

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Факультет

Кафедра

вычислительной техники
(наименование)

Высшая и прикладная математика
(наименование)

Направление подготовки 01.03.04 «Прикладная математика»
(код и наименование)

Профиль Математическое моделирование в экономике и технике
(код и наименование)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПРАНДТЛЯ

Студент 17ВБ1 17.06.21 Васильев Н. А.
(группа) (подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Руководитель д.ф.-м.н., проф. 18.06.21 Бойков И. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролер к.т.н., доцент 17.06.21 Тарасов Д. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 04.06.21 № 10)

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., проф. 18.06.21 Бойков И. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с отметкой отм. (протокол заседания ГЭК от 22.06.21 № 12)

Секретарь ГЭК к.пед.н., доцент 22.06.21 Зверовщикова Н. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2021

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Политехнический институт

Факультет

Вычислительной техники
(наименование)

Кафедра

Высшая и прикладная математика
(наименование)

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой
 И. В. Бойков
(подпись, инициалы, фамилия)
«30» ноября 2020г.

ЗАДАНИЕ

на бакалаврскую работу

1. Студент Васильев Никита Алексеевич гр. 17ВБ1
(фамилия, имя, отчество)
факультета вычислительной техники

2. Тема работы Приближенные методы решения уравнения Прандтля

Тема утверждена приказом по ПГУ № 0903_о от « 30 » ноября 2020 г.

3. Руководитель работы д.ф.-м.н., профессор Бойков И. В.

4. Задание на работу (назначение разработки, исходные данные и т.п.)

1 Подобрать литературу по уравнению Прандтля и задачам, которые к нему сводятся, а также методах решения уравнений такого типа

2 Изучить численные методы решения уравнения Прандтля

3 Построить вычислительную схему для решения уравнения Прандтля для крыла конечного размаха

4 Для полученной вычислительной схемы разработать программу приближённого решения уравнения Прандтля на отрезке

5 проверить эффективность разработанного алгоритма и реализованной на его основе программы на модельном примере

5. Перечень подлежащих разработке вопросов

1. Уравнение Прандтля в теории упругости

1.1. Полуплоскость с полубесконечным стрингером вдоль границы

1.2. Теоремы об однородном и неоднородном уравнении Прандтля в пространстве потенциала Бесселя

1.3. Решение уравнения Прандтля для бесконечной пластины, усиленной стрингером

1.3.1 Постановка задачи

1.3.2. Система разностных уравнений

1.3.3. Постановка задачи Римана

1.3.4. Решение интегро-дифференциального уравнения

1.3.5. Решение задачи о стрингере

2. Уравнение Прандтля в аэродинамике

2.1. Вихревая нить, закон Био — Савара и теоремы Гельмгольца

2.2. Классическая теория подъемных линий Прандтля

3. Приближенное решение уравнение Прандтля методом сплайн-коллокации нулевого порядка

3.1. Метод сплайн коллокации для уравнения Прандтля

6. Календарный график по выполнению проекта

Наименование этапов работы	Объем работы	Срок выполнения	Подпись руководителя
1. Обзор литературы	20%	28.05.2021	
2. Исследование метода сплайн-коллокации нулевого порядка для решения уравнения Прандтля на отрезке	25%	02.06.2021	

3. Разработка численных алгоритмов решения	25%	07.06.2021	
4. Разработка программы	20%	10.06.2021	
5. Оформление пояснительной записки	10%	14.06.2021	

Дата выдачи задания «30» ноября 2020 г.

Руководитель бакалаврской работы  И. В. Бойков
(подпись, инициалы, фамилия)

Задание к исполнению принял студент  Н. А. Васильев
(подпись, инициалы, фамилия)

Работу к защите допустить
Декан факультета  Л. Р. Фионова
(подпись, инициалы, фамилия)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. УРАВНЕНИЕ ПРАНДТЛЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.....	5
1.1. Обзор литературы	5
1.2. Некоторые обозначения и пространства.	6
1.3. Полуплоскость с полубесконечным стрингером вдоль границы	8
1.4. Теоремы об однородном и неоднородном уравнении Прандтля в пространстве потенциала Бесселя.....	10
1.5. Решение уравнения Прандтля для бесконечной пластины, усиленной стрингером.....	12
1.5.1 Постановка задачи	12
1.5.2. Система разностных уравнений	13
1.5.3. Постановка задачи Римана.....	16
1.5.4. Решение интегро-дифференциального уравнения Прандтля	20
1.5.5. Решение задачи о стрингере	20
2. УРАВНЕНИЕ ПРАНДТЛЯ В АЭРОДИНАМИКЕ.....	26
2.1. Поведение несжимаемого потока воздуха вокруг крыла конечного размаха	26
2.2. Вихревая нить, закон Био – Савара и теоремы Гельмгольца	35
2.3. Классическая теория подъемных линий Прандтля	40
3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЕ ПРАНДТЛЯ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА.....	48
3.1. Метод сплайн коллокации для уравнения Прандтля	48
3.2. Решение уравнения Прандтля с помощью разработанного алгоритма	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	53
Приложение А. Программа для решения уравнения.....	56

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Многочисленные теоретические и прикладные задачи математики, механики, физики, химии и техники приводят к необходимости решения различных классов интегральных уравнений первого и второго родов. Частным случаем интегральных уравнений являются интегро-дифференциальное уравнение Прандтля. Оно используется во многих областях науки и техники: аэродинамика [1], теория упругости [2] и других областях науки. Одной из широко известных задач применения таких уравнений является задача определения характеристик крыла самолета конечного размаха [3]. Другим примером может служить задача о сжатии двух упругих тел [4]. Разработка численных и аналитических методов решения уравнения Прандтля остается актуальной в связи с тем, что многие задачи технических систем приводят к необходимости поисков все более точных решений. Для инженерных приложений широкое использование САЕ-систем не уменьшает актуальности получения аналитических решений, позволяющих использовать их в задачах анализа и синтеза контактных деталей. Разработка аналитических методов дает возможность не только контролировать результаты, полученные с помощью САЕ-систем, но и находить более рациональные схемы решений.

Аналитическим и численным методам исследования уравнений крыла конечного размаха посвящено большое число работ, из которых основные результаты приведены в монографиях [3, 5-8]. При этом, как правило, рассматривались уравнения крыла в линейной постановке. Одним из наиболее подробно исследованных уравнений теории крыла, является уравнение Прандтля, играющее важную роль при решении большого числа задач аэродинамики. Уравнение Прандтля является линейным уравнением и это – результат нескольких линеаризаций, проведенных при его выводе.

Объектом исследования являются уравнение Прандтля крыла конечного размаха.

Предмет исследования – построение численных методов решения уравнения Прандтля крыла конечного размаха.

Целью бакалаврской работы является разработка численных методов решения уравнения Прандтля крыла конечного размаха для возможности их дальнейшего применения.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- Исследовать современные методы решения уравнения Прандтля крыла конечного размаха;
- разработать вычислительные схемы для нахождения численного решения уравнения Прандтля на отрезке $[-1,1]$.

Научная новизна работы заключается в том, что была разработана вычислительная схема применения метода сплайн коллокации нулевого порядка для решения уравнения Прандтля на отрезке $[-1,1]$.

Практическая ценность работы заключается в том, что были разработаны и обоснованы приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений, что может использоваться для решения различных задач аэродинамики, теории композитных материалов и многих других областей.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Результаты исследований, представленные в работе, могут быть использоваться для решения различных задач аэродинамики, теории композитных материалов и многих других областей.

Методы исследования и достоверность результатов. В работе использованы численные методы, методы прикладного функционального анализа, краевых задач теории функции комплексного переменного, теории сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений. Достоверность научных положений подтверждается соответствием теоретических результатов с результатами математического моделирования тестовых задач.

1. УРАВНЕНИЕ ПРАНДТЛЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1.1. Обзор литературы

В общем случае уравнение Прандтля является интегро-дифференциальным уравнением с сингулярной особенностью 1-го порядка следующего вида:

$$A(t)v(t) + \frac{\lambda}{\pi} \int \frac{v'(\tau)}{\tau - t} dt = f(t), \quad t \in R_+, \quad \lambda = \text{const} > 0. \quad (1.1)$$

В теории упругости решение $v(t)$ уравнения (1.1) ищется в пространстве Соболева $W_p^1(R_+)$ и удовлетворяет граничному условию

$$v(0) = c_0 \neq 0, \quad (1.2)$$

где постоянная определяется как коэффициент упругости, который будет описан подробнее ниже.

Теорема 1.1 [9]. Уравнение (1.1) с граничным условием (1.2) имеет единственное решение в пространствах Соболева $W_p^1(R_+)$ тогда и только тогда, когда параметр p пространства Соболева $W_p^1(R_+)$ принадлежит интервалу $(1; 2)$, т.е. $1 < p < 2$.

Запишем уравнение (1.1) в операторной форме:

$$Av(t) = f(t) \quad (1.3)$$

Тогда уравнение (1.3) можно рассматривать как псевдодифференциальное уравнение в пространстве Бесселевого потенциала, т.е. оператор A отображает пространство $H_p^s(R_+)$ в пространство $H_p^{s-1}(R_+)$, $s \in R$, $1 < p < \infty$.

Для решения уравнения (1.1) с граничным условием (1.2) его можно свести к классическому уравнению Фредгольма. Доказательство этого будет приведено ниже.

В работе [10] краевая задача (1.1) -(1.2) решается с помощью метода Винера–Хопфа. Применяя преобразование Фурье, уравнение (1.1) сводится к

краевой задаче теории функций, которая решается стандартными процедурами [11].

Известно, что эквивалентное сведение задачи (1.1)-(1.2) к соответствующей краевой задаче теории функций возможно только для гильбертовых пространств $H_2^S(R_+)$, тогда как для пространств $H_p^S(R_+)$, $p \neq 2$ эту задачу следует рассматривать в сложном пространстве $FH_p^S(R_+)$, которое точно не описано. Из теоремы 1.1 ясно следует, что случай $p = 2$ не подходит для рассмотрения задачи (1.1), (1.2), тогда как случай $1 < p < 2$ можно рассматривать напрямую, без применения преобразования Фурье.

Асимптотически точное решение краевой задачи (1.1) -(1.2), а также необходимые и достаточные условия существования и единственности решения возможно получить только в пространстве $H_2^S(R_+)$ и $W_p^1(R_+)$.

В работах [11], [12] было получено следующая асимптотика решения уравнения (1.1)

$$v(t) = c_0 + c_1 t^{\frac{1}{2}} + o\left(t^{\frac{1}{2}}\right),$$

где $t \rightarrow 0$, $c_1 = \text{const} \neq 0$.

1.2. Некоторые обозначения и пространства

Приведем используемые в работе обозначения.

R – одномерное евклидово пространство.

C^n – класс функций, имеющих непрерывные производные до n -го порядка включительно.

$C^n(M)$ – класс функций, имеющих ограниченные непрерывные производные до n -го порядка включительно, т.е. функций, для которых выполняется условие:

$$\left| \frac{\partial f^{(n)}(x)}{dx^n} \right| \leq M.$$

$L_p(R) (1 < p < \infty)$ – пространство Лебега, т.е. пространство измеримых функций, таких, что их p -я степень интегрируема, иначе говоря, это пространство функций, для которых выполняется следующее выражение

$$\int_X |f(x)|^p dx < \infty.$$

$S(R)$ – пространство Шварца бесконечно гладких функций, быстро убывающих на бесконечности.

$S'(R)$ – двойственное пространство Шварца с умеренным распределением.

Преобразование Фурье

$$F\varphi(\xi) = \int_R e^{i\xi x} \varphi(x) dx, \quad x \in R, \quad (1.4)$$

и обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_R e^{-ix\xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad \xi \in S(R).$$

Операторы $F\varphi(\xi)$ и $F^{-1}\varphi(x)$ ограничены в пространстве $S(R)$. Тогда оператор свертки

$$a(D)\varphi = W_a^0 \varphi = F^{-1}F\varphi, \quad a \in S'(R), \quad \varphi \in S(R),$$

ограниченное преобразование из пространства $S(R)$ в пространство $S'(R)$ [13].

Бесселево потенциальное пространство $H_p^s(R)$ ($s \in R, 1 < p < \infty$) определяется как подмножество пространства $S'(R)$, с следующей нормой

$$\|\varphi\|_{H_p^s(R)} = \|\langle D \rangle^s \varphi\|_{L_p(R)},$$

где $\langle \xi \rangle^s = \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}.$

Для целого неотрицательного числа $s \in Z$ пространство $H_p^s(R)$ совпадает с пространством Соболева $W_p^s(R)$, и в этом случае эквивалентная норма определяется следующим образом:

$$\|\varphi|H_p^s(R)\| = \|\partial^k \varphi|L_p(R)\|, \quad s \in Z,$$

где ∂ обозначает (обобщенную) производную.

Если оператор свертки (1.4) имеет ограниченное продолжение

$$W_a^0 : L_p(R) \rightarrow L_p(R),$$

то будем писать $a \in M_a(R)$. Для $\mu \in R$ получим

$$M_p^{(\mu)}(R) = \left\{ \langle \xi \rangle^\mu a(\xi) : a \in M_a(R) \right\}.$$

Как S_R обозначим сингулярный интегральный оператор Коши

$$S_R v(t) = \frac{1}{\pi i} \int_R \frac{v(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения Коши:

$$S_R v(t) = \frac{1}{\pi i} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(\int_{-N}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^N \right) \frac{v(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

1.3. Полуплоскость с полубесконечным стрингером вдоль границы

Рассмотрим упругую пластину, лежащую в комплексной нижней полуплоскости $z = x + iy$, $y < 0$. Наложим ось стрингера (продольный элемент конструкции пластины) на положительную часть действительной оси так, чтобы один конец стрингера брал начало в точке 0, а другой стремился к бесконечности.

Предполагается, что стрингер представляет собой упругую линию, к которой приложено растягивающее усилие. Также предполагается, что напряжение внутри пластины и стрингера создаются единственной осевой силой, приложенной к началу стрингера (т.е. точке 0) и направленной вдоль отрицательной оси x .

Пусть E – коэффициент упругости пластины, E_0 – модуль упругости стрингера, h – толщина пластины и S_0 – поперечное сечение стрингера; Предполагается, что h и S_0 являются постоянными значениями.

Согласно условию, часть границы полуплоскости (слева от начала координат) свободна от нагрузки. Поэтому граничные условия записываются как

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad x < 0, \quad (1.5)$$

где σ_x , σ_y , σ_{xy} – компоненты напряжения пластины. На другой части границы, где пластина усилена стрингером, силы находятся в состоянии равновесия и изгибающий момент отсутствует, поэтому граничные условия записываются как

$$p_0 - h \int_0^x \tau_{xy} dt + k \sigma_x = 0, \quad -h \int_0^x \sigma_y dt = 0, \quad x > 0 \quad (1.6)$$

где $k = \frac{E_0 S_0}{E}$.

В совокупности граничные условия (1.6) приобретают вид

$$p_0 - h \int_0^x (\tau_{xy} + i \sigma_y) dt + k \sigma_x = 0, \quad x > 0 \quad (1.7)$$

Используя известное представление Колосова – Мусхелишвили [11]

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right], \quad \sigma_x - \sigma_y + 2i \tau_{xy} = 2 \left[\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z) \right]$$

и формулу Мусхелишвили [11]

$$-i \int_0^t (\tau_{xy} + i \sigma_y) d\tau = \varphi(t) + \overline{t \varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + const$$

и опуская некоторые несущественные константы, можно переписать краевые условия (1.5) и (1.7) в следующем виде

$$\varphi(t) + \overline{t \varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = 0 \quad (t < 0) \quad (1.8)$$

$$ip_0 + h \left[\varphi(t) + \overline{t \varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} \right] + ik \operatorname{Re} \left[\varphi'(t) + \overline{\varphi'(t)} + \overline{t \varphi''(t)} + \overline{\psi'(t)} \right] = 0 \quad (t > 0).$$

Для решения задачи (1.8) необходимо найти функцию $w(t) = \mu(t) + iv(t)$ на $[0; \infty]$ которая связана с комплексными потенциалами $\varphi(z)$, $\psi(z)$ формулами

$$\psi(z) = -\overline{\varphi(z)} + z\varphi'(z), \quad (y < 0), \quad (z = x + iy),$$

$$\varphi(z) = -\frac{p_0}{2\pi h} \ln z + \varphi_0(z),$$

$$\varphi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{w(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (1.9)$$

где под $\ln z$ подразумеваем любую фиксированную ветвь, например $\arg z = 0$ при $x > 0, y = 0$.

Для функции $w(t)$ считаем, что $w(t) \in L_p(R_+)$ для некоторого $p > 1$, $w'(t) \in L_1(R_+)$.

Для функции $w(t)$ получаем

$$\begin{aligned} \mu(t) &= 0, \\ v(t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{v'(\tau)}{\tau - t} d\tau &= 0, \quad (t > 0) \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\lambda = \frac{2E_0 S_0}{Eh}$$

и

$$v(0) = -\frac{p_0}{h} \quad (1.11)$$

Таким образом, для интеграла (1.9) мы получили уравнение Прандтля (1.10) и граничное условие (1.11).

Также уравнение (1.10) легко получить, рассматривая задачу о бесконечной плоскости с полубесконечным стрингером, прикрепленным вдоль полуосей R_+ .

1.4. Теоремы об однородном и неоднородном уравнении Прандтля в пространстве потенциала Бесселя

Лемма 1.1. Оператор Прандтля

$$Av(t) = v(t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{v'(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (\lambda > 0) \quad (1.12)$$

возникающий в уравнении (1.10), является оператором свертки

$$Av(t) = F^{-1}(1 + \lambda|x|)Fv(t)$$

где $1 + \lambda|x| \in M_p^{(1)}(R)$ первого порядка [14].

Исследуем оператор (1.12). Для этого введем следующий оператор:

$$r_+A: \tilde{H}_p^s(R_+) \rightarrow \tilde{H}_p^{s-1}(R_+), \quad 1 < p < \infty, \quad s \in R. \quad (1.13)$$

Теорема 1.2. Пусть $s \in R$ и $s = [s] + \{s\}$, $[s] = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $0 \leq \{s\} \leq 1$, будет разложение s на целую и дробную части. Оператор r_+A в (1.13) будет являться Фредгольмовым оператором тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\left| \{s\} - \frac{1}{p} \right| \neq \frac{1}{2}. \quad (1.14)$$

Если условие (1.14) выполнено, оператор r_+A обратим, как слева, так и справа при условии, что χ равно нулю, положительно или отрицательно, соответственно. Здесь

$$\chi = \begin{cases} [s], & \left| \{s\} - \frac{1}{p} \right| < \frac{1}{2}, \\ [s] + 1, & \{s\} - \frac{1}{p} > \frac{1}{2}, \\ [s] - 1, & \{s\} - \frac{1}{p} < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

и

$$\inf r_+A = -\chi.$$

Лемма 1.2. Операторы

$$\Lambda_+^s = (D + i)^s l_+, \quad \Lambda_-^s = r_+(D - i)^s, \quad (D \pm i)^{\pm s} \varphi = F^{-1}(x \pm i)^{\pm s} F\varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(R_+)$$

расположены в изоморфных пространствах

$$\Lambda_+^s : \tilde{H}_p^s(R_+) \rightarrow L_p(R_+), \Lambda_-^{-s} : L_p(R_+) \rightarrow \tilde{H}_p^s(R_+).$$

Теорема 1.3. Пусть

$$1 \leq s \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$$

и A оператор, определяемый уравнением (1.12). Тогда оператор

$$r_+ A : H_p^s(R_+) \rightarrow H_p^{s-1}(R_+)$$

Фредгольмов и

$$\inf r_+ A = 1.$$

1.5. Решение уравнения Прандтля для бесконечной пластины, усиленной стрингером

1.5.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу наложения бесконечного стрингера вдоль оси пластины. В этом случае на числовой оси $R = (-\infty, \infty)$ необходимо найти функцию $f(x)$, являющуюся комплексной, и удовлетворяющей следующим условиям:

1) функция $f(x)$ принадлежит к классу C^1 во всех точках кроме нуля, и является решением уравнения Прандтля на бесконечности

$$v(t) - \frac{a(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v'(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad x \in R \setminus \{0\} \quad (1.15)$$

где

$$a(t) = \begin{cases} a_1, & t > 0, \\ a_2, & t < 0, \end{cases}$$

$a_1, a_2 > 0$, $a_1, a_2 \in C$ заданные постоянные, функция $f(t)$ – заданная функция комплексной переменной, принадлежащая классу $C^0(M)$ всюду кроме нуля и убывающая на бесконечности.

2) для производной $v'(t)$ выполняются следующие условия:

$$v'(t) = O(|t|^{-\alpha_1}), t \rightarrow 0; v'(t) = O(|t|^{-\alpha_2}), t \rightarrow \pm\infty; \quad (1.16)$$

где α_1, α_2 таковы, что $0 \leq \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > \alpha_1 + 1$.

Так как в окрестностях точки $t = 0$ поведение функции $v(t)$ описывается следующими равенствами

$$v(t) = -\int_t^\infty v'(\tau) d\tau, t > 0, v(t) = \int_{-\infty}^t v'(\tau) d\tau, t < 0 \quad (1.17)$$

и выполняются условия (1.17) то дополнительных условий на функцию $v(t)$ на бесконечности и в окрестности точки $t = 0$ накладывать не нужно.

Распишем уравнение (1.15) для положительного и отрицательного луча числовой оси. Получим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} v(t) - \frac{a_1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{v'(\tau)}{\tau - t} d\tau &= f(t), x \in (0, \infty); \\ v(t) - \frac{a_2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{v'(\tau)}{\tau - t} d\tau &= f(t), x \in (-\infty, 0); \end{aligned} \quad (1.18)$$

Можно заметить, что если один из коэффициентов a_1, a_2 равен нулю, то получим хорошо исследованное уравнение Прандтля на луче [10, 15, 16].

1.5.2. Система разностных уравнений

Построим систему разностных уравнений для системы интегро-дифференциальных уравнений (1.18). Для этого введем функции

$$v_1(t) = v(t), v_2(t) = -v(-t), x > 0 \quad (1.19)$$

на положительной полуоси.

Подставив выражение (1.19) в систему уравнений (1.18), получим равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} v_1(t) - \frac{a_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_1'(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{a_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_2'(\tau)}{\tau+t} d\tau = f(t), \quad x \in (0, \infty); \\ v_1(t) - \frac{a_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_1'(\tau)}{\tau-t} d\tau + \frac{a_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_2'(\tau)}{\tau+t} d\tau = -f(-x) \quad x \in (0, \infty). \end{cases} \quad (1.20)$$

Исследуем преобразование Меллина для следующих функций $v_1'(t)$, $v_2'(t)$, $f(t)$, $-f(-x)$:

$$V_1(s) = \int_0^\infty v_1'(t) t^{s-1} dt,$$

$$V_2(s) = \int_0^\infty v_2'(t) t^{s-1} dt,$$

$$F_1(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt,$$

$$F_2(s) = - \int_0^\infty f(-t) t^{s-1} dt.$$

Согласно работе [17] функции $F_1(s)$, $F_2(s)$ будут являться функциями комплексной переменной $s = \sigma + i\tau$ и аналитичными в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Аналогично, функции $V_1(s)$, $V_2(s)$ полученные применением преобразованием Меллина из функций $v_1'(t)$, $v_2'(t)$ также будут являться функциями комплексной переменной $s = \sigma + i\tau$ и аналитичными в полосе $\alpha_1 < \operatorname{Re} s < \alpha_2$. Также эти функции на бесконечности принадлежат классу $L^1(M)$, т.е. выполняются условия

$$\int_{-\infty}^\infty |V_k(\sigma + i\tau)| d\tau \leq M, \sigma \in [\alpha_1'', \alpha_2''], [\alpha_1'', \alpha_2''] \in (\alpha_1, \alpha_2), M = \text{const}, k = 1, 2. \quad (1.21)$$

Исследуя эти условия, можно получить, что функции $V_k(s)$ исчезают на концах полосы $\alpha_1 < \operatorname{Re} s < \alpha_2$. Соответственно [17] если для функции $V_k(s)$

выполняются приведенные выше условия, то эти функции являются преобразованиями Меллина функций $v'(t)$ на луче $(0, \infty)$

$$v'_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega_0} F_k(s) t^{-s} ds, \quad (0, \infty), \quad k=1, 2 \quad (1.22)$$

где Ω_0 произвольная прямая $\operatorname{Re} s = \sigma_0$, $\sigma \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда используя формулы (1.19) и (1.17), получим

$$\begin{aligned} v'(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega_0} F_1(s) t^{-s} ds, \quad t > 0; \\ v'(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega_0} F_2(s) (-t)^{-s} ds, \quad t < 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

и

$$v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega_0} \frac{F_1(s)}{1-s} t^{1-s} ds, \quad t > 0; \quad v(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega_0} \frac{F_2(s)}{1-s} (-t)^{1-s} ds, \quad t < 0 \quad (1.24)$$

Применив к системе уравнений (1.20) преобразования Меллина, получим

$$\int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_k(\tau) d\tau}{t-\tau} t^{s-1} dt = \operatorname{ctg} \pi s F_k(s), \quad \int_0^\infty \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{v_k(\tau) d\tau}{t+\tau} t^{s-1} dt = \frac{F_k(s)}{\sin \pi s}, \quad \alpha_1 < \operatorname{Re} s < 1$$

Функции $V_1(s)$ и $V_2(s)$ можно найти, решив систему уравнений

$$\begin{aligned} s^{-1} V_1(s+1) + a_1 \operatorname{ctg} \pi s V_1(s) - \frac{a_1}{\sin \pi s} V_2(s) &= -F_1(s), \\ s^{-1} V_2(s+1) - \frac{a_2}{\sin \pi s} V_1(s) + a_2 \operatorname{ctg} \pi s V_2(s) &= -F_2(s), \\ \alpha_1 + 1 < \operatorname{Re} s < \alpha_3, \quad \alpha_3 &= \min\{1; \alpha_2 - 1\}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Решения $V_1(s)$ и $V_2(s)$ будем искать в следующем виде:

$$V_k(s) = \Gamma(s) F_s^*(s), \quad k=1, 2, \quad (1.26)$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера. Подставив выражение (1.26) в систему уравнений (1.25), получим систему разностных уравнений

$$\begin{cases} V_k^s = a_k \operatorname{ctg} \pi s V_k^*(s-1) - \frac{a_k}{\sin \pi s} V_{3-k}^*(s-1) + F_k^*(s), \\ F_k^*(s) = \frac{F_k(s-1)}{\Gamma(s-1)}, 1 < \operatorname{Re} s < 2, k=1, 2. \end{cases} \quad (1.27)$$

При $a_1 = a_2$ и $a_1 = -a_2$ систему разностных уравнений (1.27) можно преобразовать в два отдельных уравнения.

Пусть $a_1 = a_2$ тогда из системы (1.26) получим уравнения

$$\begin{aligned} \Delta_v^+(s) &= a_1^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi s}{2} \Delta_v^+(s-2) + \Delta_f^+(s) + a_1 \operatorname{tg} \frac{\pi s}{2} \Delta_v^-(s-1), \\ \Delta_v^-(s) &= a_1^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi s}{2} \Delta_v^-(s-2) + \Delta_f^-(s) - a_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi s}{2} \Delta_v^+(s-1). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Систему (1.28) хорошо исследована во многих работах и её решения можно найти, например сведением этих уравнений посредством конформного отображения к краевой задаче Римана [18-20] или методом преобразования Фурье [21], [22].

Приведем решение задачи Римана в случае же если $a_1 \neq \pm a_2$.

1.5.3. Постановка задачи Римана

Представим систему (1.27) в следующем виде

$$V(s) = G(s)V(s-1) + g(s), \quad 1 < \operatorname{Re} s < 2, \quad (1.29)$$

где

$$V(s) = \begin{pmatrix} F_1^*(s) \\ F_2^*(s) \end{pmatrix}, G(s) = \begin{pmatrix} a_1 \operatorname{ctg} \pi s & a_1 (\sin \pi s)^{-1} \\ a_2 (\sin \pi s)^{-1} & a_2 \operatorname{ctg} \pi s \end{pmatrix}, g(s) = -\frac{1}{\Gamma(s-1)} \begin{pmatrix} F_1(s-1) \\ F_2(s-1) \end{pmatrix}.$$

Также представим матрицу $G(s)$ в следующей форме

$$G(s) = T(s)\Lambda(s)(T(s-1))^{-1}, \quad (1.30)$$

где

$$\Lambda(s) = \begin{pmatrix} \Lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \Lambda_2(s) \end{pmatrix}, \quad T(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+a}{2}(\cos \pi s + \beta(s)) & \frac{1+a}{2}(\cos \pi s - \beta(s)) \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_k(s) = \frac{a_1}{2 \sin \pi s} \left((a-1) \cos \pi s + (-1)^{k-1} (a+1) \beta(s) \right), \quad k=1,2, \quad a = \frac{a_2}{a_1},$$

$$\beta(s) = \sqrt{\cos^2 \pi s - \cos^2 \pi \eta}, \quad \eta - \text{корень уравнения } \cos^2 \pi \eta = \frac{4a}{(1+a)^2}.$$

Функция $\beta(s)$ будет удовлетворять следующим условиям:

$$\beta(-s) = \beta(s), \quad \beta(s+1) = -\beta(s) \quad (1.31)$$

$$\beta(s) = \cos \pi s + O\left(e^{-\pi|\operatorname{Im} s|}\right), \quad \frac{1}{\beta(s)} = \frac{1}{\cos \pi s} + O\left(e^{-3\pi|\operatorname{Im} s|}\right), \quad \operatorname{Im} s \rightarrow \pm\infty$$

$$\beta(0) = \sin \pi s, \quad \operatorname{Re} \eta \neq 0,$$

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) = i \cos \pi s, \quad \operatorname{Re} \eta = 0,$$

Подставим выражение (1.30) в (1.29) и умножим обе части равенства на $[T(s)]^{-1}$ слева, придем к следующему равенству

$$\varphi(s) = \Lambda(s) \varphi(s-1) + [T(s)]^{-1} g(s), \quad 1 < \operatorname{Re} s < 2 \quad (1.32)$$

где

$$\varphi(s) = [T(s)]^{-1} V(s), \quad (1.33)$$

с компонентами

$$\varphi_{1,2}(s) = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\cos \pi s}{\beta(s)} \right) F_1^* \pm \frac{1}{(1+a)\beta(s)} F_2^*(s),$$

$$\varphi_k(s) = \Lambda_k(s) \varphi_k(s-1) + M_k(s), \quad 1 < \operatorname{Re} s < 2,$$

$$M_k(s) = \left((-1)^{k-1} \frac{\cos \pi s}{\beta(s)} - 1 \right) \frac{F_1(s-1)}{2\Gamma(s-1)} + \frac{(-1)^k}{(1+a)\beta(s)} \frac{B_2(s-1)}{\Gamma(s-1)}, \quad k=1,2.$$

Так как функции $\varphi_k(s)$ являются аналитическими в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 2$ с разрезами Γ соединяющие точки ветвления функций $\beta(s)$, а $V_k^*(s)$ однозначны, то получим

$$\varphi_1^+(\sigma) = \varphi_2^-(\sigma), \quad \varphi_1^-(\sigma) = \varphi_2^+(\sigma), \quad \sigma \in \Gamma \quad (1.34)$$

На границе полосы $\omega - 1 < \operatorname{Re} s < \omega$ (ω какая либо прямая $\operatorname{Re} s = \omega$) функции $\varphi_k(s)$ принадлежат классу непрерывных функций C^0 и для них выполняется условие

$$\varphi_k(\sigma) = \Lambda_k(\sigma)\varphi_k(\sigma-1) + M_k(\sigma), \quad \sigma \in \Omega, \quad k=1,2 \quad (1.35)$$

а на разрезе условие (1.34).

То есть получили комбинированную краевую задачу Римана-Карлемана (1.34), (1.35).

Для решения этой задачи введем следующие функции

$$\begin{aligned} \phi_k(z) &= \varphi_k(s(z)), \quad z \in \bar{C}_z \setminus (\gamma \cup [-1,1]), \quad k=1,2, \\ \lambda_k(t) &= \Lambda_k(s(t)), \quad \mu_k(t) = M_k(s(t)), \quad t \in [-1,1], \quad k=1,2, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где $s(z) = \omega + \frac{i}{2\pi} \ln \frac{1+z}{1-z}$, γ – образ разреза Γ полученный конформным отображением полосы на расширенную комплексную плоскость $\bar{C}_z$ с разрезом по отрезку $[-1,1]$.

Получим краевую задачу Римана

$$\begin{aligned} \phi_1^+(t) &= \phi_2^-(t), \quad \phi_1^-(t) = \phi_2^+(t), \quad t \in \gamma \\ \phi_k^+(t) &= \lambda_k(t)\phi_k^-(t) + \mu_k(t), \quad t \in (-1,1), \quad k=1,2. \end{aligned} \quad (1.37)$$

решение которой сходится к решению краевой задачи Римана-Карлемана (1.34), (1.35).

Для решения задачи (1.37) осуществим переход на риманову поверхность R алгебраической функции $w = w(z)$, где $w^2 = (z - z_1)(z - z_2)$. Данная поверхность состоит из двух экземпляров $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ расширенной комплексной

плоскости с разрезами γ , путем наложения этих экземпляров поверхностей друг на друга с расположенными разрезами друг над другом.

На этой поверхности введем функцию

$$w(z) = \begin{cases} q(z), & z \in C_1 \\ -q(z), & z \in C_2 \end{cases}, \quad q(z) = \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Также введем в рассмотрение следующую функцию

$$\Phi(z, w) = \begin{cases} \phi_1(z), & (z, w) \in C_1 \\ \phi_2(z), & (z, w) \in C_2 \end{cases} \quad (1.38)$$

В силу формулы (1.37) можно доказать, что, функция $\Phi(z, w)$ является аналитической на римановой поверхности R а также однозначно заданной всюду кроме точек ветвления $(z, w) = (z_1, 0)$ и линий $L_k = [-1, 1] \subset C_k$, $k = 1, 2$, где для функции (1.38) выполняются краевые условия:

$$\Phi^+(t, \xi) = \lambda(t, \xi) \Phi^-(t, \xi) + \varphi(t, \xi), \quad (t, \xi) \in L, \quad L = L_1 \cup L_2. \quad (1.39)$$

В окрестностях концов линии L поведение функция $\Phi(z, w)$ описывается выражениями

$$\begin{aligned} \Phi(z, w) &= o \left(\xi^{\frac{1}{4}} \ln^{\frac{1}{2}-\sigma} \xi \right), \quad \xi = |z \mp 1|, \quad (z, w) \in C_1, \quad z \rightarrow \pm 1, \\ \Phi(z, w) &= o \left(\xi^{-\frac{1}{4}} \ln^{\frac{1}{2}-\sigma} \xi \right), \quad \xi = |z \mp 1|, \quad (z, w) \in C_2, \quad z \rightarrow \pm 1, \\ \sigma &= \text{Res}(z), \quad \sigma \in [\omega - 1, \omega]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Таким образом, получили краевую задачу Римана (1.39), (1.40) которую необходимо решить, чтобы найти функцию $\Phi(z, w)$ на Римановой поверхности R . Процесс получения решения данной задача подробно рассмотрен в работе [2] поэтому не будем приводить его здесь, и перейдем к решению исходного интегро-дифференциального уравнения (1.15) и уравнения задачи о стрингере.

1.5.4. Решение интегро-дифференциального уравнения Прандтля

Пусть решение $\Phi(z, w)$ задачи Римана было найдено. Тогда можно определить решение уравнения (1.15) используя формулу (1.24), (1.33), (1.36), (1.38), (1.39)

$$V_1(s) = \Gamma(s) [\phi_1(z) + \phi_2(z)],$$

$$V_2(s) = \frac{a_1 + a_2}{2a_1} \Gamma(s) (\cos \pi s [\phi_1(z) + \phi_2(z)] + \beta(s) [\phi_1(z) - \phi_2(z)])$$

$$\phi_1(z) = \Phi(z, q(z)), \quad \phi_2(z) = \Phi(z, -q(z)), \quad q(z) = \sqrt{(z - z_1)(z - z_2)}; \quad (1.41)$$

$$q(z) \sim z \text{ при } z \rightarrow \infty, \quad z = i \operatorname{tg} \pi(\omega - s), \quad z_{1,2} = i \operatorname{tg} \pi(\omega \mp \eta), \quad \omega - 1 \leq \operatorname{Re} s \leq \omega,$$

где η – корень уравнения $\cos^2 \pi \eta = 4a_1 a_2 / (a_1 + a_2)^2$.

1.5.5. Решение задачи о стрингере

Пусть тонкая упругая однородная пластина, составленная из двух полубесконечных пластин, занимающих на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ верхнюю $\operatorname{Im} z > 0$ и нижнюю $\operatorname{Im} z < 0$ полуплоскости, усилена по линии соединения $y = 0$ кусочно-однородным бесконечным упругим стрингером, состоящим из двух соединенных друг с другом полубесконечных кусков $x > 0$ и $x < 0$, имеющих модули упругости E_1 и E_2 и малые поперечные сечения S_1 и S_2 соответственно. Пластины имеют толщины, коэффициенты Пуассона, модули сдвига h_1, ν_1, μ_1 и h_2, ν_2, μ_2 . Пластины соединены так, что их средние плоскости совпадают. Стрингер присоединен к пластинам идеально жестко, причем симметрично как относительно линии соединения пластин, так и относительно их срединной плоскости.

Необходимо вычислить комплексные потенциалы, описывающие напряженное состояние пластин, усиленных стрингером, и контактные напряжения под стрингером.

Запишем уравнение равновесия части стрингера на отрезке $[x, x + \Delta x]$:

$$N(x + \Delta x) - N(x) + \left(h_1 \tau_{xy}^+(x) - h_2 \tau_{xy}^-(x) \right) \Delta x = 0;$$

$$\left(h_1 \sigma_y^+(x) - h_2 \sigma_y^-(x) \right) \Delta x = 0.$$

Поделив обе части этого уравнения на приращение Δx получим уравнения, описывающие связь между нормальным усилением в стрингере N в расчете на единицу толщины стрингера, толщиной пластины h_1, h_2 и касательным и нормальным напряжением в пластинах $\tau_{x,y}^+, \sigma_y$ и аналогичное уравнение для

$$N'(x) + h_1 \tau_{xy}^+(x) - h_2 \tau_{xy}^-(x) = 0;$$

$$h_1 \sigma_y^+(x) - h_2 \sigma_y^-(x) = 0.$$

Загон Гука для стрингера утверждает, что

$$N(x) = \begin{cases} E_1 S_1 \varepsilon(x), & x > 0 \\ E_2 S_2 \varepsilon(x), & x < 0 \end{cases},$$

где ε - относительное удлинение стрингера.

Так как стрингер жестко соединен с пластинами, то можно записать следующую систему краевых условий

$$A(x)u''(x) + h_1 \tau_{xy}^+(x) - h_2 \tau_{xy}^-(x) = 0, \quad h_1 \sigma_y^+(x) - h_2 \sigma_y^-(x) = 0. \quad (1.42)$$

Добавим условия равновесия стрингера

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[h_1 \tau_{xy}^+(x) - h_2 \tau_{xy}^-(x) \right] dx + P_{\infty} = 0 \quad (1.43)$$

$$(u + iv)(x) = (u + iv)^+(x) = (u + iv)^-(x); \quad x \in R;$$

$$A(x) = \begin{cases} E_1 S_1, & x > 0 \\ E_2 S_2, & x < 0 \end{cases}$$

Для того чтобы найти напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ в пластинах воспользуемся формулами Колосова-Мусхелишвили [23]

$$\sigma_x(z) + \sigma_y(z) = 4 \operatorname{Re} \Phi_k(z), \quad \sigma_y(z) - i \tau_{xy}(z) = \Phi_k(z) -$$

$$-\Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \Phi_k'(z),$$

$$2\mu_k \frac{\partial}{\partial x} [u(z) + iv(z)] = \kappa_k \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \Phi'_k(z), \quad (-1)^{k-1} \operatorname{Im} z > 0$$

$$\Phi_k(z) = \begin{cases} \Phi_k^+(z), & \operatorname{Im} z > 0 \\ \Phi_k^-(z), & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}, \quad \kappa_k = \frac{3 - \nu_k}{1 + \nu_k}, \quad k = 1, 2. \quad (1.44)$$

Используя формулы (1.43) и (1.41), получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \frac{iA(x)}{2\mu_1} \frac{d}{dx} \operatorname{Re} [\kappa_1 \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x)] - h_1 [\Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x)] - \\ - h_2 [\Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x)] = 0 \\ \mu_2 [\kappa_1 \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x)] = \mu_1 [\kappa_2 \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x)], \quad x \in R \setminus \{0\}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

В следствии того, что функции $\Phi_1^+(z)$, $\Phi_1^-(z)$, $\Phi_2^+(z)$, $\Phi_2^-(z)$ стремятся к нулю на бесконечности то можно записать

$$\begin{aligned} \mu_2 \kappa_1 \Phi_1^+(x) - \mu_1 \Phi_2^+(x) &= 0, \quad \operatorname{Im} z > 0; \\ \mu_1 \kappa_2 \Phi_2^-(x) - \mu_2 \Phi_1^-(x) &= 0, \quad \operatorname{Im} z < 0; \end{aligned} \quad (1.46)$$

Выражение (1.46) позволяет выразить функции $\Phi_2^+(z)$ и $\Phi_2^-(z)$ через $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_1^-(z)$ соответственно

$$\begin{aligned} \Phi_2^+(x) &= \frac{\mu_2 \kappa_1 \Phi_1^+(x)}{\mu_1}, \quad \operatorname{Im} z > 0; \\ \Phi_2^-(x) &= \frac{\mu_2 \Phi_1^-(x)}{\mu_1 \kappa_2} = 0, \quad \operatorname{Im} z < 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Подставим формулы (1.47) в уравнение (1.44) получим краевую задачу Римана

$$(1 + \delta \kappa_1) \Phi_1^+(x) - (1 + \delta \kappa_1^{-1}) \Phi_1^-(x) = ig(x), \quad x \in R \setminus \{0\}, \quad (1.48)$$

где

$$\delta = \frac{h_2 \mu_2}{h_1 \mu_1}, \quad g(x) = \frac{A(x)}{2h_1 \mu_1} \frac{d}{dx} \operatorname{Re} \left[\kappa_1 \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) \right], \quad x \in R \setminus \{0\}. \quad (1.49)$$

Граничные условия на бесконечности уравнение (1.48) будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(x) &= \frac{1}{2\pi(1+\delta\kappa_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-\tau} dt, \\ \Phi_1^-(x) &= \frac{\kappa_2}{2\pi(\kappa_2+\delta)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-\tau} dt. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Запишем уравнение, из которого можно найти функцию $g(x)$, подставив формулу (1.50) на бесконечности в выражение (1.49)

$$\begin{aligned} g(x) - \frac{A(x)}{4\pi h_1 \mu_1} \tilde{a} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt &= 0, \quad x \in R \setminus \{0\}, \\ \tilde{a} &= \frac{\kappa_1(\kappa_2+\delta) + \kappa_2(1+\kappa_1\delta)}{(\kappa_2+\delta)(1+\kappa_1\delta)}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

В силу выражений (1.42), (1.44), (1.49) можно заключить, что уравнение (1.43) эквивалентно следующему интегральному уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = h_1^{-1} P_{\infty} \quad (1.52)$$

Так как в точке соединения пластин (точке $x=0$) напряжение может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, то этим же свойством в точке обладает и функция $g(x)$. Тогда искомая функция $v(x)$ принадлежит классу C^1 всюду кроме нуля.

Функцию $g(t) = v'(t)$ можно найти, используя формулы (1.23) и (1.41), в которых

$$\eta = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2}.$$

Функция $\Phi(z, w) = X(z, w)R(z, w)$ – решение задачи Римана (1.39), (1.40) при условии, что $\mu(t, \xi) = 0$.

Получим

$$\Phi(z, w) = R(z, w)e^{\chi(z, w)},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \ln \lambda(t, \xi) dW + \int_{(z_0, q(z_0))}^{(1, q(z_0))} dW + \int_{(z_0, -q(z_0))}^{(1, -q(z_0))} dW, \quad dW = \frac{(w(z) + \xi(t))dt}{\xi(t)(t - z)}.$$

Из условий равенства функции $R(z, q(z))$ нулю в точках $(z_0, \pm q(z_0))$ определим коэффициенты $C_0 = 0$ и $C_2 = -C_1 z_0$. Тогда

$$A(z, w) = \frac{C_1(z - z_0)e^{\chi(z, w)}}{w(z)}.$$

Если переписать функцию $\chi(z, w)$ в следующем виде

$$\chi(z, w) = \chi_1(z, w) + w(z)\chi_2(z, w),$$

$$\chi_1(z, w) = \left(\frac{\ln a_1 a_2}{4\pi i} - \frac{1}{2} \right) \ln \frac{z-1}{z+1} + \ln \frac{z-1}{z-z_0},$$

$$\chi_2(z, w) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-1}^1 \frac{2 \ln \lambda_1(t) - \ln a_1 a_2 + 2\pi i}{q(t)(t - q)} dt,$$

то для функции $\Phi(z, w)$ получим

$$\Phi(z, w) = C_1 \frac{\chi_3(z)}{w(z)} e^{w(z)\chi_2(z)},$$

$$\Phi(z, w) + \Phi(z, -w) = 2C_1 \frac{\chi_3(z)}{w(z)} sh(w(z)\chi_2(z))$$

$$\chi_3(z, w) = (z-1)^{\frac{1}{2}-i\delta_0} (z+1)^{\frac{1}{2}+i\delta_0}, \quad \delta_0 = \frac{1}{4\pi} \ln(a_1 a_2). \quad (1.53)$$

Константу C_1 найдем из условия (1.52).

$$C_1 = \frac{a_1 P_\infty q(z_*)}{h_1 \chi_3(z_*) \left[(a_1 - a_2) sh(q(z_*)\chi_2(z_*)) - |a_1 - a_2| ch(q(z_*)\chi_2(z_*)) \right]}, \quad z_* = i \operatorname{tg} \pi w.$$

Используя формулы

$$F_1(s) = 2C_1\Gamma(s)\frac{\chi_3(z)}{q(z)}sh(q(z_*)\chi_2(z_*)),$$

$$F_2(s) = C_1\frac{a_1+a_2}{a_1}\Gamma(s)\frac{\chi_3(z)}{q(z)}\left(\cos\pi s \cdot sh(q(z_*)\chi_2(z_*)) + \beta(s)ch(q(z_*)\chi_2(z_*))\right)$$

и выражение (1.23), определим функцию $g(x) = f'(x)$. Зная эту функцию, можно найти вначале комплексные потенциалы $\Phi_1^\pm(z)$, $\Phi_2^\pm(z)$ используя формулы (1.47), (1.50) и из них напряжения в пластинах и под стрингером по формулам (1.44).

2. УРАВНЕНИЕ ПРАНДТЛЯ В АЭРОДИНАМИКЕ

2.1. Поведение несжимаемого потока воздуха вокруг крыла конечного размаха

Опишем поведение несжимаемого потока воздуха вокруг крыла конечного размаха [1].

На рисунке 2.1 в трех проекциях продемонстрирован двухмоторный бизнес-самолет Beechcraft Baron 58. Крыло этого самолета имеет аэродинамический профиль NASA 23015 толщиной 15% у основания и сужается до 10% на кромке крыла. На рисунке 2.2 показаны данные в аэродинамической трубе для профиля NASA 23015. Коэффициент подъемной силы профиля и коэффициент момента относительно точки четверти хорды даны как функция угла сечения профиля атаки воздушного потока на крыло приведен на рисунке 2.2. Коэффициент лобового сопротивления и коэффициент момента относительно аэродинамического центра представлены как функция коэффициента подъемной силы представлены на рисунке 2.3. Форма аэродинамического профиля показана в масштабе вверху на рисунке 2.3.

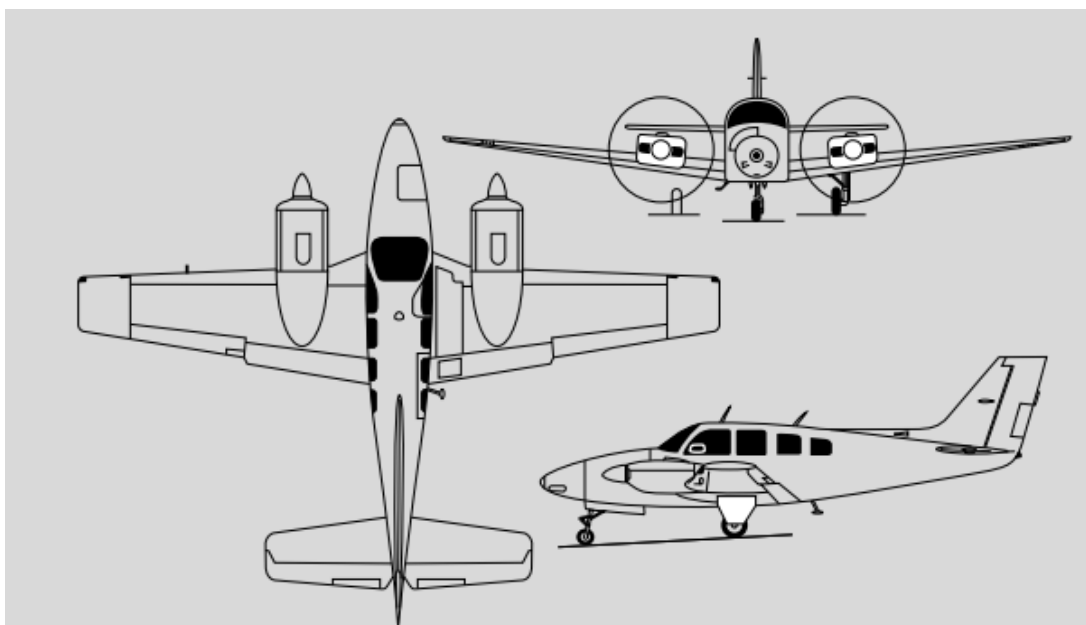


Рисунок 2.1 – Beechcraft Baron 58, четырех и шестиместный самолет авиации общего назначения

Рассмотрим круизный полет самолета Beechcraft Baron 58 с крылом под углом атаки воздушного потока в четыре градуса и попробуем теоретически определить коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления крыла.

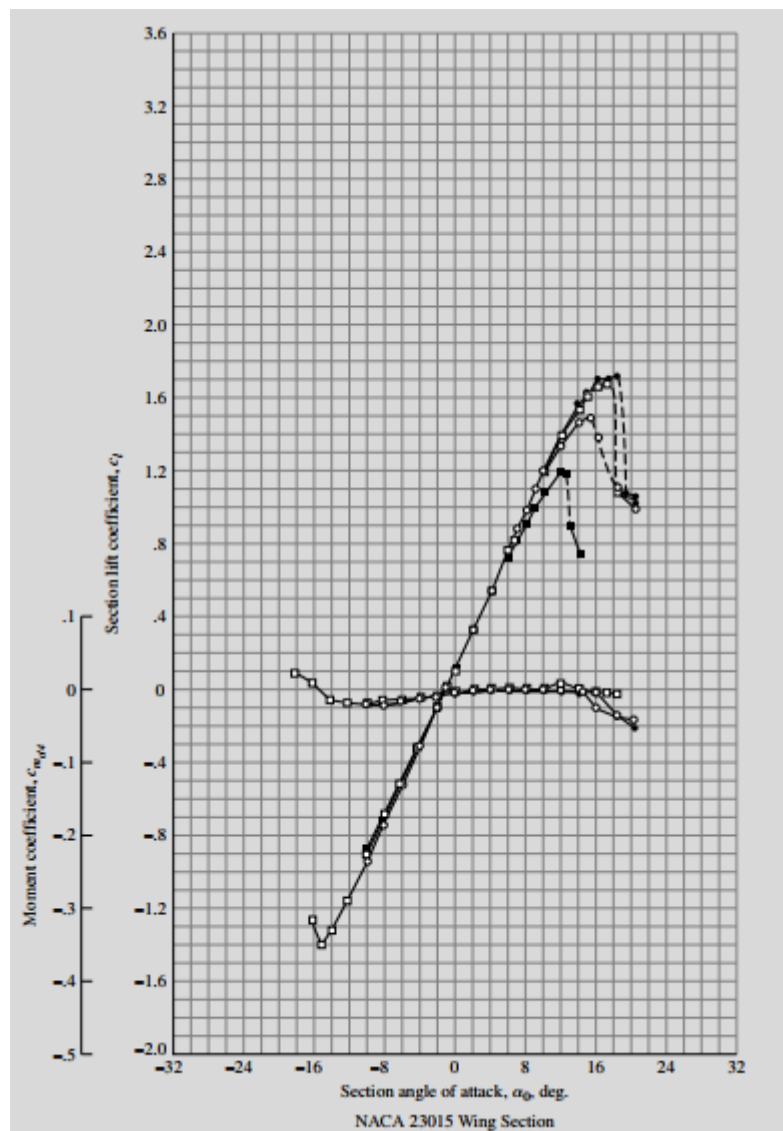


Рисунок 2.2 – Коэффициент подъемной силы и коэффициент момента относительно четверти хорды для профиля NACA 23015

По рисунку 2.2 для профиля при $\alpha = 4^\circ$ видно, что $C_l = 0.54$. Используя данные коэффициента сопротивления при максимальном числе Рейнольдса, показанном на рисунке 2.3, для $c_l = 0.54$ определим соответствующий коэффициент сопротивления c_d . Он будет равен $c_d = 0.0068$. Если сравним их с коэффициентами подъемной силы и лобового сопротивления реального крыла,

то увидим, что коэффициентами подъемной силы и лобового сопротивления реального крыла будут сильно отличаться от этих же коэффициентов для профиля, крыла.

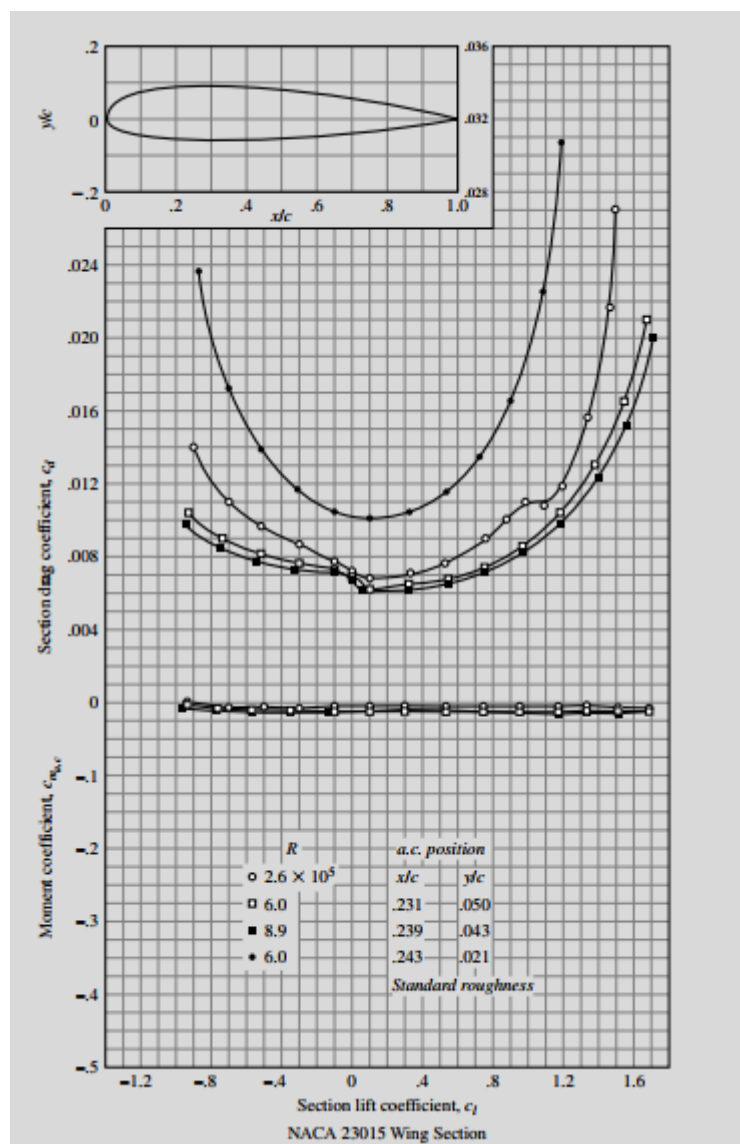


Рисунок 2.3 – Коэффициент аэродинамического сопротивления и моментный коэффициент относительно аэродинамического центра крылового профиля NACA 23015

Однако, аэродинамические свойства крыла самолета должны иметь какое-то отношение к аэродинамическим свойствам крыла конечного размаха. Поэтому опишем суть аэродинамики реального самолета, летящего со скоростью, соответствующей предположению о несжимаемом потоке воздуха, и

установим связь между аэродинамическими свойствами профиля и реального крыла в виде уравнения обтекания крыла конечного размаха несжимаемым потоком воздуха.

Так как обтекание профиля несжимаемым потоком воздуха двумерно, а крыло конечного размаха является трехмерным телом, и, соответственно, обтекание такого крыла несжимаемым потоком воздуха также является трехмерным; то есть у потока существует составляющая в поперечном направлении крыла. Этим и обуславливается отличие аэродинамических характеристик профиля крыла от соответствующих характеристик крыла. На рисунке 2.4 приведен вид крыла сверху и спереди для крыла конечного размаха. Физическим механизмом создания подъемной силы на крыле является наличие высокого давления на нижней поверхности и низкого давления на верхней поверхности. Дисбаланс распределения давления на крыло создает подъемную силу, однако, как побочный продукт этого дисбаланса давления, поток около кромки крыла закручивается вокруг кончиков крыльев, будучи вытесненным из области высокого давления в область низкого давления сверху. Это обтекание кромки крыльев для крыла спереди продемонстрировано на рисунке 2.4. В результате на верхней поверхности крыла, присутствует поперечная составляющая воздушного потока от кромки крыла, из-за чего воздушный поток на верхней поверхности направляется к центру крыла, как показано на виде сверху, показанном на Рисунке 2.4. Аналогично на нижней поверхности крыла, существует поперечная составляющая воздушного потока от центра крыла до кромки, заставляя искажаться воздушный поток на нижней поверхности, направляя поток к кромке крыла.

Тенденция к «утечке» потока вокруг кромки крыла оказывает еще одно важное влияние на аэродинамику крыла. Этот поток устанавливает циркуляционное движение, которое идет вниз по потоку от крыла; то есть на каждой кромке крыла создается хвостовой вихрь.

Эти вихри на концах крыла схематически изображены на рисунке 2.5 и приведены на рисунке 2.6.

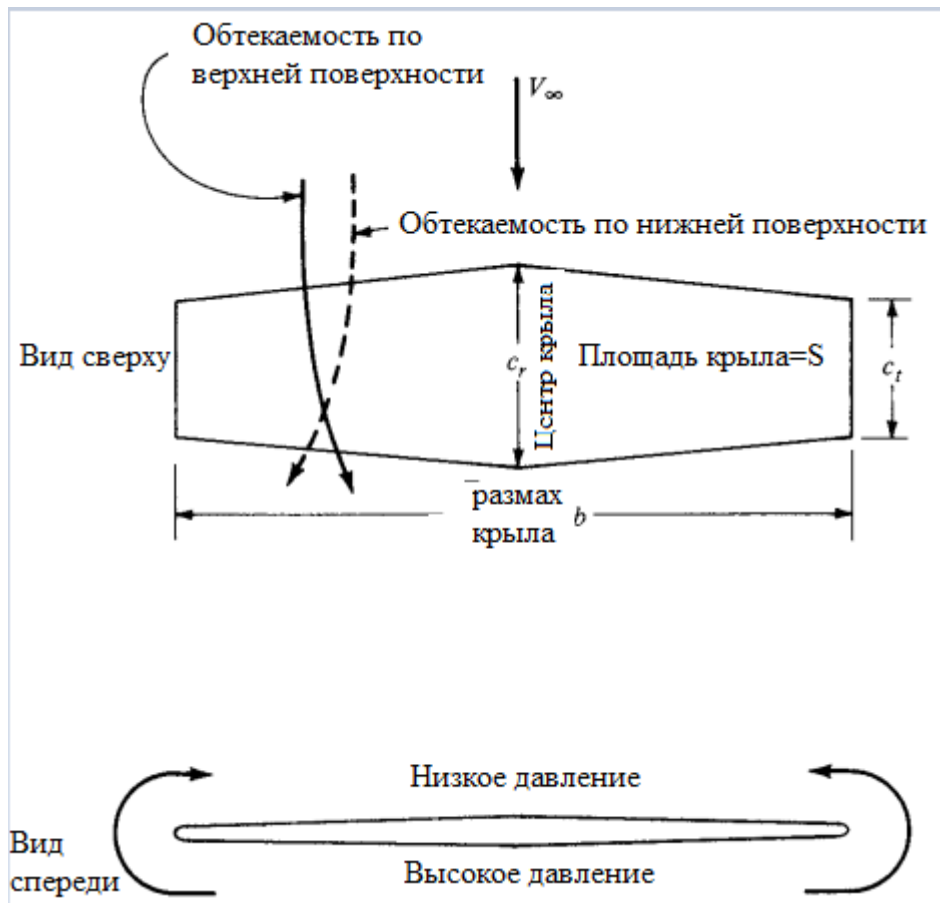


Рисунок 2.4 – Крыло конечного размаха

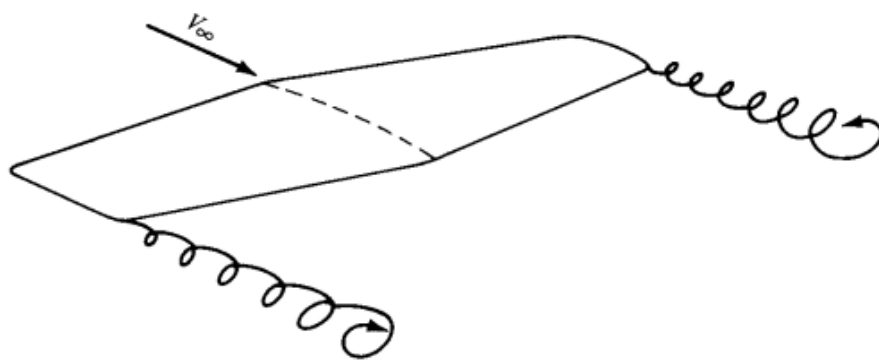


Рисунок 2.5 – Схематичное изображение концевых вихрей

Концевые вихри – это, по сути, слабые «смерчи», которые следуют за конечным крылом. (Для больших самолетов, таких, как например Боинг 747, эти концевые вихри могут быть достаточно мощными, чтобы следовавшие рядом с ними небольшие самолеты теряли контроль над полетом. Такие аварии имели место, и это одна из причин больших расстояний между последовательными

посадками и взлетами самолетов в аэропортах.) Эти вихри на кромке крыла, расположенные ниже по потоку от крыла, вызывают небольшой нисходящий компонент скорости воздуха в непосредственной близости от самого крыла. Это можно увидеть, изучив рисунок 2.6; два вихря имеют тенденцию увлекать за собой окружающий воздух, и это вторичное движение вызывает небольшую составляющую скорости в нисходящем направлении на крыло.

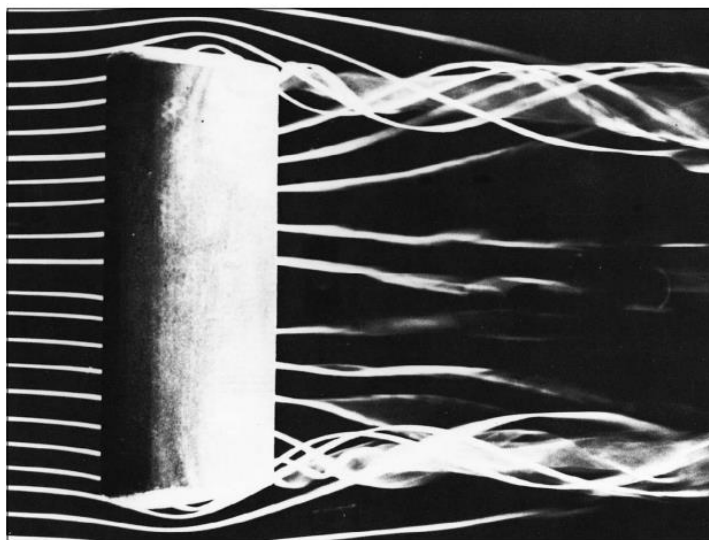


Рисунок 2.6 – Концевые вихри от прямоугольного крыла

Этот нисходящий компонент называется нисходящей струей и обозначается символом w . В свою очередь, нисходящий поток в сочетании со скоростью набегающего потока V_∞ создает местный относительный ветер, который направляется вниз вблизи каждой секции крыла, как показано на рисунке 2.7.

Внимательно изучим рисунок 2.7. Угол между линией хорды и направлением V_∞ – это угол атаки α . Определим угол α как геометрический угол атаки. На рисунке 2.7 местный относительный ветер направлен ниже направления V_∞ на угол α_i , который называется индуцированным углом атаки.

Наличие нисходящего потока и его влияние на наклон местного относительного ветра в нисходящем направлении имеет два важных эффекта на локальное сечение аэродинамического профиля, а именно:

1. Фактически видимый местным сечением профиля угол атаки – это угол между линией хорды и местным относительным ветром. Этот угол равен α_{eff} на рисунке 2.5 и определяется как эффективный угол атаки. Следовательно, хотя крыло находится под геометрическим углом атаки α , местное сечение аэродинамического профиля видит меньший угол, а именно эффективный угол атаки α_{eff} . Из рисунка 2.7 получим, что

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i \quad (2.1)$$

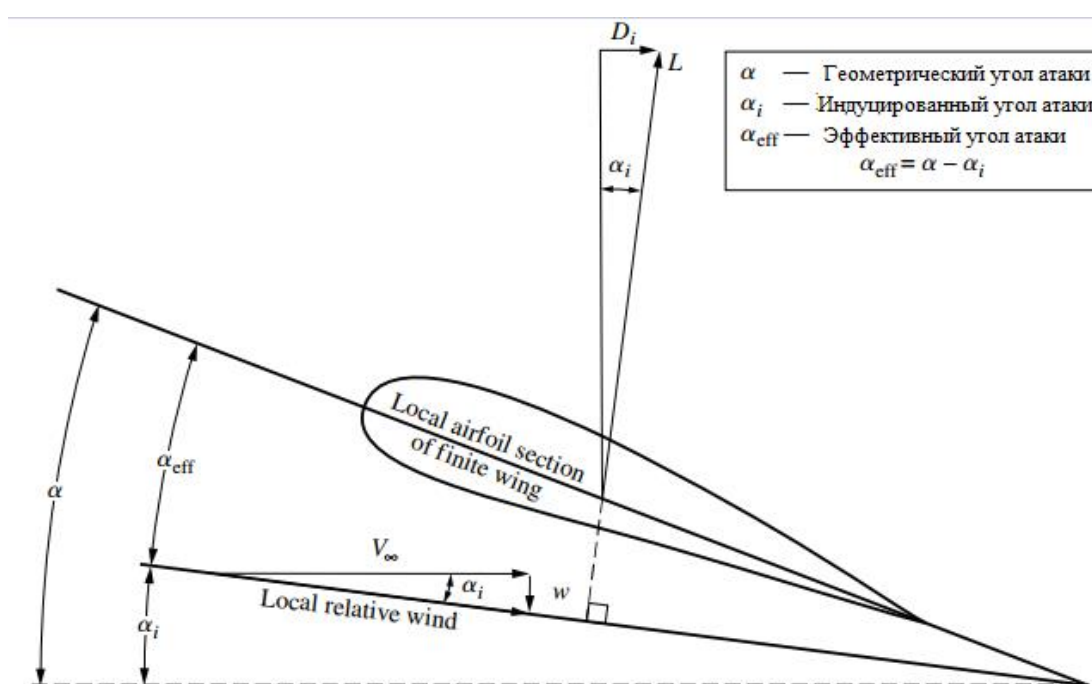


Рисунок 2.7 – Влияние нисходящей струи на местное обтекание локального сечения крыла конечного крыла

Локальный вектор подъемной силы направлен перпендикулярно местному относительному ветру и, следовательно, наклонен за вертикаль на угол α_i , что продемонстрировано на рисунке 2.6. Следовательно, есть компонента вектора локальной подъемной силы в направлении V_∞ ; то есть существует сопротивление, создаваемое наличием нисходящей струи. Это сопротивление определяется как индуцированное сопротивление, обозначенное D_i на рисунке

2.6. Следовательно, мы видим, что наличие потока направленного вниз над крылом конечного размаха уменьшает угол атаки, который эффективно видит каждая секция, и, кроме того, создает компонент лобового сопротивления – индуцированное сопротивление D_i .

Наклон назад вектора подъемной силы, показанного на рисунке 2.6, является одним из способов визуализации физического образования индуцированного сопротивления. Есть два альтернативных способа:

1. Трехмерный поток, индуцированный вихрями на кромке крыла, показанными на рисунках 2.4 и 2.5, просто изменяет распределение давления на конечном крыле таким образом, что существует дисбаланс чистого давления в направлении V_∞

2. Вихри на концах крыла содержат большое количество поступательной и вращательной кинетической энергии. Эта энергия должна откуда-то исходить; действительно, это в конечном итоге обеспечивается двигателем самолета, который является единственным источником энергии, связанным с самолетом. Поскольку энергия вихрей бесполезна, эта сила теряется. Фактически, дополнительная мощность, обеспечиваемая двигателем, которая попадает в вихри, является дополнительной мощностью, необходимой двигателю для преодоления индуцированного сопротивления.

Поэтому очевидно, что характеристики крыла конечной длины не идентичны характеристикам его профилей. Поэтому перейдем к развитию теории, которая позволит нам анализировать аэродинамические свойства крыльев конечного размаха. Для этого можно использовать схему, представленную на рисунке 2.7.

Последние два слагаемых в сумме обусловлены эффектами вязкости. Сумма этих двух элементов полного сопротивления с преобладанием вязкости называется сопротивлением профиля. При умеренном угле атаки коэффициент лобового сопротивления конечного крыла практически такой же, как и для его профилей. Следовательно, коэффициент лобового сопротивления профиля определяется как

$$c_d = \frac{D_f + D_p}{q_\infty S}, \quad (2.2)$$

а коэффициент наведенного сопротивления как

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S}. \quad (2.3)$$

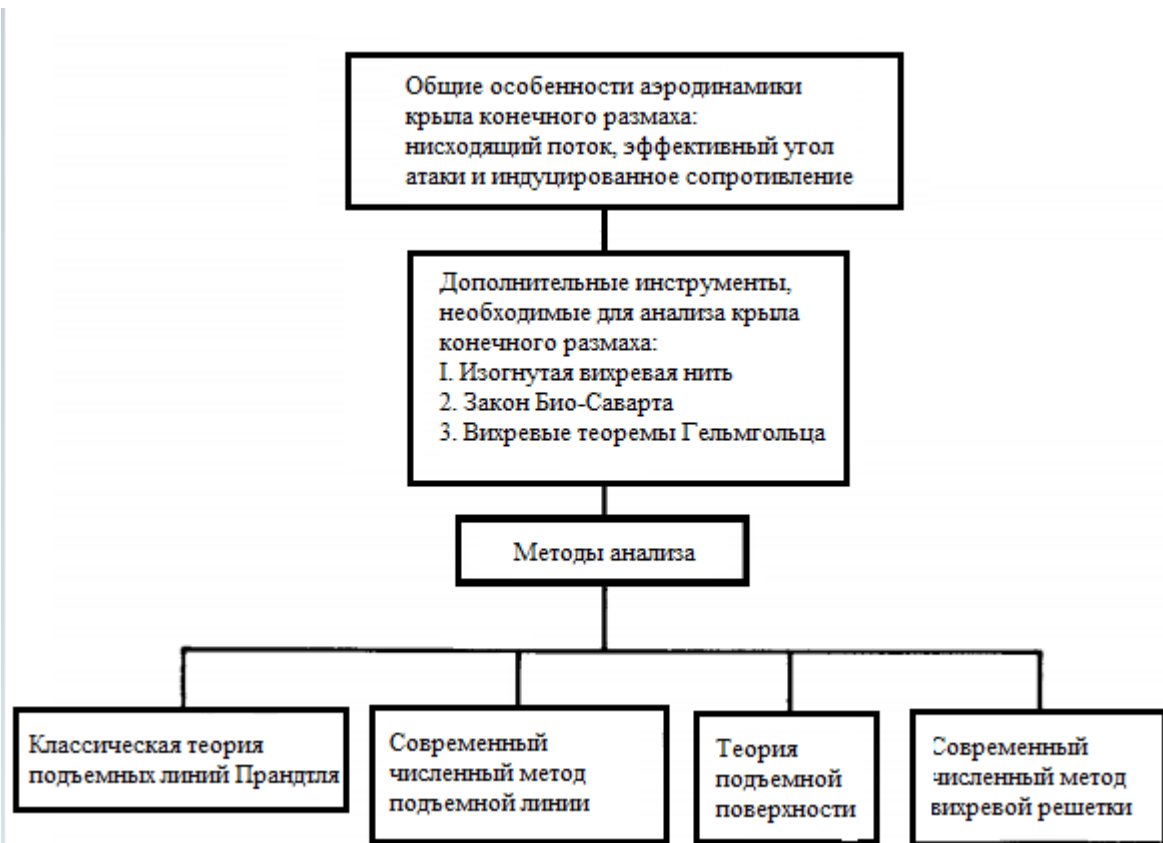


Рисунок 2.8 – Схема анализа аэродинамических свойств крыла конечного размаха

Тогда полный коэффициент сопротивления для конечного крыла C_D определяется выражением

$$C_D = c_d + C_{D,i} \quad (2.4)$$

В уравнении (2.4) значение c_d обычно получается из данных профиля, значение $C_{D,i}$ может быть получено из теории конечностей.

2.2. Вихревая нить, закон Био – Савара и теоремы Гельмгольца

Для того чтобы установить рациональную аэродинамическую теорию для крыла конечного размера, введем несколько дополнительных аэродинамических инструментов. Введем понятие вихревой нити. Для этого вначале рассмотрим ветряной поток.

Рассмотрим поток, в котором все линии тока представляют собой концентрические круги вокруг данной точки, как показано на рисунке 2.8.

Пусть скорость вдоль любой данной круговой линии тока постоянна, но пусть она изменяется от одной линии тока к другой обратно пропорционально расстоянию от общего центра. Такой поток называется вихревым. Можно заметить, что вихревое течение является физически возможным потоком несжимаемой жидкости.

Представим себе прямую линию, перпендикулярную странице, проходящую через точку O и уходящую в бесконечность как из страницы, так и внутрь нее. Эта линия представляет собой прямую вихревую нить силы.

Но такая вихревая нить подойдет только для крыла бесконечного размаха, а для крыла с конечным размахом данную вихревую нить нужно модифицировать. Для этого изогнем вихревую нить, как показано на рисунке 2.9.

Вихревая нить создается в окружающем пространстве поле течения. Если циркуляция проводится по любому пути, охватывающему вихревую нить то получается постоянное значение Γ .

Следовательно, сила вихревой нити определяется как Γ . Рассмотрим направленный сегмент нити dl , показанный на рисунке 2.10. Радиус-вектор от dl до произвольной точки P в пространстве равен r . Отрезок dl вызывает в точке P скорость, равную

$$dV = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \times r}{|r|^3}. \quad (2.5)$$

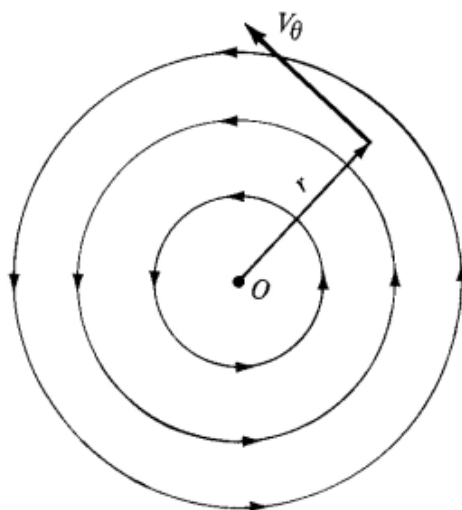


Рисунок 2.9 – Вихревая нить для бесконечного крыла

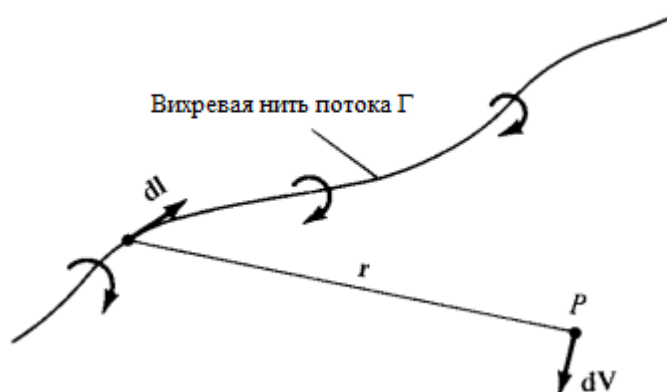


Рисунок 2.10 – Вихревая нить и иллюстрация закона Био – Савара

Уравнение (2.5) называется законом Био – Савара и является одним из самых фундаментальных соотношений в теории невязкого несжимаемого течения.

Эта вихревая нить и связанный с ней закон Био – Савара – это концептуальные аэродинамические инструменты, которые можно использовать для синтеза более сложных потоков невязкой несжимаемой жидкости. Для всех практических целей они являются решением основного уравнения для невязкого несжимаемого потока – уравнения Лапласа – и сами по себе не представляют особой ценности. Однако, когда несколько вихревых нитей используются вместе

с однородным набегающим потоком, можно синтезировать поток, который имеет практическое применение.

Обтекание крыла конечного размаха является одним из таких примеров.

Применим закон Био – Савара к прямой вихревой нити бесконечной длины, как показано на рисунке 2.11. Сила нити равна Γ . Скорость, индуцированная в точке P направленным отрезком вихревой нити dl , задается уравнением (2.5).

Следовательно, скорость, индуцированная в точке P всей вихревой нитью, равна

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \times r}{|r|^3} \quad (2.6)$$

Величина скорости $V = |V|$ определяется выражением

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl \quad (2.7)$$

На рисунке 2.11 пусть h – расстояние точки P до вихревой нити. Затем, исходя из геометрии, показанной на рисунке 2.11, можно записать

$$r = \frac{h}{\sin \theta}, \quad l = \frac{h}{\tan \theta}, \quad dl = -\frac{h}{\sin^2 \theta} d\theta. \quad (2.8)$$

Подставим выражения (2.8) в (2.7)

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl = -\frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\pi}^0 \sin \theta d\theta \quad (2.9)$$

Или, вычислив интеграл

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi h}. \quad (2.10)$$

Таким образом, скорость, индуцируемая в данной точке P бесконечной прямой вихревой нитью на расстоянии h от точки P , равна $\frac{\Gamma}{2\pi h}$, что в точности является результатом, полученным уравнением для точечного вихря в двумерном потоке [1].

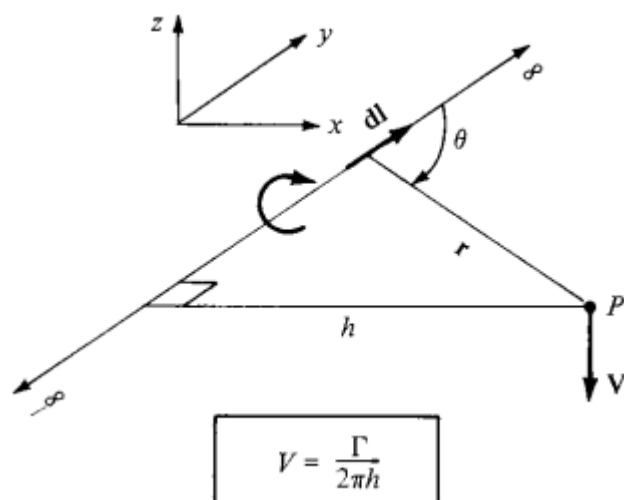


Рисунок 2.11 – Скорость, индуцируемая в точке Р бесконечной прямой вихревой нитью

Рассмотрим полубесконечную вихревую нить, которую можно получить, приняв точку А, являющейся точкой пересечения вихревой нити и перпендикуляра к ней из точки Р за начало нити и отбросив отрицательную части вихревой нити. Точку А можно считать границей потока. Повторяя рассуждения для бесконечной вихревой нити, получим, что скорость, индуцируемая в данной точке Р полубесконечной прямой вихревой нитью на расстоянии h от точки Р, равна

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi h}. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) было использовано Людвигом Прандтлем для разработки его теории подъемных линий для трехмерного крыла.

Первым, кто использовал концепцию вихревой нити для анализа невязкого несжимаемого потока был Гельмгольц. В результате он установил несколько основных принципов поведения вихря, которые стали известны как принципы Гельмгольца.

Теоремы о вихре:

1. Прочность вихревой нити постоянна по ее длине.

2. Вихревая нить не может заканчиваться в жидкости; она должна доходить до границ жидкости или образовывать замкнутый путь.

Также, введем понятие распределения подъемной силы по крылу конечного размаха. Рассмотрим заданное положение y_1 по размаху, где локальная хорда равна c , местный геометрический угол атаки равен α , а сечение профиля имеет заданную форму.

Подъем на единицу пролета в этом месте равен $L'(y_1)$. Теперь рассмотрим другое место y_2 вдоль пролета, где c , α , и форма профиля могут быть разными. (Большинство крыльев конечного размаха имеют переменную хорду, за исключением простого прямоугольного крыла.

Кроме того, многие крылья имеют геометрическое скручивание, так что α отличается в разных положениях по размаху – так называемое геометрическое скручивание. Помимо этого, на ряде современных самолетов крылья имеют разное сечение профиля по размаху с разными значениями $\alpha_L = 0$; это называется аэродинамическим скручиванием. Следовательно, подъемная сила на единицу пролета в этом другом месте, $L'(y_2)$, обычно будет отличаться от $L'(y_1)$. Следовательно, существует распределение подъемной силы на единицу размаха вдоль крыла, то есть $L' = L'(y)$, как показано на рисунке 2.12. В свою очередь, циркуляция также является функцией от y , $\Gamma(y) = \frac{L'(y)}{\rho_\infty V_\infty}$. Как видно из рисунка

2.12, распределение подъемной силы стремится к нулю на кромке крыла; это происходит потому, что давление выравнивается снизу и сверху крыла точно в точках $y = -\frac{b}{2}$ и $y = \frac{b}{2}$, и, следовательно, в этих точках не создается подъемная сила.

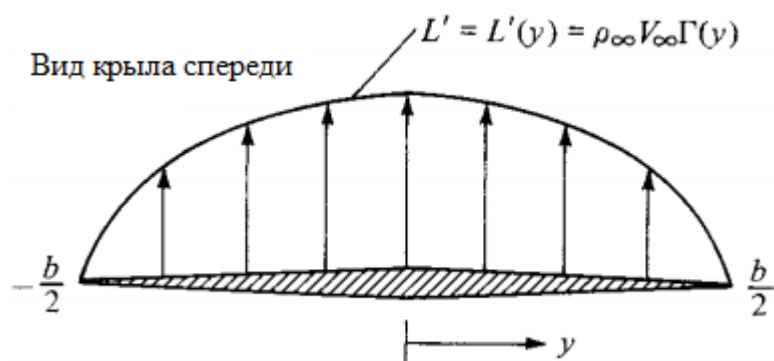


Рисунок 2.12 – Скорость, индуцированная в точке Р
бесконечной прямой вихревой нитью

Расчет распределения подъемной силы $L'(y)$ является одной из центральных проблем теории конечного крыла.

2.3. Классическая теория подъемных линий Прандтля

Силовая вихревая нить, которая каким-то образом связана с фиксированным местом в потоке – так называемый связанный вихрь - будет испытывать силу $L' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$ по теореме Кутта-Жуковского. Этот связанный вихрь отличается от свободного вихря, который движется с теми же элементами жидкости в потоке. Поэтому заменим конечное крыло с размахом b на связанный вихрь, простирающийся от $y = -\frac{b}{2}$ до $y = \frac{b}{2}$, как показано на рисунке

2.13. Однако в соответствии с теоремой Гельмгольца вихревые нити не могут заканчиваться в жидкости. Поэтому предположим, что вихревая нить продолжается как два свободных вихря, тянущихся вниз по потоку от кромки крыла до бесконечности, как также показано на рисунке 2.13. Этот вихрь (граница плюс два свободных) имеет форму подковы и поэтому называется подковообразный вихрь.

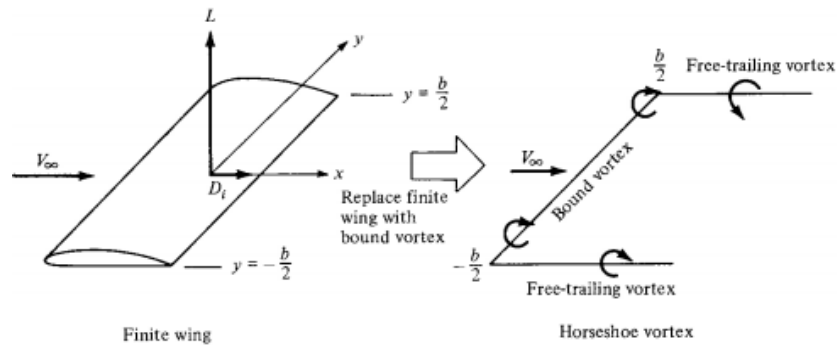


Рисунок 2.13 – Замена конечного крыла связанным вихрем

Одиночный подковообразный вихрь показан на рисунке 2.14. Рассмотрим нисходящую струю w , индуцированную подковообразным вихрем вдоль связанного вихря от $-\frac{b}{2}$ до $\frac{b}{2}$.

Изучая рисунок 2.14, можно увидеть, что связанный вихрь не создает скорости вдоль себя; однако оба отстающих вихря вносят вклад в индуцированную скорость вдоль связанного вихря, и оба вклада направлены вниз.

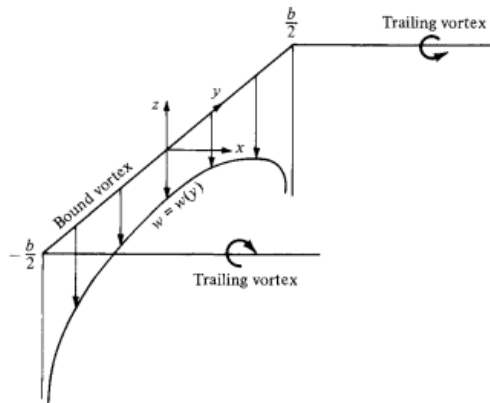


Рисунок 2.14 – Распределение нисходящего потока вдоль оси y для одного подковообразного вихря

В соответствии с системой координат xuz на рисунке 2.14, такая нисходящая скорость отрицательна; то есть w является отрицательным значением, когда он направлен вниз, и положительным значением, когда он

направлен вверх. Если начало координат берется в центре связанного вихря, то скорость в любой точке y вдоль связанного вихря, индуцированная ведомыми полубесконечными вихрями, согласно уравнению (2.11),

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi\left(\frac{b}{2} + y\right)} - \frac{\Gamma}{4\pi\left(\frac{b}{2} - y\right)} \quad (2.12)$$

В уравнении (2.12) первое слагаемое в правой части представляет собой вклад от левого заднего вихря (идущего от $-\frac{b}{2}$), а второе слагаемое – от правого заднего вихря (от $\frac{b}{2}$). Уравнение (2.12) можно свести к следующему уравнению

$$w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\Gamma}{\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2\right)} \quad (2.13)$$

Это изменение $w(y)$ схематично показано на рисунке 2.14.

Распределение нисходящей струи из-за одиночного подковообразного вихря, показанного на рисунке 2.15, не реалистично имитирует распределение конечного крыла; особенно сбивает с толку поток вниз, приближающийся к бесконечному значению на кончиках. Для решения этой проблемы вместо того, чтобы представлять крыло одним подковообразным вихрем, давайте наложим на него большое количество подковообразных вихрей, каждый с разной длиной связанного вихря, но со всеми связанными вихрями.

Выделим бесконечно малый отрезок подъемной линии dy , расположенный на оси координат y , как показано на рисунок 2.16. Циркуляция в точке y равна $\Gamma(y)$ а изменение циркуляции на отрезке dy равно $d\Gamma = \frac{d\Gamma}{dy} dy$.

В свою очередь, сила вихря в точке y должна равняться изменению циркуляции $d\Gamma$ вдоль подъемной линии; это просто экстраполяция нашего результата, полученного для силы конечных отстающих вихрей на рисунке 2.15.

Рассмотрим более внимательно задний вихрь силой d , который пересекает линию подъема в координате y , как показано на рисунке 2.16. Также рассмотрим произвольное положение y_0 вдоль линии подъема. Любой сегмент замыкающего вихря dx будет вызывать скорость в точке y_0 с величиной и направлением, заданными законом Био – Савара, уравнением (2.5).

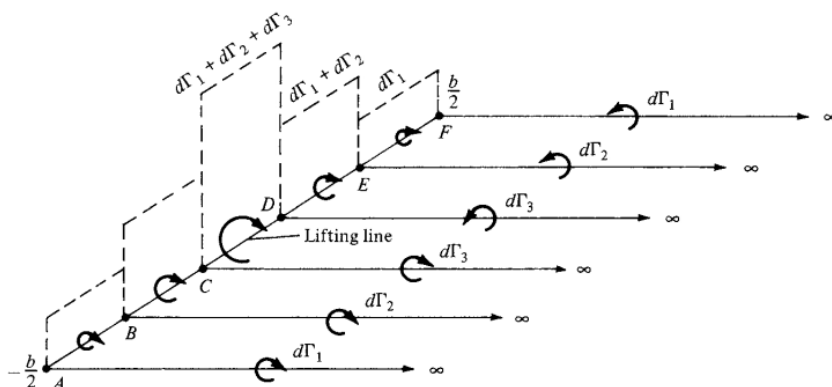


Рисунок 2.15 – Суперпозиция конечного числа подковообразных вихрей
вдоль линии подъема

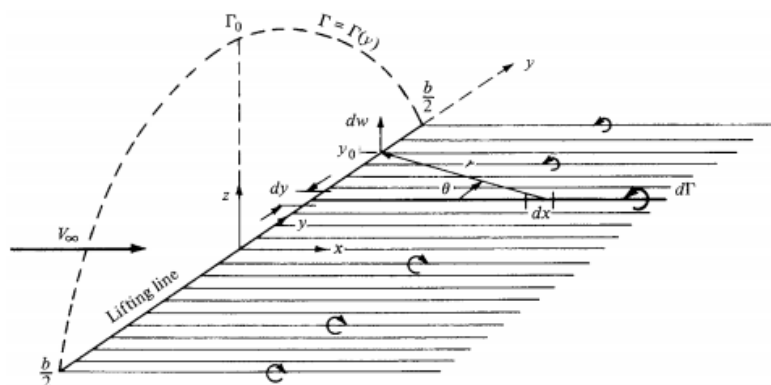


Рисунок 2.16 – Суперпозиция бесконечного числа подковообразных вихрей
вдоль линии подъема

В свою очередь, скорость dw в точке y_0 , индуцированная всем полубесконечным хвостовым вихрем, расположенным в точке y , задается уравнением (2.11), которое в терминах рисунка на рисунок 2.16 дает

$$dw = \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy} dy \right)}{4\pi(y_0 - y)} \quad (2.14)$$

Знак минус в уравнении (2.14) необходим для согласования с изображением, показанным на рисунке 2.16; для показанного замыкающего вихря направление dw в точке y_0 направлено вверх и, следовательно, имеет положительное значение, тогда как направление dw уменьшается в направлении y , что делает $\frac{d\Gamma}{dy}$ отрицательной величиной. Полная скорость w , индуцированная в y_0 всей задней вихревой пеленой, является суммой уравнения (2.14) по всем вихревым нитям, то есть интегралом уравнения (2.14) от $-\frac{b}{2}$ до $\frac{b}{2}$:

$$w(y_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy} dy \right)}{(y_0 - y)} \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) важно тем, что оно дает значение нисходящей струи при y_0 из-за всех замыкающих вихрей.

Рассмотрим вновь рисунок 2.7, на котором показано локальное сечение аэродинамического профиля конечного крыла.

Предположим, что этот участок расположен на произвольной точке y_0 по размаху. На рисунке 2.7 индуцированный угол атаки α_i определяется выражением

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{-w(y_0)}{V_\infty} \right)}. \quad (2.16)$$

Как правило, w намного меньше, чем V_∞ и, следовательно, α_i представляет собой небольшой угол, максимум порядка нескольких градусов. Для малых углов уравнение (2.16) дает

$$\alpha_i(y_0) = -\frac{w(y_0)}{V_\infty}. \quad (2.17)$$

Подставляя уравнение (2.15) в (2.17), получим

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dy} dy\right)}{(y_0 - y)}, \quad (2.18)$$

то есть выражение для индуцированного угла атаки через распределение циркуляции $\Gamma(y)$ вдоль крыла.

Снова рассмотрим эффективный угол атаки α_{eff} , как показано на рисунке 2.7. Поскольку поток вниз изменяется в зависимости от диапазона, то α_{eff} также является переменным; $\alpha_{eff} = \alpha_{eff}(y_0)$. Коэффициент подъемной силы для сечения профиля, расположенного при $y = y_0$, равен

$$c_l = a_0 [\alpha_{eff} - \alpha_{L=0}] = 2\pi [\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0}] \quad (2.19)$$

В уравнении (2.19) угол наклона подъемной силы a_0 местного сечения заменен теоретическим значением $2\pi(rad^{-1})$ для тонкого аэродинамического профиля. Кроме того, для крыла с аэродинамической закруткой угол нулевой подъемной силы $\alpha_{L=0}$ в уравнении (2.19) изменяется в зависимости от y_0 . Если нет аэродинамического скручивания, $\alpha_{L=0}$ постоянно по всему крылу. Из определения коэффициента подъемной силы и теоремы Кутта-Жуковского для локального сечения профиля, расположенного в точке y_0 , имеем

$$L' = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 c(y_0) c_l = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0). \quad (2.20)$$

Для уравнения (2.20) получим

$$c_t = \frac{2\Gamma(y_0)}{V_\infty c(y_0)}. \quad (2.21)$$

Подставляя уравнение (2.21) в уравнение (2.19), сможем найти эффективный угол атаки α_{eff} равный

$$\alpha_{eff} = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}. \quad (2.22)$$

Подставим выражения (2.22) и (2.18) в уравнение (2.1) получим следующее уравнение

$$\alpha(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0} + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma / dy) dy}{y_0 - y} \quad (2.23)$$

которое известно, как фундаментальное уравнение Прандтля подъемных линий.

Оно утверждает, что геометрический угол атаки равен сумме эффективного индуцированного угла атаки. В уравнении (2.23) α_{eff} выражается через Γ , а α_i выражается через интеграл, содержащий $d\Gamma / dy$. Следовательно, уравнение (2.23) является интегро-дифференциальным уравнением, в котором неизвестна функция Γ , а все остальные величины α , c , V_∞ и $\alpha_{L=0}$ известны для конечного крыла данной конструкции при заданном геометрическом угле атаки в набегающем потоке с заданной скоростью. Таким образом, решение уравнения (2.23) дает $\Gamma = \Gamma(y_0)$, где y_0 находится в диапазоне от $-\frac{b}{2}$ до $\frac{b}{2}$.

Решение $\Gamma = \Gamma(y_0)$, дает нам три основных аэродинамических характеристики конечного крыла, а именно:

1. Распределение подъемной силы получается из теоремы Кутта-Жуковского:

$$L'(y_0) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0); \quad (2.23)$$

2. Полный подъем получается путем интегрирования уравнения (2.24) по размаху крыла:

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) dy \quad (2.24)$$

или

$$L = \rho_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy. \quad (2.25)$$

Коэффициент подъема, находится непосредственно из уравнения (2.25):

$$C_L = \frac{L}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \quad (2.26)$$

3. Индуцированное сопротивление на единицу пролета равно

$$D'_i = L'_i \sin \alpha_i$$

В следствии того, что значение α_i достаточно мало, то это выражение принимает вид

$$D'_i = L'_i \alpha_i \quad (2.27)$$

Полное индуцированное сопротивление получается интегрированием уравнения (2.27) по размаху крыла:

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} L'(y) \alpha_i(y) dy \quad (2.28)$$

или

$$D_i = p_\infty V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy. \quad (2.29)$$

В свою очередь, коэффициент индуцированного сопротивления равен

$$C_{D,i} = \frac{D_i}{q_\infty S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy. \quad (2.30)$$

В уравнениях (2.27) - (2.30) функция $\alpha_i(y)$ находится с помощью уравнения (2.18).

Следовательно, в теории подъемной линии Прандтля решение уравнения (2.23) для $\Gamma(y)$, несомненно, является ключом к получению аэродинамических характеристик конечного крыла. Поэтому возникает необходимость в развитии современных и эффективных методов решения уравнения Прандтля для конечного крыла [24].

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЕ ПРАНДТЛЯ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

3.1. Метод сплайн коллокации для уравнения Прандтля

Как было показано в разделе 2, для определения характеристик крыла конечного размаха необходимо решить фундаментальное уравнение Прандтля, которое является интегро-дифференциальным уравнением с сингулярностью 1-го порядка [25]. Один из способов решения данного уравнения, был рассмотрен в разделе 1 для уравнения, моделирующего наложение стрингера на пластину, которое также относится к классу задач, решаемых с помощью уравнения Прандтля. Для его решения был произведен переход к краевой задаче Коши с её последующим решением [26]. Однако данный метод требует большого количества расчетов и вычислительных мощностей. Построим алгоритм метода сплайн-коллокации нулевого порядка для решения уравнения Прандтля на отрезке, что по сути является аналогом уравнения Прандтля для крыла конечного размаха [27].

Рассмотрим интегральное уравнение Прандтля конечного крыла следующего вида:

$$a(t)x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{x'(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1 \quad (3.1)$$

при следующих граничных условиях

$$x(-1) = \beta_0, \quad x(1) = \beta_1, \quad (3.2)$$

где β_0, β_1 – заданные конечные числа.

Для приближенного решения уравнения (3.1) построим вычислительную схему используя метод сплайн-коллокаций нулевого порядка.

Для построения численной схемы решения уравнения (3.1) с условиями (3.2) построим классическую равномерную сетку узлов

$$t_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

и дополнительную сетку узлов, смещённую относительно первой сетки на $\frac{1}{n}$:

$$\bar{t}_k = t_k + \frac{1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Обозначим полученные интервалы как Δ_k , где $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, n-2$, $\Delta_{n-1} = [t_{n-1}, 1]$.

Также обозначим функцию $x'(t)$ следующим образом

$$x'(t) = u(t) \quad (3.3)$$

Подставим обозначение (3.3) в уравнение (3.1) и граничные условия (3.2). Тогда уравнение (3.1) примет вид

$$a(t) \left(\beta_0 + \int_{-1}^t u(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad (3.4)$$

А граничные условия перепишутся следующим образом

$$\beta_0 + \int_{-1}^1 u(\tau) d\tau = \beta_1. \quad (3.5)$$

Согласно методу сплайн-коллокации нулевого порядка, приближенное решение уравнения (3.4) -(3.5) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (т.е. сплайна нулевого порядка) на каждом участке Δ_k :

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \psi_k(t), \quad (3.6)$$

где функция $\psi_k(t)$ является фундаментальным многочленом вида:

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \in [-1, 1] \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $\{\alpha_k\}$ функции решения $u_n(t)$ подставим узлы $\bar{t}_k$ в уравнение (3.4). Вычислив соответствующие интегралы получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$a(\bar{t}_k) \left(\beta_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \frac{2}{n} \right) - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \int_{\Delta_l} \frac{u(\tau)}{\tau - \bar{t}_k} d\tau = f(\bar{t}_k), \quad (3.7)$$

с граничным условием

$$\beta_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \frac{2}{n} = \beta_1. \quad (3.8)$$

То есть была получена система из $(n+1)$ уравнений с n неизвестными.

Для решения системы уравнений (3.7) -(3.8) можно воспользоваться двумя методами:

1) Сначала решить систему уравнений (3.7), а затем подставим полученное решение в уравнение (3.8), которое можно считать контрольным уравнением для системы (3.7) -(3.8);

2) Вторым методом решения может служить регуляризация системы (3.7). Для этого введем регулирующий параметр λ и рассмотрим следующее уравнение

$$\lambda u(t) + a(t) \left(\alpha_0 + \int_{-1}^t u(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t) \quad (3.9)$$

Тогда вычислительная схема (3.7) -(3.8) примет вид

$$\lambda \gamma_0 + a(\bar{t}_k) \left(\beta_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \frac{2}{n} \right) - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \int_{\Delta_l} \frac{u(\tau)}{\tau - \bar{t}_k} d\tau = f(\bar{t}_k), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

$$\beta_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \frac{2}{n} = \beta_1 \quad (3.10)$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений $n+1$ порядка с $n+1$ неизвестными $\lambda, \gamma_0, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Решение этой системы будет сходиться к решению системы (3.7) -(3.8) и, следовательно, к решению уравнения (3.1).

3.2. Решение уравнения Прандтля с помощью разработанного алгоритма

Рассмотрим следующее интегральное уравнение Прандтля крыла

конечного размаха:

$$a(t)x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{x'(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1,$$

где $a(t) = t$, $x(t) = 2t^2 - 1$, $f(t) = t(2t^2 - 1) - \frac{1}{2\pi} \cdot (8 - 4t \ln(t-1) + 4t \ln(1-t))$ и граничные условия $x(-1) = 1$, $x(1) = 1$.

Применим первый метод для решения уравнения (3.7) с граничным условием (3.8).

Для решения уравнения (3.7) был использован метод простой итерации. На рисунке 3.1 продемонстрирован график зависимости погрешности полученного приближенного решения от количества итераций метода простой итерации.

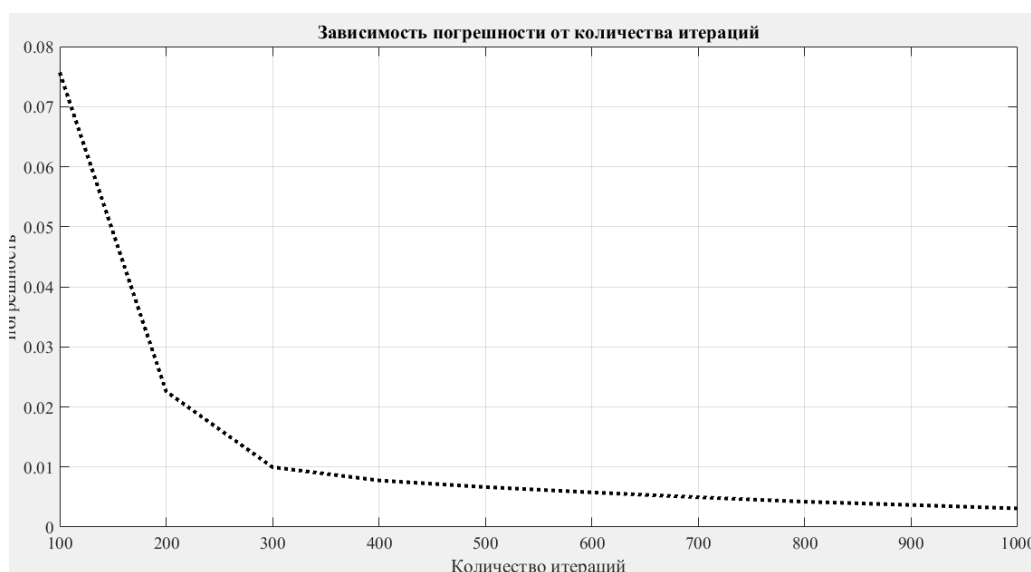


Рисунок 3.1. – График зависимости погрешности решения от количества итераций

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе было рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение Прандтля и его применения в различных областях техники и физики. В связи с широким использованием этого уравнения в различных задачах современной науки необходимо построить эффективный метод его решения. Одним из таких методов может быть переход к краевой задаче Коши, используя преобразования Меллина, как показано в работе. Однако данный метод требует большого количества расчетов, вычислительных мощностей и многоступенчатом алгоритме решения. В работе было предложено применение метода сплайн-коллокации нулевого порядка для решения уравнения Прандтля на отрезке $[-1,1]$, которое является аналогом уравнения Прандтля для крыла конечного размаха.

На модельном примере была продемонстрирована эффективность разработанного численного метода.

Полученные результаты могут быть использованы при решении задач обтекания потоком воздуха крыла самолета, расчете напряжения в пластине, усиленной стрингером, задаче о сжатии двух тел и многих других классах задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Андерсон, Д. Основы аэродинамики / Д. Андерсон. – М.: Наука, 1991. – 792 с.
2. Сильвестров, В. В. Интегро-дифференциальное уравнение Прандтля и контактная задача для кусочно-однородной пластины / В. В. Сильвестров, А. В. Смирнов // ПММ. – 2010. – Т. 76, Вып. 6. – С. 951-968.
3. Голубев, В. В. Лекции по теории крыла / В. В. Голубев. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 480 с.
4. Чигарев, А. В. Численно-аналитическое решение уравнения Прандтля для твердых тел с согласованными контактными поверхностями / А. В. Чигарев, И. Н. Мелешко, С. А. Пронкевич // Наука и техника. – 2013. – № 6. – С. 74-78.
5. Белоцерковский, С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М.: Наука, 1985. – 256с.
6. Бисплингхофф, Р. Аэроупругость / Р. Бисплингхофф, Х. Эшли, Р. Халфмэн. – М.: ИЛ, 1959. – 800 с.
7. Воробьев, Н. Ф. Аэродинамика несущих поверхностей в установившемся потоке газа / Н. Ф. Воробьев – Новосибирск: Наука. – 1985. – 240с.
8. Лифанов, И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И. К. Лифанов. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
9. Duduchava, R. On the Prandtl equation / R. Duduchava, D. Kapanadze // Georgian Mathematical J. – 1999. – № 6. – P. 825-536.
10. Каландия, А. И. Математические методы двумерной упругости / А. И. Каландия. – М.: Мир, 1973. – 303 с.
11. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 513 с.
12. Chkadua, O. Pseudodifferential equations on manifolds with boundary: the Fredholm property and asymptotics / O. Chkadua, R. Duduchava // Math. Nachr. – 2001. – № 222. – P. 79-139

13. Duduchava, R. V. Integral equations with fixed singularities. / R. V. Duduchava – Teubner, Leipzig, 1979. – 172 p.
14. Duduchava, R. V. On multidimensional singular integral operators / R. V. Duduchava // J. Operator Theory – 1984. – № 11. – P. 41–76.
15. Григолюк, Э. И. Контактные задачи теории пластин и оболочек. / Э. И. Григолюк, В. М. Толкачев. – М.: Машиностроение, 1980. – 415 с.
16. Александров, В. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В. М. Александров, С. М. Мхитарян. – М. : Наука, 1983. – 487 с.
17. Титчмарш, Э. Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Э. Ч. Титчмарш – М.: Л.: Гостехиздат, 1948. – 479 с.
18. Тихоненко, Л. Я. Плоская смешанная задача теплопроводности для клина / Л. Я. Тихоненко // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 10. – С. 1915–1918.
19. Попов, Г. Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином / Г. Я. Попов, Л. Я. Тихоненко // ПММ. – 1974. – Т. 38, Вып. 2. – С. 312–320.
20. Гахов, Ф. Д. Уравнения типа свертки / Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 295 с.
21. Банцури, Р. Д. Контактная задача для клина с упругим креплением / Р. Д. Банцури // Докл. АН СССР – 1973 – Т. 211, № 4. – С. 797–800.
22. Банцури, Р. Д. Об одной граничной задаче теории аналитических функций / Р. Д. Банцури // Сообщ. АН ГрузССР. – 1974. – Т. 73, № 3. – С. 549–552.
23. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
24. фон Карман, Т. Аэродинамика / Фон Т. Карман. – Ижевск: РХД, 2001. – 209 с.
25. Векуа, И. Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля / И. Н. Векуа // Прикл. мат и мех. – 1945. – Т. 9, №2. – С. 143–150.

26. Магнарадзе, Л. Г. Об одной системе линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и о линейной граничной задаче Римана / Л. Г. Магнарадзе // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1943. – Т. 5, №2 1. – С. 3-9.

27. Бойков, И. В. Приближенное решение нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения крыла конечного размаха / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // Труды Международного симпозиума «Надежность и качество». – 2005. –Т. 1. – С. 114-119.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Программа для решения уравнения

(обязательное)

Данное приложение выполнено в среде разработки Visual Studio 2019 на языке C++. В приложении реализуется метод сплайн-коллокации для интегро-дифференциального уравнения Прандтля. Условием завершения работы программы является достижение заданной необходимой точности.

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <iomanip>
#include <vector>

#define _USE_MATH_DEFINES
#include <cmath>

using namespace std;
#define pi 3.14159265358979323846
#define N 25// количество точек коллокации
#define Count_note_simpson 20

double t1[N + 1], t2[N + 1];
double x[N + 1];
const int a1 = -1;
const int b1 = 1;
vector <long double> previousVariableValues(N+1, 0.2);
vector <vector <long double> > Matrix;

double f(double t)// функция решения
{
    return t*(2*t*t-1)-(1./(2*pi))*(8-4*t*log(abs(t-1))+4*log(1-t));
}

double a(double t)// функция решения
{
    return t;
}

double x_t(double t)// функция решения
{
    return (2 * t*t - 1);
}
```

```

double pod_intgr_func(double t, double tau)// функция решения
{
    return 1./(tau-t);
}

double simpsonIntegral(double a, double b, int n, double(*f)(double, double), int k) {
    const double width = (b - a) / n;

    double simpson_integral = 0;
    for (int step = 0; step < n; step++) {
        const double x1 = a + step*width;
        const double x2 = a + (step + 1)*width;

        simpson_integral += (x2 - x1) / 6.0*(f(x1, t1[k]) + 4.0*f(0.5*(x1 + x2), t1[k]) + f(x2,
t1[k]));
    }

    return simpson_integral;
}

void setka(double *m1, double a, double b, int n, double shift)
{
    double h;
    h = (double)(b - a) / n;
    for (int i = 0; i <= n; i++)    m1[i] = a + i*h+shift;
}

void matrix(vector <vector <long double> > m)
{
    double(*func)(double, double);
    func = pod_intgr_func;

    m[0][0] = 1;
    m[0][N + 1] = 1;
    for (int i = 1; i < N + 1; i++)
    {
        m[i][0] = 1;
        m[i][N + 1] = 1;

        for (int j = 1; j < N + 1; j++)
        {
            double temp;
            temp = a(t2[i]) - f(t2[i]);
            if (i == j) m[i][j] = a(t2[i]) - f(t2[i]);
            else m[i][j] = -(1. / (2 * pi))*simpsonIntegral(t1[j], t1[j + 1],
Count_note_simpson, func, i) - f(t2[i]);
        }
    }
}

void print(int N_usl, int iter, int error)

```

```

{
    cout << "Kolichestvo uslov: " << N_usl << "\t kolichestvo iteracii: " << iter <<
        "Pogreshnost: " << error << endl;
}

void zeydel(int size, double eps, int iteration)
{
    double error = 0.0;
    int iter = 0;
    // Будем выполнять итерационный процесс до тех пор, пока не будет достигнута
    // необходимая точность
    while (true)
    {
        // Введем вектор значений неизвестных на текущем шаге
        vector <long double> currentVariableValues(size);

        // Посчитаем значения неизвестных на текущей итерации
        // в соответствии с теоретическими формулами
        for (int i = 0; i < size; i++)
        {
            // Инициализируем i-ую неизвестную значением
            // свободного члена i-ой строки матрицы
            currentVariableValues[i] = 0.1;

            // Вычитаем сумму по всем отличным от i-ой неизвестным
            for (int j = 0; j < size; j++)
            {
                // При j < i можем использовать уже посчитанные
                // на этой итерации значения неизвестных
                if (j <= i)
                {
                    currentVariableValues[i] -= Matrix[i][j] * currentVariableVal-
ues[j];
                }

                // При j > i используем значения с прошлой итерации
                if (j > i)
                {
                    currentVariableValues[i] -= Matrix[i][j] * previousVaria-
bleValues[j];
                }
            }

            // Делим на коэффициент при i-ой неизвестной
            currentVariableValues[i] /= Matrix[i][i];
        }

        // Посчитаем текущую погрешность относительно предыдущей итерации
        error = 0.0;

        for (int i = 0; i < size; i++)
        {

```

```

        error += abs(currentVariableValues[i] - previousVariableValues[i]);
    }

    // Если необходимая точность достигнута, то завершаем процесс

    // Переходим к следующей итерации, так
    // что текущие значения неизвестных
    // становятся значениями на предыдущей итерации
    previousVariableValues = currentVariableValues;

    if (error < eps)
    {
        break;
    }
    iter++;

    if (iter == 10000 || iter == iteration)
    {
        break;
    }
}
print(N, iter, error);
}

```

```

void main()
{
    int iter=100;
    // Матрица будет иметь размер (size) x (size + 1),
    // с учетом столбца свободных членов
    Matrix.resize(N+2);
    for (int i = 0; i < N+2; i++)
        Matrix[i].resize(N + 2);

    setka(t1, a1, b1, N, 0);
    setka(t2, a1, b1, N, 1./N);

    matrix(Matrix);

    cout << endl;

    zeydel(N + 1, 0.001, iter);

    system("pause");
}

```