

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет»
Факультет вычислительной техники
Кафедра «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

ОТЧЕТ

Лабораторная работа №2 по ОТПМ

Тема: «Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом
Галеркина с выбором кусочно-линейных базисных функций»

Выполнил: студент гр. 13ВФ1

Гундарев Е.А.

Проверил:

Доцен, к.ф.-м. наук Цупак А.А.

Пенза
2016

Тема: Решение двумерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом Галеркина с выбором кусочно-линейных базисных функций

Цель: Реализация на ЭВМ численного метода для приближенного решения одномерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом Галеркина с выбором кусочно-линейных базисных функций

Описание метода

Рассмотрим уравнение

$$u(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) * u(y) dy = f(x), x \in [a, b],$$

где a, b – заданные пределы интегрирования, $k(x, y)$ – заданное ядро интегрального оператора K , $f(x)$ – заданная известная на $[a, b]$ функция, λ – заданный параметр, $u(x)$ – неизвестное решение.

Введём оператор $A: u(x) \mapsto u(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) * u(y) dy$

$$A: L_2[a, b] \rightarrow L_2[a, b];$$

$$(u, v)_{L_2[a, b]} = \int_a^b u(x) * v(x) dx$$

$$(u, v)_n = u(x) = \sum_{j=1}^n c_j * \varphi_j(x).$$

Определим кусочно-постоянные базисные функции. Разобьём отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$ узлами $x_1, x_2, \dots, x_n$ причём $x_k = a + k * h$.

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0, x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}] \\ \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, x \in [x_j, x_{j+1}] \end{cases} \quad j = \overline{0, n-1}$$

$$f_i = (f, \varphi_i) = \int_a^b f(x) * \varphi_i(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x) * \varphi_j(x) dx$$

$$A[i][j] = ([A\varphi_j], \varphi_i)$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \varphi_j(x) * \varphi_i(x) dx + \lambda \iint_{a \ c}^{b \ d} k(x, y) * \varphi_j(y) * \varphi_i(x) dx dy \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \varphi_j(x) * \varphi_i(x) dx + \lambda \iint_{x_{j-1} \ x_{i-1}}^{x_{j+1} \ x_{i+1}} k(x, y) * \varphi_j(y) * \varphi_i(x) dx dy \end{aligned}$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_i(x) dx = \delta_{ij} * h.$$

Где $\varphi_j(x) \neq 0$, если $|j - i| \leq 1$.

Листинг программы

```
const int n=10, m=6;
double a,b,lambda,h,x[n], A[n*n][n*n+1];
void Matrix() {
    int i,j;
    for (i=0;i<n*n; i++){
        for (j=0;j<=n*n;j++){
            printf("%5.3f ",A[i][j]);
        }
        printf("\n");
    }
    printf("\n");
}

void WriteSolution() {
    int i,j;
    for(i=0;i<n;i++){
        {
            for(j=0;j<n;j++) printf("%5.3f ",A[j+n*i][n*n]);
            printf("\n");
        }
        getch();
    }
}

double f(double x,double y)
{
    return x*x*(5.0-(x*x))/(y*((y*y)-1.0));
}

double K(double x1,double x2, double y1, double y2){
    return (((x1*7.5)+1.0)/((y1*y1)+3.0))+x2*x2*x2*y2*y2;
}

double Int1(int i,int j){
    double a1=x[i], b1=x[j], h1=h/m, sum=0.0;
    for(i=0;i<m;i++){
        for(j=0;j<m;j++){
            sum+=f(a1+(i+0.5)*h1,b1+(j+0.5)*h1)*h1*h1;
        }
    }
    return sum;
}

double del(int i, int j, int k, int t){
    double d=0.0;
    if((i==k)&&(j==t)){
        d=1.0;
    }
    return d;
}

double Int2(int i,int j,int k, int t){
    double a1=x[i], b1=x[j],a2=x[k], b2=x[t], h1=h/m, sum;
    sum=del(i,j,k,t)*h*h;
    for(i=0;i<m;i++){
        for(j=0;j<m;j++){
            for(k=0;k<m;k++){
                for(t=0;t<m;t++){
                    sum+=lambda*K(a1+(i-0.5)*h1,b1+(j-
0.5)*h1,a2+(k-0.5)*h1,b2+(t-0.5)*h1)*h1*h1*h1*h1;
                }
            }
        }
    }
    return sum;
}
```

```

void Gauss() {
    int i, j;
    int k;
    for (i=0; i<n*n; i++)
    {
        for (j=n*n; j>=i; j--)          A[i][j]/=A[i][i];

        for (j=0; j<n*n; j++){
            if (j!=i){
                for (k=n*n; k>=i; k--){
                    A[j][k]-= A[j][i]*A[i][k];
                }
            }
        }
    }
}

int main() {
    a=0.0;
    b=1.0;
    h=(b-a)/n;
    lambda=1.0;
    int i, j, k, t;
    for (i=0; i<n; i++){
        x[i]=a+i*h;
    }
    for (i=0; i<n; i++){
        for (j=0; j<n; j++){
            for (k=0; k<n; k++){
                for (t=0; t<n; t++){
                    A[j+n*i][t+n*k]=Int2(i, j, k, t);
                }
            }
        }
    }
    for (i=0; i<n; i++){
        for (j=0; j<n; j++){
            A[j+n*i][n*n]=Int1(i, j);
        }
    }

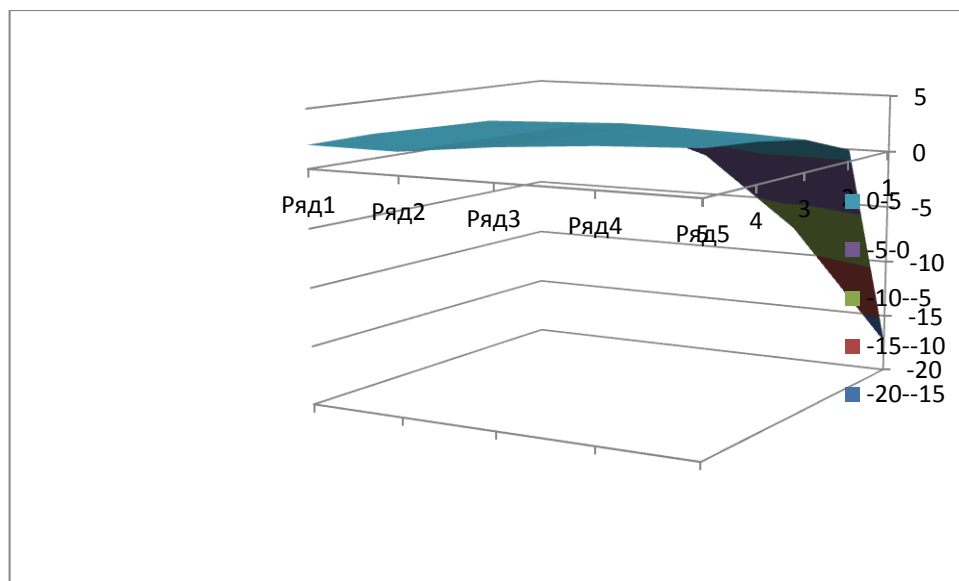
    Gauss();
    WriteSolution();
}

```

Функция: $f(x, y) = x^3(5.0 - x^2)/y(y^2 - 1.0)$

Ядро: $k(x_1, x_2, y_1, y_2) = [(x_1 * 7.5 + 1.0)/(y_1^2 + 3.0)] + x_2^2 y_2^2$

Результат при n=5



Результат при n=10

