном уровне в 7–9 и 10–11 классах.

Цели изучения курсов разнятся в зависимости от класса и уровня, однако можно выделить некоторые общие цели:

- *формирование функциональной грамотности*. Обучающиеся учатся воспринимать и критически анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных процессов и зависимостей, производить простейшие вероятностные расчёты;
- *знакомство с основными принципами сбора, анализа и представления данных* из различных сфер жизни;
- *изучение основ комбинаторики.* Развивает навыки организации перебора и подсчёта числа вариантов, в том числе в прикладных задачах;
- *знакомство с основами теории графов*. Создаёт математический фундамент для формирования компетенций в области информатики и цифровых технологий;
- *обогащение представлений учащихся* о современном мире и методах его исследования. Формируется понимание роли статистики как источника социально-значимой информации и закладываются основы вероятностного мышления [2].

Государственным стандартом образования установлен обязательный минимум содержания основных образовательных программ, а также перечислены основные требования к уровню подготовки обучающихся.

Федеральные образовательные программы конкретизируют требования ФГОС, определяя обязательное содержание учебных предметов, в том числе курса «Вероятность и статистика», по годам обучения. В этих программах

подробно расписано, какие именно элементы теории вероятностей должны изучаться в каждом классе.

Рабочие программы по предмету "Вероятность и статистика" для обучающихся разработана на основе Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования с учѐтом современных мировых требований и традиций российского образования, которые обеспечивают овладение ключевыми компетенциями, составляющими основу для непрерывного образования и саморазвития, а также целостность общекультурного, личностного и познавательного развития обучающихся. В программе учтены идеи и положения Концепции развития математического образования в Российской Федерации.

Концепция развития математического образования определяет три уровня изучения математики и итоговых требований:

- математика для жизни;
- математика для применения в профессии;
- творческая математика [1].

Все это показывает, что изучение вопросов вероятности и статистики необходимо и на базовом, и на углубленном уровне.

В соответствии с объявленными целями в учебном курсе «Вероятность и статистика» выделяются следующие содержательные линии для 7-9 классов:

- представление данных и статистика;
- теория вероятностей;
- введение в теорию графов;
- общематематические знания: элементы логики, теории множеств и комбинаторики.

Содержание линии «Представление данных и описательная статистика» служит основой для формирования навыков работы с информацией. Чтения и интерпретации информации, представленной в таблицах, на диаграммах и графиках, а также сбор, представление и анализ данных с использованием

статистических характеристик. Задачами обучающихся является считывание и интерпретирование данных, выдвижение, подтверждение и критика простейших гипотез, размышление над факторами, вызывающими изменчивость, и оценка их влияния на рассматриваемые величины и процессы. Интуитивное представление о случайной изменчивости, исследование закономерностей и тенденций становится мотивирующей основой для изучения теории вероятностей. Практические задания, в частности опыты с классическими вероятностными моделями имеют здесь большое значение.

Понятие вероятности вводится как мера правдоподобия случайного события. При изучении курса обучающиеся знакомятся с методами вычисления вероятностей в случайных экспериментах. В курс входят начальные представления о случайных величинах и их числовых характеристиках. Помимо этого в рамках этого курса осуществляется знакомство обучающихся с множествами и основными операциями над ними, рассматриваются примеры применения для решения задач, а также использования в других математических курсах и учебных предметах.

Предметные результаты освоения программы учебного курса "Вероятность и статистика":

В 7 классе:

– читать, описывать и интерпретировать информацию, представленную в таблицах и на диаграммах, представлять данные в виде таблиц, строить диаграммы;

– использовать для описания данных статистические характеристики: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значение, размах;

– иметь представление о случайной изменчивости и статистической устойчивости.

В 8 классе добавляются следующие предметные результаты:

– описывать данные с помощью статистических показателей: средних значений и мер рассеивания (размах, дисперсия и стандартное отклонение);

– находить частоты числовых значений и событий, в том числе по результатам измерений и наблюдений;

– находить вероятности случайных событий, зная вероятности элементарных событий, в том числе в опытах с равновозможными элементарными событиями;

– оперировать понятиями, связанными с множествами, выполнять операции над ними, а также использовать графическое представление множеств и связей между ними;

– использовать графические модели: дерево случайного эксперимента, диаграммы Эйлера, числовая прямая.

В 9 классе помимо уже перечисленных предметных результатов добавляются:

– решать задачи организованным перебором вариантов, используя комбинаторные правила и методы;

– находить вероятности случайных событий опытах, в том числе в опытах с равновозможными элементарными событиями, в сериях испытаний до первого успеха, в сериях испытаний Бернулли;

– иметь представление о случайной величине и о распределении вероятностей;

– иметь представление о законе больших чисел и его роли в природе и обществе.

Общее число часов, рекомендованных для изучения учебного курса "Вероятность и статистика" – 102 часа: в 7 классе – 34 часа (1 час в неделю), в 8 классе – 34 часа (1 час в неделю), в 9 классе – 34 часа (1 час в неделю).

Содержание учебного курса для 10–11 классов направлено на закрепление знаний, полученных при изучении курса на уровне основного общего образования, и на развитие представлений о случайных величинах и взаимосвязях между ними. В результате у обучающихся формируется представление о наиболее часто встречающихся математических моделях,

используемых для описания антропометрических и демографических величин, погрешностей, длительности безотказной работы технических устройств, характеристик массовых явлений и процессов, идущих в обществе.

В соответствии с указанными целями в структуре учебного курса «Вероятность и статистика» для уровня среднего общего образования выделены следующие основные содержательные линии: «Случайные события и вероятности», «Случайные величины и закон больших чисел».

Важную часть учебного курса занимает изучение геометрического и биномиального распределений и знакомство с их непрерывными аналогами – показательным и нормальным распределениями.

Содержание линии «Случайные события и вероятности» служит основой для формирования представлений о распределении вероятностей между значениями случайных величин, а также является базой для изучения закона больших чисел – фундаментального закона, действующего в природе и обществе и имеющего математическую формализацию. Сам закон больших чисел предлагается в ознакомительной форме с минимальным использованием математического формализма.

Внимание обучающихся акцентируется на описании и изучении случайных явлений с помощью непрерывных функций с помощью тем, связанных с непрерывными случайными величинами. Важное место в курсе занимает показательное и нормальное распределение. Однако предполагается только ознакомительное изучение материала без доказательств применяемых фактов.

Предметные результаты освоения учебного курса «Вероятность и статистика» уровне среднего общего образования ориентированы на достижение уровня математической грамотности, необходимого для успешного решения задач и проблем в реальной жизни и создание условий для их общекультурного развития.

Предметные результаты освоения программы учебного курса "Вероятность и статистика".

В 10 классе:

– читать и строить таблицы и диаграммы;

– оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее, наименьшее значение, размах массива числовых данных;

– оперировать понятиями: случайный эксперимент (опыт) и случайное событие, элементарное событие (элементарный исход) случайного опыта, находить вероятности в опытах с равновозможными случайными событиями, находить и сравнивать вероятности событий в изученных случайных экспериментах;

– оперировать понятиями: условная вероятность, независимые события, находить вероятности с помощью правила умножения, с помощью дерева случайного опыта;

– находить и формулировать события: пересечение и объединение данных событий, событие, противоположное данному событию, пользоваться диаграммами Эйлера и формулой сложения вероятностей при решении задач;

– применять комбинаторное правило умножения при решении задач;

– оперировать понятиями: испытание, независимые испытания, серия испытаний, успех и неудача, находить вероятности событий в серии независимых испытаний до первого успеха, находить вероятности событий в серии испытаний Бернулли;

– оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, диаграмма распределения.

В 11 классе:

– сравнивать вероятности значений случайной величины по распределению или с помощью диаграмм;

– оперировать понятием математического ожидания, приводить примеры, как применяется математическое ожидание случайной величины находить математическое ожидание по данному распределению;

– иметь представление о законе больших чисел;

– иметь представление о нормальном распределении.

Общее число часов, рекомендованных для изучения учебного курса «Вероятность и статистика» – 68 часов: в 10 классе – 34 часа (1 час в неделю), в 11 классе – 34 часа (1 час в неделю) [3].

1.3 Анализ заданий, содержащих элементы комбинаторики и вероятности, из Основного государственного экзамена (ОГЭ) и Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике

Курс «Вероятность и статистика» стал обязательным компонентом школьного образования, способствующим развитию прикладного характера образования. Этот материал необходим, прежде всего, для формирования функциональной грамотности – умений воспринимать и анализировать информацию, представленную в различных формах, понимать вероятностный характер многих реальных зависимостей, производить простейшие вероятностные расчеты.

В 2010 году задачи вероятностного характера были добавлены в экспериментальном порядке в КИМы ГИА по математике. Анализ результатов ГИА и пробных экзаменационных испытаний показал, что по сравнению с другими заданиями по темам, подвергнутым контролю, задания этого раздела были выполнены хуже всего. Это подтверждало то, что на изучение проверяемых разделов было отведено в программе недостаточно времени. В 2012 году задачи по вероятности полноценно вошли в ОГЭ и ЕГЭ.

Демонстрационные варианты, спецификации и кодификаторы контрольных измерительных материалов (КИМ) ОГЭ и ЕГЭ – документы,

определяющие структуру и содержание экзаменационных работ, а также требования к знаниям и умениям выпускников. Они позволяют понять, какие элементы теории вероятностей и статистики проверяются на экзаменах.

Важным фактором является то, что задания, которые содержатся в ОГЭ и ЕГЭ в первую очередь направлены на математические ситуации из повседневной жизни. Перед такими задачи сталкивается каждый человек в самых ожидаемых и неожиданных местах: в банках, в магазинах, при вызове такси, во время ремонта и многих других местах.

Элементы теории вероятностей и статистики являются неотъемлемой частью экзамена по математике в формате ОГЭ. В 2025 году эти темы сохраняют свою значимость, поэтому представлены в экзаменационных заданиях.

Основные умения, касающиеся теории вероятности и статистики, которые требуются от обучающихся, сдающих ОГЭ:

– умение извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную в таблицах и на диаграммах (задание №5);

– умение находить вероятности случайных событий в опытах с равновозможными элементарными событиями (задание №10).

Примеры заданий из банка ФИПИ.

Задание №5.

Хозяин участка планирует установить в жилом доме систему отопления. Он рассматривает два варианта: электрическое или газовое отопление. Цены на оборудование и стоимость его установки, данные о расходе газа, электроэнергии и их стоимости даны в таблице 1.

Обдумав оба варианта, хозяин решил установить газовое отопление. Через сколько часов непрерывной работы отопления экономия от использования газа вместо электричества компенсирует разницу в стоимости покупки и установки газового и электрического оборудования?

Таблица 1 – Данные о газовом и электрическом отоплении

	Нагреватель (котёл)	Прочее оборудование и монтаж	Средн. расход газа/средн. потребл. мощность	Стоимость газа/электроэнергии
Газовое отопление	23 000 руб.	12 204 руб.	1,6 куб. м/ч	4,7 руб./куб. м
Электр. отопление	19 000 руб.	10 000 руб.	4,7 кВт	4,9 руб./(кВт·ч)

Решение.

1) $23000 + 12204 = 35204(\text{р})$ – установка газового оборудования.

2) $19000 + 10000 = 29000(\text{р})$ – установка электрического оборудования.

3) $35204 - 29000 = 6204(\text{р})$ – разница в установке.

4) $4{,}7 \times 1{,}6 = 7{,}52\ (\text{р/ч})$ – стоимость часа работы газа.

5) $4{,}7 \times 4{,}9 = 23{,}03\ (\text{р/ч})$ – стоимость часа работы электричества.

6) $23{,}03 - 7{,}52 = 15{,}51\ (\text{р/ч})$ – разница в стоимости работы.

7) $\frac{6204}{15{,}51} = 400\ (\text{ч})$ – время компенсации.

Ответ: 400 часов.

Задание №10.

В среднем из 80 карманных фонариков, поступивших в продажу, двенадцать неисправных. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

Решение.

1) $80 - 12 = 68\ (\text{ф})$ – исправные.

2) $\frac{68}{80} = 0{,}85$ – вероятность выбрать исправный фонарик.

Ответ: 0,85 [28].

Задания являются несложными, так как основаны на использовании жизненных наблюдений и здравого смысла. Примерное время выполнения

учащимся каждого такого задания изменяется от 3 до 10 минут, с учетом уровня изучения математики в данном учебном заведении, знаний и умений самого выпускника и его психологической готовности к сдаче экзамена.

В ЕГЭ по математике базового уровня теория вероятностей и статистика представлены в объёме, достаточном для оценки повседневной математической грамотности и готовности к дальнейшему обучению.

Основные умения, касающиеся теории вероятностей и статистики, которые требуются от обучающихся, сдающих ЕГЭ (базовый уровень):

– умение извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках (задание №3 и задание №6);

– умение вычислять в простейших случаях вероятности событий (задание №5).

Примеры заданий из банка ФИПИ.

Задание №3.

На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали – – значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 22 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.

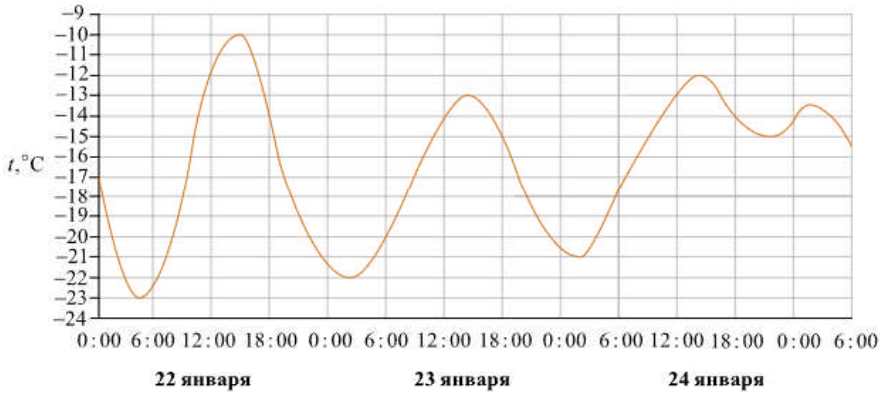


Рисунок 1 – График изменения температуры воздуха

Решение.

В соответствии с графиком наибольшая температура воздуха 22 января составляла −10 °C.

Ответ: -10 °C.

Задание №5

В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Решение.

1) $20 - (8 + 7) = 5$ (ч) – спортсменок из Китая.

2) $5/20 = 0{,}25$ – вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Ответ: 0,25.

Задание №6.

Борис Сергеевич собирается в туристическую поездку на трое суток в некоторый город. В таблице 2 дана информация о гостиницах в этом городе со свободными номерами на время поездки.

Таблица 2 – Информация о гостиницах

Название гостиницы	Рейтинг гостиницы	Расстояние до центральной площади (км)	Цена номера (руб. за сутки)
"Южная"	8,4	1,3	4400
"Уют-плюс"	7,6	4,5	1900
"Центральная"	5,4	1,5	3100
"Вокзальная"	9,5	2,7	3500
"Турист"	8,7	2,3	3400
"Эльдорадо"	9,8	1,4	4500

Борис Сергеевич хочет остановиться в гостинице, которая находится не далее 2,5 км от центральной площади и рейтинг которой не ниже 8,5. Среди гостиниц, удовлетворяющих этим условиям, выберите гостиницу с наименьшей ценой номера за сутки. Сколько рублей стоит проживание в этой гостинице в течение трёх суток?

Решение.

Название гостиницы	Рейтинг гостиницы	Расстояние до центральной площади (км)	Цена номера (руб. за сутки)
"Южная"	8,4	1,9	4400
"Уют-плюс"	7,6	1,5	1900
"Центральная"	5,4	1,5	3100
"Вокзальная"	9,5	2,7	3500
"Турист"	8,7	2,3	3400
"Эльдорадо"	9,8	1,4	4500

Рисунок 2 – Решение задачи

Варианты гостиниц «Вокзальная» и «Уют-плюс» исключаем, так гостиница должна находиться не далее 2,5 км от площади. Гостиницы «Центральная» и «Южная» рассматривать не будем, так как рейтинг гостиницы должен быть не ниже 8,5. Остается два варианта: «Турист» и «Эльдорадо».

Наименьшую цену номера за сутки имеет гостиница «Турист» – 3400 рублей. За трое суток Борис Сергеевич отдаст 10200 рублей.

Ответ: 10200 рублей [29].

В ЕГЭ базового уровня задания по вероятности и статистике обычно:

– *простые:* не требуют сложных вычислений или комбинирования нескольких концепций;

– *практико-ориентированные*: связаны с реальными жизненными ситуациями (например, анализ данных о продажах, случайный выбор, подсчёт вероятности выигрыша в лотерею);

– *относятся к заданиям с кратким ответом:* требуют указания числового ответа (целого числа или десятичной дроби).

Задания по теории вероятностей и статистике в ЕГЭ по математике профильного уровня призваны оценить способность выпускников применять

продвинутые математические методы для анализа данных и решения задач, связанных со случайными событиями.

Основные умения, касающиеся теории вероятности и статистики, которые требуются от обучающихся, сдающих ЕГЭ (профильный уровень):

– умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность (задание №4);

– умение оперировать понятиями: случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, комбинаторные факты и формулы (задание №5).

Примеры заданий из банка ФИПИ.

Задание №4.

В группе туристов 20 человек. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 4 человека за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В., входящий в состав группы, полетит первым рейсом вертолёта.

Решение.

$\frac{4}{20} = 0{,}2$ – вероятность, что турист В. полетит первым рейсом.

Ответ: 0,2.

Задание №5.

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение.

1) $1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – вероятность того, что биатлонист промахнулся.

2) $0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}2 \times 0{,}2 \approx 0{,}02$ – вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишень, а последние два промахнулся.

Ответ: 0,02 [30].

Максимальный первичный балл, который можно получить за задания по вероятности и статистике – 2, что составляет 6 % от максимального первичного балла за всю работу, равного 32 [25].

Часто при решении задач из ОГЭ и ЕГЭ, направленных на знание элементов курса статистики и теории вероятности, возникают следующие ошибки и затруднения:

- незнание формул и их отсутствие в справочных материалах;
- ошибки по невнимательности;
- вычислительные ошибки [13].

1.4 Анализ вероятностно-статистической линии в учебной литературе

При изучении любых новых тем и вопросов возникает проблема изложения данного материала в школьных учебниках. Авторы различных учебников по-разному подходят к изложению материала.

Рассмотрим учебную литературу, включенную в Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию. Для 5–6 классов рекомендован учебник «Математика: базовый уровень: учебник: в 2 частях» под авторством Виленкина Н. Я., Жохова В. И., Чеснокова А. С. и др.

Задачей изучения данного курса в 5–6 классах ставится:

- формирование умений представлять информацию в зависимости от поставленных задач в виде таблицы, схемы, графика, диаграммы, использовать компьютерные программы, Интернет при её обработке;
- формирование умений находить среднее арифметическое и решать задачи с помощью него;
- формирование представления о множествах.

Основная линия курса, изучаемая в 5 классе, содержится в первом параграфе: «Натуральные числа и нуль. Шкалы». Изучение начинается с

представления числовой информации в таблицах. В данном пункте обучающиеся работают со следующими понятиями: таблица, строка, столбец, ячейка, таблица подсчета и таблица вариантов. Задания, которые предлагаются для решения, направлены на сбор и анализ информации из таблицы, а также представление данных в виде таблиц.

Далее, начиная со второго пункта «Цифры и числа» на конкретных примерах показывается один из способов решения комбинаторных задач – метод перебора всех возможных вариантов. Этот метод демонстрируется с помощью построения дерева возможных вариантов. Простейшие примеры и задачи, которые были разобраны и предлагались для решения, позволяют освоить принцип простого, упорядоченного перебора возможных вариантов.

В конце параграфа содержится пункт «Представление числовой информации в столбчатых диаграммах». При работе с данным пунктом обучающиеся должны научиться читать, понимать, анализировать и строить столбчатые диаграммы, а также решать задачи с помощью них.

Основная линия курса, изучаемая в 6 классе, содержится в первом параграфе: «Вычисления и построения». Изучение начинается с понятия среднего арифметического и его применения к решению задач. Изучение среднего арифметического в 6-м классе закладывает важную основу для понимания статистических показателей и умения анализировать данные, с которыми ученики будут сталкиваться не только на уроках математики, но и в повседневной жизни.

В конце данного параграфа содержится пункт «Понятие множества», в котором предлагаются для изучения следующие понятия: множество, пустое множество, элемент множества, подмножество, пересечение множеств и объединение множеств. Обучающиеся должны научиться задавать множества, определять их элементы, различать пустые и непустые множества. Изучение множеств способствует развитию умения выделять общие признаки у разных объектов, классифицировать их и формировать группы (множества).

В конце 6 класса обучающиеся учатся представлять числовую информацию на графиках. Задачей обучения на данном этапе является формирование понимания, какую информацию отображает график, а также извлечение из него необходимые данные. Изучение графиков позволяет развить умения анализировать и сравнивать данные, выявлять закономерности и делать выводы на их основе. Умение самостоятельно строить простые графики, отображающие результаты исследований или заданные данные способствует развитию пространственного воображения и умения устанавливать логические связи между данными.

Графики широко используются для представления и анализа данных, а также служат опорой для целого ряда наук: статистики, экономики, географии и т.д.

Учебники под авторством Н. Я. Виленкина для 5–6 классов являются хорошим проводником обучающихся в новый для них мир теории вероятностей и статистики. Учащиеся знакомятся с базовыми понятиями, такими как сбор данных, таблицы, диаграммы, среднее арифметическое и др. Однако изложение материала ограничено простотой и наглядностью, что не позволяет достичь глубокого понимания. Учебник не ставит целью формирование полноценных навыков анализа данных или решения вероятностных задач, однако закладывает необходимый фундамент для дальнейшего изучения этих тем в средних классах. Главная задача – пробудить интерес к статистике и вероятности, показав их применение в повседневной жизни [8, 9].

В 7–9 классах рекомендованным учебником является «Вероятность и статистика: 7–9-е классы: базовый уровень: учебник: в 2 частях» под авторством Высоцкого И. Р. и Ященко И. В.

Учебник предназначен для знакомства учащихся с формами представления и описания данных в статистике, случайными событиями, вероятностью и её свойствами. Основу учебника составляют важные и общие вопросы статистики и теории вероятностей. Наряду с этим большое внимание

уделяется общематематическим знаниям. В учебник входят главы, посвящённые элементам теории графов, теории множеств, логике и комбинаторике. Акцент авторы делают на том, какую роль статистика и вероятность играют в изучении явлений окружающего мира.

Изучаемый материал представлен в логичной и последовательной форме, с четким выделением основных понятий, формул и методов решения задач. Учебник содержит большое количество задач разного уровня сложности, от простых тренировочных до более сложных, требующих применения нестандартных подходов.. Многие задачи предполагают использование калькулятора или электронных таблиц. Учебник содержит подробный разбор типовых задач с объяснением хода решения и применяемых формул.

В 7 классе обучающимся предлагаются к рассмотрению следующие разделы: представление данных, описательная статистика, случайная изменчивость, графы, логические утверждения и высказывания, случайные опыты и события.

В 8 классе рассматриваются: множества, математическое описание случайных явлений, рассеивание данных, деревья, математические рассуждения, операции над случайными событиями, условная вероятность и независимые события,

В 9 классе обучающиеся изучают: элементы комбинаторики, геометрическую вероятность, испытания Бернулли, случайные величины.

Учебник разработан в соответствии со всеми требованиями ФГОС ООО, утверждённого Приказом Министерства просвещения № 287 от 31.05.2021 г. Пособие отражает последние изменения в структуре и содержании рабочей программы данного курса [10].

Для 10–11 класса отдельного учебника по теории вероятностей и статистике, включенного в Федеральный перечень учебников, не существует. Некоторые вопросы стохастики включены в материал учебников по алгебре и началу математического анализа.

Рассмотрим учебники из Федерального перечня по данным дисциплинам:

1) «Алгебра и начала математического анализа 10–11 класс. Базовый и углубленный уровень.» под авторством Алимова Ш. А., Колягина Ю. М., Ткачевой М. В. и др.

Данный учебник является одним из наиболее известных и распространённых в российской школе. Содержание учебника соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) среднего общего образования.Теоретический материал изложен доступным языком с использованием наглядных примеров и иллюстраций. Учебник содержит большое количество задач и упражнений разного уровня сложности, предназначенных для закрепления изученного материала и формирования практических навыков.

В конце данного учебника содержатся главы: комбинаторика, элементы теории вероятностей, статистика.

В разделе комбинаторика рассматриваются следующие темы: правило произведения, перестановки, размещения, сочетания их свойства, бином Ньютона.

В разделе «Элементы теории вероятностей» для изучения предлагаются параграфы: события, комбинация событий и противоположные события, вероятность события, сложение вероятностей, независимые события и умножение вероятностей, статистическая вероятность.

В разделе «Статистика содержатся следующие темы: случайные величины, центральные тенденции, меры разброса.

Большинство параграфов скорее направлены на повторение, так как принципиально нового материала, отличного от того, что предлагался в курсе «Вероятность и статистика» для 7–9 класса не содержится. Однако некоторые задания, предлагаемые для решения в 10–11 классе сложнее, тех, что были предложены в учебниках для 7–9 класса. А вот темы – статистическая

вероятность и центральные тенденции – являются для обучающихся новыми [6].

2) «Алгебра и начала математического анализа; углубленное обучение. 10 класс» и «Алгебра и начала математического анализа; углубленное обучение. 11 класс» под авторством Мерзляка А. Г., Номировского Д. А., Полякова В. М.

В учебнике для 10 класса представлена всего пара тем, связанная с курсом «Вероятность и статистика». Это «Множества. Операции над множествами» и «Конечные и бесконечные множества», которые содержатся в самом начале учебника. Учебный материал, представленный в параграфах, направлен в большей степени на повторение уже изученного.

В учебнике для 11 класса вопросы стохастики раскрыты более широко. В содержании представлены две главы, которые связаны с курсом: элементы теории вероятностей и приложение, в котором освещены вопросы, связанные со случайными величинами.

В главе «Элементы теории вероятностей» рассматриваются следующие вопросы: элементы комбинаторики и бином Ньютона, аксиомы теории вероятностей, условная вероятность, независимые события, случайная величина, схема Бернулли и биномиальное распределение, характеристики случайной величины, математическое ожидание суммы случайных величин.

Данные темы направлены на повторение и углубление уже имеющихся знаний. Задания, предлагаемые для решения, соответственно имеют довольно высокий уровень сложности.

В приложении рассматриваемого учебника представлены для изучения темы, связанные со случайными величинами. Среди них: дискретные случайные величины и их распределения, распределение Пуассона, независимые случайные величины, математическое ожидание произведения и дисперсия суммы независимых случайных величин, закон больших чисел, неравенство Чебышёва, ковариация случайных величин, коэффициент

корреляции, непрерывно распределенные случайные величины и различные виды распределений. Представленый в параграфах материал, либо является новым, либо направлен на углубление уже имеющихся знаний по рассматриваемой теме.

Изложение материала в данных учебниках довольно подробное и обстоятельное. Усвоение материала упрощает большое количество примеров с подробными решениями. Введение определений и теорем происходит на строгом математическом языке. Также в учебниках много разобранных примеров с подробным анализом каждого действия.

Таким образом, несмотря на растущую значимость теории вероятностей и статистики в современном мире и включение соответствующего курса в рабочие программы для 10–11 классов, наблюдается острый дефицит специализированных полноценных учебников, которые в полной мере соответствовали бы этим программам.

Учебники по алгебре и началам математического анализа, даже углубленного уровня, включенные в Федеральный перечень учебников, как правило, содержат лишь отдельные элементы теории вероятностей и статистики. Такое положение дел не обеспечивает необходимой глубины и систематичности изложения материала. Эти элементы часто представлены фрагментарно, не образуя при этом целостной картины, которая позволила бы обучающимся освоить необходимые компетенции в области теории вероятностей и статистики.

В связи с этим существует острая необходимость в разработке и издании полноценных учебников и учебно-методических комплексов по теории вероятностей и статистике, ориентированных на обучающихся 10–11 классов.

Анализ статей и учебной литературы, посвященных введению и апробации стохастической линии в школьном курсе математики показал, что в настоящее время еще существуют проблемы с реализацией этого материала в школьных учебниках. Это связано с тем, что вероятностно-статистическая

линия была введена в школьный курс математики сравнительно недавно [19, 20].

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРЕПОДАВАНИЮ ОСНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ШКОЛЕ

2.1 Методика изучения вопросов стохастики в школе

Изучение элементов теории вероятностей и статистики происходит на протяжении всего курса средней и старшей школы. Весь курс условно подразделяется на три этапа: 5–6 классы, 7–9 классы и 10–11 классы. 5–6 классы можно назвать подготовительными. В 7–9 классе закладывается основная база. В 10–11 классах материал дополняется, усложняется. На каждом последующем этапе отрабатываются ранее усвоенные и формируются новые умения и навыки.

Методика изучения вопросов стохастики в 5–6 классах имеет определенные особенности, связанные с возрастными возможностями и познавательными потребностями подростков младшего возраста. Основной задачей учителя на данном этапе является создание условий для формирования у обучающихся первоначального представления о комбинаторике и способах работы с данными, без строгих определений и формул. Само изучение данных разделов должно быть интуитивно понятным и тесно связанным с жизненным опытом.

Учителю стоит придерживаться следующих *основных принципов* при работе с этими классами.

- *Практическая направленность*: обучающиеся должны понимать, где в реальной жизни можно встретить изучаемые понятия и применить свои знания. Примеры: изучение результатов спортивных соревнований, изучение статистики своих достижений в игре, расчет вариантов ходов в игре и т.д.
- *Наглядность:* учителю необходимо использовать большое количество наглядных материалов для более глубокого понимания

рассматриваемых разделов обучающимися. Это могут быть: картинки, схемы, диаграммы, таблицы, реальные предметы (монеты, кубики, карточки) и т.п.

- *Активность:* стоит вовлекать обучающихся в активную деятельность для более успешного усвоения тем: проведение экспериментов и практических работ, сбор данных, игры, обсуждение результатов.
- *Доступность:* объяснять понятия нужно простым и понятным языком, избегая при этом сложной терминологии и абстрактных рассуждений.
- *Игровой подход:* учителю необходимо превращать процесс обучения в увлекательную игру, используя игровые ситуации и задания, так как данный вид деятельности хорошо воспринимается обучающимися и долго остается у них в памяти.
- *Связь с другими предметами:* важно постоянно показывать взаимосвязь элементов стохастики с другими предметами (биологией, информатикой, обществознанием и т.д.).

Среди разделов, которые предлагаются для изучения обучающимся, содержатся следующие.

1) *Комбинаторика.*

– *Задачи на перебор вариантов.* Пример: «У Маши есть 3 футболки (красная, синяя и зелёная) и 2 юбки (чёрная и белая). Сколько разных нарядов она может составить?»

– *Задачи на упорядочивание.* Пример: «Сколькими способами можно расставить 3 книги на полке?»

– *Задачи на выбор*. Пример: «В активе класса 6 учеников. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?»

– *Задачи на составление комбинаций.* Пример: «Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2 и 3, если цифры могут повторяться?»

2) *Сбор и представление данных.*

– *Различные способы сбора данных:* наблюдение, опрос, измерение.

– *Организация данных в таблицах:* создание простых таблиц для фиксации результатов экспериментов и опросов.

– *Столбчатые диаграммы:* построение диаграмм, их чтение и анализ.

– *Круговые диаграммы:* построение круговых диаграмм для отображения частей целого, их чтение и анализ.

– *Простые графики:* отображение изменения предложенных для изучения данных во времени (например, изменение температуры в течение дня).

3) Статистические характеристики.

– *Среднее арифметическое:* вычисление среднего арифметического нескольких чисел. Примеры: средний рост учеников в классе, средняя оценка по предмету.

Чтобы заинтересовать обучающихся изучением вышеперечисленных разделов, необходимо максимально разнообразить используемые методические приемы и средства. Учителю стоит рассмотреть возможность включения в стандартный урок следующих видов приемов и средств.

– *Эксперименты:* проведение реальных экспериментов (подбрасывание монеты, кубика, вытягивание карточек) с последующей фиксацией и анализом результатов.

– *Игры:* использование дидактических игр для закрепления понятий и развития математической интуиции.

– *Проекты:* выполнение небольших проектов, связанных со сбором и анализом данных (например, «Изучение любимых занятий учеников класса», «Анализ результатов спортивных игр»).

– *Работа в группах:* организация работы в группах для проведения экспериментов, сбора данных и решения задач.

– *Использование ИКТ:* использование интерактивных досок, компьютерных программ и онлайн-ресурсов для визуализации данных и

проведения симуляций. Например, можно использовать Excel для построения графиков и диаграмм.

– *Задачи с практическим содержанием:* решение задач, связанных с реальными ситуациями из жизни учеников.

Учителя при работе с вышеизложенными темами сталкиваются с довольно типичными ошибками, которые допускают обучающихся. Соответственно необходимо обратить внимание на следующие способы разрешения затруднений:

– *Ошибки в переборе всех возможных вариантов при решении комбинаторных задач:* из-за отсутствия систематичного подхода и неумения использовать графические инструменты обучающиеся начинают перебирать варианты хаотично, без определенной системы, что приводит к пропускам или повторениям. Чтобы этого избежать учителю необходимо познакомить обучающихся с наглядными способами перебора, которые позволят достигнуть систематичности при решении комбинаторных задач.

– *Сложности с построением графиков и диаграмм:* учителю необходимо уделять достаточно времени обучению построению и чтению графиков и диаграмм. Лучше дать обучающимся пошаговые инструкции и наглядные примеры.

– *Трудности с вычислением среднего арифметического:* перед началом изучения данной темы нужно повторить правила сложения и деления чисел [23].

Оценка результатов изучения стохастики в 5–6 классах должна быть направлена на выявление понимания основных понятий и умения применять их на практике. Для этого учителю стоит использовать определенные формы контроля:

– устные опросы;
– письменные работы с простыми задачами;
– практические работы по сбору и анализу данных;

– оценка проектов.

Изучение стохастики в 5–6-х классах является важным этапом в развитии критического мышления обучающихся. Если правильно организовывать процесс обучения на данном этапе, теория вероятностей и статистика заинтересует обучающихся и позволит подготовить их к изучению более сложных вопросов математики. Учителю необходимо помнить, что главная цель обучения стохастике в этом возрасте — не заучивание формул, а формирование интуитивного понимания некоторых понятий и способов работы с данными.

Существенным этапом в формировании математической грамотности и подготовке к применению вероятностных и статистических методов в различных сферах жизни является изучение вопросов стохастики в 7–9 классах. У обучающихся происходит переход от интуитивного понимания к более формальному и серьезному изучению теории вероятностей и статистики. Также как и в 5–6 классах на этом этапе важно, чтобы обучение носило не только теоретический, но и практический характер. Это позволит обучающимся применять полученные знания для решения реальных задач.

На данном этапе учитель должен следовать следующим *принципам*.

– *Систематичность и последовательность:* педагог должен предлагать материал в логической последовательности, от простого к сложному, с постепенным введением новых понятий и методов.

– *Наглядность и визуализация:* учителю необходимо продолжать использовать наглядные пособия, схемы, диаграммы и графики для иллюстрации вероятностных и статистических закономерностей.

– *Практическая направленность и проблемное обучение:* педагогу для успешного обучения стоить организовать решение задач, связанных именно с реальными ситуациями, моделирование вероятностных процессов, проведение статистических исследований.

– *Развитие критического мышления:* необходимо предлагать обучающимся выполнять анализ информации, представленной в средствах массовой информации, выявлять статистические ошибки и манипуляции.

– *Использование информационных технологий:* сделать процесс обучения интереснее и продуктивнее поможет применение компьютерных программ и онлайн-ресурсов для статистического анализа данных, построения графиков и диаграмм.

– *Учет межпредметных связей:* необходима непрерывная интеграция знаний из математики, физики, биологии, географии, информатики и других предметов, для стимулирования интереса к предмету.

На данном этапе для изучения предлагаются следующие *разделы.*

1) Вероятность случайного события.

– *Знакомство с понятием случайного события и видами событий.*

– *Классическое определение вероятности*: формула для вычисления вероятности события как отношения числа благоприятных исходов к общему числу исходов (для равновозможных исходов).

– *Статистическая вероятность* (относительная частота): проведение экспериментов, сбор данных, вычисление относительной частоты события и сравнение её с теоретической вероятностью.

– *Геометрическая вероятность*: вычисление вероятности попадания точки в заданную область.

– *Действия над событиями*: объединение, пересечение, противоположные события.

– *Несовместные события*: определение и примеры.

– *Зависимые и независимые события*: определение, примеры, вычисление вероятности совместного наступления независимых событий.

– *Условная вероятность* (ознакомительно): понятие условной вероятности и простые задачи на ее вычисление.

2) *Элементы комбинаторики.*

– *Правило умножения* (основной принцип комбинаторики).

– *Перестановки, размещения, сочетания*: определения и формулы для вычислений.

3) *Статистика.*

– *Сбор и представление данных*: генеральная совокупность и выборка.

– *Способы организации данных*: ранжирование, группировка.

– *Таблицы частот*: абсолютные и относительные частоты.

– *Визуализация данных*: гистограммы, полигоны частот, круговые диаграммы, графики.

– *Описательная статистика*: среднее арифметическое, медиана, мода, размах, дисперсия и стандартное отклонение (ознакомительно) [4].

Усвоение обучающимися вопросов теории вероятностей и статистики станет гораздо эффективнее, если использовать разнообразные методические приемы.

– *Экспериментальная деятельность:* учителю необходимо проводить вместе с обучающимися серии экспериментов (подбрасывание монеты, бросание кубика, вытягивание карточек) с последующей обработкой результатов.

– *Игровые технологии:* использование педагогом таким форм, как дидактических игр, викторин и конкурсов является хорошим способом активизации познавательной деятельности и закрепления полученных знаний в памяти обучающихся.

– *Метод проектов:* выполнение обучающимися исследовательских проектов, связанных с изучением вероятностных и статистических закономерностей в различных областях, является хорошей мотивировкой изучения предмета.

– *Проблемное обучение:* педагогу необходимо создавать проблемные ситуации, которые требуют для их разрешения применения знаний по стохастике.

– *Компьютерное моделирование:* учитель может предложить обучающимся использовать компьютерные программы (например, Excel, GeoGebra) для моделирования случайных явлений, построения графиков и диаграмм, проведения статистического анализа.

– *Работа в группах:* организация групповой работы для решения задач, проведения экспериментов и анализа данных станет отличным способом разнообразить форматы работы на уроке, поможет поместить обучающихся в нестандартные условия работы.

Работая с теорией вероятностей и статистикой, учителя часто замечают у обучающихся повторяющиеся ошибки. В связи с этим, необходимо обратить внимание на причины возникновения таких ошибок и приемы, направленные на устранение возникающих затруднений.

– *Трудности в понимании характеристик описательной статистики:* смысл абстрактных понятий описательной статистики становятся понятнее, если учитель использует примеры из повседневной жизни и показывает, как эти меры помогают понимать окружающий мир на основе анализа данных.

– *Смешение понятий вероятности и частоты:* учителю важно подчеркивать разницу между теоретической вероятностью события и его относительной частотой в серии экспериментов.

– *Непонимание сути условной вероятности:* педагогу следует акцентировать внимание обучающихся на разнице между обычной и условной вероятностью и научить их четко определять условие, которое влияет на вероятность другого события.

– *Неправильное применение комбинаторных формул:* необходимо тщательно разбирать условия задач и объяснять, какую именно формулу следует использовать [12].

При проверке знаний по теории вероятностей и статистике в 7–9 классах главное – выяснить, понимают ли ученики основные понятия и умеют ли использовать их для решения реальных задач. Учителю помогут в этом разнообразные формы контроля, такие как:

– устные опросы и беседы;
– письменные работы и контрольные работы;
– практические работы по сбору и анализу данных;
– защита проектов;
– выполнение тестовых заданий.

Изучение стохастики в 7–9 классах является важным этапом формирования математической культуры и подготовки учащихся к жизни в информационном обществе. Правильно организованное обучение, основанное на принципах систематичности, наглядности, практической направленности и использовании информационных технологий, позволит учащимся не только усвоить основные понятия и методы теории вероятностей и статистики, но и научиться применять их для решения реальных задач, развития критического мышления и принятия обоснованных решений в условиях неопределённости. Важно, чтобы учитель создал на уроке атмосферу сотрудничества и стимулировал активное участие учащихся в процессе обучения.

Изучение стохастики в 10–11 классах предполагает углубленное изучение теории вероятностей и математической статистики, направленное на формирование у учащихся прочных знаний, умений и навыков, необходимых для успешного применения статистических методов в различных областях науки и техники, а также для подготовки к дальнейшему обучению в высших учебных заведениях [18]. На этом этапе происходит формализация знаний,

изучение новых понятий и методов, а также делается акцент на практическое применение полученных знаний.

Эффективное усвоение теории вероятностей и математической статистики обучающимися 10–11 классов требует от учителя осознанного подхода к организации учебного процесса. Для достижения оптимальных результатов и формирования у учащихся глубоких знаний и устойчивых навыков, необходимо соблюдать определенные принципы.

– *Строгость и логичность:* изучение материала должно основываться на строгих математических определениях и теоремах с четким обоснованием всех утверждений.

– *Формализация и абстрагирование:* учитель должен активно работать над формированием у учеников умения оперировать абстрактными понятиями и моделями, которые описывают случайные явления.

– *Практическая направленность и прикладной характер:* данный принцип не теряет своей актуальности и на данном этапе, поэтому педагогу необходимо подбирать задачи, которые связаны с реальными ситуациями и профессиональными областями науки [27].

– *Развитие исследовательских навыков:* учитель должен создавать условия для развития интереса к самостоятельной работе с литературой, проведению статистических исследований, анализу и интерпретации данных.

– *Использование информационных технологий:* активное применение учителем и обучающимися компьютерных программ поможет упростить работу над сложными заданиями.

– *Межпредметные связи:* интеграция знаний из математики, физики, биологии, экономики, информатики и профессиональных наук.

На заключительном этапе обучающимся предлагаются для изучения следующие разделы.

1) Теория вероятностей.

– Повторение и систематизация знаний о случайных событиях, вероятности, действиях над событиями, зависимых и независимых событиях.

– Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

– Схема Бернулли.

– Дискретные случайные величины.

– Основные дискретные распределения.

– Непрерывные случайные величины.

– Основные непрерывные распределения.

– Предельные теоремы теории вероятностей (ознакомительно).

2) Математическая статистика.

– Основные понятия математической статистики.

– Оценки статистических параметров [5].

Чтобы добиться лучшего понимания данной дисциплины обучающимися 10–11 класса, важно использовать разнообразные методики обучения. Среди приемов и средств, которые могут значительно повысить эффективность уроков, содержатся:

– *Лекции и семинары:* учителю можно использовать изложение теоретического материала в форме лекций с последующим обсуждением и решением задач на семинарских занятиях.

– *Практические работы:* педагогу стоит проводить практические работы, направленные на закрепление теоретических знаний и формирование практических навыков для лучшего усвоения материала.

– *Самостоятельная работа:* учитель должен стимулировать интерес обучающихся к самостоятельному изучению литературы, решению задач, выполнению исследовательских проектов.

– *Работа в группах:* организация групповой работы для решения сложных задач и обсуждения результатов исследований является отличным

способом развития навыков работы в команде и стимуляторов интереса к предмету.

– *Использование ИКТ:* учителю необходимо чаще предлагать задания, направленные на активное использования различных компьютерных программ для отработки навыков работы с массивами данных.

– *Приглашение специалистов:* приглашение экспертов из различных областей науки и техники для проведения лекций и мастер-классов значительно повысит мотивацию и интерес к предмету.

– *Участие в конференциях и олимпиадах:* участие в математических конференциях и олимпиадах, даст хороший старт развитию обучающихся в научной деятельности по данной дисциплине и математике в целом.

При изучении теории вероятностей и статистики обучающиеся 10–11 классов часто сталкиваются с определенными трудностями. Чтобы помочь им их преодолеть, учителю рекомендуется обратить внимание на часто возникающие ошибки.

– *Сложности в понимании абстрактных понятий:* педагогу необходимо объяснять понятия на конкретных примерах, использовать наглядные пособия и модели.

– *Ошибки в применении формул:* учитель должен постоянно направлять обучающихся при возникновении трудностей, тщательно разбирать условия задач.

– *Трудности в интерпретации результатов статистического анализа:* педагогу необходимо показать необходимость анализа получаемых результатов, а также объяснять смысл полученных результатов и показывать, как их можно использовать для принятия решений, если возникают определенные сложности с интерпретацией.

– *Недостаточное владение компьютерными программами:* учителю нужно познакомить обучающихся с основными необходимыми для работы программами и консультировать их по используемому функционалу.

Формы контроля, использовавшиеся для оценки результатов обучения в 7–9 классах остаются актуальными и на данном этапе обучения. Но кроме них учителю стоит предложить обучающимся и следующие форматы: подготовка публичного выступления или доклада, проведение открытой конференции, дебатов.

В 10–11 классах изучение теории вероятностей и статистики переходит в разряд подготовки к дальнейшей профессиональной деятельности в различных сферах науки и техники. Именно поэтому задачей учителя является не только передача теоретических знаний о дисциплине обучающимся, но и выработка у них умения мыслить и действовать в условиях неопределенности. Создание атмосферы научного поиска, поддержка исследовательского и практического интереса являются важными составляющими успеха в этом деле.

Педагог должен на каждом этапе обучения теории вероятностей и статистике четко понимать особенности и трудности с которыми сталкиваются обучающиеся. В младших классах учитель должен делать акцент на сборе и анализе данных, построении простых диаграмм. В средней школе вводятся основные понятия, методы вычисления вероятностей и статистических характеристик, решаются простые задачи. В старших классах происходит формализация знаний, углубленное изучение теории вероятностей и математической статистики, строятся математические модели и применяются методы математического анализа. Успешное освоение стохастики в школе требует от учителя не только знания предмета, но и умения создавать условия для активного и осознанного обучения, связывать теорию с практикой и поддерживать исследовательский интерес учащихся.

Таким образом, методика изучения стохастики в школе – это динамичная система, требующая адаптации к возрастным особенностям и познавательным потребностям обучающихся на каждом этапе обучения. Ключевая цель учителя – не просто передать формальные знания, а сформировать вероятностно-статистическое мышление, необходимое для принятия

обоснованных решений в современном мире, наполненном неопределенностью и большими данными [7].

2.2 Методические особенности изучения условной вероятности

Изучение условной вероятности является одним из важнейших этапов освоения курса «Вероятность и статистика». Данное понятие требует глубокого понимания связи между событиями, поэтому немало обучающихся испытывают трудности в работе с данной темой. Им бывает сложно осознать тот факт, что наличие условия меняет вероятность события, а сама условная вероятность воспринимается как отдельная величина, независящая от условия. Обучающиеся часто путают условную и безусловную вероятности, так как испытывают сложности с пониманием того, что условная вероятность рассматривает ситуацию, когда известно, что одно событие уже состоялось. Также многим непросто правильно выделить условие в задачах, определить, какие события связаны между собой, какие события являются зависимыми, а какие независимыми.

С понятием условной вероятности обучающиеся сталкиваются впервые в 8 классе, а уже в 10–11 классе рассматривают данный вопрос на более высоком уровне. Важным является тот факт, что задачи на условную вероятность содержатся в банке ФИПИ в качестве задания № 5 Единого государственного экзамена профильного уровня.

Именно поэтому учителю важно создать хорошие условия для знакомства с понятием условной вероятности и дальнейшего эффективного его использования при решения задач. Все это создает необходимость использования комплексного подхода, включающего в себя не только объяснение формул и правил, но и формирование у учащихся глубокого понимания смысла условной вероятности, её места в реальном мире и инструментов для её эффективного применения [11].

Рассмотрим некоторые методические особенности, которые следует учитывать педагогу при работе с данным понятием.

Начать работу с данным понятием следует с подготовительного этапа, на котором будет проведена актуализация имеющихся знаний и мотивация изучения данного раздела.

Перед непосредственным введением условной вероятности стоит повторить с обучающимися основные уже изученные понятия теории вероятностей: случайные события, элементарные исходы, классическое определение вероятности, независимые события.

Важно правильно поставить проблемный вопрос или ситуацию, которые потребуют введения понятия условной вероятности.

Например.

«Какова вероятность вытащить даму из колоды карт, если известно, что вы вытащили карту черной масти?»

Необходимо подкреплять мотивацию изучения данного раздела примерами из жизни, которые знакомы и понятны многим. Здесь важно показать обучающимся, что знание о наступлении одного события может изменить вероятность наступления другого.

Примеры:

– вероятность заболеть ОРВИ выше, если в вашем окружении есть заболевшие (знание об эпидемиологической обстановке вокруг вас влияет на вероятность заболевания, так как будут приниматься с вашей стороны профилактические меры);

– вероятность пройти успешно уровень в игре выше, если вы найдете мощное оружие, которое увеличивает вашу силу (нахождение хорошего оружия увеличивает вероятность успешного прохождения уровня в игре, так как оружие облегчает борьбу с врагами);

– вероятность того, что завтра пойдет дождь, выше, если сегодня вечером небо затянуто тучами (небо, затянутое тучами, увеличивает

вероятность того, что завтра будет дождь, так как тучи являются предвестником дождя).

При рассмотрении темы учитель должен сделать особый акцент на фразе «при условии», подчеркнув, что рассматривается вероятность события А только в рамках исходов, благоприятствующих событию В.

В старших классах обучающиеся должны знать четкое и понятное определение условной вероятности:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, где $P(A|B)$ – вероятность события А при условии, что событие В уже произошло. ($P(B) > 0$)

Учителю необходимо показать обучающимся, что решение многих задач на условную вероятность сводится к набору определенных шагов:

1) выделить события А и В;
2) определить вероятность события В: $P(B)$;
3) определить вероятность пересечения событий А и В: $P(A \cap B)$;
4) применить формулу условной вероятности.

Далее нужно постоянно углублять понимание материала.

Учителю необходимо предлагать обучающимся для решения задачи разного уровня сложности, которые потребуют применения формулы условной вероятности в различных контекстах. Помимо этого стоит чаще подчеркивать разницу между условной и безусловной вероятностью, показывать, что знание о наступлении события В может изменить вероятность события А. Также учителю следует обсудить с обучающимися аспекты применения условной вероятности в различных областях наук: экономике, медицине, технике и т.д.

Для предотвращения типичных ошибок педагогу необходимо обратить внимание обучающихся на то, что условная вероятность $P(A|B)$ не равна условной вероятности $P(B|A)$. Показать это нужно на примерах, так как они лучше всего покажут разницу между этими вероятностями.

Следует убедиться, что обучающиеся верно понимают и определяют вероятность пересечения событий $P(A \cap B)$. А также то, что для независимых

событий наступление одного события не влияет на вероятность наступления другого. Педагогу нужно напомнить, что формула условной вероятности применима только в том случае, если вероятность события В больше нуля.

При работе с условной вероятностью следует придерживаться *некоторых позиций:*

- *наглядность и доступность***:** объяснение должно быть максимально наглядным и понятным;
- *практическая направленность:* необходимо показывать применение условной вероятности в жизни;
- *акцент на понимании:* важно, чтобы обучающиеся понимали смысл учебного материала, а не просто заучивали формулы;
- *предотвращение ошибок:* необходимо выявлять и предотвращать типичные ошибки, которые допускаются при изучении условной вероятности;
- *активные методы обучения:* их использование повышает интерес учащихся к теме и способствует лучшему усвоению материала. Здесь удачно могут быть реализованы: работа в группах, дискуссии по проблемным вопросам, проектная деятельность и т.д.

Учитывая эти аспекты, учитель может сделать изучение условной вероятности более интересным и эффективным.

Одним из инструментов, которые помогают облегчить непосредственное восприятие и решение задач на условную вероятность, являются графические методы. Чаще всего в контексте данного вопроса рассматриваются диаграммы Венна и деревья вероятностей, которые делают восприятие сложного математического материала более доступным и наглядным [15].

Диаграммы Венна – это способ наглядного представления множеств и их взаимосвязей, который помогает продемонстрировать как условие влияет на вероятность. Диаграмма Венна изображает каждое событие в виде круга (или другой замкнутой фигуры), область пересечения кругов в этой модели обозначает совместное наступление этих событий.

Пример.

Последовательно были подброшены игральные монета и кость. Найдите вероятность выпадения нечетного числа на кости, при условии, что выпала решка.

Решение.

Пусть событие A – «выпадение нечетного числа при подбрасывании кости», а событие B – «выпадение решки при подбрасывании монеты». Найдём $P(A|B)$ – вероятность выпадения нечетного числа на кости при условии, что выпала решка.

Все возможные исходы подбрасывания игральной кости и монеты представим с помощью диаграммы Венна (универсальное множество исходов – – U). Для кости существует 6 исходов, для монеты – 2. Общее количество исходов составляет 12 (6 исходов для игральной кости × 2 исхода для монеты).

Для события B (выпадение решки при подбрасывании монеты) благоприятствующими исходами будут являться: (P,1), (P,2), (P,3), (P,4), (P,5), (P,6). Всего 6 исходов, которые будут составлять множество исходов события B на диаграмме. Благоприятствующими исходами для события A (выпало нечетное число) являются: (P,1), (P,3), (P,5), (O,1), (O,3), (O,5). Всего 6 исходов, которые составят множество исходов события A на диаграмме. Составим диаграмму, найдем пересечение множеств A и B. Эти исходы будут благоприятствующими событию A (выпадение нечетного числа) при условии, что произошло событие B (выпала решка). Всего 3 исхода: (P,1), (P,3), (P,5).

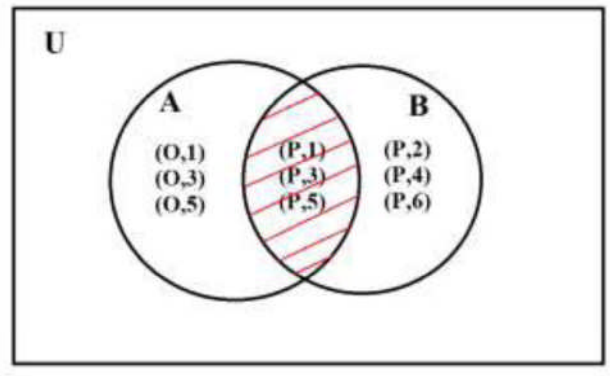


Рисунок 3 – Диаграмма Венна

Тогда $P(A|B) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.

Использование диаграмм Венна имеет ряд преимуществ. Данные модели конкретизируют абстрактные понятия, помогают увидеть взаимосвязь между событиями, помогают развить логическое мышление и вероятностную интуицию, навыки анализа и интерпретации информации.

Однако есть и ряд недостатков. Использование диаграмм Венна удобно только при небольшом количестве событий. Если событий становится более трех, модели становятся сложными для построения. Также диаграммы Венна затруднительно использовать при визуализации задач с последовательными событиями.

Дерево вероятностей является более универсальным графическим инструментом, позволяющим более наглядно визуализировать последовательные события и связь между ними, а также легко вычислить вероятность интересующего события. Использование этой модели позволяет разбить решение задачи на более простые этапы. Каждая ветвь дерева представляет собой событие, а на ветвях указаны вероятности соответствующих исходов.

Для расчёта условной вероятности необходимо выполнить определенные *шаги*.

1) *Построить дерево вероятностей.* Начиная с корня, отобразить все возможные исходы первого события, аналогично для каждого исхода первого события — исходы второго и так далее. При этом указать вероятность соответствующего исхода у каждой ветви дерева.

2) *Выделить интересующее условие и нужные исходы.* Необходимо найти ветви на дереве, которые соответствуют условию задачи. На рассматриваемых ветвях следует выделить исходы, которые соответствуют событию, вероятность которого нужно определить.

3) *Рассчитать вероятность.* Чтобы получить искомую вероятность, необходимо просуммировать вероятности всех путей, на которых выполняется условие.

Пример.

Есть три ящика. В первом ящике 4 черных и 1 белый шар, во втором – 3 черных и 2 белых шара, в третьем ящике 1 черный и 4 белых шара. Случайным образом выбирают и достают из него шар. Какова вероятность того, что шар будет черным?

Решение.

Построим дерево вероятностей.

Первый шаг: строим три ветви – выбор первого ящика ($\frac{1}{3}$), выбор второго ящика ($\frac{1}{3}$) и выбор третьего ящика ($\frac{1}{3}$).

Второй шаг: строим две ветви (от первого ящика) – выбор белого шара ($\frac{1}{5}$) и выбор черного шара ($\frac{4}{5}$).

Третий шаг: строим две ветви (от второго ящика) – выбор белого шара ($\frac{2}{5}$) и выбор черного шара ($\frac{3}{5}$).

Четвертый шаг: строим две ветви (от третьего ящика) – выбор белого шара ($\frac{4}{5}$) и выбор черного шара ($\frac{1}{5}$).

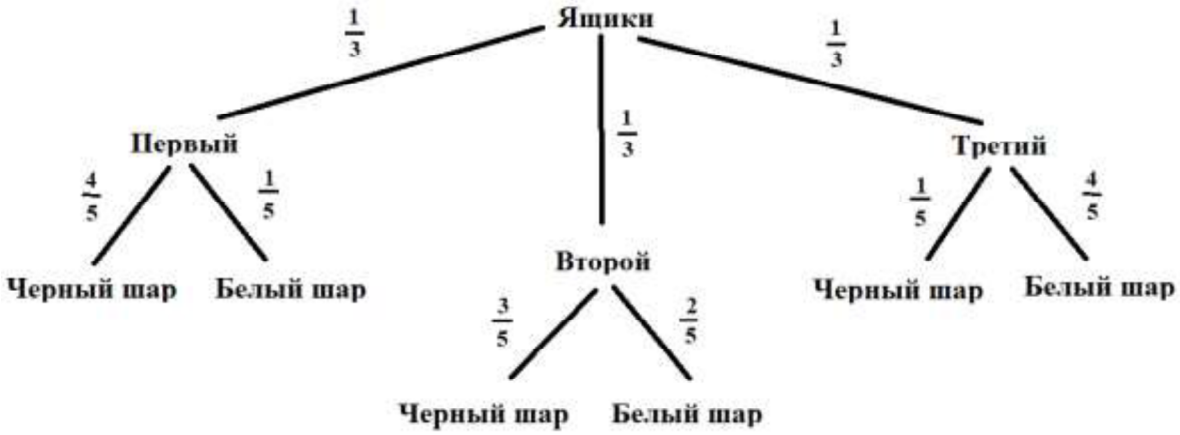


Рисунок 4 – Дерево вероятностей

Далее выделяем условие и определяем нужные исходы: ищем ветви, в которых были выбраны черные шары. Во всех ящиках содержались черные шары, поэтому рассматриваем все три ветви.

Рассчитываем вероятность события.

Пусть событие А – «достали черный шар». Оно может произойти с одним из несовместных событий (гипотез):

H_1 – «шар достали из первого ящика»;

H_2 – «шар достали из второго ящика»;

H_3 – «шар достали из третьего ящика».

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|H_1) = \frac{4}{5},\ P(A|H_2) = \frac{3}{5},\ P(A|H_3) = \frac{1}{5}$$

Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \times P(A|H_1) + P(H_2) \times P(A|H_2) + P(H_3) \times P(A|H_3)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$

Построение дерева вероятностей при решении задач на условную вероятность развивает логическое мышление и навыки анализа и систематизации информации. Данный графический инструмент можно использовать при решении задач, в которых рассматриваются два и более события. Дерево наглядно показывает как условие меняет вероятность события, поэтому способствует более глубокому развитию вероятностного мышления.

С другой стороны существует и определенные ограничения и недостатки данной модели, которые нужно учитывать. Если задача имеет множество последовательных событий или большое количество исходов у каждого события, дерево начинает быстро и активно разрастаться, переставая при этом быть удобным для построения и анализа. Лучше всего дерево вероятностей работает в задачах на последовательные события. Если же в задаче будут рассматриваться события, которые будут повторяться, принимая циклический характер, то построение дерева будет мало эффективным.

Графические методы, такие как диаграммы Венна и деревья вероятностей, являются эффективными инструментами для решения задач на условную вероятность в школьном курсе математики. Благодаря им сложные задачи становятся более наглядными и доступными для обучающихся, что способствует активному развитию вероятностного мышления, которое так необходимо современному человеку. Именно поэтому учитель должен активно предлагать обучающимся использовать графические инструменты при изучении вопросов условной вероятности [21].

2.3 Технологическая карта урока

Предмет	Вероятность и статистика
Класс	10
Тип урока	Обобщения и систематизации знаний
Технология построения урока	Системно-деятельностный подход
Тема	Условная вероятность
Цель	Создать условия для формирования у обучающихся умения применять круги Эйлера-Венна и деревья случайных экспериментов как эффективных графических инструментов, упрощающих решение задач на условную вероятность.
Основные понятия, термины	Условная вероятность, круги Эйлера-Венна, деревья случайного эксперимента.

Планируемый результат	
Предметные умения: уметь решать задачи на условную вероятность.	*Личностные УУД:* желание приобретать новые знания и умения, совершенствовать имеющиеся; осознавать свои трудности и стремиться к их преодолению; ориентироваться на понимание причин успеха в учебной деятельности. *Регулятивные УУД:* постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено, и того, что ещё неизвестно; работать по коллективно составленному плану; предвосхищение результата и уровня усвоения знаний; оценивать правильность выполнения действий; внесение необходимых дополнений и корректив в план и способ действия; способность к мобилизации сил и энергии, к волевому усилию. *Познавательные УУД:* уметь находить ответы на вопросы, используя свой жизненный опыт и информацию, полученную на уроке; выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий; уметь извлекать информацию из текстов; самостоятельно создавать алгоритм деятельности; преобразовывать объект из чувственной формы в модель; строить логическую цепочку рассуждений.

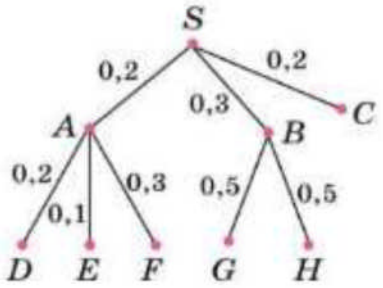
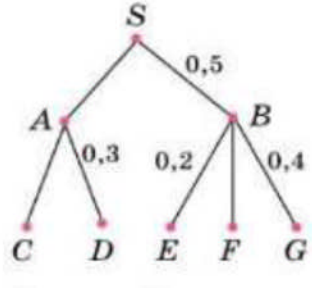
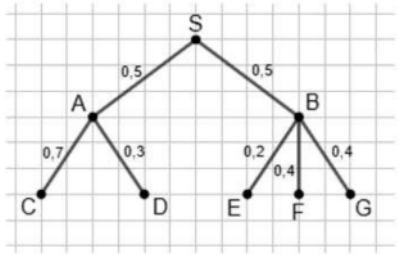
	Коммуникативные УУД: уметь выражать свои мысли в устной форме; слушать и понимать речь других; умение работать в команде; умение вступать в учебный диалог с учителем, одноклассниками, участвовать в общей беседе.
Организация пространства	
Формы работы	Ресурсы
Фронтальная, работа в парах, индивидуальная.	*Технические средства обучения: проектор, компьютер.*

Дидактические задачи этапов урока

Этапы урока	Дидактические задачи
Организационный этап (1 мин)	Включение обучающихся в учебную деятельность на личностно-значимом уровне.
Актуализация опорных знаний и умений (7 мин)	Готовность мышления и осознание потребности к построению нового способа действия.
Мотивация. Постановка темы занятия (3 мин)	Сформировать у учеников внутреннюю потребность в новых знаниях и подвести к формулировке темы урока.
Фиксация затруднения и построение плана выхода из проблемной ситуации (2 мин)	Осознать и четко сформулировать конкретное затруднение и составить план действий для его преодоления.
Постановка цели урока (2 мин)	Определение того, чему ученики должны научиться в ходе занятия.
Реализация плана выхода из проблемной ситуации (10 мин)	Осуществление намеченного плана для преодоления затруднения.
Включение изученного в систему знаний (10 мин)	Фиксация полученного знания в системе, повторение и закрепление материала.
Рефлексия учебной деятельности (5 мин)	Соотнесение цели урока и его результатов, самооценка работы на уроке.

Технология изучения

Этапы урока	Формируемые умения	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
Организационный	*Метапредметные (УУД)*: *регулятивные:* планирование своей учебной деятельности; *коммуникативные:* строить высказывание в соответствии с коммуникативной задачей.	Приветствие учителя. Проверка рабочего места. Создание положительной мотивации для работы на уроке. *- Здравствуйте, ребята! Я рада Вас видеть! Будьте внимательны в течение урока!* Ребята, давайте запишем число в рабочих тетрадях. Тему урока мы с вами определим чуть позднее вместе.	Осуществляют самооценку готовности к уроку. Записывают в тетрадях число и включаются в деловой ритм урока.
Актуализация опорных знаний и умений	*Предметные:* повторить пройденный материал по теме: «Условная вероятность». *Метапредметные (УУД):* *познавательные:* структурирование собственных знаний;	*Давайте с вами посмотрим на следующие задания и выполним их:* (задания выводятся последовательно на слайды) *Задание 1* В некотором городе 8 % населения-студенты. Из всех студентов 55 % учатся в колледже. Найдите вероятность того, что случайно выбранный житель этого города является студентом колледжа.	Обучающиеся выполняют задания: *Задание 1* Вероятность того, что случайно выбранный житель этого города является студентом, составляет 0,08. Вероятность того, что выбранный студент учится в колледже составляет 0,55. Вероятность того, что случайно выбранный житель города является студентом, который учится в колледже: $0{,}08 \times 0{,}55 = 0{,}044$

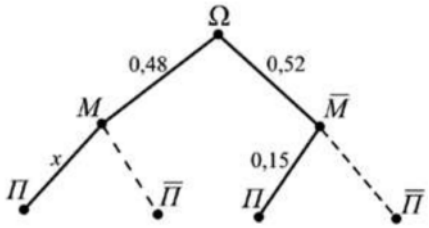
Актуализация опорных знаний и умений	*регулятивные:* внесение необходимых коррективов в действия после учета совершенных ошибок; *коммуникативные:* планирование учебного сотрудничества, умение слушать других и выражать свои мысли.	*Задание 2* На рисунке А изображено дерево некоторого случайного эксперимента. Какие ошибки были допущены?  Рисунок А  Рисунок Б *Задание 3* На рисунке Б изображено дерево некоторого случайного опыта. А) Вычислите недостающие вероятности. Б) Сколько элементарных событий в этом эксперименте? В) Пользуясь правилом умножения вероятностей, вычислите вероятности цепочек SAC и SBE. Г) Найдите вероятность события F. *Молодцы! Отлично справились!*	*Задание 2* Сумма вероятностей около всех ребер, выходящих из одной вершины, равна 1. Таким образом, были допущены следующие ошибки: – сумма вероятностей событий A, B и C не равна 1; – сумма вероятностей событий D, E и F не равна 1. *Задание 3* А*)*  Б) В этом эксперименте 5 элементарных событий, так как в дереве 5 концевых вершин. В) $P(SAC) = P(SA) \times P(AC)$ $P(SAC) = 0.5 \times 0.7 = 0.35$ $P(SBE) = P(SB) \times P(BE)$ $P(SBE) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$ Г) $P(F) = P(SBF) = P(SB) \times$ $\times P(BF) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$

Мотивация. Постановка темы занятия	*Метапредметные (УУД):* *познавательные:* построение логической цепи рассуждений; *коммуникативные:* проявление активности во взаимодействии; построение понятных для окружающих высказываний; *личностные:* проявление интереса к новому знанию.	*А теперь давайте с вами рассмотрим следующую задачу и попробуем ее решить.* В городе 48 % взрослого населения-мужчины. Пенсионеры составляют 12,6 % взрослого населения, причем доля пенсионеров среди мужчин равна 15 %. Для социологического опроса случайным образом выбран мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером» [24]. *Давайте для начала определимся с тем, как называется тип задач, которые мы сегодня рассматриваем на уроке?* Это и будет нашей темой урока. Давайте ее запишем в тетрадях.	Обучающиеся читают условие задачи. *Задачи на условную вероятность.* Обучающиеся записывают тему урока в тетрадях.
Фиксация затруднения и построение плана выхода из проблемной ситуации	*личностные:* формирование ценностных ориентиров и смыслов учебной деятельности; формирование границ собственного знания и «незнания»; *регулятивные:* принятие учебной задачи и планирование своей деятельности.	*Что отличает данную задачу от той, что мы рассмотрели в самом начале урока?* *Как вы думаете, а что нам может помочь упростить решение этой задачи?*	*Она более сложная, больше условий.* Обучающиеся высказывают свои предположения (в том числе может возникнуть идея о том, чтобы графически интерпретировать условие задачи, например с помощью деревьев случайного эксперимента).

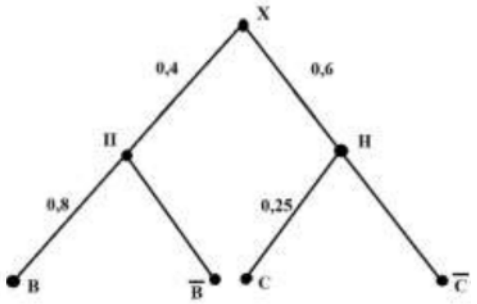
	действий в соответствии с поставленной задачей и условиями её реализации.	*Да, действительно, многие задачи решаются намного проще и быстрее, благодаря графическим моделям, которые используются для более наглядного отражения условия и самого решения задачи.*	
Постановка цели урока	*Предметные:* умение выделять неизученное. *Метапредметные (УУД):* *познавательные:* анализ проблемной ситуации, вывление противоречий, сравнение, сопоставление и обобщение информации; *регулятивные:* соотносение известного и неизвестного, определение того, что нужно узнать для решения новой задачи; *коммуникативные:* умение вступать в диалог, аргументировать свою позицию.	*Так какую же цель мы перед собой поставим?*	*Научиться решать сложные задачи на условную вероятность с помощью графических методов.*

Реализация плана выхода из проблемной ситуации	*Предметные:* научиться использовать графические инструменты для решения сложных задач на условную вероятность. *Метапредметные (УУД):* *познавательные:* анализ возможных вариантов действий и выбор наиболее эффективного способа достижения цели; *регулятивные:* корректировка действий при возникновении непредвиденных трудностей; *коммуникативные:* взаимодействие с учителем во время фронтальной работы, корректировка своего мнения.	*Давайте с вами подумаем чем являются пенсионеры, мужчины, женщины с точки зрения математики?* *А как мы обычно графически выражаем взаимосвязи между множествами?* *Давайте с вами попробуем для облегчения решения задачи выразить взаимосвязи между этими множествами. Как вы думаете, как лучше показать эти взаимосвязи?* *Пусть всего в городе будет n жителей. Тогда сколько будет мужчин? Женщин? Пенсионеров? Женщин-пенсионеров? А как можно выразить количество мужчин-пенсионеров?* *Какое уравнение мы можем составить?* *Давайте решим полученное уравнение и найдем долю мужчин-пенсионеров.* *Отлично!*	*Это множества.* *С помощью кругов Эйлера-Венна.* Обучающиеся предлагают свои варианты, обсуждают, выбирают лучший вариант. *В городе будет:* *0,48n мужчин;* *0,52n женщин;* *0,126n пенсионеров;* $0{,}15 * 0{,}52n$ *женщин - пенсионеров.* *Чтобы выразить количество мужчин-пенсионеров, можно долю пенсионеров-мужчин взять за x. Тогда их:* $x * 0.48n$. $0{,}15 \times 0{,}52n + x \times 0.48n = 0.126n$ $52 \times 1.5 + 480x = 126$ $78 + 480x = 126$ $x = \frac{126 - 78}{480} = \frac{48}{480} = 0.1$ *Ответ: 0,1*

Реализация плана выхода из проблемной ситуации		*А теперь давайте попробуем решить эту же задачу другим способом, проверим правильно ли мы ее решили и определимся с тем, какой способ удобнее именно вам.Какими еще графическими инструментами мы можем воспользоваться?* *Давайте остановимся на способе, который основывается на использовании дерева случайного эксперимента. С чего начнем построение?* *Каковы будут вероятности выбора этих исходов? Давайте подпишем их у соответствующих им ветвей.* *Какой будет следующий шаг?*	Обучающиеся думают и предлагают свои варианты. *Первым шагом строим ветви, соответствующие исходам: выбран мужчина, выбрана женщина.* *M – событие «наугад выбранный взрослый является мужчиной»* $P(M) = 0.48$ *$\overline{M}$ – событие «наугад выбранный взрослый является женщиной»* $P(\overline{M}) = 1 - 0.48 = 0.52$ *Далее от каждой ветви проведем еще по две веточки, которые будут соответствовать выбору пенсионера и не пенсионера.* *Вероятность того, что «наугад выбранный взрослый является женщиной пенсионером» равна 0,15.* П – *событие «наугад выбранный взрослый является пенсионером»* $P(\text{П}) = 0{,}126$

Реализация плана выхода из проблемной ситуации		*Давайте возьмем вероятность события «наугад выбранный взрослый является мужчиной-пенсионером» за x. Как тогда найти эту вероятность?*  *Отлично! Мы решили задачу двумя способами. Какой вывод мы можем сделать?* *А какой способ решения понравился вам больше всего? Давайте сначала поднимут руки те, кому понравился первый способ. А теперь те, кому понравился второй.* *Вы можете использовать при решении задач на условную вероятность тот способ, который вам больше всего понравился.*	*Из рисунка получаем, что:* $P(\text{П}) = 0{,}48 \times x + 0{,}52 \times 0{,}15 = 0{,}126$ $x = \frac{0{,}126 - 0{,}52 \times 0{,}15}{0{,}48} = 0{,}1$ *Ответ: 0,1* *Оба способа работают, задача была решена правильно. Графические инструменты, действительно упрощают решение задач на условную вероятность.* Обучающиеся делятся впечатлениями

Включение изученного в систему знаний	*Предметные:* Формирование навыка решения сложных задач на условную вероятность с помощью графических инструментов. *Метапредметные (УУД):* *регулятивные:* контроль, коррекция, выделение и осознание того, что уже усвоено и что еще подлежит усвоению, осознание качества и уровня усвоения, осуществление самоконтроля качества усвоения материала путём рефлексии собственного опыта; *коммуникативные:* формулирование вопросов и конструктивное взаимодействие с одноклассниками при анализе и осмыслении содержания решенной задачи;	*А теперь давайте вы сами попробуете решить задачу, используя тот способ, который больше всего понравился. Вы попробуете решить сами, а потом обменяетесь с соседом по парте и проверите с эталоном. Если у вас возникнут затруднения, я вам помогу.* Задание выводится на доске, после выполнения выводится эталон с 1 и 2 способом. ***Задание*** Ковбой Билл попадает в муху на стене в 80% случаев, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Билл стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху в 25% случаев. 40% револьверов Билла пристреляны. Ковбой Билл видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Билл попадет в муху [14]. ***Эталон:*** *1 способ* Пусть общее количество выстрелов – n. Количество выстрелов из пристрелянных револьверов – 0,4n. Количество выстрелов из непристрелянных револьверов – 0.6n.	Обучающиеся решают задачу, а после истечения отведенного времени обмениваются тетрадями и сверяют работы с эталоном.

Включение изученного в систему знаний	*познавательные:* освоение способа действий, активизация познавательной активности посредством систематизации знаний; *личностные:* осознание значимости новых знаний для личного развития и понимания окружающего мира.	Количество попаданий из пристрелянных револьверов – $0,8 \times 0,4n = 0,32n$. Количесвто попаданий из непристрелянных револьверов – $0,25 \times 0,6n = 0.15n$. $$P(A) = \frac{0,32n + 0.15n}{n} = 0.47$$ Ответ: 0,47 *2 способ*  Пусть: П – «ковбой выбрал пристрелянный револьвер» Н – «ковбой выбрал непристрелянный револьвер» А – «ковбой попал в муху» В – «ковбой попал в муху из пристрелянного револьвера» С – «ковбой попал в муху из непристрелянного револьвера» Тогда: $P(П) = 0,4$ (вероятность схватить пристрелянный револьвер) $P(Н) = 0,6$ (вероятность схватить непристрелянный револьвер) $P(В) = 0,8$ (вероятность попадания из пристрелянного револьвера) $P(С) = 0,25$ (вероятность попадания из непристрелянного револьвера) $$P(A) = 0,8 \times 0,4 + 0,25 \times 0,6 = 0,47$$ Ответ: 0,47	

Рефлексия учебной деятельности	*Метапредметные (УУД):* *регулятивные:* оценка результатов своей деятельности и деятельности класса в целом, оценка степени достижения поставленной цели; *коммуникативные:* критическое восприятие замечаний учителя и предложений товарищей, формулирование обоснованных возражений или согласия; *личностные:* оценка эмоционального состояния и удовлетворённости результатами своей учебной деятельности, фиксация достижений и трудностей, возникших в ходе занятия.	Учитель предлагает обучающимся ответить на несколько вопросов: – Что нового ты узнал на уроке? – За что бы ты себя похвалил на уроке? – Что вызвало трудности? – Какие уже имеющиеся знания понадобились? – Где можно применить полученные знания? Учитель комментирует результаты рефлексии, подводит итоги, комментирует выставляемые оценки. Учитель благодарит за продуктивную работу на уроке, дает домашнее задание.	Обучающиеся отвечают на вопросы, делятся впечатлениями. Обучающиеся слушают учителя, получают оценки.

После разработки технологической карты и презентации урок был апробирован на базе 10 «А» класса МБОУ СОШ №19 г. Пензы. Урок был проведён в соответствии с планом. Цели урока достигнуты.

В ходе рефлексии и после урока обучающиеся активно делились своими впечатлениями об использовании кругов Эйлера и деревьев вероятностей для решения задач на условную вероятность.

Большинство обучающихся отметили наглядность кругов Эйлера. Визуальное представление событий в виде областей, а их пересечений и объединений – в виде общих частей этих областей значительно облегчило понимание отношений между событиями. Обучающиеся отметили, что стало легче определять, какие события учитывать при вычислении условной вероятности. Однако у нескольких обучающихся все же были сложности с пониманием правильного отображения связи в представленных задачах. Некоторые отметили, что при большом количестве событий круги Эйлера будут трудными для восприятия.

У деревьев вероятностей обучающиеся оценили структурированность. Разбивка задачи на последовательность шагов и представление каждого шага в виде ветви дерева позволило последовательно рассмотреть все возможные варианты развития событий. Этот метод оказался особенно полезным при решении предложенных задач, по мнению большинства обучающихся, именно поэтому при решении обучающей самостоятельной работы многие выбрали данный способ. Также некоторым обучающимся показалось, что деревья вероятностей могут быть громоздкими и занимать много места, если будет предложена задача с большим количеством вариантов. Определенное количество обучающихся отметило, что существует вероятность совершить ошибку, перепутав вероятности на ветвях или забыв о каком-то событии.

Выбор метода решения задач в основном основывался на индивидуальных предпочтениях и типе предложенных задач. Большинство обучающихся выбирало метод, который казался им более простым и понятным.

Обучающиеся пришли к выводу о том, что круги Эйлера-Венна лучше использовать для более наглядного представления отношений между рассматриваемыми событиями, а деревья вероятностей будут эффективнее для случаев с последовательными событиями. Владение обоими графическими методами является хорошим подспорьем при решении задач на условную вероятность.

С другой стороны некоторые ученики все же испытывали трудности с применением графических методов. В ходе решения задач ими были допущены довольно типичные ошибки, включающие: неправильное отображение событий на кругах Эйлера, неверное вычисление вероятностей на ветвях дерева, пропуск важных событий при построении дерева, неправильную интерпретацию результатов. Данный факт указывает на необходимость дополнительной практики и более детального разбора сложных примеров.

Подводя итоги, хочется заметить, что в целом, обучающиеся положительно отнеслись к идее использования графических методов при решении задач на условную вероятность и оценили их преимущества. При работе с задачами на условную вероятность учителю важно учитывать индивидуальные предпочтения обучающихся, их особенности мышления, а также обеспечить достаточное количество практики для закрепления навыков и проработки типичных ошибок. Дальнейший план уроков будет предполагать включение большего количества заданий такого типа и анализ ошибок, что будет способствовать более глубокому пониманию материала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе данной выпускной квалификационной работы были рассмотрены цели обучения и место теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики. Здесь же был представлен анализ литературы по теме исследования, который показал, что существует необходимость создания актуальных учебно-методических пособий, которые помогут организовать работу педагогов по дисциплине «Теория вероятностей и статистика». Также учителя испытывают трудности из-за отсутствия специализированных учебников по теории вероятности и статистике для 10–11 класса, которые отвечали бы текущей рабочей программе по данному предмету.

В практической части работы была показана методика изучения вопросов стохастики в школе по каждому этапу обучения. Помимо этого была рассмотрена проблема понимания обучающимися вопросов, связанных с условной вероятностью, даны рекомендации по облегчению изучения данного раздела и составлена техологическая карта урока по этой теме.

Проведённое исследование позволило комплексно рассмотреть проблему изучения элементов теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики. Анализ теоретических основ, нормативных документов и существующей практики преподавания показал, что, несмотря на возрастающую значимость этих разделов математики в современном мире, их изучение в школе зачастую носит формальный характер.

Данная методическая разработка является лишь одним из вариантов реализации стохастической линии в школьном курсе. Эта работа может быть рекомендована для практического использования студентами-практикантами математического факультета и учителям математики. Представленный материал может использоваться как на уроках, так и на факультативных и кружковых занятиях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Об утверждении Концепции развития математического образования в Российской Федерации : распоряжение Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. URL: https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/ Заглавие с экрана (дата обращения: 13.02.2025)

2. Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования : приказ Минпросвещения России от 31.05.2021 № 287 (ред. от 22.01.2024) // Официальный интернет-портал правовой информации. URL: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 Заглавие с экрана (дата обращения: 15.02.2025).

3. Федеральная образовательная программа основного общего образования : утв. приказом Минпросвещения России от 18.05.2023 №370 // Реестр примерных основных общеобразовательных программ : сайт / Министерство просвещения Российской Федерации. URL: fgosreestr.ru Заглавие с экрана (дата обращения: 18.02.2025).

4. Примерная рабочая программа учебного курса «Вероятность и статистика». 7–9 классы // Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика (для 5–9 классов образовательных организаций) // Реестр примерных основных общеобразовательных программ. URL: https://fgosreestr.ru/oop/primernaia-rabochaia-programma-osnovnogo-obshchegoobrazovaniia-matematika. Заглавие с экрана (дата обращения: 19.02.2025).

5. Примерная рабочая программа учебного курса «Вероятность и статистика» // Примерная рабочая программа среднего общего образования учебного предмета «Математика» (базовый уровень) для 10–11 классов образовательных организаций // Реестр примерных основных общеобразова-

тельных программ. URL: https://fgosreestr.ru/uploads/files/2cfb24334ff6429604cfa6962aa4b493.pdf Заглавие с экрана (дата обращения: 19.02.2025).

6. Алимов Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : учебник для общеобразовательных организаций : базовый и углублённый уровни / Ш. А. Алимов [и др.] ; 3-е изд. М. : Просвещение, 2019. 255 с.

7. Бунимович Е. А. О теории вероятностей и статистике в школьном курсе (методические рекомендации) / Е. А. Бунимович [и др.] ; Математика в школе. № 7. 2009. С. 3–13.

8. Виленкин Н. Я. Математика. 5 класс : учебник : в двух частях / Н. Я. Виленкин [и др.] ; М. : Просвещение, 2022.

9. Виленкин Н. Я. Математика. 6 класс : базовый уровень : учебник : в 2 ч. / Н. Я. Виленкин [и др.] ; 3-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023.

10. Высоцкий И. Р. Математика. Вероятность и статистика : 7–9-е классы : базовый уровень : учебник : в 2 частях. / И. Р. Высоцкий [и др.] ; М. : Просвещение, 2023. 112 с.

11. Высоцкий И. Р. Об условной вероятности в школе / И. Р. Высоцкий [и др.] ; Текст : непосредственный // Математика. 2021. № 2. С. 12–21.

12. Высоцкий И. Р. Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и статистики / И. Р. Высоцкий [и др.] ; Математика в школе. 2014. No5. С. 32–44.

13. Зеленина Н. А. О методике преподавания элементов теории вероятностей в средней школе / Н. А. Зеленина [и др.] ; 2023. С.103–106.

14. Зеленцов Б. П. Теория вероятностей в познавательных и забавных задачах / Б. П. Зеленцов [и др.] ; М. : Ленанд, 2019. 128 с.

15. Зуфарова А. С. Роль технологии визуализации в учебной информации / А. С. Зуфарова // Современное педагогическое образование. 2020. № 9. С. 39–41.

16. Конструктор рабочих программ URL: https://edsoo.ru/konstruktor-rabochih-programm/ Заглавие с экрана (дата обращения: 15.02.2025).

17. Макарова Ю. И. Некоторые проблемы обучения теории вероятностей в школе / Ю. И. Макарова [и др.] ; 2023. С.106–110.

18. Мансурова Е. Р. О преемственности содержания в изучении теории вероятностей в школе и в вузе / Е. Р. Мансурова [и др.] ; МНИЖ. 2016. № 4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-preemstvennosti-soderzhaniya-v-izuchenii-teorii-veroyatnostey-v-shkole-i-v-vuze Заглавие с экрана (дата обращения: 15.04.2025).

19. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра и начала математического анализа. 11 класс : углубленный уровень : учебник / А. Г. Мерзляк [и др.] ; под ред. В. Е. Подольского. 2-е изд., стереотипное. М. : Вентана-Граф, 2020. 412 с.

20. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 класс. Углублённый уровень : учебное пособие / А. Г. Мерзляк [и др.] ; под редакцией В. Е. Подольского. 2-е изд., стер. М. : Вентана-Граф, 2019. 272 с.

21. Новикова Е. О. Методы визуализации информации как средство формирования метапредметных результатов при обучении математике в основной школе / Е. О. Новикова // Вестник Вятского государственного университета. 2022. № 1 (143). С. 77–86.

22. Пономарев Ю. И. Особенности формирования вероятностного мышления учащихся / Ю. И. Пономарев [и др.] ; Наука и школа. 2008. №3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-formirovaniya-veroyatnostnogo-myshleniya-uchaschihsya (дата обращения: 21.01.2025).

23. Раенко Е. А. О проблемах преподавания и изучения стохастической линии в школе и вузе / Е. А. Раенко / Ped.Rev. 2014. №4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-problemah-prepodavaniya-i-izucheniya-stohasticheskoy-linii-v-shkole-i-vuze (дата обращения: 16.04.2025).

24. Тюрин Ю. Н. Теория вероятностей и статистика. Экспериментальное учебное пособие для 10 и 11 классов общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Тюрин [и др.] ; М. : МЦНМО, 2014. 248с.

25. ФИПИ URL: https://fipi.ru/ Заглавие с экрана (дата обращения: 17.02.2025).

26. Щербатых С. В. Модель методической системы обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы / С. В. Щербатых // Современные проблемы анализа и преподавания математики: материалы Международной научной конференции, посвященной 105-летию академика Сергея Михайловича Никольского. М. : МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010. С. 127–128.

27. Энатская Н. Ю. Теория вероятностей и математическая статистика для инженерно-технических направлений: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата / Н. Ю. Энатская [и др.] ; Люберцы : Юрайт, 2016. 399 с.

28. Ященко И. В. ОГЭ. Математика : типовые экзаменационные варианты : 36 вариантов / И. В. Ященко [и др.] ; М. : Издательство «Национальное образование», 2025. 224 с.

29. Ященко И. В. ЕГЭ. Математика. Базовый уровень : типовые экзаменационные варианты : 30 вариантов / И. В. Ященко [и др.] ; М. : Издательство «Национальное образование», 2025. 192 с.

30. Ященко И. В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень : типовые экзаменационные варианты : 36 вариантов / И. В. Ященко [и др.] ; М. : Издательство «Национальное образование», 2025. 224 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024 г.
Данькин В.И.

Задание

По ВКР студента Петрушкиной Яны Александровны
(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение элементов теории вероятностей в школе»

Утверждена приказом по Университету от «25.12.» 2024 г. № 1350/0

Срок сдачи студентом законченной работы «6» мая 2025

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение и анализ литературы по теме исследования	Ноябрь-декабрь 2024 г.	Выполнено
2.	Определение цели обучения и места теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики	Январь 2025 г.	Выполнено
3.	Анализ методики изучения вопросов теории вероятностей и статистики	Февраль-март 2025 г.	Выполнено
4.	Разработка методических рекомендаций по изучению условной вероятности	Март-апрель 2025 г.	Выполнено
5.	Разработка технологической карты урока и презентации по теме: «Условная вероятность»	Апрель 2025 г.	Выполнено
6.	Оформление библиографического списка	Май 2025 г.	Выполнено
7.	Оформление работы, подготовка презентации и выступления	Май-июнь 2025 г.	Выполнено

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель _____ Никитина О.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Петрушкина Я.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А. Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Петрушкиной Яны Александровны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Петрушкина Яна Александровна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика», прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат» бакалаврской работы на тему «Изучение элементов теории вероятностей в школе», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

Петр
подпись

7.05.25
дд.мм.гггг.

ВКР представлена на проверку 7.05.25
дд.мм.гггг.

Руководитель ВКР _____ Никитина О.Г.
подпись Ф.И.О.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему: «Изучение элементов теории вероятностей в школе»
студентки 4 курса Петрушкиной Яны Александровны
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование» профиля подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://pnzgu.antiplagiat.ru

Отчет о проверке

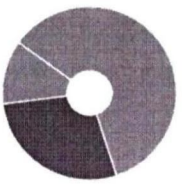
Автор: Петрушкина Яна Александровна

Название документа: ВКР Изучение элементов теории вероятностей в школе

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения
27,9%

Оригинальность
60,36%

Цитирования
11,74%

Самоцитирования
0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа

Проверено: 93,66% текста документа, исключено из проверки: 6,34% текста документа. Разделы, отключенные пользователем: Библиография

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» - это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы, библиография, фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 113
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Дата проверки: 08.05.2025 17:32:21
Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 77
Символов в тексте: 106153
Слов в тексте: 13292
Число предложений: 1243

8.05.2025
дд.мм.гггг.

подпись

Никитина О.Г.
Ф.И.О. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

на тему: «Изучение элементов теории вероятностей в школе»
студентки Петрушкиной Яны Александровны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Петрушкиной Яны Александровны посвящена вопросам изучения теории вероятностей в школе.

Актуальность темы выпускной квалификационной работы определяется растущей ролью вероятностного мышления и статистической грамотности обучающихся в последние десятилетия. Поэтому изучение вопросов стохастики в школьном курсе математики становится не просто освоением очередного раздела науки, а является важным шагом к формированию образованного и компетентного человека, способного умело ориентироваться в сложном динамичном мире.

Цель работы состоит в разработке методики изучения темы «Условная вероятность».

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения и списка литературы.

Основная часть состоит из двух глав. В первой главе рассмотрены цели обучения и место теории вероятности и статистики в школьном курсе математики. Осуществлено теоретическое обобщение и систематизация информации по исследуемой теме. Проведен анализ заданий, содержащих элементы комбинаторики и вероятности, из Основного государственного экзамена (ОГЭ) и Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ) по математике.

Во второй главе была проанализирована методика изучения вопросов теории вероятности и статистики, разработаны методические рекомендации по изучению условной вероятности. Также была спроектирована и приведена технологическая карта урока

Работа Петрушкиной Я.А. является самостоятельным исследованием. Практическая значимость исследования в том, что результаты работы могут быть использованы при изучении условной вероятности в школе.

Выпускная квалификационная работа Петрушкиной Яны Александровны заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР _____ Никитина Ольга Геннадьевна, доцент кафедры «Математическое образование», к.ф.-м.н.
подпись