

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Изучение модуля действительного числа в школе»

Студент

Гузель - 25.05.26
(подпись, дата)

Бикмаева Гузель Алиевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Никитина - 25.05.26
(подпись, дата)

Никитина О.Г.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева - 30.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И.о. заведующего кафедрой

Паньженский - 01.06.26
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 08.07.26 № 6)

Секретарь ГЭК

Журавлева - 08.07.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ МОДУЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА В ШКОЛЕ.....	6
1.1 Понятие модуля действительного числа: определение, свойства.....	6
1.2 Методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.....	9
1.3 Содержание теоретического и задачного материала в школьных учебниках алгебры различных авторов	24
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕРАКТИВНЫХ СРЕДСТВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА»	29
2.1 Основные понятия интерактивного обучения, достоинства и недостатки его использования.....	29
2.2 Анализ интерактивных средств обучения, которые можно использовать при изучении темы «Модуль действительного числа»	33
2.3 Концепция и модель интерактивного тренажёра «Модуль числа: от основ к решению задач».....	39
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	57
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	58
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	61

ВВЕДЕНИЕ

В эпоху стремительного развития цифровых технологий и повсеместной информатизации образования вопрос о наиболее эффективных методах преподавания фундаментальных математических понятий приобретает особую значимость. Одним из таких понятий является «Модуль действительного числа», оно вызывает у школьников существенные трудности.

Несмотря на кажущуюся простоту, модуль числа имеет и алгебраический, и геометрический смысл, а также играет важную роль в решении уравнений, неравенств, в анализе функций, в прикладных задачах. Но многие учащиеся испытывают трудности в правильном определении модуля и в применении его свойств. А это в свою очередь негативно отражается в последующем изучении математических тем, таких как тригонометрия, анализ, комплексные числа.

В последние годы активное внедрение цифровых технологий показывает свой высокий образовательный потенциал в повышении эффективности обучения. Различные интерактивные платформы, тренажёры, игровые подходы делают учебный процесс более динамичным, наглядным и ориентированным на индивидуальные потребности ученика.

Всё вышесказанное свидетельствует об актуальности выбранной темы исследования.

Проблема исследования состоит в поиске более эффективных интерактивных средств, которые могут применяться как на уроках при изучении темы «Модуль действительного числа», так и обучающимися во внеурочной деятельности.

Цель исследования: выявить особенности использования интерактивных средств в школе при изучении темы «Модуль действительного числа» и разработать интерактивный тренажёр «Модуль числа: от основ к решению задач».

Исходя из выше поставленной цели, были выделены следующие задачи исследования.

1. Провести анализ научной и учебно-методической литературы, Интернет-ресурсов, соответствующих теме исследования.
2. Дать определение понятию «Модуль», описать его свойства, выделить методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.
3. Провести анализ содержания теоретического и задачного материала в школьных учебниках алгебры различных авторов.
4. Определить особенности использования интерактивных средств в процессе обучения, выявить их достоинства и недостатки.
5. Провести анализ имеющихся в свободном доступе интерактивных средств обучения, которые можно использовать при изучении темы «Модуль действительного числа».
6. Разработать интерактивный тренажёр «Модуль числа: от основ к решению задач».

Объект исследования: процесс изучения модуля действительного числа в школе с использованием интерактивных средств обучения.

Предмет исследования: возможность использования интерактивных средств обучения учителем и обучающимися при изучении темы «Модуль действительного числа».

Теоретическая значимость исследования заключается в анализе подхода использования интерактивных средств и их видов на уроках математики.

Практическая значимость результатов, полученных в ходе исследования, состоит в разработанном интерактивном тренажёре «Модуль числа: от основ к решению задач», который может быть использован как на уроках, так и учащимися при самостоятельном изучении.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Первая глава посвящена теоретическим основам рассматриваемой темы. В частности, описаны теоретико-методические основы изучения модуля действительного числа, методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, а также проведён сравнительный анализ учебников различных авторов.

Во второй главе подробно рассмотрено применение интерактивных средств на уроках математики, а именно темы «Модуль действительного числа». Здесь же приводится интерактивный тренажёр «Модуль числа: от основ к решению задач».

В заключении сформулированы основные выводы и результаты.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ МОДУЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА В ШКОЛЕ

1.1 Понятие модуля действительного числа: определение, свойства

Для того, чтобы хорошо понимать определение модуля числа, необходимо разбираться в понятиях положительные, отрицательны и противоположные числа.

Определение 1.

Модуль числа a ($|a|$) – это либо само число a , если a – положительное число, либо число $-a$, противоположное числу a , если a – отрицательное число, либо 0, если $a = 0$.

Приведённое определение можно записать следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0; \\ -a, & a < 0; \\ 0, & a = 0. \end{cases}$$

Также можно представить в более компактном виде:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ a, & a < 0, \end{cases} \text{ или } |a| = \begin{cases} a, & a > 0; \\ a, & a \leq 0. \end{cases}$$

Поясним случай, $a = 0$. $|0| = -0$, но $-0 = 0$, так как ноль считают числом, противоположным самому себе. [13]

Пример 1. Найдите модули чисел 101 и $-2\frac{1}{5}$.

Решение. Так как число 101 является положительным, то его модуль по определению равен самому числу. Тогда получаем, $|101| = 101$.

Так как число $-2\frac{1}{5}$ является отрицательным, то его модуль равен противоположному ему числу, то есть $-(-2\frac{1}{5}) = 2\frac{1}{5}$. Тогда получаем, $|-2\frac{1}{5}| = 2\frac{1}{5}$.

Их рассмотренных примеров и определения модуля чётко видно, что модуль числа равен числу под его знаком без учёта его знака. Такое

утверждение объясняет, почему модуль числа также называют абсолютной величиной числа. Таким образом, понятия модуль числа и абсолютная величина числа совпадают.

Ранее был описан алгебраический смысл определения модуля, далее будет приведен геометрический смысл, который позволяет модуль числа интерпретировать как расстояние.

Определение 2.

Модуль числа a – это расстояние от начала отсчёта на координатной прямой до точки, соответствующей числу a .

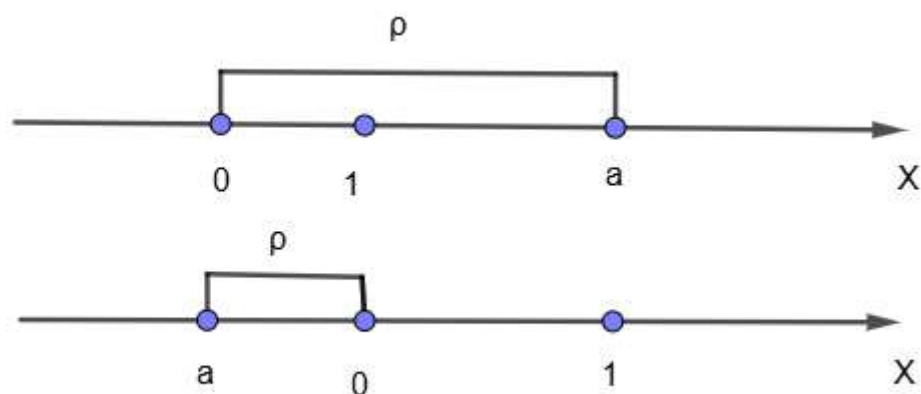


Рисунок 1 – Модуль числа, как расстояние

Определение 2 согласуется с определением 1. Поясним: расстояние от начала отсчёта до точки на координатной прямой соответствует положительное число, равное ему; нулю соответствует начало отсчёта, поэтому расстояние от начала отсчёта до точки с координатой 0 равно нулю, ; расстояние от начала отсчёта до точки с отрицательной координатой равно числу противоположному координате данной точки, так как равно расстоянию от начала координат до точки, координатой которой является противоположное число. [8]

Свойства модуля являются ключевыми инструментами для упрощения выражений, решения уравнений и неравенств, доказательства математических утверждений. Поэтому следует рассмотреть их подробнее [7].

Таблица 1 – свойства модуля

1.	Модуль числа есть неотрицательное число	$ a \geq 0$
2.	Модули противоположных чисел равны	$ a = -a $
3.	Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа. Справедливо для любой чётной степени	$ a ^2 = a^2$ $ a ^{2n} = a^{2n}$
4.	Абсолютная величина любого действительного числа a равна арифметическому квадратному корню из a^2 (справедливо для корня любой чётной степени)	$ a = \sqrt{a^2}$ $ a = \sqrt[2n]{a^{2n}}$
5.	Модуль произведения чисел равен произведению модулей этих чисел	$ a \cdot b = a \cdot b $
6.	Модуль частного чисел равен отношению модулей этих чисел	$\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }, b \neq 0$
7.	Постоянный множитель можно вынести за знак модуля	$ m \cdot a = m \cdot a , m > 0$
8.	Модуль суммы (разности) двух чисел не превосходит сумму модулей этих чисел	$ a \pm b \leq a + b $
9.	Модуль суммы (разности) чисел больше или равен разности их модулей	$ a \pm b \geq a - b $
10.	Модуль суммы (разности) чисел больше или равен разности их модулей	$ a \pm b \geq a - b $
11.	Разность модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений, когда эта сумма равна нулю или когда уменьшаемое имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму, а вычитаемое имеет противоположный знак	$ a - b = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a = b, \\ a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$ $ a - b = b - a \Leftrightarrow \begin{cases} a = b, \\ a \leq 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$ $ a - b = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0, \\ a \geq 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$ $ a - b = -a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0, \\ a \leq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$
12.	Сумма модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений тогда и только тогда, когда каждое выражение имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму	$ a + b = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$ $ a + b = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$ $ a + b = -a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq 0. \end{cases}$ $ a + b = -a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$
13.	Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных выражений тогда и только тогда, когда одновременно все выражения имеют тот знак, с которым они входят в	$ a + b = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \\ a \leq 0, \\ b \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$

	алгебраическую сумму, либо одновременно все выражения имеют противоположный знак	$ a + b = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0, \\ a \leq 0, \\ b \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow a \cdot b \leq 0$
--	--	---

Свойства 12 и 13 можно распространить и на большее число слагаемых. Далее пример одной из схем свойства 13 для трёх слагаемых:

$$|a| + |b| + |c| = |a + b - c| \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \\ c \leq 0, \\ a \leq 0, \\ b \leq 0, \\ c \geq 0. \end{cases}$$

Эффективное усвоение модуля действительного числа требует комплексного подхода к изучению данной темы, который будет сочетать в себе чёткое определение, наглядную визуализацию, систематическое изучение свойств и разнообразные практические задания, направленные на устранение типичных ошибок.

1.2 Методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля

Способы решений уравнений, содержащих знак неизвестное под знаком модуля, зависит от вида уравнений.

Мы выделили следующие виды уравнений, методы решения которых будут рассмотрены далее.

1. $|f(x)| = a.$
2. $f(|x|) = a.$
3. $|f(x)| = g(x).$
4. $|a_1x + b_1| \pm |a_1x + b_1| \pm \dots \pm |a_1x + b_1| = c$
5. $|f(x)| = |g(x)|.$ [13]
1. Уравнения вида $|f(x)| = a.$

Данный вид уравнения имеет решение только тогда, когда $a \geq 0.$

Его можно решить используя определение модуля, согласно которому данное уравнение распадается на следующую совокупность уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$$

Пример 2. Решите уравнение $|x - 5| = 8$.

Решение. По ранее описанному способу решения данного вида уравнения получаем совокупность двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} x - 5 = 8, \\ x - 5 = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 13, \\ x = -3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 13, x_2 = -3$.

Пример 3. Решите уравнение $|x^2 - 3x + 2| = 6$.

Решение. По определению модуля получаем совокупность двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 6, \\ x^2 - 3x + 2 = -6; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x^2 - 3x + 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1, x_2 = 4, \\ x \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 4$.

2. Уравнения вида $f(|x|) = a$.

По определению модуля данное уравнение необходимо расписать на совокупность двух смешанных систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} f(x) = a, \\ x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) = a, \\ x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Исходя из того, что функция $f(|x|) = a$ чётная, её корни будут существовать парами противоположных чисел, то есть если x_1 — корень уравнения, то $(-x_1)$ тоже является корнем уравнения. Делаем вывод, что для получения ответа достаточно решить одну из двух систем совокупности, но не забыть в ответ вписать и получившиеся корни и им противоположные значения.

Пример 4. Решите уравнение $|x| - 10 = 0$.

Решение. Составим и решим одному из систем совокупности:

$$\begin{cases} x - 10 = 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad x = 10.$$

Из данного способа решения и сделанного ранее вывода получаем, что корнями уравнения являются числа -10 и 10 .

Ответ: $x_1 = -10, x_2 = 10$.

Пример 5. Решите уравнение $x^2 - |x| = 2$.

Решение. Составим и решим одну из систем совокупности:

$$\begin{cases} x^2 - x = 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1, x_2 = 2, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad x = 2.$$

Из данного способа решения и сделанного ранее вывода получаем, что корнями уравнения являются числа -2 и 2 .

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = 2$.

3. Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$.

Данный вид уравнений по определению модуля необходимо расписать на совокупность двух смешанных систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Пример 6. Решите уравнение $|3x - 2| = 2x + 3$.

Решение. Составим две смешанные системы, соответствующие ранее выделенному способу решения уравнений данного вида, и решим их:

$$(1) \quad \begin{cases} 3x - 2 = 2x + 3, \\ 2x + 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ x \geq -\frac{3}{2}; \end{cases} \quad x = 5;$$

$$(2) \quad \begin{cases} 3x - 2 = -2x - 3, \\ 2x + 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = -1, \\ x \geq -\frac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{5}, \\ x \geq -\frac{3}{2}; \end{cases} \quad x = -\frac{1}{5}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{5}, x_2 = 5$.

Пример 7. Решите уравнение $|x^2 - 4x + 3| = 4x - x^2 - 3$.

Решение. Составим две смешанные системы, соответствующие ранее выделенному способу решения уравнений данного вида, и решим их:

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 4x - x^2 - 3, \\ 4x - x^2 - 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 = 0, \\ x \in [1; 3]; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ x \in [1; 3]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 3, \\ x \in [1; 3]; \end{cases} \quad x_1 = 1, x_2 = 3.$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = -4x + x^2 + 3, \\ 4x - x^2 - 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0, \\ x \in [1; 3]; \end{cases} \quad \begin{cases} \text{верно}, \\ x \in [1; 3]; \end{cases} \quad x \in [1; 3].$$

Ответ: $x \in [1; 3]$.

4. Уравнения вида $|a_1x + b_1| \pm |a_2x + b_2| \pm \dots \pm |a_kx + k| = c$.

Данный вид уравнений решается по следующему плану.

1) Находят такие значения x , при переходе через которые знак подмодульных выражений меняется, то есть находим

$$x_1 = -\frac{b_1}{a_1}; x_2 = -\frac{b_2}{a_2}; \dots; x_k = -\frac{b_k}{a_k}.$$

2) Отмечают найденные значения $x_1, x_2, \dots, x_k$ на координатной прямой, пусть для определённости $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

3) Рассматривают данное уравнение последовательно на промежутках: $(-\infty; x_1), [x_1; x_2), \dots, [x_k; +\infty)$.

На каждом промежутке получаем некоторое линейное уравнение, из решения которого отбираются только те корни, которые содержатся в соответствующих рассматриваемых промежутках.

Замечание. Аналогично решаются и уравнения, содержащие под знаком модуля нелинейные зависимости.

Пример 8. Решите уравнение $|x + 3| - |x - 2| = 5$.

Решение. Найдём значения x , при переходе через которые знак подмодульных выражений меняется:

$$\begin{aligned} x + 3 = 0 & \rightarrow x = -3; \\ x - 2 = 0 & \rightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Схематично отметим их на координатной прямой (Рисунок 2) и выделим необходимые промежутки:



Рисунок 2 – Пример 8

Далее рассмотрим уравнения на промежутках $(-\infty; -3)$, $[-3; 2]$, $(2; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x < -3, \\ -x - 3 + x - 2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -3, \\ -5 = 5; \end{cases} \quad \text{корней нет;} \\ \text{б) } & \begin{cases} -3 \leq x \leq 2, \\ x + 3 + x - 2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq 2, \\ 2x = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq 2, \\ x = 2; \end{cases} \quad x = 2; \\ \text{в) } & \begin{cases} x > 2, \\ x + 3 - x + 2 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ 5 = 5; \end{cases} \quad x > 2. \end{aligned}$$

В ответ записываем объединение результатов, полученных на промежутках, то есть $x \geq 2$.

Ответ: $x \geq 2$.

Пример 9. Решите уравнение $|x + 2| + |x - 2| - \frac{|x-1|}{x-1} = 5$.

Решение. В данном случае решение проводим аналогично Примеру 8.

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2;$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2;$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1.$$



Рисунок 3 – Пример 9

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x < -2, \\ -x - 2 - x + 2 + 1 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ -2x = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ x = -2; \end{cases} \quad \text{корней нет;} \\ \text{б) } & \begin{cases} -2 \leq x < 1, \\ x + 2 - x + 2 + 1 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x < 1, \\ 5 = 5; \end{cases} \quad -2 \leq x < 1; \\ \text{в) } & \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x + 2 - x + 2 - 1 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x < 2, \\ 4 = 5; \end{cases} \quad \text{корней нет;} \end{aligned}$$

$$\text{г)} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x + 2 + x - 2 - 1 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ 2x = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x = 3; \end{cases} \quad x = 3.$$

Ответ: $x \in [-2; 1) \cup \{3\}$.

5. Уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$.

По определению модуля данный вид уравнения можно расписать равносильной совокупностью двух уравнений и для решения использовать именно её:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

Но используя свойство модуля $|a|^2 = a^2$ (свойство 3), можно заменить решение данного уравнения следующим образом:

$$|f(x)| = |g(x)|; \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) - g(x) = 0, \\ f(x) + g(x) = 0; \end{cases}$$

$$(f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) = 0; \quad f^2(x) - g^2(x) = 0; \quad f^2(x) = g^2(x).$$

Таким образом получаем ещё один способ решения уравнений данного вида: $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$.

Пример 10. Решите уравнение $|x^2 - 3x + 2| = |x - 2|$.

Решение. Воспользуемся первым способом, то есть заменим данное уравнение на совокупность двух уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = x - 2, \\ x^2 - 3x + 2 = -x + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0, \\ x^2 - 2x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1,2} = 2, \\ x_1 = 0, x_2 = 2; \end{cases} \quad x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 2$.

Пример 11. Решите уравнение $|2x - 1| = |x - 2|$.

Решение. Воспользуемся вторым способом:

$$(|2x - 1|)^2 = (|x - 2|)^2;$$

$$(2x - 1)^2 = (x - 2)^2;$$

$$4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4;$$

$$3x^2 = 3;$$

$$x^2 = 1;$$

$$x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Способы решений неравенств, содержащих знак неизвестное под знаком модуля, также зависит от его вида.

Мы выделили следующие виды неравенств, способы решения которых будут рассмотрены далее.

1. $|f(x)| < a$.
2. $|f(x)| > a$.
3. $f(|x|) > a$ и $f(|x|) < a$.
4. $|f(x)| > g(x)$.
5. $|k_1x + b_1| \pm |k_2x + b_2| \pm \dots |k_rx + b_r| > c$. [13]

1. Неравенства вида $|f(x)| < a$

Данный вид неравенства имеет решение только тогда, когда $a > 0$.

По определению модуля данное неравенство можно заменить равносильной ему системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a; \end{cases} \text{ или } -a < f(x) < a.$$

Пример 12. Решите неравенство $|2x + 1| < 3$.

Решение. Проверяем условие возможно ли вообще решить данное неравенство. Да, возможно, так как $3 > 0$.

Используя определение модуля получаем систему неравенств:

$$-3 < 2x + 1 < 3;$$

$$-4 < 2x < 2;$$

$$-2 < x < 1.$$

Ответ: $x \in (-2; 1)$.

Пример 13. Решите неравенство $|x^2 - 3x + 2| < 6$.

Решение. Используя определение модуля распишем неравенство на систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 6, \\ x^2 - 3x + 2 > -6; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ x^2 - 3x + 8 > 0; \end{cases} \begin{cases} -1 < x < 4, \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases} -1 < x < 4.$$

Ответ: $x \in (-1; 4)$.

2. Неравенства вида $|f(x)| > a$

Данный вид неравенства выполняется во всей области определения функции $f(x)$, если $a \leq 0$.

Если $a > 0$, то используя определение модуля оно равносильно совокупности двух неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{cases}$$

Пример 14. Решите неравенство $|2x + 1| > 3$.

Решение. При условии, что $3 > 0$, расписываем данное неравенство на равносильную совокупность неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 1 > 3, \\ 2x + 1 < -3; \end{cases} \begin{cases} 2x > 2, \\ 2x < -4; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x < -2; \end{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Пример 15. Решите неравенство $|x^2 - 3x + 2| < 6$.

Решение.

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 6, \\ x^2 - 3x + 2 < -6; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0, \\ x^2 - 3x + 8 < 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty), \\ \emptyset; \end{cases} -1 < x < 4.$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 6, \\ x^2 - 3x + 2 < -6; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0, \\ x^2 - 3x + 8 < 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty), \\ \emptyset. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

3. Неравенства вида $f(|x|) > a$ и $f(|x|) < a$

Исходя из определения модуля каждое из выделенных неравенств можно расписать равносильными совокупностями двух систем неравенств:

$$\begin{aligned} f(|x|) > a &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) > a, \\ x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) > a, \\ x < 0; \end{cases} \end{cases} \\ f(|x|) < a &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) < a, \\ x \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(-x) < a, \\ x < 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Пример 16. Решите неравенство $|x|^2 - 3|x| < 4$.

Решение. Исходя из определения модуля данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств, решим их по отдельности:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} x^2 - 3x < 4, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-1; 4), \\ x \geq 0; \end{cases} \quad x \in [0; 4); \\ 2) \quad & \begin{cases} x^2 + 3x < 4, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-4; 1), \\ x < 0; \end{cases} \quad x \in (-4; 0). \end{aligned}$$

Запишем совокупность их решений $x \in (-4; 0) \cup [0; 4) \rightarrow x \in (-4; 4)$.

Ответ: $x \in (-4; 4)$.

4. Неравенства вида $|f(x)| > g(x)$

По определению модуля данное неравенство можно расписать на равносильную ему совокупность двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Пример 17. Решите неравенство $|2x - 1| > x + 2$.

Решение. Исходя из определения модуля данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств, решим их по отдельности:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} 2x - 1 \geq 0, \\ 2x - 1 > x + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ x > 3; \end{cases} \quad x > 3; \\ 2) \quad & \begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ -2x + 1 > x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x < -\frac{1}{3}; \end{cases} \quad x < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

5. Неравенства вида $|k_1x + b_1| \pm |k_2x + b_2| \pm \dots |k_rx + b_r| > c$

Данный вид неравенств решается по плану аналогичному алгоритму решения соответствующих уравнений.

1) Находят такие значения x , при переходе через которые знак подмодульных выражений меняется, то есть находим

$$x_1 = -\frac{b_1}{k_1}; x_2 = -\frac{b_2}{k_2}; \dots; x_r = -\frac{b_r}{k_r}.$$

2) Отмечают найденные значения $x_1, x_2, \dots, x_r$ на координатной прямой, пусть для определённости $x_1 < x_2 < \dots < x_r$.

3) Рассматривают данное неравенство последовательно на промежутках: $(-\infty; x_1), [x_1; x_2), \dots, [x_r; +\infty)$.

На каждом промежутке получаем некоторое линейное неравенство, из решения которого отбираются только те корни, которые содержатся в соответствующих рассматриваемых промежутках.

Замечание. Аналогично решаются и неравенства, содержащие под знаком модуля нелинейные зависимости.

Пример 18. Решите неравенство $|x + 2| + |x - 2| + |x - 3| > 9$.

Решение. Найдём такие значения x , при переходе через которые знак подмодульных выражений меняется:

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Схематично отметим их на координатной прямой (Рисунок 4) и выделим необходимые промежутки:



Рисунок 4 – Пример 18

Далее рассмотрим неравенство на четырёх получившихся промежутках $(-\infty; -2), [-2; 2), [2; 3), [3; +\infty)$.

$$\text{а) } \begin{cases} -x - 2 - x + 2 - x + 3 > 9, \\ x < -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ x < -2; \end{cases} \quad x < -2;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2 - x + 2 - x + 3 > 9, \\ -2 \leq x < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ -2 \leq x < 2; \end{cases} \quad \emptyset;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + 2 + x - 2 - x + 3 > 9, \\ 2 \leq x < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 6, \\ 2 \leq x < 3; \end{cases} \quad \emptyset;$$

$$г) \begin{cases} x + 2 - x + 2 + x - 3 > 9, \\ x \geq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x \geq 3; \end{cases} \quad x > 4.$$

В ответ записываем объединение результатов, полученных на промежутках, то есть $x \in (-\infty; -2) \cup (4, +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (4, +\infty)$.

Ранее были рассмотрены способы решений уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, относительно их видов, при этом решение осуществлялось через определение знака модуля. Далее также хотелось бы указать ещё несколько методов на примерах, которые можно использовать при решении таких уравнений и неравенств.

Основные методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.

1. Метод раскрытия модуля по определению (Метод интервалов).
2. Метод возведения обеих частей в квадрат.
3. Графический метод.
4. Метод использования свойств модуля.
5. Метод замены переменной.
1. Метод раскрытия модуля по определению (Метод интервалов).

Применение первого метода как к решению уравнений, так и неравенств можно посмотреть в Примерах 8, 9, 18.

2. Метод возведения обеих частей в квадрат.

Использование второго метода для уравнений было продемонстрировано на Примере 11. Покажем его применение к неравенствам, содержащим знак модуля:

Пример 19. Решите неравенство $|x - 2| > x - 1$.

Решение. Чтобы решить данное неравенство необходимо рассмотреть два случая, когда правая его часть отрицательна и неотрицательна.

Случай 1. Правая часть отрицательна, то есть $x - 1 < 0 \rightarrow x < 1$. В этом случае $|x - 2| \geq 0$ всегда больше чем $x - 1 < 0$. Поэтому все $x < 1$ являются решением.

Случай 2. Правая часть неотрицательна, то есть $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$.
Обе части неотрицательны, поэтому можно возводить в квадрат:

$$(|x - 2|)^2 > (x - 1)^2;$$

$$(x - 2)^2 > (x - 1)^2;$$

$$x^2 - 4x + 4 > x^2 - 2x + 1;$$

$$2x < 3;$$

$$x < 1,5.$$

Теперь пересекаем полученный ответ с условием, получаем $x \in [1; 1,5)$.

Объединяем 1 и 2 случай в единый ответ, то есть $x \in (\infty; 1) \cup (-\infty; 1,5)$
 $\rightarrow x \in (-\infty; 1,5)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1,5)$.

3. Графический метод.

Пример 20. Решите уравнение $|x + 1| = 2x - 1$.

Решение. Данный метод основывается на визуализации решения путём построения графиков соответствующих функций.

1) Строим график $y = |x + 1|$ – «уголок» с вершиной в $(-1; 0)$. Для $x \geq -1$ это $y = x + 1$, для $x < -1$ это $y = -(x + 1) = -x - 1$.

2) Строим график $y = 2x - 1$ – это прямая проходящая, через точки $(0; -1)$ и $(0,5; 0)$.

3) Находим точки пересечения.

а) Пересечение $y = -x - 1$ (где $x < -1$) и $y = 2x - 1$ при $x = 0$, но мы рассматривали случай $x < -1$. Следовательно $x = 0$ «лишний корень».

б) Пересечение $y = x + 1$ (где $x \geq -1$) и $y = 2x - 1$ при $x = 2$.
Проверяем условие: $2 \geq -1$. Следовательно $x = 2$ корень.

Ответ: $x = 2$.

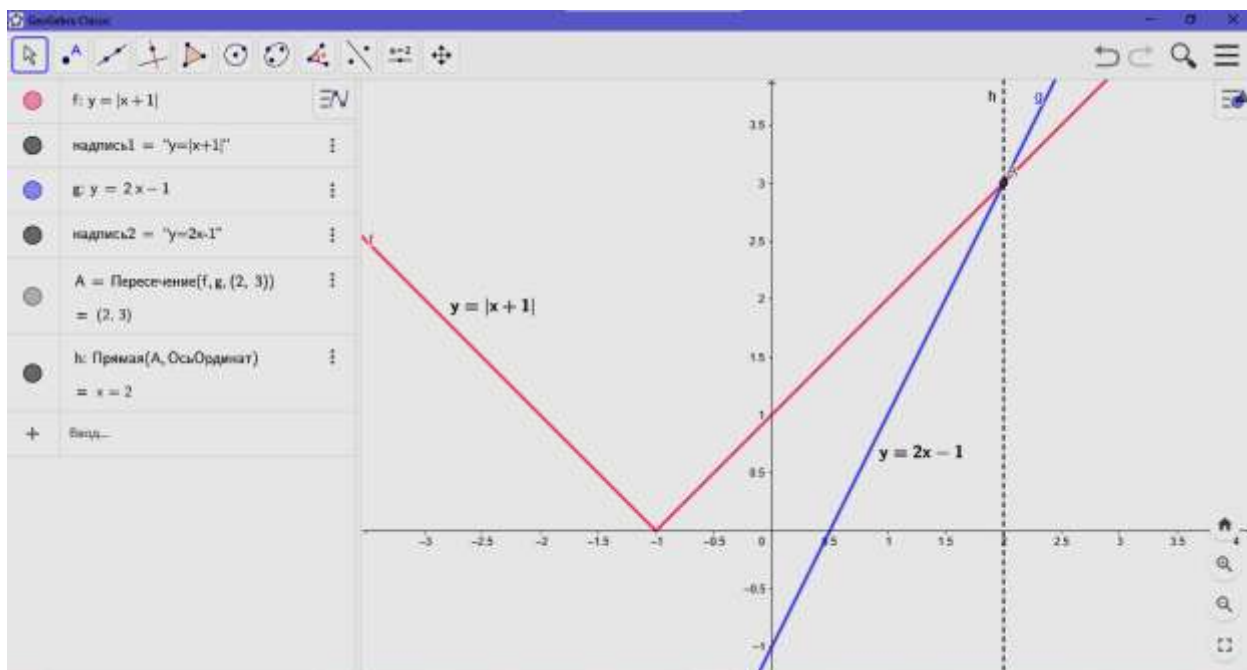


Рисунок 5 – Пример 20

Пример 21. Решите неравенство $|x| > x - 2$.

Решение.

1) Строим график $y = |x|$ – «уголок» с вершиной в $(0; 0)$. Для $x \geq 0$ это $y = x$, для $x < 0$ это $y = -x$.

2) Строим график $y = x - 2$ – это прямая проходящая, через точки $(0; -2)$ и $(2; 0)$.

3) Находим точки пересечения:

а) Пересечение $y = -x$ (где $x < 0$) и $y = x - 2$ при $x = 1$, но мы рассматривали случай $x < 0$. Следовательно $x = 1$ «лишний корень».

б) Пересечение $y = x$ (где $x \geq 0$) и $y = x - 2$ при $x = x - 2 \rightarrow 0 = -2$, неверно, следовательно прямые параллельны.

4) Анализируем положение графиков: прямая $y = x - 2$ всегда лежит ниже прямой $y = x$ (для $x \geq 0$) и ниже прямой $y = -x$ (для $x < 0$). График $y = |x|$ всегда находится выше графика $y = x - 2$.

Ответ: Неравенство выполняется для всех действительных x , то есть $x \in (-\infty; +\infty)$.

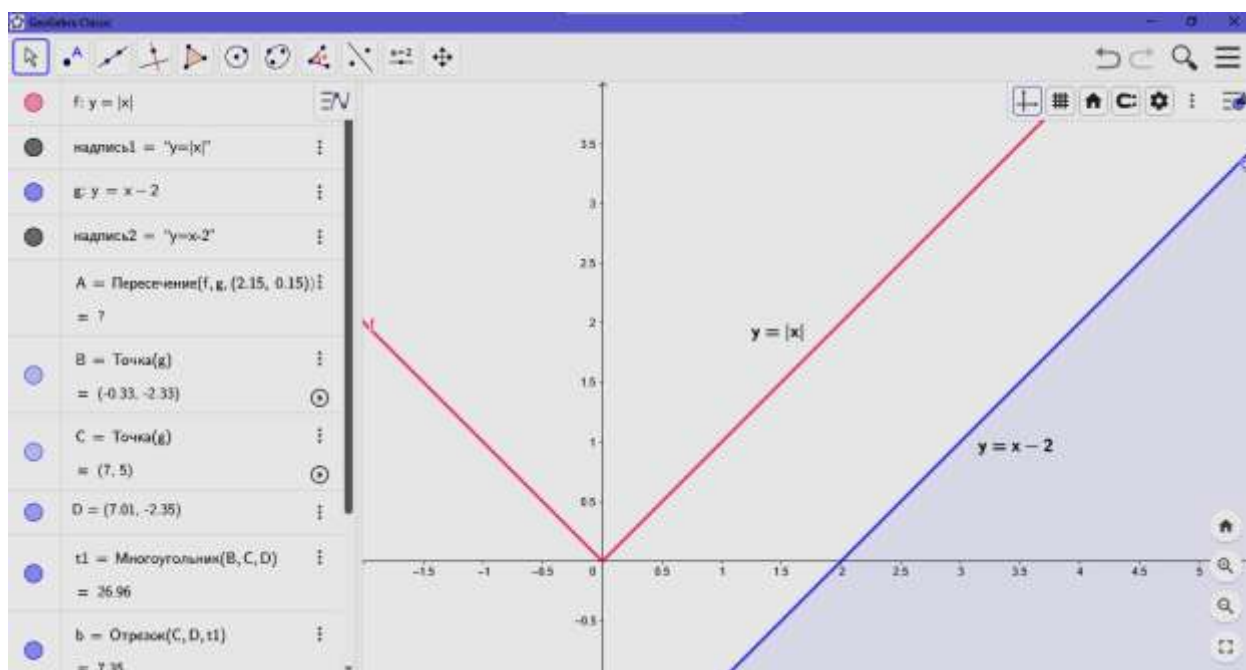


Рисунок 6 – Пример 21

4. Метод использования свойств модуля.

Пример 22. Решите уравнение $|x^2 - 4| = |2x - 4|$.

Решение. Применяем свойство $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ или $a = -b$.

Случай 1: $x^2 - 4 = 2x - 4$; $x^2 - 2x = 0$; $x(x - 2) = 0$; $x = 0$ или $x = 2$.

Случай 2: $x^2 - 4 = -(2x - 4)$; $x^2 + 2x - 8 = 0$; $x = -4$ или $x = 2$.

Ответ: $x \in \{-4\} \cup \{0\} \cup \{2\}$.

Пример 23. Решите неравенство $|2x - 3| < 5$.

Решение. Применяем свойство $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$ при $b > 0$.

$$-5 < 2x - 3 < 5;$$

$$-2 < 2x < 8;$$

$$-1 < x < 4.$$

Ответ: $x \in (-1; 4)$.

5. Метод замены переменной.

Пример 24. Решите уравнение $2|x|^2 - 5|x| + 2 = 0$.

Решение. Замечаем, что переменная x входит в уравнение только в виде $|x|$, а структура уравнения напоминает квадратное, то есть

$$2t^2 - 5t + 2 = 0, \text{ где } t = |x|.$$

Пусть $t = |x|$. Поскольку $|x| \geq 0$, то на t накладывается условие, $t \geq 0$.

Записываем уравнение относительно новой переменной и решаем его:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0;$$

$$t_1 = \frac{1}{2}; t_2 = 2.$$

Проверяем условие на t : $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = 2$, оба неотрицательные, следовательно удовлетворяют.

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\text{Случай 1. } |x| = t_1; |x| = \frac{1}{2}; x = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{Случай 2. } |x| = t_2; |x| = 2; x = \pm 2.$$

Объединяем решения и записываем ответ: $x = \pm \frac{1}{2}; x = \pm 2$.

Ответ: $x = \pm \frac{1}{2}; x = \pm 2$.

Пример 25. Решите неравенство $3|x|^2 - 2|x| - 1 < 0$.

Решение. Неравенство имеет вид $f(|x|) < a$. Переменная x встречается только в виде $|x|$. Структура напоминает квадратное неравенство.

Пусть $t = |x|$. Поскольку $|x| \geq 0$, то на t накладывается условие, $t \geq 0$.

Записываем неравенство относительно новой переменной и решаем его:

$$3t^2 - 2t - 1 < 0;$$

$$-\frac{1}{3} < t < 1.$$

Проверяем условие на t : $\begin{cases} -\frac{1}{3} < t < 1, \\ t \geq 0; \end{cases} \quad 0 \leq t < 1.$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$0 \leq |x| < 1 \text{ или } \begin{cases} |x| \geq 0, \\ |x| < 1; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; +\infty), \\ x \in (-1; 1); \end{cases} \quad x \in (-1; 1).$$

Ответ: $x \in (-1; 1)$.

Все приведенные примеры демонстрируют, как разные методы позволяют решать одни и те же типы задач. Выбор метода часто зависит от конкретного вида уравнения или неравенства и личных предпочтений решающего.

1.3 Содержание теоретического и задачного материала в школьных учебниках алгебры различных авторов

Одной из ключевых задач курса алгебры основной школы является изучение понятия модуля действительного числа и методов решения связанных с ним уравнений и неравенств. Содержание теоретического и задачного материала по этой теме в учебниках различных авторов может существенно варьироваться, что обусловлено разными методическими подходами, возрастными особенностями обучающихся. Именно поэтому важно проанализировать содержание некоторых из них.

Первичное знакомство учеников с понятием модуля числа, как правило, происходит в 5-6 классе. Рассмотрим учебник Н. Я. Виленкина и др. «Математика. 6 класс». Данный автор предлагает обучающимся классическое определение модуля: «Модулем числа n называют расстояние (в единичных отрезках) от начала отсчёта до точки $N(n)$. Пишут: $|n|$ » [11, 19], а также представляет его геометрическую интерпретацию на числовой прямой (Рисунок 7), по которому идёт дальнейшее обсуждение темы.

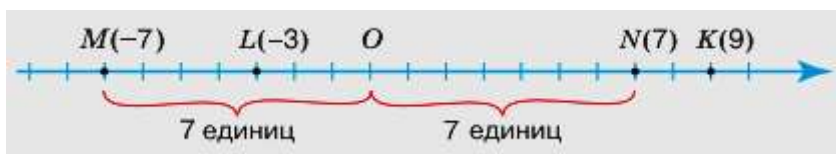


Рисунок 7 – Рисунок в учебнике Виленкина Н. Я.

Теоретический материал здесь ориентирован на формирование наглядного представления, часто с использованием примеров, иллюстрирующих расстояние от точки до начала координат.

В учебниках алгебры для 7-9 классов понятие модуля чаще рассматривается в контексте алгебраических выражений. Для примера проанализируем учебники Макарычева Ю. Н. и др. «Алгебра. 7 класс» [1] и Мордковича А. Г. «Алгебра. 7 класс» [4]. В курсе Макарычева теоретический материал представлен более традиционно, с акцентом на повторение определения и простейших свойств. Учебник Мордковича отличается тем, что в

нём теоретический материал не рассматривается. Но данная тема встречается в теме «Решение уравнений».

Что касается алгебры 8 класса, то в учебнике А. Г. Мордковича [5] теме «Уравнения с модулем» отведён отдельный параграф. А также есть упоминание о понятии модуля числа в теме «Приближенные вычисления» в значении «погрешность вычисления». А Макарычев Ю. Н., напротив, не вынес данную тему как отдельную, рассматривая его при решении уравнений. [2]

В 9 теоретический материал в выбранных для анализа учебниках не рассматривается, она лишь включена в более широкую тему «Решение уравнений».[3], [6]

Задачный материал данной темы не отличается большим разнообразием, но демонстрирует последовательное усложнение задач, начиная с базового определения, его применения, заканчивая решением сложных уравнений и неравенств.

Как уже упоминалось ранее в 6 классе (учебник математики Виленкина Н. Я.) [11] впервые вводится понятие модуля, а значит и задачный материал ориентирован на формирование первоначального представления о нём.

1. Вычисление модуля числа, например, $|-21,5| = 21,5$; $\left|4\frac{7}{9}\right| = 4\frac{7}{9}$.
2. Нахождение числа по его модулю, например, $|x| = 6 \rightarrow x = 6$ или $x = -6$.
3. Нахождение расстояния от точки на числовой прямой до начала координат: «Найдите расстояние от точки 5 до начала координат», «Найдите расстояние от точки -7 до начала координат».
4. Иллюстрация на числовой прямой: «Отметьте на числовой прямой числа, модуль которых равен 4», «Изобразите на числовой прямой числа, модуль которых меньше 3».

5. Простейшие арифметические действия с модулем: «Вычислите выражения, содержащих модуль: $|-15| - |-5|$; $|-3| \cdot 4$...», «Сравните числа с модулем: $|-8|$ и $|6|$, $|-11|$ и $|12|$...»

Основная цель заданий в 6 классе: сформировать у учеников понимание того, что такое модуль, как его найти и его связь с расстоянием на числовой прямой.

В 7 классе понятие модуля используется для решения более сложных алгебраических задач.

В учебнике Макарычева Ю. Н. [1]:

1. Вычисление значений выражения с модулем:

а) примеры: $|-2,5| + |3,1|$; $|-12| \cdot |-0,5|$; $|8| \cdot 7 + |-12|$;

б) задания с переменными: $|a| - |b|$ при заданных значениях a и b .

2. Решение простейших уравнений вида $|x| = a$ (где $a \geq 0$).

3. Решение простейших неравенств $|x| < a$ (где $a > 0$).

4. Решение уравнений вида $|ax + b| = c$. Важно, что часто встречаются задания, где $c < 0$ приводит к отсутствию решения.

В учебнике Мордковича А. Г. [4]:

1. Вычисление значений выражения с модулем аналогично учебнику Макарычева.

2. Алгебраическое раскрытие модуля:

а) задания на раскрытие модуля $|x - 5|$ при условии $x \geq 5$ и $x < 5$;

б) задания на упрощение выражений: $\frac{|a|}{a}$ при $a \neq 0$.

3. Решение уравнений:

а) Уравнения вида $|ax + b| = c$;

б) Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$, где $g(x)$ не содержит модуль, с последующей проверкой корней.

4. Решение неравенств вида $|ax + b| < c$.

Цель заданий в 7 классе заключается в переходе от вычислительных задач к решению простейших уравнений и неравенств, где используется определение модуля.

В 8 классе задания становятся более сложными, включая уравнения и неравенства с несколькими модулями, а также связь с квадратными корнями.

В учебнике Макарычева Ю. Н. [2]:

1. Решение уравнений вида $|x - a| = |x - b|$.
2. Решение уравнений вида $|f(x)| = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – линейные выражения.
3. Решение неравенств вида $|ax + b| < c$.
4. Связь с квадратными корнями:
 - а) задания на упрощение выражений типа $\sqrt{x^2}$;
 - б) решение уравнений и неравенств, где присутствует $\sqrt{x^2}$.

В учебнике Мордковича А. Г. [5]:

1. Углубленная работа с уравнениями:
 - а) решение уравнений вида $|f(x)| = g(x)$, где $g(x)$ может быть и отрицательным (требуется анализа);
 - б) уравнения с несколькими модулями.
2. Углубленная работа с неравенствами вида $|f(x)| < (>) g(x)$, где $g(x)$ может быть не только константой.
3. Прикладные задачи, где модуль используется для обозначения расстояния, отклонения, абсолютной величины.
4. Задания на построение графиков функций вида $y = |x|$ и решение уравнений/неравенств графически.

Цель заданий в 8 классе заключается в усложнении уравнений и неравенств, введении задач с несколькими модулями, активное применение метода интервалов, графического метода решения, связь с квадратичными функциями и корнями.

В 9 классе акцент идёт на систематизации и обобщении знаний по данной теме.

В учебнике Макарычева Ю. Н. [3]:

1. Задачи, объединяющие различные типы уравнений и неравенств содержащих знак модуля, а также подготовка к решению более сложных задач встречающихся на экзаменах.

2. Задачи повышенной сложности: неравенства вида $f(|x|) < a$.

В учебнике Мордковича А. Г. [6]:

1. Системы уравнений/неравенств, содержащие модули.
2. Задачи, где нужно выбирать наиболее оптимальный метод решения из изученных.

3. Прикладные задачи, требующие построения математической модели с использованием модуля.

Цель заданий в 9 классе заключается в закреплении изученных методов, решении задач повышенной сложности и подготовки к экзаменам.

Делая вывод, можно сказать, что рассмотренные УМК обеспечивают последовательное изучение темы «Модуль действительного числа», начиная с базовых задач, заканчивая более сложными и повышенного уровня. Учебник Виленкина закладывает фундаментальное понимание понятия модуля в 6 классе. Учебники Макарычева и Мордковича в 7-9 классах хоть и схожие по своему содержанию, представляют материал с различными методическими акцентами, наборы задач которых направлены на освоение основных методов решения уравнений и неравенств.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕРАКТИВНЫХ СРЕДСТВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА»

2.1 Основные понятия интерактивного обучения, достоинства и недостатки его использования

Согласно современным исследованиям учебно-воспитательное пространство определяется как область, где главную роль из всех составляющих её компонентов играют средства обучения. В настоящий момент инновационные подходы в образовании в основном сосредоточены на внедрении интерактивных технологий обучения. В следствие чего они становятся ведущим направлением модернизации образовательного процесса на всех его уровнях.

Изучение математики с использованием современных технологий значительно эффективнее. Кардинально меняя учебный процесс, они делают сложные абстрактные темы более доступными и понятными для школьников. Такие инструменты позволяют наглядно представить взаимосвязи в математическом материал, что облегчает усвоение новых знаний. Современные технологии позволяют педагогам создавать более гибкие образовательные пространства, в которых учитель перестает быть единственным источником информации, частично передавая эту функцию ученикам. Также педагогам самим приходится активно работать с разнообразными цифровыми ресурсами, что, в свою очередь, возлагает на них обязанность постоянно осваивать инновационные технологии и эффективно передавать с их помощью знания ученикам.

Использование интерактивных средств обучения стимулирует умственную и познавательную активность учеников, способствует активному диалогу между учителем и классом, между школьниками. Такой подход

естественным образом способствует развитию самостоятельности в обучении, навыков групповой работы, повышению мотивации в учебном процессе.

Интерактивность в образовании определяется как двустороннее активное взаимодействие между учителем и учениками с использованием современных цифровых технологий. Также её можно определить как способность ученика самостоятельно работать с информацией, выполнять действия, получая при этом мгновенную обратную связь: оценку или реакцию обучающей системы.

Далее следует рассмотреть понятие «интерактивное обучение». Данное понятие традиционно ассоциируется с дистанционным подходом в образовании, где школьники учатся в онлайн-режиме, пользуются интернет-ресурсами, электронными учебниками и множеством других цифровых средств. Педагог, который использует информационные технологии, даёт своим ученикам возможность динамичного взаимодействия, что обеспечит живое, активное общение, незамедлительный обмен информацией. Образовательные компьютерные программы, имея множество различных инструментов управления образовательным процессом, позволяют корректировать скорость освоения материала в зависимости от успеваемости ученика, предоставляют возможность быстрого повторения изученных тем, что способствует более глубокому усвоению и закреплению знаний.

Сейчас в педагогической науке термин «интерактивное обучения» имеет достаточно большое количество определений. Ступина С. Б. в своём учебно-методическом пособии пишет, что в настоящий момент это понятие формируется и уточняется как:

«– «обучение, построенное на взаимодействии учащегося с учебным окружением, учебной средой, которая служит областью опыта;

– « обучение, которое основано на психологии человеческих взаимоотношений и взаимодействий»;

– «обучение, понимаемое как совместный процесс познания, где знание добывается в совместной деятельности через диалог, полилог».» [15, с. 17]

Переход к инновационному интерактивному обучению меняет устоявшуюся структуру преподавания. Новый подход ставит на первое место практический опыт, за которым следует теоретическое осмысление полученных навыков. Такая последовательность обеспечивает более глубокое и всестороннее погружение в материал. Центральную роль здесь играет процесс взаимообучения и обмена опытом между всеми участниками образовательного процесса. В результате часть преподавательских функций делегируется самим учащимся, что значительно повышает вовлечённость и мотивацию обучающихся. [15]

Также важно отметить достоинства и недостатки обучения с использованием интерактивных технологий. В первую очередь, к достоинствам можно отнести формирование коллективных компетенций, повышение сплочённости совместной деятельности. Также такой образовательный подход способствует укреплению психологического комфорта в классе, улучшению межличностных отношений школьников. Происходит активизация субъектной позиции учеников, что стимулирует их внутреннюю мотивацию к познанию и качественно повышает результативность учебной деятельности.

Однако высокая эффективность интерактивного обучения в значительной степени зависит от грамотного методического планирования и целенаправленного управления взаимодействием между участниками образовательного процесса. В условиях недостаточной подготовки педагога (отсутствия необходимых компетенций в области работы с ИКТ), неготовность класса к совместной работе или ограниченность доступа к ресурсам ожидаемые результаты могут не проявиться или даже привести к негативным результатам обучения.

Исследования, проведённые Ширпал Е. Н., подтверждают зависимость результативности интерактивных технологий от ряда условий, среди которых она выделила:

- наличие прошлого и настоящего опыта учеников;

- сформированность учебной мотивации;
- поддержание атмосферы взаимного уважения и психологической безопасности;
- чёткое определение целей обучения;
- активное вовлечение учащихся в процесс;
- учёт индивидуальных психофизических особенностей (темперамента, особенностей восприятия);
- обеспечение руководящей роли учащихся на определенных этапах процесса;
- предоставление возможности для самореализации и самоконтроля всем ученикам.

К существенным недостаткам, мешающим эффективному внедрению интерактивных подходов обучения, относят:

- методологическая незрелость: несовершенство существующих концептуальных основ;
- дефицит ресурсов: ограниченное количество апробированных и разработанных учебно-методических материалов (в том числе пособий);
- компетентностный разрыв: низкий уровень владения и внедрения интерактивными технологиями как у опытных педагогов, так и у молодых специалистов. [16]

Несмотря на существующие организационные и методические сложности, интерактивное обучение демонстрирует устойчивую тенденцию к расширению своего присутствия в образовательной практике. Это обусловлено его способностью трансформировать учебный процесс, делая его более мотивирующим, продуктивным, ориентированным на развитие, что в совокупности способствует повышению его качества. Интерактивные методы обладают значительным образовательным и развивающим потенциалом, обеспечивая при этом максимальную субъектную активность обучающихся.

2.2 Анализ интерактивных средств обучения, которые можно использовать при изучении темы «Модуль действительного числа»

В условиях современной образовательной парадигмы интерактивные средства обучения выступают в качестве фундаментального компонента преподавания всех дисциплин, включая математику. Сегодня их роль выходит за рамки простой технологической адаптации; они определяют успешность учебного процесса. Использование интерактивных досок, специализированного математического программного обеспечения и мультимедийных ресурсов радикально меняет образовательный процесс, делая его динамичным и высокоинформативным для учеников.

Интерактивные технологии в настоящее время становятся более привлекательными для обучающихся. Они стимулируют стремление к активному участию, повышая искреннюю мотивацию к углубленному изучению математики. Эти инструменты позволяют эффективно визуализировать абстрактные математические концепции, обеспечивая переход от чисто теоретического усвоения к непосредственному практическому применению (например, через решение интерактивных задач и симуляций в режиме реального времени).

Внедрение интерактивных средств обучения способствует не только успешному освоению учебной программы по математике, но и комплексному развитию компетенций обучающихся, включая критическое мышление и навыки командного решения задач. Такой подход оптимизирует образовательный процесс, делая его более сбалансированным и результативным. В распоряжении педагогов имеется широкий арсенал доступных интерактивных средств, которые способствуют активному восприятию и визуализации сложного математического материала. Наиболее распространённые и широко применяемыми являются:

- цифровые учебные материалы: электронные пособия и учебники, демонстрируемые посредством мультимедийных проекторов для обеспечения наглядности материала;
- мультимедийные презентации: информационные блоки, обогащённые анимационными и графическими элементами;
- интерактивные доски: устройства, обеспечивающие прямое взаимодействие с проецируемым материалом;
- специализированные ПО: прикладные математические программы и инструменты;
- виртуальные тренажёры и системы оценки: симуляционные программные комплексы, платформы для проведения онлайн тестирования;
- образовательные интернет-ресурсы: использование специализированных сайтов и платформ;
- проектно-исследовательская деятельность: интеграция научно-исследовательских проектов и работ в учебный план.

Ключевым моментом является то, что выбор конкретных интерактивных средств обучения определяется исключительно компетенциями педагога. Этот выбор основывается на трёх основных факторов.

1. Профессиональная готовность педагога: индивидуальный уровень владения ИКТ.
2. Техническое обеспечение: наличие и доступность необходимой аппаратно-программной базы в классе.
3. Уровень готовности обучающихся: степень самостоятельности и базовая подготовленность школьников к работе с цифровыми инструментами. [9]

Далее опишем применение некоторых интерактивных средств, которые можно использовать непосредственно при изучении темы «Модуль действительного числа».

Внедрение мультимедийной презентации в учебный процесс по теме «Модуль действительного числа» не является просто заменой мела и доски, а представляет собой стратегическое использование возможностей современных информационных технологий для оптимизации процесса усвоения абстрактного понятия. Презентация выступает в роли интегрированной дидактической среды.

Возможности мультимедийной презентации.

1. Текстовое сопровождение и структурирование.

Презентация позволяет дозировать подачу информации. Ключевые определения и аксиомы вводятся лаконично, используя чёткие шрифты и контрастное оформление, что критично для усвоения математической терминологии. Текст не доминирует, а служит опорным каркасом для визуальных элементов.

2. Динамическое моделирование через анимацию.

Самое важное преимущество – анимация. При изучении модуля, анимация используется для демонстрации процесса, а не только результата.

3. Интеграция видеоконтента.

Возможность встраивания видеоклипов позволяет быстро переключить внимание учащихся от чисто математической плоскости к прикладной. Короткие, точно подобранные видеоролики могут служить для введения аналогии (например, видео о расстоянии на местности) или для объяснения геометрического смысла, тем самым укрепляя связь теории с реальным миром.

4. Визуализация абстрактных отношений через графики.

Для модуля действительного числа график функции $y = |x|$ является неотъемлемой частью понимания. Презентация позволяет построить этот график поэтапно (с помощью анимации), показывая, как из двух лучей формируется единая V-образная кривая. Это преобразует статичное изображение в динамический процесс построения.

5. Интерактивность и обратная связь.

Современные платформы позволяют встраивать в слайды элементы тестирования или гиперссылки для мгновенного перехода к ним. Это обеспечивает активное вовлечение обучающихся и позволяет учителю в режиме реального времени оценить, насколько успешно ученики усвоили материал. [12]

Таким образом, мультимедийная презентация не просто сопровождает объяснение, а активно формирует учебную ситуацию, используя текст, движение, видео и графику как взаимодополняющие инструменты для глубокого усвоения понятия модуля действительного числа.

Если мультимедийная презентация служит для структурированного ввода и статической демонстрации материала, то интерактивная доска является продолжением этой концепции, предоставляя динамическое рабочее пространство для работы с понятием модуля.

Возможности интерактивной доски.

1. Манипуляции с геометрической моделью.

В отличие от статичного слайда, на интерактивном дисплее учитель может в режиме реального времени перемещать маркеры на числовой прямой. Учитель не просто показывает расстояние до нуля, а перетаскивает числовую точку x , сдвигает ползунок влево или вправо, и программа автоматически пересчитает и отобразит соответствующее значение $|x|$. Это превращает пассивное наблюдение в активное взаимодействие с геометрическим определением.

2. Гибкое управление алгебраическими преобразованиями.

При работе с кусочно-заданной функцией модуля интерактивная доска позволяет стирать, выделять и переписывать части уравнения прямо поверх статичных слайдов презентации. Например, чтобы «стереть» знак минус перед отрицательным выражением, чтобы наглядно показать процесс его устранения, что невозможно сделать с помощью заранее отснятого видео.

3. Совместное решение задач с элементами перетаскивания.

Интерактивная доска позволяет вовлечь учеников в непосредственное решение. Задания, требующие сопоставления (например, перетащить выражение с модулем в нужную категорию «Раскрывается как x » или «Раскрывается как $-x$ »), активизирует моторную память и повышает концентрацию внимания.

4. Гибридное использование графических ресурсов.

На интерактивной доске можно одновременно вывести график $y = |x|$ и наложить на него точки для решения неравенств с модулем. Ученики могут провести линии, обозначающие интервалы, и визуально найти точки пересечения, что укрепит связь между алгебраическим решением и его геометрическим представлением. [14]

Таким образом, интерактивная доска превращает теоретический материал, представленный в виде презентации, в практическую лабораторию, где обучающиеся и педагог могут вместе работать с элементами, составляющими понятие модуля действительного числа.

Для углубленного изучения данной темы рабочее пространство интерактивной доски выходит за рамки базовых инструментов и может быть расширено за счёт интеграции специализированных математических программ, таких как GeoGebra и Microsoft Mathematics (или аналогичных современных инструментов). Эти программы позволяют перейти от статического или полудинамического объяснения к полностью параметрическому моделированию.

GeoGebra, в частности, является мощным инструментом для демонстрации геометрического смысла модуля. Можно быстро построить семейство функций, содержащих модуль (например, $y = |x - a| + b$), и, манипулируя параметрами a и b , прямо на экране показать, как сдвигается вершина графика. Эта возможность позволяет ученикам не просто увидеть один пример, а исследовать, как изменение одного числа влияет на общую форму

графика (то есть как меняется расстояние, определяемое модулем, при смещении начала координат). [10]

Платформа Microsoft Mathematics (или аналогичные калькуляторы) дополняет визуализацию возможностей пошагового вычисления сложных выражений с модулем. Если ученик предлагает сложное уравнение, содержащее несколько вложенных модулей, программа может сразу предоставить решение с разбивкой на этапы. Это позволяет учителю быстро проверить сложность задачи и сосредоточиться на правильном выборе стратегии раскрытия модулей, избежав рутинных арифметических ошибок. [10]

Для эффективного контроля и закрепления материала целесообразно использовать специализированные онлайн-платформы, такие как Online Test Pad. В рамках темы «Модуль действительного числа» Online Test Pad используется для создания разнообразных типов заданий, которые требуют от школьника не простого воспроизведения, а активного применения правил. Можно настроить тесты на сопоставление, в которых нужно правильно соединить выражение с модулем и его развернутую форму; задания на ввод ответа, требующие точного числового результата; а также задания с выбором ответа, в которых, например, нужно определить график, соответствующий уравнению с модулем. Преимущество этой платформы заключается в автоматической проверке и мгновенной обратной связи с обучающимися, что крайне важно для закрепления материала.

Таким образом, изучение понятия модуля действительного числа в современном образовательном процессе строится на принципе визуализации и интерактивности. Такой подход позволяет избежать линейного и пассивного восприятия материала, характерного для традиционных методов. В результате понятие модуля не просто запоминается как набор правил, а формируется как логически обоснованный инструмент, готовый к применению при решении более сложных задач.

2.3 Концепция и модель интерактивного тренажёра «Модуль числа: от основ к решению задач»

В условиях современного образования, когда цифровизация и персонализация учебного процесса выходят на первый план, разработка эффективных интерактивных инструментов становится критически важной задачей. Особое значение имеет математическая подготовка, в частности освоение таких фундаментальных понятий, как модуль числа. Традиционные методы обучения несмотря на их ценность, не всегда способны обеспечить достаточную наглядность, оперативную обратную связь и индивидуальный подход, необходимые для глубокого понимания материала. В данном параграфе представлены концепция и модель интерактивного тренажёра, разработанного для комплексного изучения темы «Модуль числа: от основ к решению задач» и реализованного на платформе FlikTop.

Изучение модуля числа, включая его определение, свойства, построение графиков функций с модулем, а также решение уравнений и неравенств с модулем часто вызывает затруднения у обучающихся. Абстрактность понятия, необходимость работать с различными случаями и зависимость от предыдущих знаний делают эту тему одной из ключевых для формирования прочной математической базы.

Разработанный интерактивный тренажёр призван помочь преодолеть эти трудности за счёт: наглядности (визуализация графиков функций), поэтапное освоение (материал построен по принципу «от простого к сложному», начиная с базовых определений, заканчивая решением задач повышенного уровня), оперативной обратной связи, индивидуализации (ученик может проходить материал в своём темпе, возвращаясь к непонятным темам), активного вовлечения (интерактивные элементы, игровые технологии стимулируют познавательную активность).

Концепция интерактивного тренажёра «Модуль числа: от основ к решению задач» основана на следующих принципах.

1. Структурированность: материал логически разделен на блоки, соответствующие основным этапам изучения темы: определение, свойства, график модуля, решение уравнений и неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля, итоговый тест.

2. Прогрессивное усложнение: каждый следующий блок опирается на знания, полученные в предыдущем. Сложность заданий возрастает от более простых упражнений на запоминание и вычисления к более сложным: задачи на применение алгоритмов и анализ.

3. Смешанное обучение: тренажёр можно использовать как для самостоятельного изучения темы, так и в роли дополнения к занятиям традиционного типа, выполняя функции закрепления, контроля.

4. Модульность: каждый блок тренажёра представляет собой самостоятельный блок, который можно пройти независимо от других, но рекомендуется их последовательное изучение для полного освоения темы.

Модель тренажёра реализована на платформе FlikTop, что позволяет использовать её множественные преимущества.

1. Интерфейс: интуитивно понятный интерфейс платформы обеспечивает удобство навигации, создание и взаимодействие с контентом, наличие шаблонов.

2. Типы заданий: разнообразие типов заданий (выбор одного/нескольких вариантов ответов, ввод числа/текста, вставка изображений и так далее) обеспечивает вариативность и даёт возможность поддерживать интерес обучающегося. Примеры заданий будут продемонстрированы далее.

3. Обратная связь: каждый ответ мгновенно проверяется.

4. Структура контента: материал организован в виде «коллекций» (тематический набор «карточек»), где каждый блок представляет из себя отдельную тему или задание с последовательными шагами.

5. Медиаконтент: платформа даёт возможно включать в контент не только текстовые блоки, изображения, но и различные ссылки, аудио, видео.

6. Интеграция с другими сервисами: FlikTop позволяет внедрять в интерактивные разработки контент из сторонних онлайн-сервисов, например, LearningApps, OnlineTestPad и другие.

7. Библиотека готовых материалов: в сервисе есть обширный каталог готовых заданий других людей, которые можно использовать какие они есть или адаптировать под свои нужды.

8. Мобильность: платформа адаптирована для различных устройств – ученики могут изучать материал с телефонов, планшетов и ноутбуков.

Тренажёр разработан для поэтапного изучения темы «Модуль числа», начиная с самых азов, заканчивая решением сложных комплексных задач. Цель разработки – не просто дать ученикам набор определений и правил, а сформировать глубокое понимание темы посредством наглядности, интерактивности и постепенного усложнения.

Тренажёр представляет собой состоит из 7 блоков с различными заданиями, некоторые из которых будут представлены далее:

1. Определение модуля.
 2. Свойства модуля.
 3. График модуля.
 4. Решение уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля.
 5. Решение неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля.
 6. Графики с модулем. ОГЭ задание №22.
 7. Итоговый тест по теме «Модуль числа: от основ к решению задач».
- 1 блок.

Этот блок – основа. Начинается знакомство с понятием модуля, делая его максимально понятным и наглядным. Сразу ученики закрепляют полученные знания с помощью следующих заданий, разработанных на платформе LearningApps и интегрированных в блок.

Задание 1.

Расположите числа в порядке возрастания их модулей.

Это задание на прямое вычисление значений выражений, содержащих модуль. Оно сочетает в себе элементы: определение (ученик должен применить определение модуля $|a|$), арифметика (нужно сначала выполнить действия внутри модуля, а затем найти модуль результата) и небольшая пространственная ориентация (ученики нужно сориентироваться в каточках, чтобы найти нужные выражения).

Образовательный посыл.

1. Наглядность и интерактивность: вместо простого списка примеров создана игровая среда, что делает процесс более вовлекающим.
2. Поэтапное осмысление: ученик сначала учится находить модуль простого числа, затем учится работать с выражениями.
3. Разнообразие: задание включает как целые, так и дробные числа, а также различные арифметические операции.
4. Связь с последующими блоками: правильное выполнение этого задания – прямой шаг к пониманию дальнейших действий с модулями в уравнениях и неравенствах.

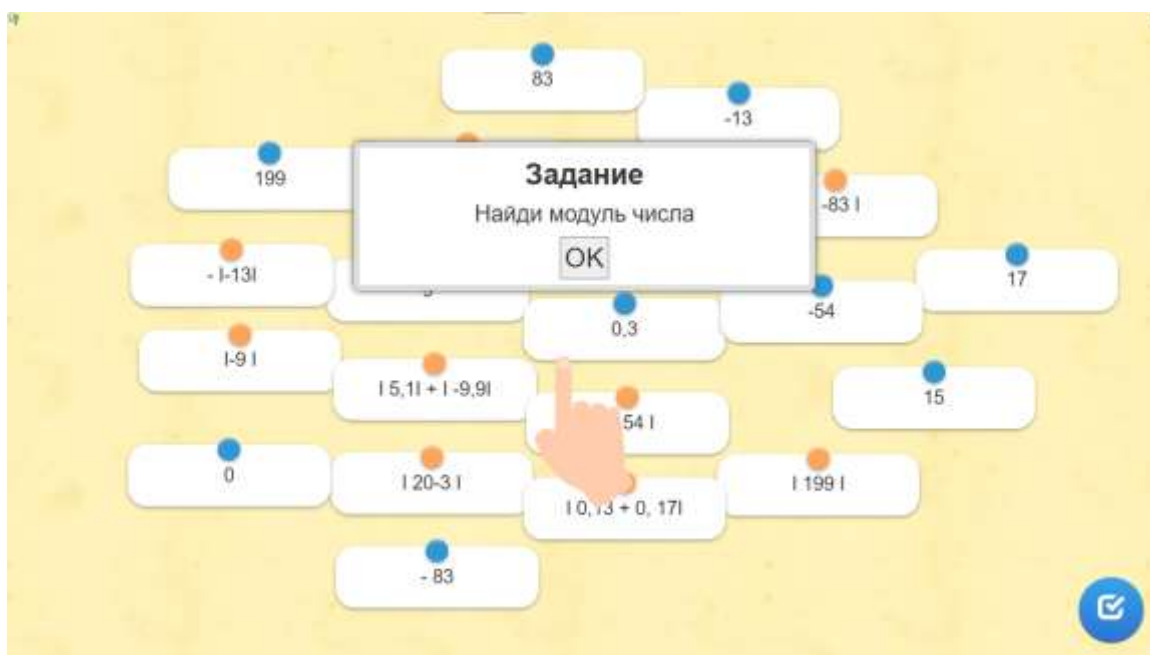


Рисунок 8 – Пример задания 1

Задание 2.

Расположите числа в порядке возрастания их модулей.

Это задание на сравнение чисел по их модулям. Ученик должен: вычислить модуль каждого предложенного числа, сравнить их и расставить исходные числа в соответствии с порядком возрастания их модулей.

Образовательный посыл.

1. Глубокое понимание модуля: это задание выходит за рамки простого вычисления, заставляя ученика осмыслить, что модуль – это величина, которая определяет «удаленность» от нуля.

2. Развитие навыков сравнения: обучающийся учится сравнивать не сами числа, а их абсолютные величины, что важно для понимания определения модуля.

3. Визуализация порядка: «дорожка» для расстановки чисел помогает визуализировать последовательность.

4. Подготовка к неравенствам: умение сравнивать числа по модулю напрямую связано с решением неравенств типа $|x| < a$ или $|x| > a$.

2 блок.

Этот блок является прямым продолжением первого. В нём изучаются основные свойства модуля. Здесь важно не просто запомнить формулы, а понять их суть и научиться находить их подтверждение в числовых примерах.

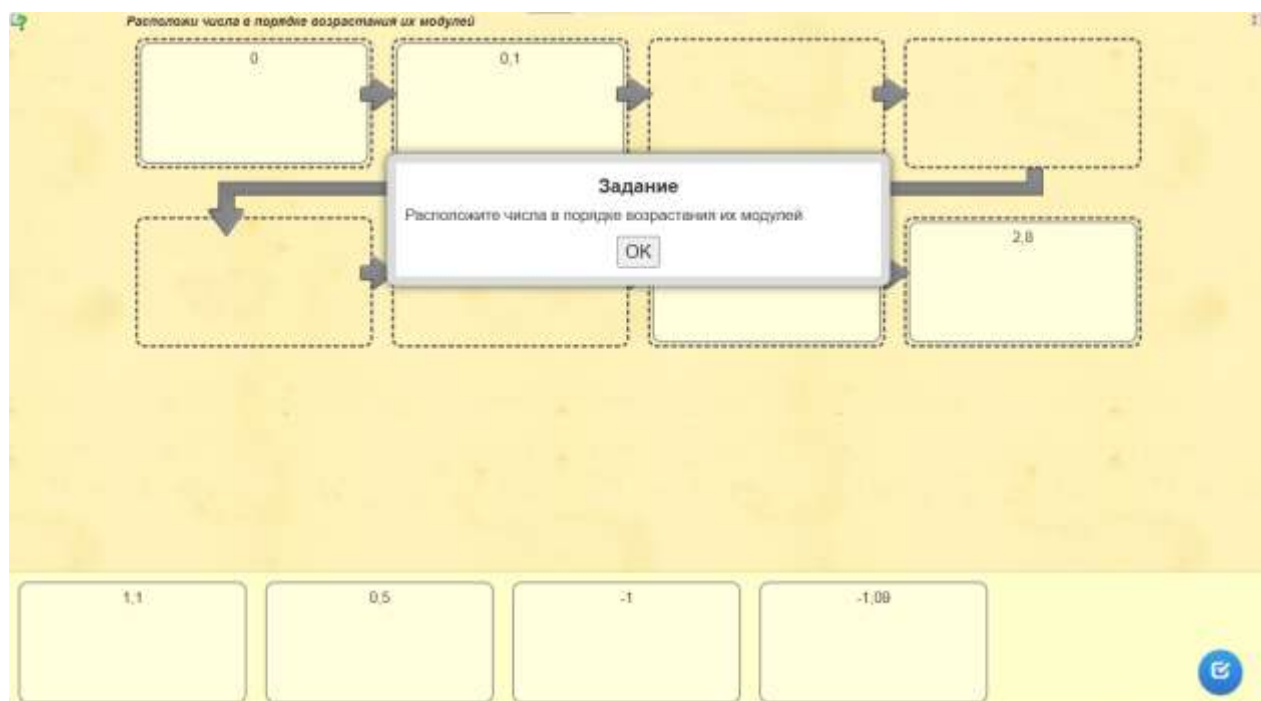


Рисунок 9 – Пример задания 2

Задание 3.

Найди пары для изученных свойств и их записи в числах.

Это задание на сопоставление. Ученику представлены карточки с формулировками свойств модуля и числовыми примерами, иллюстрирующими эти свойства. Задача сопоставить их, игра Memory.

Образовательный посыл.

1. Осмысление абстрактных свойств: задание помогает перейти от простого запоминания формулировок к их пониманию.
2. Демонстрация универсальности свойств: числовые примеры показывают, что свойства модуля – это не частные случаи, а общие закономерности, действующие для любых чисел.
3. Развитие навыка проверки: обучающийся учится самостоятельно проверять истинность математических утверждений, подставляя числа.
4. Укрепление связи между теорией и практикой: задание явно демонстрирует, как теоретические свойства проявляются в реальных вычислениях.

соответствует. Что в свою очередь способствует развитию математической интуиции.

2. Понимание сдвигов и преобразований: графики показывают, как изменения в формуле (например, как добавление числа вне модуля) влияют на положение и форму графика (сдвиги вниз, вверх, вправо, влево).

3. Развитие навыка «декомпозиции» графика: ученик учится «разбивать» сложный график на более простые составляющие, понимая, какие преобразования были применяли к базовой функции (например, $y = |x|$).

4. Подготовка к решению уравнений/неравенств: умение определять функцию по графику помогает решать задачи, в которых графический метод является основным, например, при нахождении числа решений.

По графику функции с модулем восстанови её формулу и впиши в окошко

Запись должна иметь вид: $y=f(x)$. Используй английскую раскладку, пиши без пробелов.

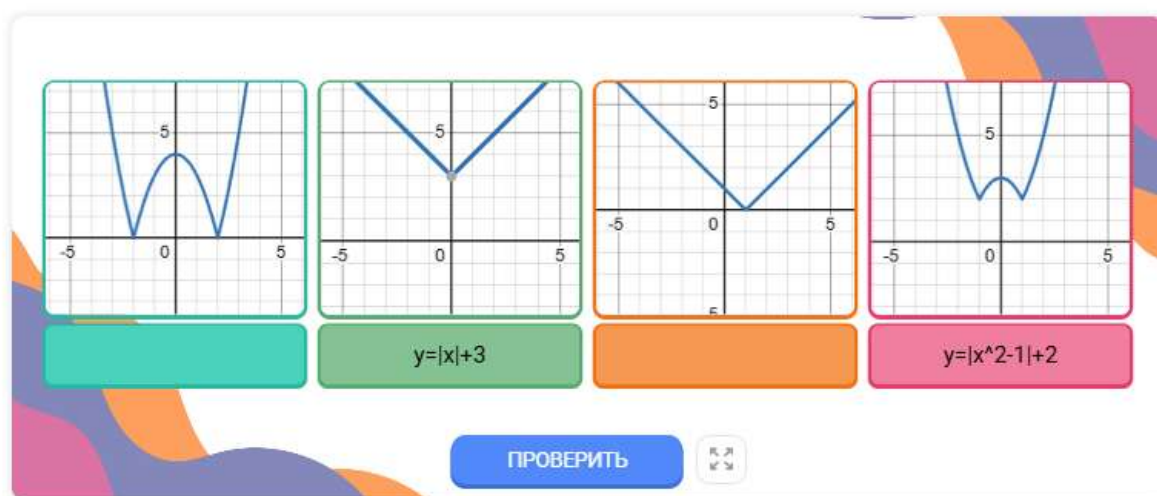


Рисунок 11 – Пример задания 4

4 блок.

Этот блок – переход от понимания модуля и его графических представлений к практическому применению этих знаний для точного нахождения решений уравнений. Представлены различные типы уравнений и

способы их решения, посредством заданий ученик учится выбирать более эффективные.

Задание 5.

Распределите уравнения к тем способам решения, применение которых будет более рациональным.

Это задание на выбор оптимального метода решения для некоторых уравнений с модулем. Ученик должен проанализировать структуру уравнения, далее определить как из предложенных методов приведёт к наиболее рациональному решению (то есть с наименьшим количеством шагов, возможных ошибок)

Образовательный посыл.

1. Развитие аналитического мышления: ученик учится не просто применять алгоритм, а выбирать его исходя из конкретного вида уравнений.

2. Понимание ограничений метода: возведение в квадрат – мощный метод, но он может привести к посторонним корням, поэтому требует проверки (или учета ОДЗ). Раскрытие модуля с ОДЗ – более «прямой» метод для решения некоторых уравнений, но может быть слишком громоздким.

3. Рациональность решения: ученик учится искать и оценивать самый короткий и надёжный путь решения.

4. Практическое применение свойств: ученик вспоминает, когда удобнее возводить в квадрат (например, когда обе части уравнения потенциально неотрицательны), а когда лучше раскрыть модуль, учитывая знаки подмодульных выражений.

5. Подготовка к решению сложных задач: умение выбирать метод – важный навык, который требуется при решении уравнений повышенной сложности, например, на экзаменах.

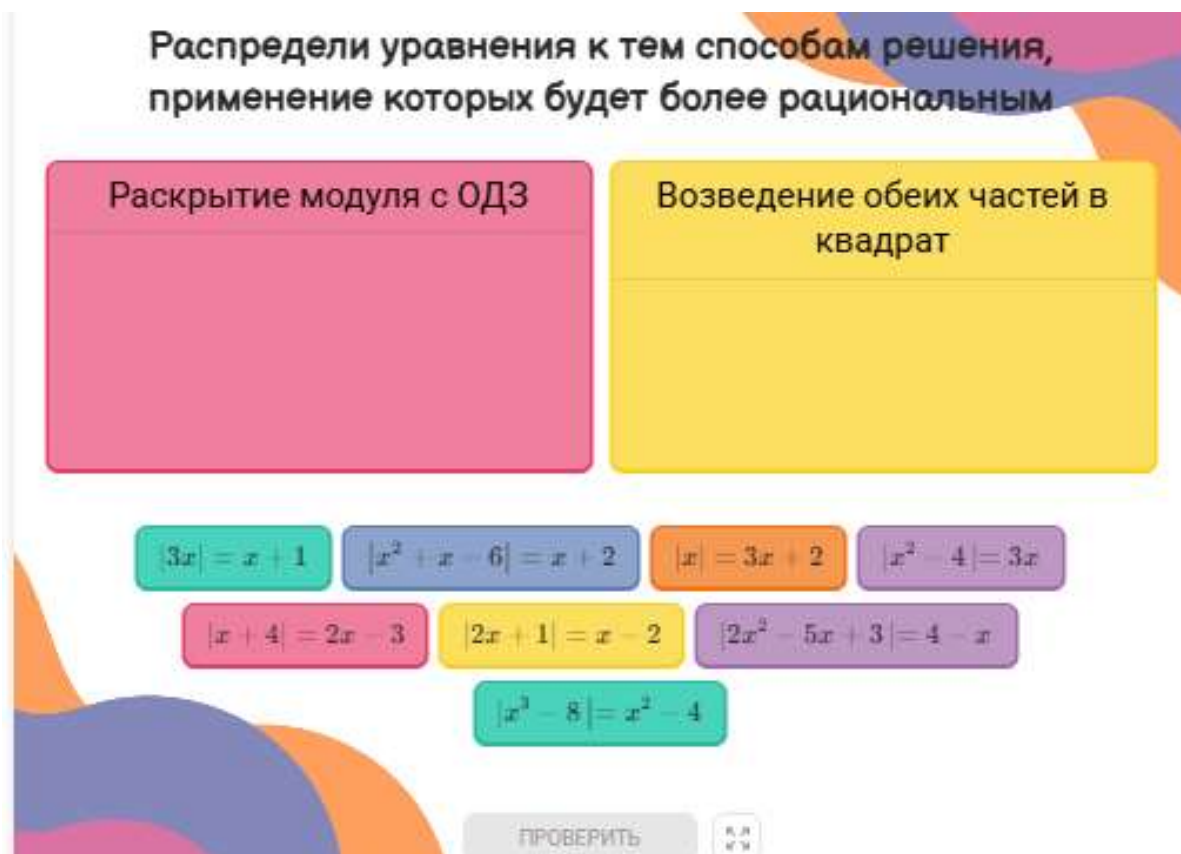


Рисунок 12 – Пример задания 5

Задание 6.

Сопоставь уравнение и график, который применим для его решения графических методом.

Это задание на связь аналитического уравнения и его графической интерпретации. Обучающийся должен понять, как уравнение с модулем может быть представлено в виде пересечения графиков.

Образовательный посыл.

1. Визуализация решений: Графический метод позволяет «увидеть» решения уравнений. Количество точек пересечения графиков соответствует количеству корней уравнения.

2. Практика построения и анализ графиков: это задание требует от ученика понимания того, как выглядят графики функций с модулем, а также графики простых функций.

3. Развитие навыка «перевода» с одного математического языка на другой: умение перейти от уравнения к графику наоборот очень ценный навык.

4. Интеграция знаний: объединяет знания о свойствах модуля, построении графиков и решении уравнений.



Рисунок 13 – Пример задания 6

5 блок.

Этот блок – логическое продолжение темы уравнений. Здесь ученик переходит от поиска отдельных точек (решений уравнений) к поиску интервалов (решению неравенств). Обучающийся учится применять свойства модуля и графические методы для определения областей, где неравенство выполняется.

Задание 7.

Задание разбивается на три последовательные части, каждая из которых является шагом в общем процессе решения. В части 1 ученик должен

определить тип неравенства. В части 2 необходимо выбрать оптимальный метод решения неравенства из предложенных. Часть 3 представляет из себя задание «Собери в правильной последовательности шаги алгоритма решения неравенства».

Образовательный посыл.

1. Системный подход к решению задач. Обучающийся учится действовать по четкому плану: понять тип неравенства, выбрать метод решения, правильно применить алгоритм решения и получить ответ. Это формирует структурированное мышление.

2. Развитие аналитических навыков: ученик учится анализировать математические объекты, выбирать наиболее эффективные стратегии решения, а не слепо применять известный ему метод.

3. Осмысление взаимосвязей: задание демонстрирует, как выбор типа неравенства напрямую влияет на выбор метода, а выбор метода в свою очередь определяет последовательность шагов решения.

4. Формирование математической интуиции: через практику выбора метода и упорядочивания шагов ученик развивает чувство того, какая стратегия будет наиболее «правильной» и быстрой для данного типа задачи.

5. Подготовка к комплексным задачам: это задание моделирует реальный процесс решения более сложных математических задач, где требуется не просто выполнение одного действия, а целая цепочка логических шагов.

6. Переход от теории к практике: ученик видит, как абстрактные правила и методы, изученные ранее, применяются на практике для получения конкретного числового ответа.

«Мастер-комбинатор: реши всё!»

Определите тип неравенства $|3x - 6| < 9$

A $|f(x)| < a$

B $|f(x)| > a$

C $|f(x)| < |g(x)|$

D $|f(x)| > g(x)$

ПРОВЕРИТЬ

Выберете оптимальный метод решения
неравенства $|3x - 6| < 9$

A Метод интервалов

B Возведение в квадрат

C Графический метод

D Двойное неравенство $(-a < f(x) < a)$

E Метод замены переменной

ПРОВЕРИТЬ

Рисунок 14 – Пример задания 7

Собери в правильной последовательности шаги алгоритма решения неравенства $|3x - 6| < 9$

- ☐ Решить полученное двойное неравенство
- ☒ 1 $-9 + 6 < 3x < 9 + 6 \implies -3 < 3x < 15$
- ☐ 2 $-3/3 < x < 15/3 \implies -1 < x < 5$
- ☐ 3 Применить правило $|f(x)| < a \implies -a < f(x) < a$
- ☐ 4 Запишите ответ в виде интервала
- ☒ 5 Ответ: $(-1; 5)$
- ☐ 6 $-9 < 3x - 6 < 9$

ПРОВЕРИТЬ

Рисунок 15 – Пример задания 7

6 блок.

Этот блок – кульминация изучения функций с модулем, направленная на глубокое понимание их графических свойств и применение этих знаний для решения разнообразных задач. Ученики переходят от простого построения графиков к их детальному анализу: определение количества точек пересечения с прямыми, нахождение интервалов, на которых эти пересечения соответствуют заданным условиям. Цель – научить «читать» графики как полноценный источник информации для решения сложных математических задач, что важно при подготовке к экзаменам (например, задание №22 ОГЭ по математике).

Задание 8.

Это задание представляет собой серию взаимосвязанных задач, которые постепенно усложняются и демонстрируют различные аспекты графического анализа функций с модулем.

Задание 8.1

Какое наибольшее число точек, в которых прямая $y = k$ пересекает график?

Это первое задание, которое заставляет ученика не просто построить график, а проанализировать его форму. Понимание того, как модуль меняет график параболы, позволяет предсказать, сколько раз прямая $y = k$ может пересечь его.

Образовательный посыл.

1. Визуализация количества решений.
2. Понимание экстремальных значений.
3. Закрепление свойств модуля.

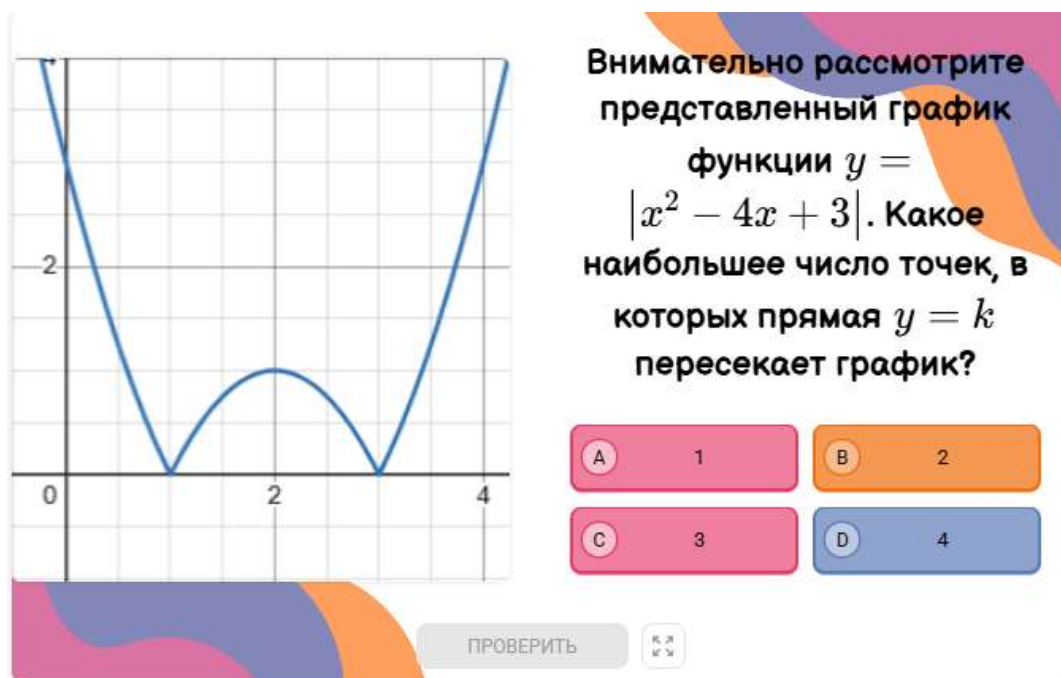


Рисунок 16 – Пример задания 8.1

Задание 8.2

На каком промежутке прямая $y = k$ имеет не меньше 3 точек пересечения?

Здесь ученик переходит от определения максимального (минимального) числа пересечений к нахождению интервала/промежутка, на котором число пересечений стабильно. Это в свою очередь требует более детального анализа графика.

Образовательный посыл.

1. Анализ поведения функции на интервалах: обучающийся учится определять, на каких участках значения функции приводят к фиксированному количеству решений.
2. Понимание связи между k и количеством решений.
3. Повышение точности: переход от «наибольшего числа» к «интервалу» требует более глубокого понимания графика.



Рисунок 17 – Пример задания 8.2

Задание 8.3

При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет ровно 2 пересечения?

Это самое сложное задание, так как в нём фигурирует параметр k , который меняет наклон прямой $y = kx$. Теперь обучающемуся нужно не только проанализировать график, но и понять, как изменение наклона прямой влияет на количество точек пересечения.

Образовательный посыл.

1. Работа с параметрами.
2. Геометрическая интерпретация условий.

3. Нахождение границ: определение условий для k требует найти «пограничные значения», при которых меняется количество пересечений
4. Комплексное применение знаний.

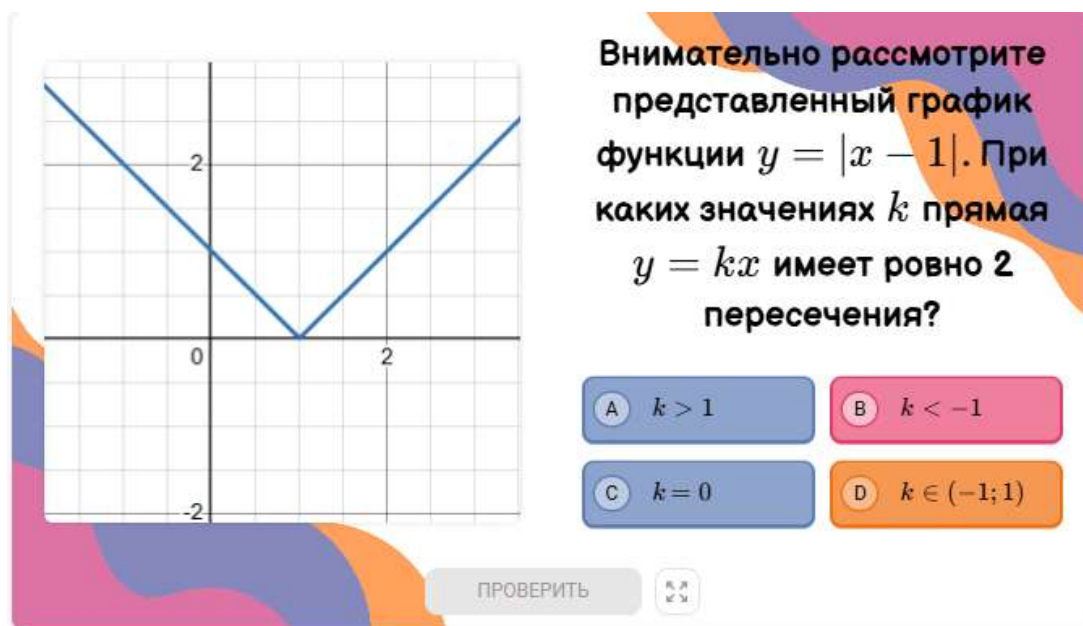


Рисунок 18 – Пример задания 8.3

7 блок.

Этот блок представляет из себя итоговый тест по теме «Модуль числа: от основ к решению задач» (Приложение 1). Тест охватывает весь пройденный материал». Он начинается с простейших определений и вычислений, затем переходит к изученным свойствам, графикам, решению уравнений и неравенств и комбинированным задачам. Цель – не просто вспомнить отдельные факты, а продемонстрировать комплексное понимание материала и умение применять знания в различных контекстах.

Образовательный посыл.

1. Комплексная оценка интеграции знаний: главная цель – проверить, насколько обучающийся смог связать разрозненные знания в единую систему.
2. Подготовка к решению экзаменационных задач.
3. Итоговая самопроверка: тест даёт учащемуся чёткое представление о его сильных и слабых сторонах по все теме, помогая понять, что необходимо повторить, изучить подробнее.

Этот итоговый тест является завершением всего учебного материала и подтверждает, что ученик освоил тему «Модуль числа» на всех её уровнях – от базовых, фундаментальных определений до комплексного применения в сложных задачах.

Разработанный тренажёр «Модуль числа: от основ к решению задач» на платформе FlickTop представляет из себя эффективный инструмент для формирования у обучающихся целостного представления о понятии модуля числа, развития навыков построения графиков функций с модулем, обучения решению уравнений и неравенств с модулем, подготовки к успешному решению более сложных математических задач, в то числе на ОГЭ и других экзаменах.

Дальнейшее развитие тренажёра может включать в себя.

1. Добавление более сложных типов заданий (например, уравнений и неравенств с двумя и более модулями).
2. Внедрение адаптивного обучения, которое подстраивает сложность заданий под уровень знаний и умений обучающегося.
3. Создание мультимедийных объяснений (видео, анимация) для большей наглядности.

Представленные концепция и модель интерактивного тренажёра «Модуль числа: от основ к решению задач» на платформе FlickTop демонстрирует большой потенциал цифровых образовательных платформ в повышении эффективности изучения математических дисциплин. Комплексный, наглядный, игровой и интерактивный подход позволяет сделать изучение такой сложной темы, как «Модуль числа», более доступным и интересным для широкого круга обучающихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы получены следующие выводы и результаты.

1. Произведён анализ научной и учебно-методической литературы, Интернет-ресурсов, соответствующие теме исследования.

2. Освещены основные понятия темы «Модуль числа», описаны свойства модуля, выделены методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.

3. Произведён анализ содержания теоретического и задачного материала в школьных учебниках алгебры различных авторов.

4. Рассмотрены различные интерактивные средства, приложения, онлайн-платформы, которые могут быть использованы как учителем на уроке, так и обучающимися в школе и дома для закрепления и усвоения материала по теме «Модуль числа».

5. Разработан интерактивный тренажёр «Модуль числа: от основ к решению задач». Предложенный тренажёр может быть использован для изучения, повторения, закрепления и проверки знаний обучающихся по исследуемой теме.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что поставленные задачи в основе своей решены, цель исследования достигнута.

Результаты исследования могут быть использованы учителями математики для организации работы по данной теме в классе на уроках или факультативных занятиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра : 7-й класс : базовый уровень: учебник / Макарычев Ю. Н. [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 15-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 255 с.
2. Алгебра. 8-й класс : базовый уровень : учебник / Макарычев Ю. Н. [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 16-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 319 с.
3. Алгебра. 9-й класс : базовый уровень : учебник / Макарычев Ю. Н. [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 4-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2017. 287 с.
4. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1. : учебник для общеобразовательных учреждений / Мордкович А. Г. [и др.] ; 17-е изд. доп. М. : Мнемозина, 2013. 175 с.
5. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. : учебник для общеобразовательных учреждений / Мордкович А. Г. [и др.] ; 12-е изд. доп. М. : Мнемозина, 2010. 215 с.
6. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. : учебник для общеобразовательных учреждений / Мордкович А. Г. [и др.] ; 12-е изд. стер. М. : Мнемозина, 2010. 224 с.
7. Войтенко Т. Ю., Ахтамова С. С. Элементарная математика. Уравнения и неравенства с модулем : учеб. пособие. Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2020. 113 с. URL: https://ipi.sfu-kras.ru/files/page_files/posobi_uravneniya_i_neravenstva_s_modulem.pdf . Заглавие с экрана (дата обращения: 07.12.2025).
8. Зеленский А. С., Панфилов И. И. Решение уравнений и неравенств с модулем : учеб. пособие. Москва : Научно-технический центр «Университетский» : УНИВЕР-ПРЕСС, 2009. 112 с. URL:

<https://djvu.online/file/wTDpyEFejQ8wa>. Заглавие с экрана (дата обращения: 07.12.2025).

9. Кошкина В. А., Пазенко Е. А. Интерактивные средства обучения: классификация потенциал // Мир науки. Педагогика и психология : научный журнал. 2021. Т9 №3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/interaktivnye-sredstva-obucheniya-klassifikatsiya-i-potentsial>. Заглавие с экрана (дата обращения 07.12.2025).

10. Кудина Е. С. О возможностях использования Microsoft Mathematics и GeoGebra на учебных занятиях // Информация и образование: границы коммуникаций, 2014. №6. С. 348-351.

11. Математика. 6 класс : базовый уровень : учебник : издание в pdf-формате : в 2 частях : Ч. 2. / Виленкин Н. Я. [и др.]; 4-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 144 с.

12. Приходько В. Е. Место мультимедийной презентации в современном уроке // Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова : научный журнал. 2012. №1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/mesto-multimediynoy-prezentatsii-v-sovremennom-uroke> (дата обращения: 07.12.2025).

13. Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения : учеб.-метод. пособие. Ставрополь : Сервисшкола, 2005. 112 с. URL: https://psv4.userapi.com/s/v1/d/-mo-3EPY0Yhh7DARVJs94Qg55Fg6T6838tLKbF6buGdmiw9wpG7qikCGl4yM2er5cKcqCDKNUM2ZmGhciNlX6aSfr1OLphnw8Qx0NmoXVKYXu5ZmE2hHXg/Sevryukov_P_F_Smolyakov_A_N_Uravnienia_i_neravenstva_s_modulyami_i_metodika_ikh_reshenia_2005_112s.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 07.12.2025).

14. Степанова М. И. Интерактивная доска в школе // Санэпидконтроль. Охрана труда. 2013. №2. С. 90-94.

15. Ступина С. Б. Технологии интерактивного обучения в высшей школе : учеб.-метод. пособие. Саратов : Наука, 2009. 52 с.

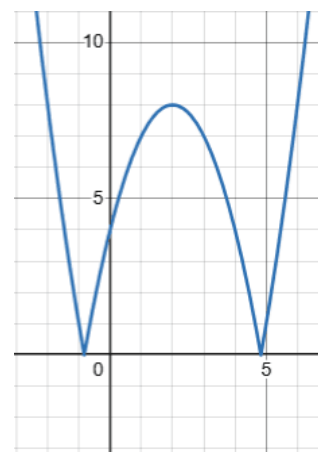
16. Ширпал Е. Н. Преимущества и недостатки методов интерактивного обучения // Педагогический вестник : научный журнал. 2022. №23. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/preimuschestva-i-nedostatki-metodov-interaktivnogo-obucheniya> (дата обращения: 07.12.2025).
17. Online Test Pad : онлайн тесты, опросы, кроссворды. URL: <http://onlinetestpad.com/ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 07.12.2025).
18. FlikTop – сервис для создания интерактивных обучающих материалов, коллекций, марафонов, курсов. URL: <https://fliktop.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения: 07.03.2026).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

Итоговый тест по теме «Модуль числа: от основ к решению задач»

1. Какой вариант наиболее полно определяет модуль числа $|a|$?
 - a. Число a .
 - b. Число $-a$.
 - c. **Расстояние от числа a до нуля на числовой прямой.**
 - d. Если $a > 0$, то a , если $a < 0$, то $-a$.
2. Чему равно $|-5| + |3|$?
 - a. -2 .
 - b. 2 .
 - c. -8 .
 - d. **8 .**
3. Сравните числа $|-7|$ и $|4|$. Выберите нужный символ.
 - a. $|-7| < |4|$.
 - b. **$|-7| > |4|$.**
 - c. $|-7| = |4|$.
 - d. Нельзя сравнить.
4. Какое из утверждений о свойстве модуля является верным?
 - a. $|a + b| = |a| + |b|$ всегда.
 - b. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ только если, $a, b > 0$.
 - c. **$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ всегда.**
 - d. $|a - b| = |a| - |b|$ всегда.
5. Какая из функций соответствует представленному графику?
 - a. **$y = |x^2 - 4x - 4|$**
 - b. $y = |(x - 2)^2|$
 - c. $y = |(x - 2)(x + 2)|$

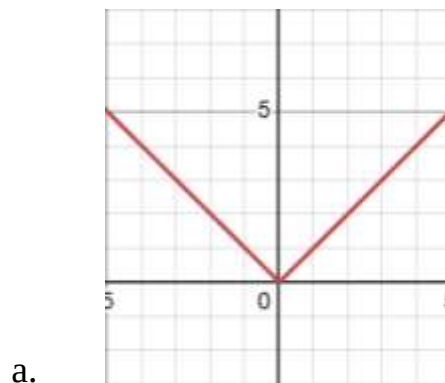
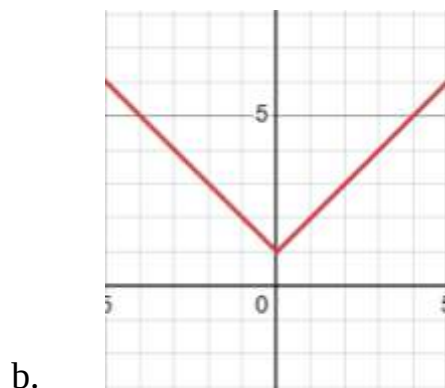
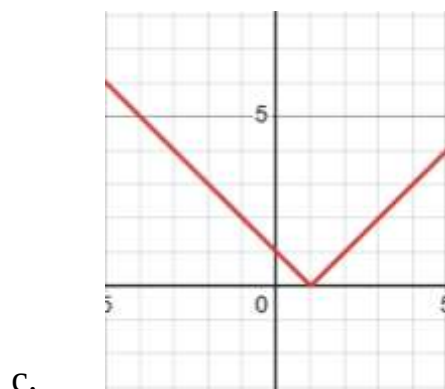


6. При построении графика $y = |x^2 - 1|$ какой порядок действий является правильным?

- a. Построить $y = x^2 - 1$, затем стереть нижнюю часть
- b. Постройте $y = x^2 - 1$, затем отразить верхнюю часть.
- c. Построить $y = x^2 - 1$, найти ее нули и вершину, затем симметрично отразить часть графика ниже оси Ox .

d. Построить $y = x - 1$ и $y = -(x^2 - 1)$.

7. Сопоставьте каждый график с соответствующей функцией.



1) $y = |x|$ (a)

2) $y = |x| + 1$ (b)

3) $y = |x - 1|$ (c)

8. График функции $y = |x|$ сначала сдвинули на 1 единицу вверх, а затем часть ниже оси Ox отражена. Какая функция получилась?

a. $y = |x| + 1$

b. $y = |x + 1|$

c. $y = ||x| + 1|$

d. $y = |x - 1|$

9. Сколько точек пересечения с осью Ox имеет график функции $y = x^2 - 4$?

a. 0.

b. 1.

c. 2.

d. 3.

10. Сколько точек пересечения у графика $y = |x - 1|$ с осью Ox ?

a. 0.

b. 1.

c. 2.

d. Бесконечно много.

11. Решите уравнение $|x| = 5$.

a. $x = 5$.

b. $x = \pm 5$.

c. $x = -5$.

d. Нет решений.

12. Решите уравнение $|2x - 3| = 7$.

a. $x = -5$.

b. $x = -2$.

c. $x = 5$ и $x = 2$.

d. $x = 5$ и $x = -2$.

13. Решите уравнение $|2x - 3| = |2x - 5|$.

a. $x = 6$.

b. $x = \frac{4}{3}$.

c. $x = 6$.

d. $x = \frac{4}{3}$ и $x = 6$.

14. Сколько корней имеет уравнение $|x^2 - 9| = 0$?

a. 0.

b. 1.

c. 2.

d. 3.

15. Сколько корней имеет уравнение $|x + 2| = x - 4$?

a. 0.

b. 1.

c. 2.

16. Решите неравенство $|x| < 3$.

a. $x > 3$.

b. $x < -3$.

c. $x < -3$ и $x > 3$.

d. $-3 < x < 3$.

17. Решите неравенство $|2x - 1| > 5$.

a. $-2 < x < 3$.

b. $-3 < x < 2$.

c. $x < -2$ или $x > 3$.

d. $-3 \leq x \leq 2$.

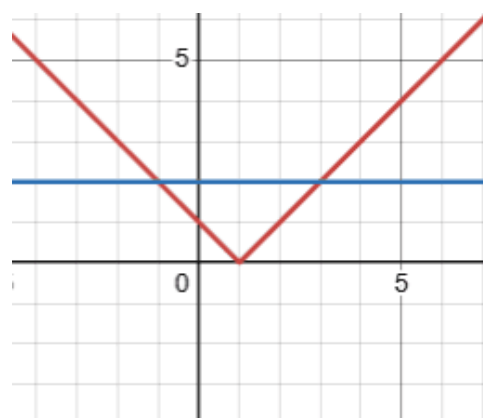
18. Решите неравенство $|x - 1| < 2x$.

a. $x > \frac{1}{3}$.

b. $x < \frac{1}{3}$.

c. $x > 1$.

d. $\frac{1}{3} < x < 1$.



19. Сколько точек (по оси Ox) удовлетворяют неравенству $|x - 1| < 2$?

- a. 0.
- b. 1.
- c. **Все точки, принадлежащие интервалу $(-1; 3)$.**

20. При каких значениях k прямая $y = kx$ имеет ровно 2 точки пересечения с графиком $y = |x - 1|$?

- a. $k > 1$.
- b. $k < -1$.
- c. $k = 0$.
- d. **$k \in (-1; 1)$.**

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения заочная

Утверждаю: зав. кафедрой

«12» 09 2025 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Бикмаева Гузель Алиевна
(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение модуля действительного числа в школе»

Утверждена приказом по Университету от «25.09» 2025 г. № 1102/0

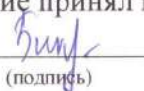
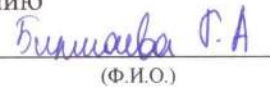
Срок сдачи студентом законченной работы «25» 05 2026 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы, Интернет-ресурсов, соответствующие теме исследования.	Октябрь 2025	выполнено 
2.	Формулировка понятия модуля действительного числа, его свойств, а также описание методов решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля.	Ноябрь 2025	выполнено 
3.	Сравнительный анализ содержания теоретического и задачного материала в школьных учебниках алгебры различных авторов.	Декабрь 2025	выполнено 
4.	Анализ имеющихся в свободном доступе сети Интернет интерактивных средств обучения, которые можно использовать при изучении темы «Изучение модуля действительного числа в школе».	Январь-февраль 2026	выполнено 
5.	Разработка интерактивного тренажёра «Модуль числа: от основ к решению задач».	Март-апрель 2026	выполнено 
6.	Оформление результатов исследовательской работы	Май-июнь 2026	выполнено 

Дата выдачи задания « 11 » 09 2025 г.

Руководитель  
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению  
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А. Д. Гулякову
Студентки 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Бикмаевой Гузель Алиевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Бикмаева Гузель Алиевна,
Ф.И.О. студента

Студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Изучение модуля действительного числа в школе», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

Бикм
подпись
26.04.2026
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 26.04.2026
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна Никитина
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему:

«Изучение модуля действительного числа в школе»

студентки 5 курса Бикмаевой Гузели Алиевны

И.О. Фамилия

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»

Руководитель ВКР Ольга Геннадьевна Никитина

И.О. Фамилия



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://pnzgu.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

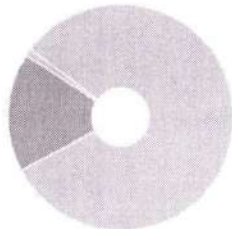
Автор: Бикмаева Гузель Алиевна

Название документа: VKR

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
16,98%

Оригинальность:
82,29%

ИИ-контент:
23,91%

Цитирования:
0,73%

Самоцитирования:
0%

- 1 «Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.
- 1 Проверено: 88,41% текста документа, исключено из проверки: 11,59% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография, Приложение, Таблицы

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 130

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 26.04.2026 15:07:55

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 60

Символов в тексте: 74964

Слов в тексте: 9940

Число предложений: 2097

26.04.2026

ДЛ.ММ.ГГГГ.

подпись

О.Г. Никитина
И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Изучение модуля действительного числа в школе»
студентки Бикмаевой Гузель Алиевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика», гр. 213ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Бикмаевой Гузель Алиевны посвящена вопросам изучения модуля действительного числа в школе.

Актуальность темы исследования состоит в том, что, несмотря на кажущуюся простоту, модуль числа играет важную роль в решении уравнений, неравенств, в анализе функций, в прикладных задачах. Но многие учащиеся испытывают трудности в правильном определении модуля и в применении его свойств. А это в свою очередь негативно отражается в последующем изучении математики.

Цель работы состоит в выявлении особенностей использования интерактивных средств в школе при изучении темы «Модуль действительного числа» и в разработке интерактивного тренажёра «Модуль числа: от основ к решению задач».

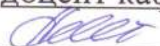
Выпускная квалификационная работа Бикмаевой Г. А. состоит из введения, основной части, заключения, списка литературы и приложения.

Основная часть состоит из двух глав. Первая глава посвящена теоретическим основам рассматриваемой темы. В частности, описаны теоретико-методические основы изучения модуля действительного числа, методы решения уравнений и неравенств, содержащих знак модуля, а также проведён сравнительный анализ школьных учебников различных авторов.

Во второй главе подробно рассмотрено применение интерактивных средств на уроках математики, а именно, при изучении темы «Модуль действительного числа». Здесь же приводится интерактивный тренажёр «Модуль числа: от основ к решению задач».

Работа Бикмаевой Г. А. является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Бикмаевой Гузель Алиевны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР доцент кафедры «Математическое образование»,
к.ф.-м.н.  Никитина Ольга Геннадьевна