МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико–математических и естественных наук

Кафедра "Математическое образование"

Направление подготовки: 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль: "Математика"

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

"Графы как средство обучения учащихся поиску решения задач"

Студент _____ (подпись, дата) **Шарникова Анастасия Антоновна** (ФИО полностью)

Руководитель _____ (подпись, дата) **Глебова М.В.** (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр _____ (подпись, дата) **Сурина О.П.** (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 04.06.20 № 9)

Заведующий кафедрой _____ (подпись, дата) **Паньженский В.И.** (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отл. (протокол заседания ГЭК от 23.06.20 № 9)

Секретарь ГЭК _____ (подпись, дата) **Сурина О.П.** (фамилия, инициалы)

Пенза 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ …….…… 3

ГЛАВА 1. Научно – методические основы организации обучения поиска решения задач, посредством графов в основной школе

1.1 Средства обучения математике в основной школе ….…… 5

1.2 Основные этапы решения задач ……... 7

1.3 Теоретические сведения о графе ……..…….. 12

ГЛАВА 2. Методика обучения решению задач с использованием графов в основной школе на факультативных занятиях

2.1 Анализ учебной литературы, относительно темы исследования ..…. 18

2.2. Олимпиадные задания, решаемые с помощью графов ...……..... 26

2.3 Разработка факультативного курса для 9 классов “Увлекательные графы” ……..……. 34

2.4 Методические разработки занятий ……..... 37

2.5 Кейсы, используемые для проведения занятий факультативного курса “Увлекательные графы” ……. 42

2.6 Технологическая карта факультативного занятия по теме “Графы. Базовые определения. Лемма о рукопожатии”……..… 53

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ……. 79

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ ……..... 81

ВВЕДЕНИЕ

Школьный курс традиционно основывается на континуальной, то есть непрерывной математике и поэтому не предусматривает повсеместного изучения теории графов [21]. Лишь в немногих учебниках, входящих в федеральный перечень рекомендуемых Министерством Просвещения, представлены задания, решение которых осуществляется посредством графов. Но даже эти задачи, содержатся в данных учебниках в качестве дополнительной информации и в крайне незначительном количестве. Однако, несмотря на этот факт, задания с графами неимоверно часто встречаются в различных олимпиадах, таких как: “Ломоносов”, “Покори Воробьёвы Горы”, “Курчатов”, “Всероссийская олимпиада школьников по математике”, “Олимпиада им. Эйлера”, “Высшая проба”, “Открытая олимпиада ИТМО”, “ММО” и многие другие. В связи с этим, становится очевидным наличие проблемы недостаточного рассмотрения графов в школьном курсе математики. Одновременно возникает вопрос, каким образом можно осуществить обучение учащихся поиску решения олимпиадных задач используя графы?

В ходе подготовки школьников к олимпиаде по математике, зачастую, в процессе поиска решения задач возникает дилемма: каким способом решить конкретную задачу? Появляется желание использовать такой метод, который будет интересен, и при том, с помощью которого будет решаться значительная часть заданий. Таким способом являются графы, соединяющие в себе простоту, доступность и наглядность решения. В повседневной жизни люди часто используют графы, не догадываясь об этом, например, изображая какие–либо города или села на картах в виде точек, а маршруты между ними с помощью линий. По этой причине применение графов школьниками не вызовет у них сложностей, но в свою очередь будет благоприятствовать абстрактной наглядности обучения. Необходимость обучения учащихся данному способу поиска решения задач, в силу высокого числа соответствующих заданий в олимпиадах и, одновременно отсутствию графов в школьном курсе

обуславливает актуальность выбранной темы исследования: “Графы как средство обучения учащихся поиску решения задач”.

Целью данного исследования является создание методических условий для обучения учащихся поиску решения задач с помощью графов.

Объектом исследования выступает процесс обучения математике, осуществляемый в среднем звене общеобразовательной школы.

Предметом исследования стала теория графов как средство решения определенных олимпиадных задач.

Для достижения поставленной цели предстоит выполнить следующие задачи:

1. Изучить методическую, а также математическую литературу по теме “Графы”.

2. Проанализировать школьные учебники и математические олимпиады.

3. Выделить основные типы задач, решение которых осуществляется посредством графов.

4. Использовать метод графов для решения олимпиадных задач.

5. Разработать курс факультативных занятий для 9 классов “Увлекательные графы”.

Научная новизна проведенного исследования заключается в разработке курса факультативных занятий “Увлекательные графы” на основе кейс – технологий. Практическая значимость обусловлена возможностью использования полученных результатов в работе учителей 9 классов с целью увеличения эффективности занятий и повышения познавательной активности учащихся.

ГЛАВА 1. Научно – методические основы организации обучения поиска решения задач, посредством графов в основной школе

1.1 Средства обучения математике в основной школе

Что такое средство обучения? Ответ на этот вопрос можно дать, используя формулировки источников педагогической литературы, которые в своем большинстве определяют дидактическое средство как некий материальный или идеальный объект, применяемый учителем, а также учащимися с целью овладения последними новыми знаниями.

В.А. Сластенин классифицируя средства обучения относительно чувственной модальности подразделяет их на визуальные (зрительные): макеты, предметы, карты, графы, диаграммы; аудиальные (слуховые): музыкальная аппаратура; и аудиовизуальные (зрительно – слуховые): фильмы, презентации [18].

П.И. Пидкасистый рассматривая средства обучения разделяет их на идеальные (уже имеющиеся знания, умения и навыки, применяемые для обретения и усвоения новых знаний) и материальные (физические объекты, реализуемые в процессе обучения).

Выбор тех или иных дидактических средств напрямую зависит от таких факторов как: цели и задачи урока или факультативного занятия; содержание учебного материала; используемых методов учебной работы; возраста учащихся; личных приоритетов учителя.

Произведем обзор фундаментальных средств обучения математике:

Во–первых, это учебники, рабочие тетради и дидактические материалы. Указанные средства обучения считаются традиционными. Необходимо учитывать, что все учебники подвергаются апробации и экспериментальной проверки. Обязательным требованием к современному учебнику является его соответствие требованиям государственного стандарта общего образования. Все нынешние учебники входят в состав учебно – методических комплексов

(УМК), которые разрабатываются для наиболее продуктивного проведения педагогического процесса.

Учебники дополняются рабочими тетрадями и всевозможными дидактическими материалами (к таким можно отнести сборники дополнительных задач, тестовых работ и т.д.) Задачи этих пособий осуществляются, например, при проведении индивидуальных, самостоятельных и контрольных работ и т.д.

Во–вторых, к дидактическим средствам относятся обучающие таблицы, плакаты, схемы. Их преимущество заключается в наглядности и доступности, а частое их использование благоприятствует более глубокому запоминанию представленного в них учебного материала.

В–третьих, это модели планиметрии и стереометрии, эффективность использования которых становится очевидна, когда мы рассматриваем параллелограмм, ромб, а также подвижные модели тел вращения, модели сечений, вписанных и описанных тел и т. д.

В–четвертых, раздаточные материалы, которые особенно действенны при проведении контрольных работ и получении дифференцированного домашнего задания.

В–пятых, дидактическими являются технические средства обучения (ТСО), без которых невозможно представить современный урок. Среди достоинств этих средств можно выделить следующие: наглядность, компактность, увлекательность, мультимедийные эффекты и т.д. Однако даже при использовании современных технических средств не стоит забывать про живое слово учителя, которое до настоящего времени не теряет своей результативности.

Каждое из средств обучения призвано выполнять определенные функции. К ним относится познавательная функция, заключающаяся в том, что дидактические средства предназначаются конкретному познанию действительности. Формирующая функция состоит в том, что средства

обучения развивают познавательные способности, волю и эмоциональную сферу учащихся. В том, что дидактические средства является значимым источником знаний и умений, который упрощает проверку и закрепление учебного материала, состоит дидактическая функция [12].

1.2 Основные этапы решения задач

Д. Пойа говорил: Что значит владение математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности [12].

Г.И. Саранцев под термином задача понимает многоаспектное явление обучения, занимающее большое место в учебном процессе и выступающее способом организации и управления учебно – познавательной деятельности учащихся, носителем действий адекватных содержанию обучения математике, средством целенаправленного формирования знаний, умений и навыков, одной из форм методов обучения, средством связи теории с практикой [12].

Фундаментом любой задачи служит своеобразная коллизия между тем, что дано изначально и тем, что следует получить. Это противостояние служит толчком для развития мысли.

Схематично структура задачи представлена на (рис.1)

Рисунок 1. Структура математической задачи

На сегодняшний день решение задач является одним из столпов обучения математики. Методическая литература выделяет решение задач в трех интерпретациях: решение задачи как план, способ, метод осуществления

требования задачи; решение задачи как процесс осуществления требования задачи, как процесс выполнения плана решения; решение задачи как результат выполнения плана решения [12].

Л.М. Фридман: решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получает то, что требуется в задаче, – ее ответ [22].

При решении задач принято выделять определенные этапы. В зависимости от конкретизации этапов авторы по – разному дифференцируют их:

Д. Пойа в книге “Как решать задачу” определяет четыре ступени: во–первых, нужно понять (проанализировать) задачу; во–вторых составить план решения; в–третьих, осуществить план; в–четвертых, произвести взгляд назад [15].

Ю.М. Колягин выделяет шесть этапов: первый – это анализ текста задачи; второй – поиск решения задачи; третий – реализация плана решения; четвертый – проверка решения задачи и запись ответа; пятый – исследование задачи; шестой – рефлексия.

Л.М. Фридман насчитывает таковых целых восемь. На начальном этапе следует проанализировать условие задачи. Вторая ступень предполагает схематичную запись условия (построение модели задачи, используя схемы, графы и т.д.) Третий шаг заключается в поиске способа решения, нахождения его теоретической базы. На четвертом этапе происходит осуществление решения задачи. Следующий, пятый шаг содержит в себе проверку предполагаемого решения. На шестой ступени решения задачи необходимо исследовать задачу и полученное решение. Седьмой этап – формирование ответа задачи. Последний, восьмой этап заключается в выполнении познавательного анализа задачи и её решения.

Из перечисленной классификации разных авторов можно усмотреть, что только четыре этапа: анализа задачи, поиска решения, осуществление решения, изучения решения являются общими и обязательными, а оставшиеся этапы – необязательные, и включаются в алгоритм только при решении трудных задач. Рассмотрим детальнее каждый из четырех основных этапов:

На первой ступени решения задачи необходимо проанализировать имеющиеся условие, т.е. осознать его и понять требования. Важно отчетливо понимать, что является искомым. Полезно ответить на такие вопросы как: Что неизвестно? Что дано? В чем заключается условие? [15]. Отобранные данные дадут основание для проведения второго этапа решения. Л.М. Фридман утверждает культура решения задачи заключается в том, что поиск решения совершается на базе глубокого и всестороннего предварительного анализа задачи [22].

Алгоритм анализа может быть следующим:

1. разбор описанной ситуации в целом;
2. определение условия, а также требования задачи;
3. выявление вида и типа задачи;
4. запись выводов, сделанных при анализе задачи.

Важно сделать замечание. Следует обязательно ответить на вопросы: возможно ли удовлетворить условию задачи? Является ли оно достаточно полным? Не содержит ли противоречий? [15].

На второй ступени происходит поиск, составление плана решения задачи. Обычно, этот этап представляет особую сложность для учащихся т.к. изыскание решения произвольной задачи не представлено четкой последовательностью действий, что требует от учеников проявления творческого подхода. При этом сложно надеяться на возникновение хорошей мысли, при наличии слабых знаний предмета, и совершенно невозможно делать это при отсутствии соответствующих знаний. Продуктивные идеи базируются на прошлом опыте и полученных познаниях, например, доказанные ранее

теоремы или решенные задачи. Если изначально не получается найти связь между данным и неизвестным, то помощь может оказать рассмотрение аналогичной, но облегченной задачи. В итоге нужно прийти к плану решения. В этом поможет ряд таких вопросов как: Встречалась ли ранее такая или подобная ей задача? Можно ли прибегнуть к ее методу решения? Возможно ли введение вспомогательного элемента с целью использования изначальной задачи? Как переформулировать задачу? Можно ли решить часть задачи? Всеми ли данными воспользовались? [15]. Важно целенаправленное развитие у учащихся навыка поиска решения задач.

Решение стандартных задач производится по соответствующему традиционному алгоритму. Последовательный поиск решения нестандартных задач, в свою очередь, осуществляется в рамках таких направлений как:

1. соотношение конкретной задачи с теорией, а также другими задачами;
2. изучение вопроса задачи;
3. исследование условия задачи;

Детализируем указанные аспекты.

Первое из них (соотношение конкретной задачи с теорией, а также другими задачами) определяет совокупность вопросов (Знакома ли такая задача? Аналогичная? Возможно ли применить ее метод решения? и т.д), подталкивающих к применению метода аналогии. Указанный метод можно доступно отобразить на схеме (рис. 2)

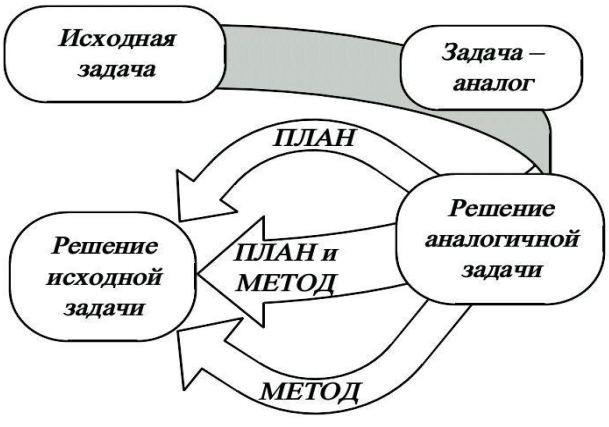


Рисунок 2. Схематичное представление метода аналогии при поиске решении задач

Второй аспект (изучение вопроса задачи) подразумевает использование аналитического метода, выражающегося в восходящим (анализ Паппа) или нисходящим (анализе Евклида).

Восходящий (совершенный) анализ базируется на изыскании необходимых оснований справедливости вывода. При этом необходимо определить что надо (достаточно) знать, чтобы ответить на поставленный вопрос? [5]. В результате получаем анализ, “восходящий” от следствия к основанию.

Нисходящий (несовершенный) анализ базируется на нахождении достаточных условий истинности высказывания с дальнейшей проверкой конвертируемости утверждений (при подлинности последнего), или выводом о ложности данного предположения (метод от противного).

Третий аспект (исследование условия задачи) предопределяет применение эвристических схем поиска плана решения задач [17]. Это может быть вариант из системы эвристических методов Л.М. Фридмана, включающих:

1. метод разделения задачи на подзадачи;

а) разделение условий на части;

б) разбиение требований на части;

2. метод преобразования задачи;

3. метод моделирования;

4. метод введения вспомогательных элементов;

Также может быть задействован способ из системы эвристического метода Г.Д. Балка, содержащего:

1. метод аналогии;

2. метод индукции;

3. прием предельного случая;

На третьем этапе решения задачи происходит осуществление составленного плана решения. Для этого продуманный план решения должен

быть предельно точно изложен и оформлен должным образом. Необходимо терпеливо рассматривать каждый элемент, до тех пор, пока не будут исчерпаны потаенные места, скрывающие возможные ошибки и все силлогизмы станут очевидны. Важно, чтобы учащийся был предельно уверен в достоверности каждого шага своего решения. Для этого можно задать вопросы ясно ли вам, что предпринятый шаг правилен? А в состоянии ли вы доказать, что он правилен? [15].

Заключительный из обязательных – четвертый этап – изучение полученного решения. Данный этап содержит в себе такие составляющие как:

1. проверка решения;

2. анализ задачи;

3. формулирование ответа [6].

Производя анализ имеющегося решения, учащиеся углубляют свои знания, закрепляют необходимые навыки. Помощь при исследовании оказывают следующие вопросы: Можно ли проверить полученный результат? Возможно проверить ход решения задачи? Существует ли другой способ получить этот же результат? Возможно ли использовать полученный результат или метод его нахождения при решении иных задач? [15].

Ключевыми факторами для развития необходимых навыков решения задач являются второй и четвертый этапы.

1.3 Теоретические сведения о графе

Первая работа по теории графов принадлежит Леонарду Эйлеру. Она появилась в 1736 году в публикациях Петербургской Академии Наук и начиналась с рассмотрения задачи о кенигсбергских мостах, которая заключалась в следующем: дана схема мостов города Кенигсберга (рис. 3) Можно ли пройти по каждому из этих мостов ровно один раз?

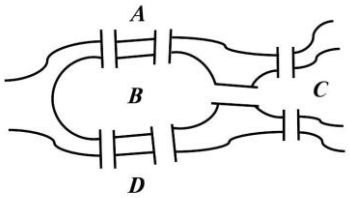


Рисунок 3. Схема мостов города Кенигсберга

Эйлер доказал, невозможность окончания пути на исходном месте при прохождении по каждому мосту единожды.

Его способ заключался в следующем: сушу, математик представил точками, а мосты обозначил линиями. Вследствие чего образовалась фигура называемая графом (рис. 4)

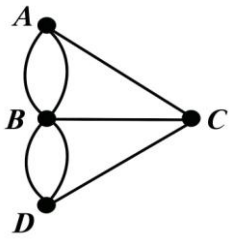


Рисунок 4. Кенигсбергские мосты, представленные способом графа

Граф – геометрическая фигура, состоящая из конечного множества точек, а также линий, соединяющих некоторые из них. Точки графа являются их вершинами, а линии – ребрами графа.

В качестве общеизвестных и повседневных примеров графов можно назвать схемы метрополитена, авиалиний, железных дорог, созвездия на картах звездного неба, генеалогическое древо и другие.

Все графы можно дифференцировать. Так, если граф представлен лишь изолированными вершинами (т.е. вершинами, не являющимися концами ни для одного ребра), то он называется нулевым (рис. 5).

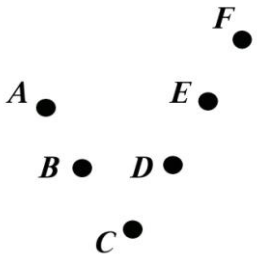


Рисунок 5. Нулевой граф

В том случае, когда в графе не построены все возможные ребра его именуют неполным (рис. 6).

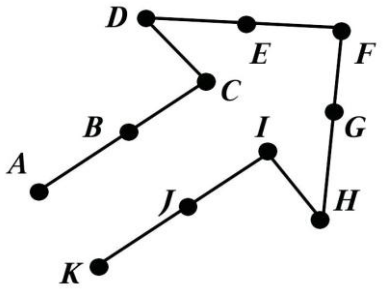


Рисунок 6. Неполный граф

Граф, в котором построены все возможные ребра, считают полным (рис. 7).

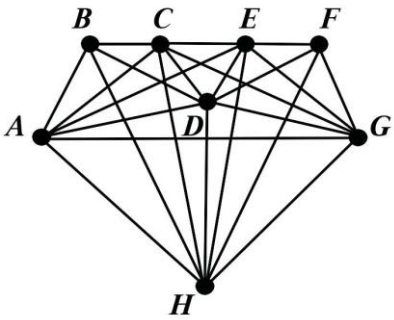


Рисунок 7. Полный граф

В том случае, когда на ребрах графа нанесены стрелки, определяющие направление ребер, то такой граф называют ориентированным (рис. 8).

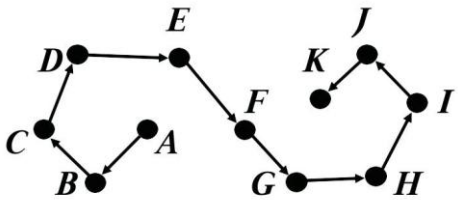


Рисунок 8. Ориентированный граф

Число рёбер, которые исходят из вершины графа, называется степенью вершины. Вершина графа, обладающая нечётной степенью, называется нечетной, соответственно, чётной степенью – чётной. Когда степени всех вершин графа равны, он именуется однородным. Следовательно, однородным можно считать каждый полный граф.

Если граф возможно начертить одним росчерком (то есть единожды провести линию карандашом при этом не отрывая его от бумаги), такой граф называется уникурсальным (рис. 9)

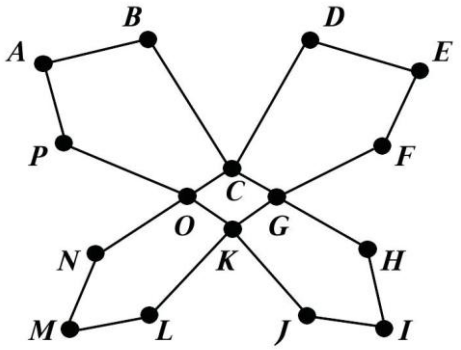


Рисунок 9. Уникурсальный граф

Когда две любые вершины графа можно соединить путем (т.е. последовательностью ребер, каждое из которых начинается из конца предыдущего), тогда граф называется связным (рис. 10.1). В противном случае – несвязным (рис. 10.2).

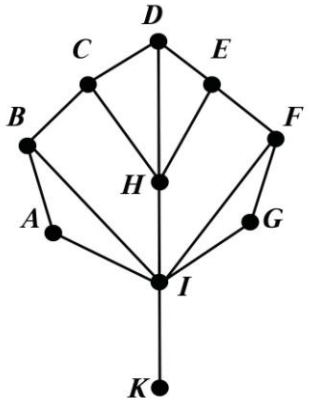


Рисунок 10.1 Связный граф

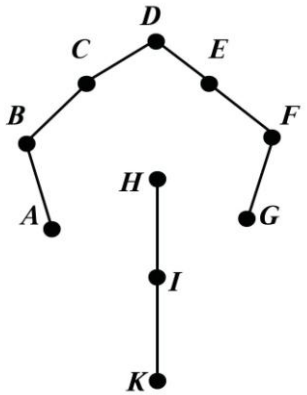


Рисунок 10.2 Несвязный граф

Если после исключения ребра из связанного графа он становится несвязанным, то такое ребро называется мостом. На рисунках 10.1 и 10.2 мостами являются *AI, GI.*

Связный граф, каждая из его вершин которого обладает четным количеством степеней, называется эйлеровым. Так как граф, представленный на рис. 9 связный и степени вершин *P, A, B, D, E, F, H, I, J, L, M* и *N* = 2, а степени вершин *O, C, G* и *K* = 4, то его можно считать еще и эйлеровым графом.

Каждый связный граф, не имеющий циклов (т.е. путей в которых начало и конец совпадает) называют деревом (рис. 11). Граф, состоящий из одной вершины – дерево.

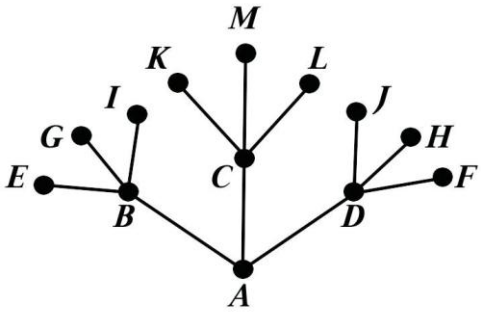


Рисунок 11. Дерево

Если из вершины выходит всего одно ребро, то она называется висячей. На рисунке 11 такими вершинами являются *E, G, I, K, M, L, J, H* и *F*.

В том случае, когда два графа имеют одинаковое количество вершин, которые возможно пронумеровать числами от 1 до *n*, таким образом, чтобы вершины одного графа соединялись ребром при одновременном слиянии аналогичных вершин другого графа, они называются изоморфными (рис. 12)

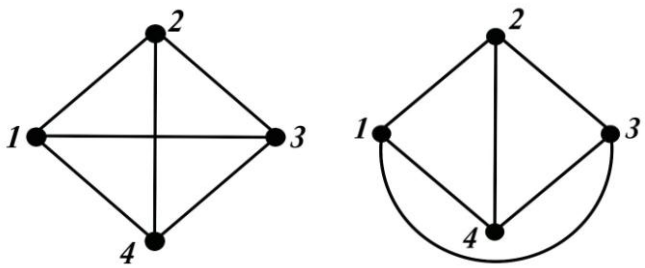


Рисунок 12. Изоморфные графы

Граф, который вычерчивается так, что его ребра пересекаются исключительно в вершинах, именуется плоским или планарным. Так, граф, указанный вторым на рисунке 12, является планарным.

С помощью описанных выше графов решают задачи таких типов как:

1. о вычерчивании фигуры одним росчерком;

2 логические;

3. о мостах;

4. о домах и колодцах;

5. о “верном” закрашивании фигур.

В дальнейшем, при анализе учебников и дополнительной литературы мы рассмотрим некоторые примеры из представленных типов задач.

Таким образом, проанализировав этапы решения задач можно прийти к выводу, что четыре из них (этапы анализа задачи, поиска решения, осуществление решения, формулирование ответа) являются общими и обязательными. Они проявляются (в явном или неявном виде) в процессе решения любой задачи. Оставшиеся этапы – необязательные, и включаются в алгоритм только при решении трудных задач. Особая сложность для учеников заключается в реализации этапа поиска решения задачи.

Отобразим этапы решения задач в схематичном виде (рис. 13).

Рисунок 13. Схема этапов решения задач

Важными факторами для развития навыков решения задач являются второй и четвертый этапы [16].

ГЛАВА 2. Методика обучения решению задач посредством графов в основной школе на факультативных занятиях

2.1 Анализ учебной литературы, относительно темы исследования

Несмотря на всю увлекательность и наглядность при решении задач абсолютное большинство школьных учебников не освещают теорию графов. Стоит отметить, что в нескольких учебниках, входящих в федеральный перечень рекомендуемых министерством просвещения, представлены задания, решение которых осуществляется посредством графов, но они никак не обозначены. Вследствие чего ученики даже не подозревают о существовании такого раздела дискретной математики.

Произведем обзор учебников, включивших в себя задания, решение которых происходит посредством графов.

В учебнике Н.Я. Виленкина “Математика 5 класс” представлена задача 228: Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 6, 8, если цифры в записи числа не повторяются?

Решение: Первой цифрой числа может быть любая из четырех данных цифр, второй – любая из трех других, а третьей – любая из двух оставшихся. Получается представление комбинаций в виде графа – дерево (рис. 14).

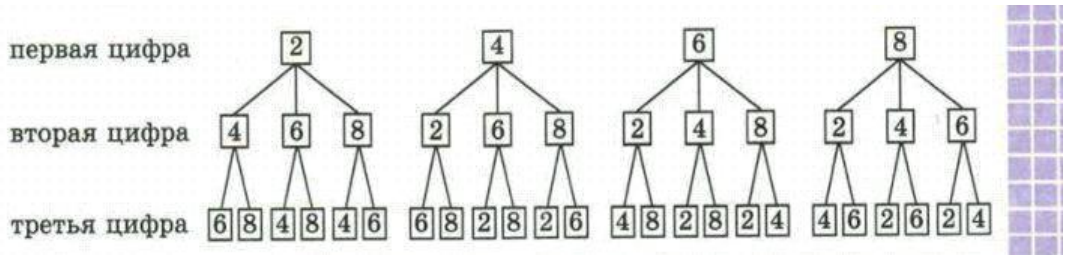
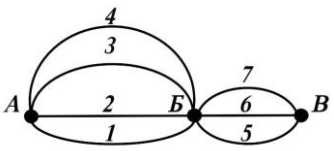


Рисунок 14. Задача 228. Учебник Н.Я. Виленкина. Математика. 5 класс

Всего из данных цифр можно составить 4×3×2=24 трехзначных числа [8].

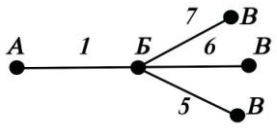
Также в этом учебнике на странице 63 дано упражнение 388:

Из села Аникеево в село Большово ведут четыре дороги, а из села Большово в чело Виноградово – три дороги. Сколькими способами можно добраться из Аникеева в Виноградово через село Большово?



Решение: Если из *А* в *Б* добираться по первой дороге, то продолжить путь есть три способа:

Точно так же рассуждая, получаем по три способа продолжить путь, начав добираться и по второй, и по третьей, и по четвертой. Значит, всего получается 4×3=12 способов добраться из Аникеева в Виноградово [8].



Там же, задача 694:

Семье, состоящей из бабушки, папы, мамы, дочери и сына, подарили 5 разных чашек. Сколькими способами можно разделить чашки между членами семьи?

Решение: У первого члена семьи, например, бабушки есть 5 вариантов выбора, у следующего (пусть это будет папа) остается 4 варианта выбора, следующий (например, мама) будет выбирать уже из 3 чашек, следующий – из двух, последний же получает одну оставшуюся чашку. Покажем эти способы на рисунке 15.

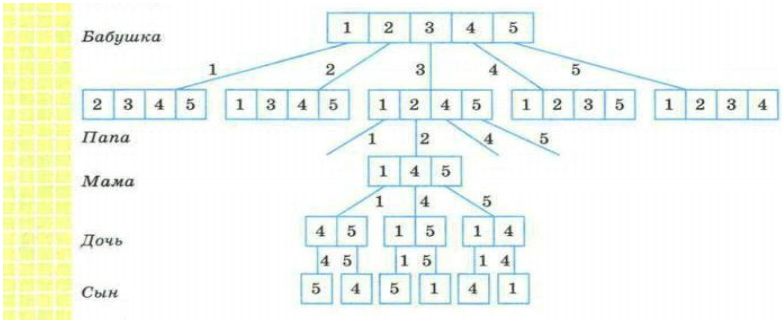


Рисунок 15. Упражнение 694. Учебник Н.Я. Виленкина. 5 класс

Получили, что каждому выбору чашки бабушкой соответствует четыре возможных выбора папы, т.е. всего 5×4 способов. После того как папа выбрал чашку, у мамы есть три варианта выбора, у дочери – два, у сына – один, т.е.

всего 3×2×1 способов. Окончательно получаем, что для решения задачи надо найти произведение 5×4×3×2×1 = 120, т.е. чашки между членами семьи можно распределить ста двадцатью способами [8].

В учебнике этого же автора для 6 класса представлено несколько задач по интересуемой нас теме, такие как упражнение 512: Нужно срочно доставить 9 пакетов в пункты, указанные на плане звездочкой. Посыльный, посмотрев на план, быстро сообразил, как ему ехать. Он вручил пакеты, объехав пункты, ни разу не проезжая дважды одним и тем же путем. Какой маршрут выбрал посыльный? [9].

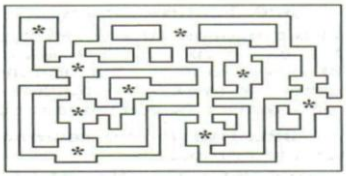


Рисунок 16. План к задаче 512. Учебник Н.Я Виленкина. 6 класс

Также есть упражнение 585: На озере находятся 7 островов, которые соединены между собой мостами так, как показано на рисунке. На какой остров должен доставить катер путешественников, чтобы они могли пройти по каждому мосту и только один раз? С какого острова катер должен снять этих людей? Почему нельзя доставить путешественников на остров *1*? [9].

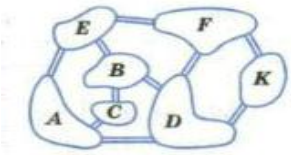


Рисунок 17. Схема островов к задаче 585. Н.Я. Виленкин 6 класс

В упражнении 1220 автор впервые употребляет такие понятия как граф, вершины графа, ребра графа. Решать некоторые математические задачи помогают специальные схемы, состоящие из точек и соединяющих их дуг или стрелок. Такие схемы называют графами, точки называют вершинами графа, а дуги – ребрами графа. Ответьте на вопросы, используя графы.

а) В спортивном зале собрались Витя, Коля, Петя, Сережа и Максим (рис. 18.а). Оказалось, что каждый из мальчиков знаком только с двумя другими. Кто с кем знаком? (Ребро графа означает “мы знакомы”).

б) Во дворе гуляют братья и сестры одной семьи. Кто из этих детей мальчики, а кто девочки (рис. 18.б)? (Пунктирные ребра графа исходят от сестер, сплошные - от братьев) [9].

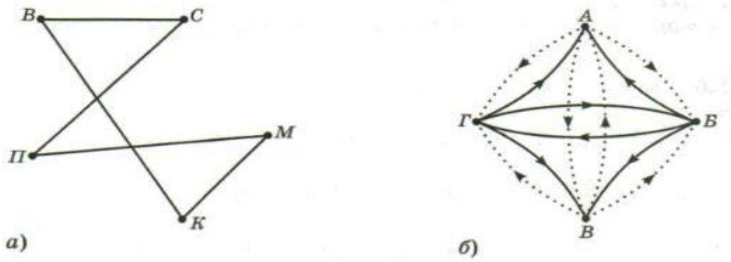


Рисунок 18. Графы к задаче 1220. Н.Я. Виленкин 6 класс

“Математика. 5 класс” под редакцией Г.Б. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина располагает некоторым количеством интересуемых нас заданий. Например, убедитесь, что узор на рисунке 19 образован одной линией [10].

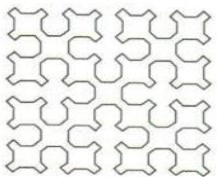


Рисунок 19. Задание учебника под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина

Также в учебнике этих авторов существует раздел “для тех, кому интересно”, в котором рассматривается обрисовка фигуры одним росчерком. На рис. 19.б) представлена правильная схема решения, а на рис. 19.в) и 19.г) безуспешные варианты решения указанного задания.

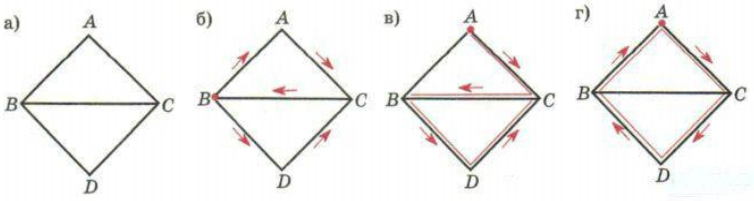
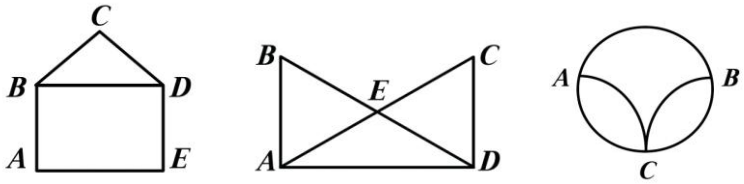


Рисунок 19. “Для тех, кому интересно” под ред. Г.В. Дорофеев и И.Ф. Шарыгин

Затем, представлен ряд аналогичных заданий 67-70:

упражнение 67: 1) назовите все узлы линии, изображенной на рис. 20.а), начав с которых ее можно обвести одним росчерком. Начертите в тетради эту линию одним росчерком, отметьте начало движения и покажите стрелками направление движения. 2) Выполните такое же задание для линий, изображенных на рис. 20.б) и 20.в) [10].



а) б) в)

Рисунок 20. Упражнение 67. Учебник под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина

упражнение 68: На рис. 20.г) изображена линия, которую вы, наверное, умеете рисовать одним росчерком. Это звезда. Оказывается, хотя она и выглядит значительно более сложной, чем предыдущие линии, обвести ее можно начав с любого узла. Начертите звезду несколько раз, начиная движение из разных узлов [10].

Рисунок 20.г) Упражнение 68. Учебник под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина

упражнение 69: Линию, изображенную на рис. 20.д), как и звезду, можно начертить одним росчерком, начав движение из любого узла. Вычертите эту линию дважды: начав с узла, из которого выходят два отрезка, а затем с узла, из которого выходят четыре отрезка [10].

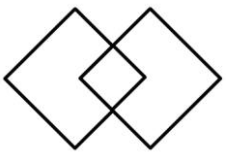


Рисунок 20.д) Упражнение 69. Учебник под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина

Упражнение 70: Начертите одним росчерком линию, изображенную на рис. 20.е) [10].

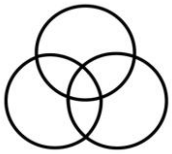


Рисунок 20.е) Упражнение 70

Также представлен ряд задач на перебор различных вариантов. Приведем пример некоторых из них:

Упражнение 162: Сколько новых чисел можно получить из числа 546, переставляя его цифры? [10].

Упражнение 165: Саша выбрал в библиотеке пять книг, но одновременно можно взять только две книги. Сколько вариантов выбора двух книг из пяти есть у Саши? [10].

Интересными считаем следующие задачи:

Упражнение 173: Начертите окружность и отметьте на ней три точки. Обведите получившиеся при этом дуги карандашами разных цветов. Сколько карандашей вам потребовалось? Сколько дуг у вас получилось? [10].

Упражнение 208: Из пункта *A* в пункт *C* ведут разные дороги (рис. 21). Сколькими маршрутами можно проехать из *A* в *C*? Найдите самый короткий маршрут [10].

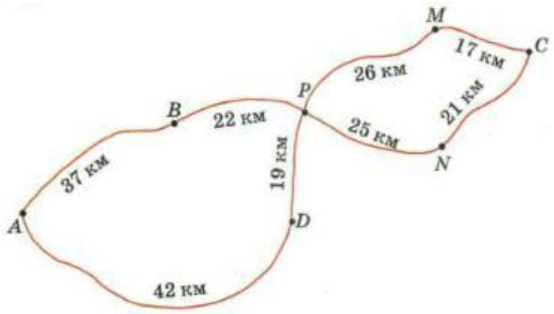


Рисунок 21. Упражнение 208. Математика. 5 класс под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина

В учебнике “Геометрия 7-9 класс” И.М. Смирнова, В.А. Смирнов теории графов посвящено рекордные 3 параграфа 24 - 26, в которых рассказывается про графы, теорему Эйлера и проблему четырех красок, соответственно. Данные параграфы содержат значительное количество увлекательных задач,

среди которых определить какие из изображенных графов являются уникурсальными (рис. 22), нарисовать фигуры, изображенные на картинке одним росчерком (рис. 23), раскрасить карты, а также различные задачи на доказательства.

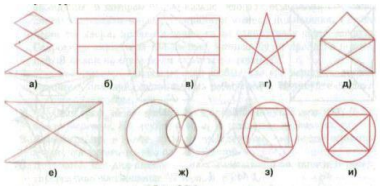


Рисунок 22. Найти уникурсальные графы. Учебник “Геометрия 7-9 класс” И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

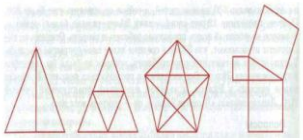


Рисунок 23. Нарисовать одним росчерком. Учебник “Геометрия 7-9 класс” И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

Занимательными считаем следующие задачи:

1. Сможет ли экскурсовод провести посетителей по выставке так, чтобы они побывали в каждом зале только один раз? Соответствующий граф приведен на рисунке 24. Вершины графа – это вход, выход, двери, соединяющие залы, перекрестки, а ребра – залы и коридоры. Где на выставке следовало бы сделать вход и выход, чтобы можно было провести экскурсию по всем залам, побывав в каждом из них в точности один раз? [19].

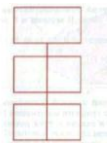


Рисунок 24. Граф к задаче 1. Учебник “Геометрия 7-9 класс” И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

2. Возьмите карту Санкт–Петербурга и определите, можно ли, прогуливаясь по городу, обойти все дворовые мосты ровно по одному разу? [19].

3. На рис. 25 изображен план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После его смерти наследники нашли завещание, в

котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья, пройти через все двери, причем в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища? [19].

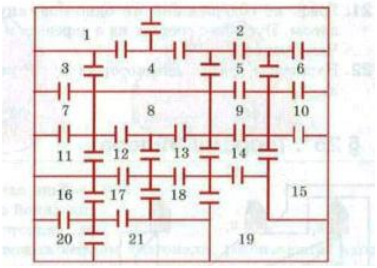


Рисунок 25. План подземелья к задаче 3. Учебник “Геометрия 7-9 класс” И.М. Смирнова, В.А. Смирнов

Помимо учебников, существует некоторое количество пособий под названием “Занимательные задачи”, в которых представлены задания связанные с теорией графов.

Среди них хочется отметить книгу И.О. Мельникова “Теория графов в занимательных задачах”, которая содержит всевозможные определения, теоремы и их следствия, а также непосредственно задачи, решаемые с помощью графов. Хочется заметить, что задания в этом издании дифференцированы по уровню сложности. Приведем некоторые примеры этих задач:

Первая степень: Шахматный турнир проводится по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В турнире участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя – пять, Леша и Дима – по три, Семен и Илья – по две, Женя – одну. С кем сыграл Леша? [11].

Вторая степень: Известно, что в компании каждый человек знаком не менее чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своим знакомым [11].

Третья степень: Шахматная доска раскрашена 10 красками так, что клетки, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета, причем все 10 красок использованы. Две краски называются соседними, если существуют окрашенные ими соседние клетки, т.е. клетки, имеющие общую сторону. Чему равно наименьшее число пар соседних красок? [11].

Четвертая степень: В стране 20 городов, некоторые из них так соединены авиалиниями, что из любого города можно долететь в любой другой (возможно, с пересадками). Известно, что существуют два таких города, что добраться из одного в другой можно, только сделав не менее пяти пересадок. Докажите, что, вылетев из любого города, можно побывать в каждом другом, сделав не более 35 перелетов [11].

2.2 Олимпиадные задания, решаемые с помощью графов

Проанализировав всевозможные олимпиады школьников, было отобрано некоторое количество заданий, решение которых осуществляется посредством графов. Для наиболее занимательных задач представлено решение, которое предлагают различные интернет–ресурсы, а затем решение, выполненное посредством графов. Рассмотрим избранные материалы олимпиад:

Задание 1. Олимпиада школьников Курчатов по математике (2019 год, заключительный этап, 9 класс).

На вечеринке собралось 24 человека. Гость считается интровертом, если у него не более трех знакомых среди остальных гостей. Оказалось, что у каждого гостя не менее трех знакомых – интровертов. Какое количество интровертов могло быть на вечеринке? Приведите все ответы и докажите, что других нет [13].

Задание 2. Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап ВсОШ для Москвы, 2020 год, 6 класс).

В королевстве живут графы, герцоги и маркизы. Однажды каждый граф сразился на дуэли с тремя герцогами и несколькими маркизами. Каждый герцог

сразился на дуэли с двумя графами и шестью маркизами. Каждый маркиз сразился на дуэли с тремя герцогами и двумя графами. Известно, что все графы сразились с равным числом маркизов. Со сколькими маркизами сразился каждый граф? [1].

Решение, предоставленное на интернет–ресурсах: Пусть в королевстве x графов, y герцогов и z маркизов. Каждый граф сразился с тремя герцогами, поэтому между графами и герцогами было $3x$ дуэлей. Но каждый герцог сразился с двумя графами, значит, этих дуэлей было $2y$. Тогда $3x = 2y$.

Каждый герцог сразился с шестью маркизами. Значит, дуэлей между герцогами и маркизами было $6y$. Каждый маркиз сразился с тремя герцогами, поэтому этих дуэлей было $3z$. Тогда $6y = 3z$, откуда $z = 2y = 3x$.

Каждый маркиз сразился с двумя графами, поэтому дуэлей между графами и маркизами было $2z = 6x$. Значит, каждый граф сразился с шестью маркизами [1].

Решение, выполненное с помощью графов: Построим граф встреч, в котором графам сопоставим вершины A_n, герцогам – B_n, маркизам – C_n. Так как каждый граф сразился с тремя герцогами, то проставим вершины B_1, B_2, B_3. А, поскольку, каждый герцог встретился с двумя графами, то имеем две вершины A_1 и A_2 (рис. 26.а). Каждую из вершин B_1, B_2, B_3 соединяем ребром, обозначающим дуэль, с вершинами A_1 и A_2 (рис. 26.б). Каждый герцог сразился с шестью маркизами, поэтому обозначаем вершины C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и C_6 (рис. 26.в). Соединяем ребром каждую из указанных вершин с B_1, B_2, B_3 (рис. 26.г). Сейчас каждая из вершин C_1 – C_6 имеет степень три, т.к. каждый маркиз сразился с тремя герцогами. Еще каждый маркиз встретился с двумя графами, поэтому соединяем ребром соответствующие вершины (рис. 26.д).

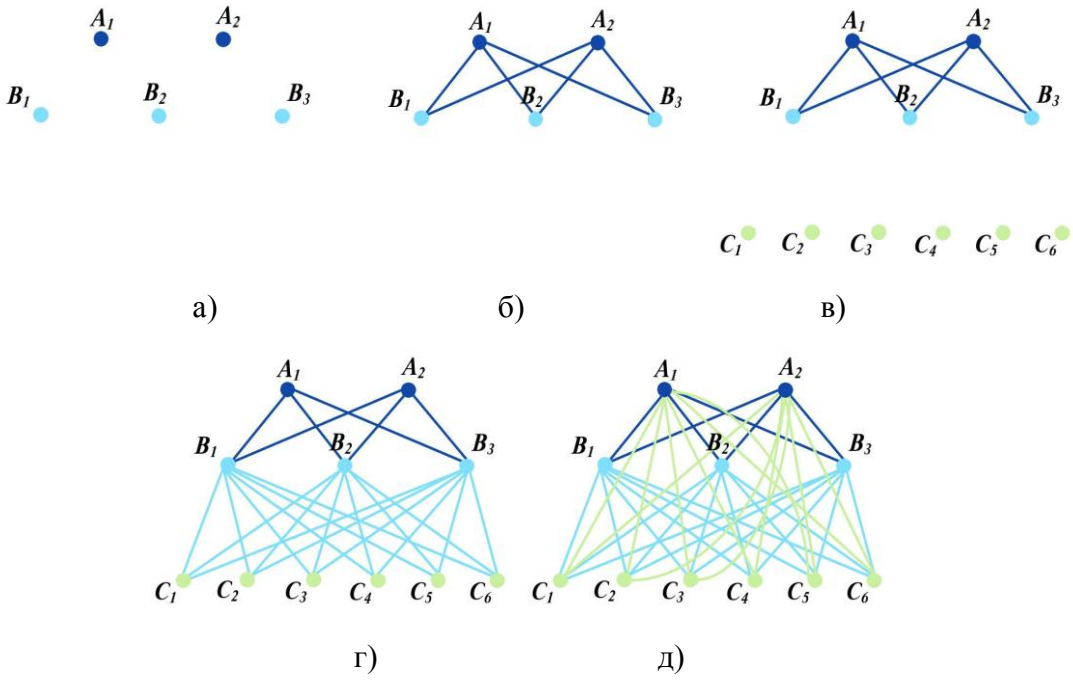


Рисунок 26. Граф встреч герцогов, маркизов и графов

Поскольку каждая из вершин A_1 и A_2, обозначающее графов, соединено с шестью вершинами C_1 – C_6, соответствующих маркизам, то каждый граф сразился с шестью маркизами.

Задание 3. Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап ВсОШ для Москвы 14 – 20 октября 2019 года, 7 класс).

У Кощея Бессмертного есть 11 больших сундуков. В некоторых из них лежит по 8 средних сундуков. А в некоторых средних лежит по 8 маленьких сундуков. В сундуках больше ничего не лежит. Всего у Кощея 102 пустых сундука. Сколько всего сундуков у Кощея? [2].

Задание 4. Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап ВсОШ для Москвы 14 – 20 октября 2019 года, 7 класс).

У дракона есть 40 кучек золотых монет, в любых двух из них количество монет отличается. После того как дракон разграбил соседний город и принес еще золото, количество монет в каждой кучке увеличилось либо в 2, либо в 3, либо в 4 раза. Какое наименьшее количество различных кучек монет могло получиться? [2].

Задание 5. Всероссийская олимпиада школьников по математике (школьный этап ВсОШ для Москвы 14 – 20 октября 2019 года, 8 класс).

Архипелаг состоит из нескольких малых островов и одного большого. Было решено построить мосты между островами так, чтобы большой остров соединялся с каждым малым островом двумя мостами, а любые два малых острова были соединены одним мостом.

К 1 ноября были построены все мосты между малыми островами и несколько (не менее одного) мостов, ведущих на большой остров, – всего 28 мостов. Сколько всего островов в архипелаге? [3].

Решение, предоставленное на интернет – ресурсах: Занумеруем малые острова архипелага. Если мост соединяет острова с номерами a и b, запишем на этом мосту меньшее из этих двух чисел. Предположим, что число малых островов в архипелаге не более шести. Тогда мостов с номером 1 не более 5, мостов с номером 2 не более 4 и т.д. На большой остров ведет не более 12 мостов. Тогда всего решено построить не больше, чем $5+4+3+2+1+12=27<28$ мостов, что противоречит условию. Предположим, что число малых островов в архипелаге не меньше 8. Тогда мостов с номером 1 не менее 7, мостов с номером 2 не менее 6 и т.д. К большому острову построено не менее двух мостов, поэтому общее число построенных мостов не менее $7+6+5+4+3+2+1+2=30>28$, что также противоречит условию..Значит, малых островов в архипелаге 7, а всего островов – 8 [3].

Решение, выполненное с помощью графов: воспользуемся теоремой, которая гласит, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству всех ребер. Так как мостов (ребер) 28, то удвоенное их количество равно 56. Значит, сумма степеней всех вершин полного графа так же равна произведению 8 и 7. Поскольку в полном графе каждая из 7 вершин не может иметь степень равную восьми, то граф состоит из восьми вершин. Проверим это, построив полный граф, состоящий из восьми ребер (рис. 27).

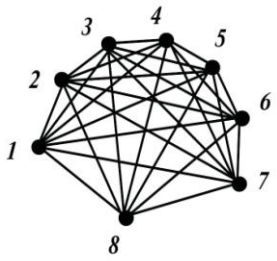


Рисунок 27. Полный граф, обозначающий острова архипелага

Задание 6. Всероссийская олимпиада школьников (2019 год, школьный этап, 8 класс).

В стране 100 городов. Между любыми двумя городами либо нет соединения, либо налажено авиасообщение, либо есть железная дорога (одновременно и авиасообщения, и железной дороги быть не может). Известно, что если два города соединены с третьем железной дорогой, то между ними есть авиалиния, а если два города соединены с третьем авиалиниями, то между ними есть железная дорога. Из–за стихийного бедствия отменили все авиарейсы в стране. Правительство постановило в некоторых городах разместить центры гуманитарной помощи, причем так, чтобы из каждого города можно было добраться в подобный центр. Докажите, что необходимо открыть хотя бы 20 таких центров [23].

Задание 7. Международный математический конкурс – игра “Кенгуру” (21 марта 2019 год, 9 класс).

Полина хочет раскрасить восемь кружков на рисунке в три цвета так, чтобы любые два кружка, соединенные отрезком, были покрашены в разные цвета. Какие два кружка на рис. 28 будут обязательно покрашены в один цвет? [7].

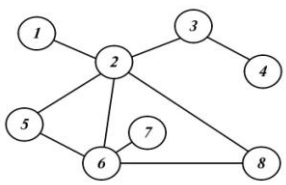


Рисунок 28. Схема к задаче математического конкурса – игры “Кенгуру”

Решение: На рисунке представлен связный граф, поэтому начнем с вершин 1 и 4. Так как они являются висячими, то могут быть окрашены в любые из трех цветов. Поскольку вершины 1 и 2 являются смежными, то вершину 2 окрашиваем в цвет, отличный от вершины 1. Степень вершины 3 равна 2, поэтому ее цвет не должен совпадать со смежными ей вершинами 2 и 4. Так же вершина 2 соединена ребрами с вершинами 5, 6 и 8. Естественно, их цвета, по условию, отличаются от вершины 2. При этом, вершина 6 является смежной и относительно вершин 5 и 8, значит, она должна иметь другой цвет в сравнении с ними. Степень вершины 7 равна единице, т.е. отличается только от соединенной с ней вершины 6. Таким образом, при любых комбинациях окраски, одновременно в один и тот же цвет будут окрашены вершины 5 и 8.

Приведем несколько примеров возможной раскраски данного графа (рис. 29):

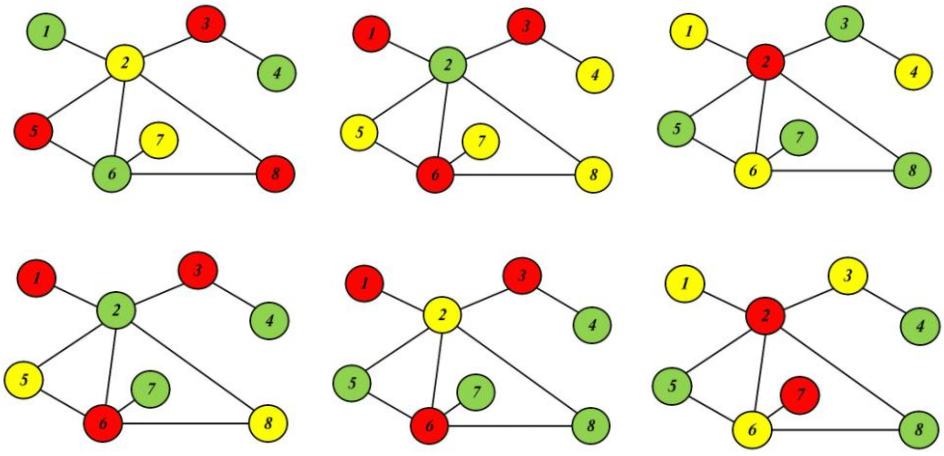


Рисунок 29. Различные варианты раскраски графа

Задание 8. Сороковой международный математический турнир городов (21 октября 2018 года, осенний тур, 9 класс).

В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой, причем из каждого города можно добраться по дорогам до любого другого (здесь и далее переходить с дороги на дорогу разрешается только в городах). Если при этом можно, начав движение из какого–то города и не проходя дважды по одной и той же дороге, вернуться

в этот город, государство называется сложным, иначе – простым. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешенном направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой–то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что

а) в простом государстве Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася;

б) в сложном государстве Вася может гарантировать себе победу, как бы ни играл Петя [20].

Задание 9. Олимпиада им. Эйлера (2018 год, региональный этап).

В Тридесятом царстве из каждого города выходит по 30 дорог, причем каждая дорога соединяет два города не проходя через другие города. Тридесятый царь захотел разместить в некоторых городах по дорожно-эксплуатационному управлению (ДЭУ), обслуживающему все выходящие из города дороги, так, чтобы каждая дорога обслуживалась хотя бы одним управлением и управления были размещены не более чем в половине городов. Может ли так оказаться, что у царя существует ровно 2018 способов сделать это? [14].

Задание 10. Олимпиада им. Эйлера (2018 год, финал).

Из клетчатой доски размером 70×70 вырезали 2018 клеток. Докажите, что доска распалась не более чем на 2018 кусков. Два куска, не имеющие общих точек кроме вершин клеток, считаются не соединенными друг с другом [23].

Задание 11. Всероссийская олимпиада школьников (2018 год, региональный этап, второй день, 9 класс).

В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребенка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по 3 человека так, чтобы в каждой группе все трое

попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей [4].

Решение, выполненное с помощью графов: Построим граф, в котором вершины будут соответствовать детям, а ребра – их дружбе. При исключении любой из вершин данного графа, из остальных вершин составляются 33 группы, где каждая из трех вершин является смежной с двумя другими. Предстоит определить минимальное число ребер в указанном графе.

Возможные варианты.

Например, есть единственная группа, состоящая из трех вершин, назовем ее трио. В этом случае, для возможности выполнения условия необходимо добавить еще одну вершину, смежную со всем трио (рис. 30).

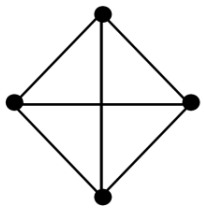


Рисунок 30. Единственное трио и вершина, смежная с ним

Тогда, при единственном трио граф состоит из 4 вершин и 6 ребер.

В случае двух трио и вершины, смежной с каждой из них имеем граф, представленный на рисунке 31.

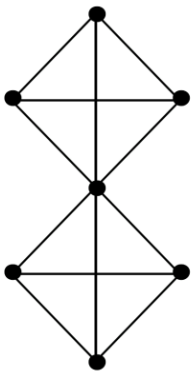


Рисунок 31. Два трио и вершина, смежная с каждым из них

Граф на рисунке 31 имеет 7 вершин и 12 ребер.

Теперь берем три трио и вершину, смежную каждой тройке. Получается граф, изображенный на рисунке 32.

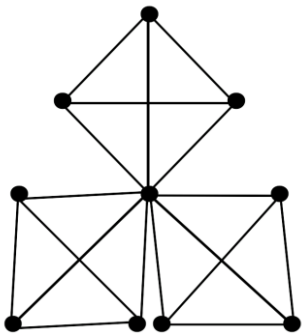


Рисунок 32. Три трио и вершина, смежная с каждым из них

В случае трех трио граф содержит 10 вершин и 18 ребер.

Заметим закономерность, каждый раз при добавлении трио число вершин можно было узнать по формуле $3n+1$, где n – количество трио. Число ребер равно $6n$, n также обозначает трио.

Из условия имеем 100 вершин, т.е. 33 трио и единственная вершина, смежная с каждым из них. Число ребер равно $6\times33=198$.

2.3 Разработка факультативного курса для 9 классов “Увлекательные графы”

Основной особенностью разработанного факультатива “Увлекательные графы” является построение занятий с помощью кейс – технологии, которая представляет собой интерактивную технологию для краткосрочного обучения, базирующуюся на решении фантазийных или действительных ситуаций. Кейс – технология является достаточно новой и пока не столь распространена в применении. В этом заключается главное отличие данного факультатива от любого другого.

Цель факультативного курса: познакомить учащихся с базовыми терминами и определениями теории графов, продемонстрировать ее практическую направленности и применение в жизни.

Задачи факультативного курса:

– обучение решению задач с использованием методов и приемов теории графов;

– развитие у обучающихся абстрактного мышления и воображения;

– формирование аналитических навыков.

Форма проведения занятий: занятия смешанного типа – лекция, беседа, практикум.

Формы организации познавательной деятельности учащихся: индивидуальные, групповые.

В кейс – технологию успешно интегрированы такие методы, как моделирование, системный анализ, метод описания, дискуссия, проблемный, игровой методы, “мозговой штурм”.

Среди преимуществ кейс – технологии, применяемой для данных факультативных занятий, можно отметить: коллективный характер познавательной деятельности, творческий подход к познанию, сочетание теоретических знаний и практических навыков. Работа ученика с кейсом подразумевает проработку каждого этапа решения задач: знакомство с ситуацией, описанной в задаче; выделение проблемы; предложение концепций (тем для “мозгового штурма”; решение; анализ.)

Темы, рассматриваемые в рамках факультативного курса сами по себе, не подразумеваются школьной программой. Однако, теория графов имеет исключительную прикладную направленность.

Факультативный курс “Увлекательные графы” предназначенный для проведения в 9 классах общеобразовательных школ рассчитан на 5 занятий по 2 часа.

По своему содержанию, разработанный факультатив, освещает следующие темы:

Занятие 1. Графы. Базовые определения. Лемма о рукопожатии.

Понятие графа. Вершины и ребра графа. Смежные вершины. Степень вершины. Пустой граф. Связный граф. Полный граф. Подсчет числа ребер. Лемма о рукопожатии. Двудольный граф.

Занятие 2. Ориентированные графы. Понятие дерева.

Ориентированные графы. Определение дерева. Число ребер в дереве. Висячая вершина дерева. Остовное дерево. Алгоритм Краскала.

Занятие 3. Обходы графов

Определение эйлерова графа. Эйлеров цикл. Обрисовка фигур одним росчерком. Задачи о мостах. Задачи о лабиринтах.

Занятие 4. Расположение графов

Плоские графы. Планарные графы. Теорема Понтрягина – Куратовского. Теорема Эйлера. Метод поиска в ширину.

Занятие 5. Краски. Графы с цветными ребрами.

Правильная раскраска. Задача раскраски карт и плоского графа. Составление расписаний.

Тематическое планирование разработанного курса приведено в таблице 1.

Таблица 1. Тематическое планирование факультативного курса

П/п №	Тема занятия	Кол–во часов	Форма проведения занятия
1	Графы. Базовые определения. Лемма о рукопожатии.	2	Занятие смешанного типа – лекция, беседа, практикум.
2	Понятие дерева. Ориентированные графы.	2	Занятие смешанного типа – лекция, беседа, практикум.
3	Обходы графов	2	Занятие смешанного типа – лекция, беседа, практикум.
4	Расположение графов	2	Занятие смешанного типа – лекция, беседа, практикум.

5	Краски. Графы с цветными ребрами.	2	Занятие смешанного типа – лекция, беседа, практикум.

2.4 Методические разработки занятий

Занятие 1. Графы. Базовые определения. Лемма о рукопожатии

Сначала выполняем с учащимися два кейс – задания, после чего делаем вывод об общем способе их решения (с помощью точек и линий). Заостряем на этом внимание школьников. Далее даем определение графа, объясняем учащимся, что такое вершины и ребра графа. Закрепляем информацию жизненными примерами использования графов (транспортные сети, социальные отношения и др.) Знакомим школьников с историческими сведениями о графе. Далее даем определение пустого графа (это и каждое дальнейшее определение иллюстрируем). Некоторые вершины пустого графа соединяем ребрами и добавляем понятия смежных вершин. Соединяем оставшиеся вершины и получаем полный граф. Затем, учим определять степень вершины на примерах полных графов, полученных в кейсах №1 и №2. Решаем соответственную кейс – задачу №3: Шахматный турнир проводится по круговой системе. Каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В турнире участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя – пять, Леша и Дима – по три, Семен и Илья – по две, Женя – одну [11]. Необходимо определить с кем играл каждый участник. В ходе решения школьники составляют граф встреч, в котором 1 соответствует Ване, 2 – Толе, 3 и 4 – Леше и Диме, 5 и 6 – Семену и Илье, 7 – Жене. Из графа школьникам видно, что Ваня играл с каждым из ребят. Толя играл со всеми, кроме Жени. Леша и Дима играли друг с другом, а так же с Ваней и Толей. Семен и Илья играли друг с другом, а так же с Ваней и Толей. Женя играл только с Ваней.

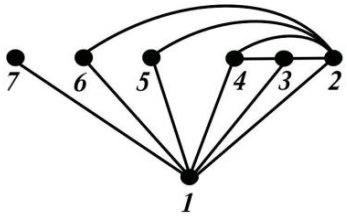


Рисунок 33. Решение кейс – задачи, предложенной на занятии 1.

Добавляем к изученным понятиям связный граф. Затем знакомим школьников с леммой о рукопожатии. Проверяем утверждение на графе, в результате чего учащиеся приходят к выводу о достоверности леммы. Показываем выполнение подсчета числа ребер и степени вершин. Даем представление о двудольном графе (строим граф $K_{3,3}$, а так же $K_{1,p}$ называемый звездой). Решаем кейс – задачу №4 на построение двудольного графа. Затем школьники, разделившись на группы, выполняют кейс – задание №5: В соревновании по круговой системе с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько встреч было сыграно? [11]. Учащиеся находят количество ребер в графе с 12 вершинами. Далее вычисляют $\frac{12\times11}{2} = 66$ ребер, соответствующие 66 встречам). После этого, в группе выполняется кейс – задача №6: В теннисном турнире каждый игрок команды синих встречается с каждым игроком команды красных. Число игроков в командах одинаково и не больше восьми. Синие выиграли в четыре раза больше встреч, чем красные [11]. Необходимо найти из какого числа игроков состоит каждая команда и графически изобразить рукопожатие всех членов команды с соперниками. В процессе решения, учащиеся вычисляют число ребер в графе n^2. Значит, $4x + x = n^2$. $5x = n^2$, следовательно, $n = 5$. Школьники составляют двудольный граф, представляющий дружеское рукопожатие обеих команд (рис. 34) и повторяют его так, как указано в графе.

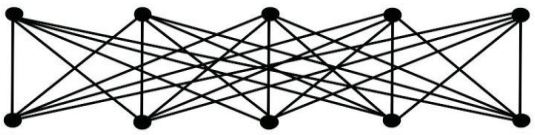


Рисунок 34. Граф $K_{5,5}$, изображающий состав команд в кейс – задание (занятие 1)

Затем, каждый ученик самостоятельно выполняет кейс – задание №7 (кейс – задание, решаемое на этом этапе представлено в параграфе 2.5 (занятие1)). После ученикам дается домашнее задание.

Занятие 2. Ориентированные графы. Понятие дерева

Начинаем с объяснения понятия ориентированного графа. Поясняем, что вершины могут быть соединены помимо ребер (без указания направления) так же и дугами (имеют направление). Иллюстрируем это различие и выполняем небольшое кейс – задание: На улице сильная гроза. Вы – комментатор. Идет хоккейный матч. На льду находятся пять игроков. Хоккеист №1 сделал передачу, далее игру перехватили другие хоккеисты команды (каждый из них сделал один удар по шайбе), так, что в результате гол забил хоккеист №5. Но из–за погодных условий трансляция прервалась, и зрители не знают, как происходил розыгрыш. Предложите болельщикам вариант передачи шайбы, изобразив схему розыгрыша. Вводим определение дерева (даем примеры использования такого графа: генеалогическое древо, описание алгоритмов и др.). Учим определять число ребер в дереве. Даем определение висячей вершины дерева. Решаем кейс – задание: Расположение тропинок в парке “Липа” позволяет побывать в любом из его мест, однако при этом невозможно начать и завершить маршрут прогулки у единственного входа в парк, так, чтобы каждый участок тропинки между двумя перекрестками проходился только один раз. Покажите, что некоторые тропинки парка “Липа” являются тупиковыми. В ходе решения учащиеся строят граф (рис. 35), считающийся ответом на требуемый вопрос).

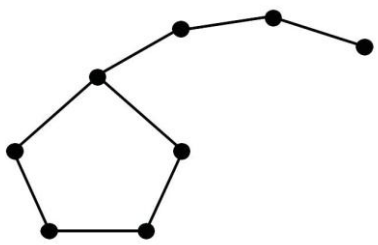


Рисунок 35. Решение кейс – задания, предложенного на занятии 2.

Вводим понятие остовного дерева. Знакомим учащихся с алгоритмом Краскала (кейс – задание, решение которого связано с построением оставного дерева и применением алгоритма Краскала, предоставлено в параграфе 2.5 (занятие 2)). После ученикам дается домашнее задание.

Занятие 3. Обходы графов

Даем определение эйлерова графа (иллюстрируем его). Вводим понятие эйлерова цикла. Затем разбираются основные способы (правила) решения задач о лабиринтах и задач о мостах (кейс – задание, решаемое здесь, представлено в параграфе 2.5 (занятие 3)). Объясняем правила обрисовки фигур одним росчерком (учениками выполняются практические задания по обрисовке фигур, показанных на рисунке 36). После ученикам дается домашнее задание.

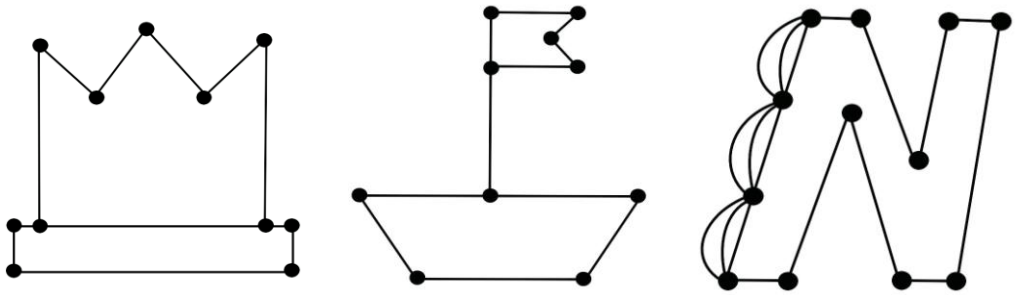


Рисунок 36. Задание по обрисовке фигур одним росчерком (уникурсальные графы)

Занятие 4. Расположение графов

В начале дается понятие гомеоморфных графов и приводятся их примеры. Затем определяем плоский (планарный) граф. Делаются соответствующие иллюстрации. (Выполняется кейс – задача: Имеются три дома и три колодца. Каждый хозяин пользуется любым из трех колодцев. В некоторый момент обитатели домов поссорились и решили проложить свои дорожки до колодцев так, чтобы дорожки не пересекались [11]. Предложите соседям пути от их дома до колодца, если это возможно. В ходе решения учащиеся приходят к выводу, что граф не планарный, поэтому дорожки будут пересекаться.) Знакомим учащихся с теоремой Понтрягина – Куратовского.

Рассмотрение графа K_5 и $K_{3,3}$. (Решение кейс – задания: Изобретатель Петров создал плату, содержащую 9 приборов и 17 проводников. Схема изобретения представлена на рис. 37.

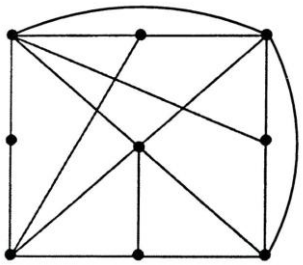


Рисунок 37. Схема изобретения, представленная в кейс – задании (занятие 4)

Теперь, Петров хочет модернизировать свое изобретение так, чтобы все ее проводники находились по одну сторону. Проверьте, возможно ли появление этого изделия. Решая, учащиеся приходят к выводу, что граф не планарный. Следовательно, появление такого изобретения невозможно).

Далее говорим о теореме Эйлера. Решение кейс – задания: Мэрия решили построить в каждом квартале города, имеющего 155 перекрестков и 260 отрезков улиц между перекрестками, универсамами [11]. Определите количество возводимых универсамов. В процессе решения учащиеся применяют теорему Эйлера для связного плоского графа, который в данной задаче соответствует карте города, и получают ответ $f = m - n + 2 = 260 - 155 + 2 = 106$. Знакомство с методом поиска в ширину. Пример использования метода поиска в ширину при выполнении задания. (Кейс – задание, решение которого происходит путем применения метода поиска в ширину представлено в параграфе 2.5 (занятие 4)). После ученикам дается домашнее задание.

Занятие 5. Краски. Графы с цветными ребрами

Объяснение понятия верной раскраски. Объяснение на конкретных примерах принципы решения задач раскраски карт и плоского графа. Решение учениками соответствующих задач и кейс – задания: В некоторой стране между любыми двумя городами существует ровно один рейс, непосредственно

связывающий эти города: или автобусом, или поездом, или самолетом. Известно, что не существует города, обеспеченного всеми тремя видами транспорта, и в то же время не существует трех таких городов, любые две пары из которых связаны одним и тем же средством сообщения [11]. Необходимо определить количество городов в указанном государстве. В результате решения, ученики строят два графа (рис. 38), исходя из которых дают ответ: государство состоит из 3 или 4 городов.

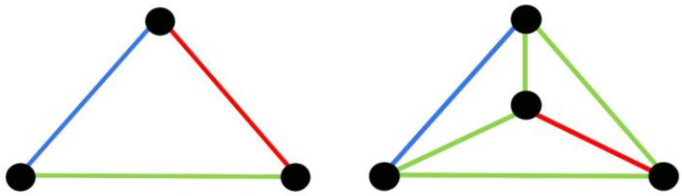


Рисунок 38. Решение кейс – задания, предложенного на занятии 5.

Задания на составление расписаний. (Кейс – задание, решение которого связано с нахождением графа возможного варианта правильной раскраски, представлено в параграфе 2.5 (занятие 5)). После ученикам дается домашнее задание.

2.5 Кейсы, используемые для проведения занятий факультативного курса “Увлекательные графы”

Занятие 1. Графы. Базовые определения. Лемма о рукопожатии

Кейс – изложение

Вид кейса: практический

Метод: инцидента

Однажды, в городе *N*. Кафе “Радуга”. 17:00.

Управляющий: Дарья Алексеевна, я подготовила отчет за прошлый месяц.

Директор: Ну, что же тут у нас? Да, кафе переживает не лучшее время.

Управляющий: Несмотря на постоянные акции, клиентов совсем мало. Кризис. Еще и заказ на проведение мероприятия отменили. Правда, сегодня приходил один человек, но он готов заказать столик только при одном условии.

Директор: Интересно, каком же?

Управляющий: Он сказал, что в их компании будет двенадцать человек. Но среди трех любых человек из этой компании двое будут знакомы друг с другом и двое увидятся впервые. А каждый из них хочет сидеть за столом рядом со своим знакомым. Если мы сумеем рассадить их так за нашими круглыми столами, то можем рассчитывать на заказ. Для его подтверждения мы должны предоставить план рассадки гостей.

Директор: Учитывая сложившуюся ситуацию, мы должны очень постараться, но не упустить этот заказ.

Задание: Покажите, существует ли вариант рассадки компании за круглым столом, так чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

Ожидаемое решение. Для нахождения верной комбинации рассадки заказчиков построим граф, вершины которого символизируют людей, а ребра соединяют вершины только в случае знакомства соответствующих гостей. По условию задачи подграф (трех вершин) не может быть ни полным, ни пустым. Так как среди любых трех гостей двое знакомы (соединяем две соответствующие вершины графа), а двое нет (переходим к другим двум вершинам), то получаем граф, представленный на рисунке 39. Этот граф представляет собой план рассадки гостей за круглым столом.

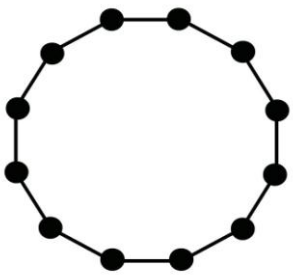


Рисунок 39. Граф знакомств

Занятие 2. Понятие дерева. Ориентированные графы

Кейс – иллюстрация

Вид кейса: практический

Метод: ситуативного анализа

Строительная компания “Престиж” возводит жилой комплекс, состоящий из 14 домов. Семь из них уже построены, а оставшиеся семь находится на этапе строительства. В построенных домах завершилась прокладка основных коммуникаций, и теперь, компании предстоит проложить интернет – кабель, соединяющий все уже построенные дома. Чтобы кабель случайно не повредили во время строительных работ, сделать это нужно вдоль дорог. Также, компания заинтересована в том, чтобы проложить интернет – кабель с наименьшими затратами.

Схема участка предоставлена вам на рисунке 40 (числа, стоящие в скобках, показывают расстояние между домами).

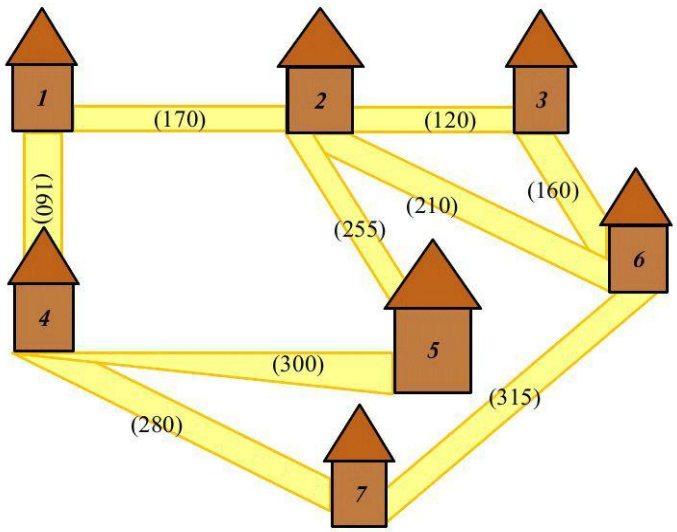


Рисунок 40. Схема строительного участка

Задание. Предложите компании схему проведения интернет – кабеля, чтобы его длина при этом была минимальной.

Решение. Прежде всего, ученикам предстоит построить граф, отражающий схему данного участка. Вершинами этого графа будут обозначать

дома, построенные на участке, а ребра – дороги, находящиеся там. Так, учащимися будет построен граф, изображенный на рисунке 41.

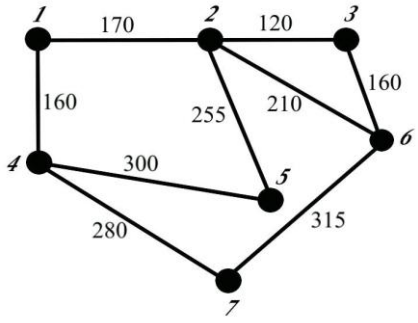


Рисунок 41. Граф, отражающий схему строительного участка

Дальнейшее решение подразумевает построение минимального оставного дерева посредствам алгоритма Краскала. Для этого, берем ребро с минимальной длиной, т.е. (2, 3). Вторым и третьем берем ребра (3, 6) и (1, 4), в любом порядке, т.к. их длины равны. Четвертым – ребро (1, 2), а пятым – (2, 5). Из оставшихся ребер, минимальную длину имеет (4, 7), поэтому берем его. На рисунке 42 показан граф, на котором выделены ребра полученного минимального оставного дерева. Таким образом, получаем схему минимального интернет – кабеля.

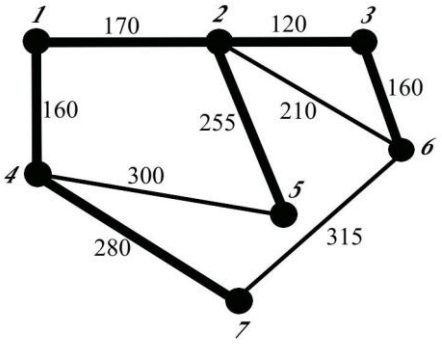


Рисунок 42. Граф, с выделенными ребрами минимального оставного дерева

Занятие 3. Обходы графов

Кейс – иллюстрация

Вид кейса: практический

Метод: ситуативного анализа

В городе *N* есть парк культуры и отдыха “Тюльпан”, расположенный на шести островах, соединенных мостами. В праздничные дни в парке проходит развлекательное мероприятие, где на каждом острове представлен свой вид деятельности (танцы, спектакль, кинопросмотр, аква–гримм, спортивные соревнования, кулинарное шоу). Для того, чтобы попасть на мероприятие нужно приобрести специальный пропуск, дающий право единожды пройти по каждому из мостов архипелага. Владельцы парка “Тюльпан” задались вопросом, смогут ли посетители опробовать все развлечения на празднике?

Схема парка “Тюльпан” представлена на рисунке 43.

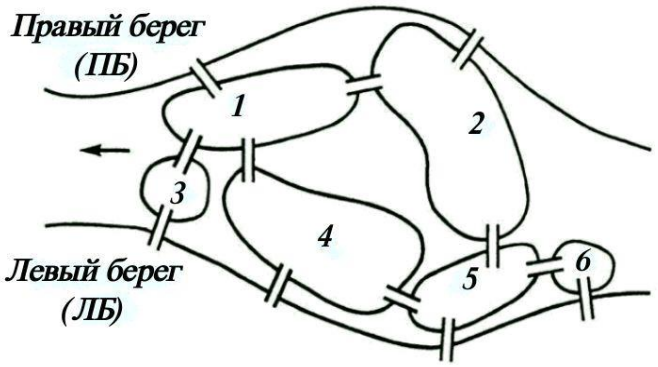


Рисунок 43. Схема парка культуры и отдыха “Тюльпан”

Задания.

1) Определите, смогут ли посетители, начав с одного из островов парка, побывать на всех развлечениях, представленных на празднике, и вернуться на исходный остров.

2) В случае отрицательного ответа, определите, какое количество мостов нужно построить владельцам парка, чтобы у посетителей появилась такая возможность.

3) Обрисуйте маршрут посетителя парка “Тюльпан” в этом случае.

Решение. 1) Первое, что необходимо сделать учащимся – построить граф, представленный на рисунке 44.

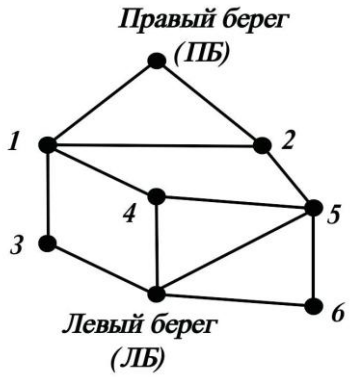


Рисунок 44. Граф, построенный по схеме парка “Тюльпан”

Здесь вершины обозначают острова, а ребра – мосты. Нужно понять, является ли граф этот эйлеровым, т.е. каждая ли его вершина имеет четную степень. Рассмотрим граф, вершины 2 и 4 имеют степень три, а значит, данный граф не является эйлеровым. Следовательно, посетители парка не смогут единожды пройти по каждому мосту, побывав на всех остовах парка и вернуться на начало.

2) Если соединить вершины 2 и 4 ребром, то полученный граф будет эйлеровым, т.к. все его вершины – четные. У учеников получается следующий граф (рисунок 45).

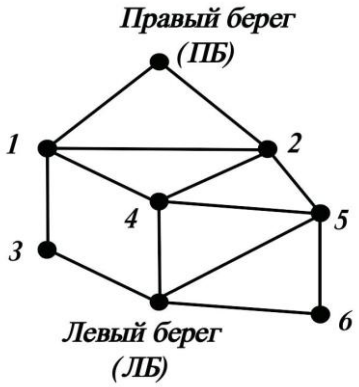


Рисунок 45. Граф, полученный после соединения вершин 2 и 4

Таким образом, чтобы посетители парка смогли пройти по каждому мосту один раз, побывав при этом на всех островах парка и вернуться в начало пути, владельцам парка надо построить мост от острова 2 до острова 4.

3) Чтобы найти маршрут посетителя парка “Тюльпан” нужно определить эйлеров цикл, в графе на рисунке 46. Начнем с вершины ПБ, выйдя из которой

каждый раз выбираем еще не задействованное ребро. Допустим, получили цикл C_1 = (*ПБ, 1, 4, ЛБ, 5, 2, ПБ*). После удаления ребер указанного цикла, построим в графе другой цикл, из оставшихся получаем C_2 = (*1, 3, ЛБ, 6, 5, 4, 1*). Из циклов C_1 и C_2 составим общий цикл *С* = (*ПБ, 1, 3, ЛБ, 6, 5, 4, 2, 1, 2, ЛБ, 5, 2, ПБ*). По построенному циклу ученики обрисовывают маршрут, представленный на рисунке 46.

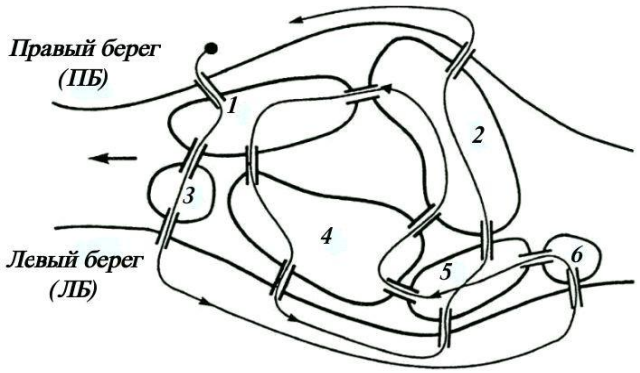


Рисунок 46. Маршрут посетителя парка “Тюльпан”

Занятие 4. Расположение графов

Кейс – практическая задача

Вид кейса: практический

Метод: деловой переписки

Уважаемый, (Ф.И.О. ученика)!

Спешим сообщить, что Вы успешно прошли все этапы собеседования и приняты в компанию “Рос.Космонавтика” на должность распределителя космических групп. К своим должностным обязанностям Вы можете приступать прямо сейчас.

Уведомляем Вас, что десяти космонавтам нашей компании предстоят две экспедиции на Международную Космическую Станцию. В силу того, что членам экипажа доведется провести на МКС 6 месяцев, причем, в небольшом и замкнутом пространстве, то при формировании группы необходимо учитывать психологическую совместимость участников команды. По этой причине,

штатом психологов компании “Рос.Космонавтика” был проведен ряд психологических тестов для кандидатов. Заключение наших психологов мы направляем Вам в виде таблицы 2.

Таблица 2. Заключение психологов компании “Рос.Космонавтика”

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		–	–	–						
2	–				–					
3	–						–			
4	–					–				
5		–						–		
6				–						–
7			–					–		–
8					–		–		–	
9								–		
10						–	–		–	

Расшифровка данных таблицы: знак “–”, находящийся на пересечении *i* – строки и *j* – столбца означает, что космонавты психологически несовместимы и их объединение в одну группу нежелательно.

Ваше должностное задание. Сформировать две группы космонавтов для участия в экспедиции, с учетом результатов их психологического тестирования.

Предполагаемое решение учеников. Для того, чтобы решить это задание учащимся необходимо составить граф космонавтов. Каждому кандидату в соответствие ставится вершина данного графа. В том случае, если оба возможных участника являются психологически несовместимыми, вершины, определяющие их, соединяются ребром. Таким образом, учащиеся приходят к графу, представленному на рисунке 47.

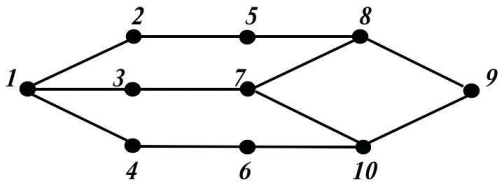


Рисунок 47. Граф, дающий наглядное представление об участниках экспедиции

Затем, ученики должны разделить космонавтов (т.е. вершины графа) на два множества таким образом, чтобы каждое ребро соединяло вершины из разных групп. Так учащимся предстоит продемонстрировать, что этот граф – двудольный.

Далее, участники факультатива используют метод поиска в ширину. Вершину 1 определяют к первой группе, а смежные с ней вершины (т.е. 2, 3, и 4) относим ко второй группе. Вершины 5, 6 и 7, которые являются смежными с вершиной 2, 3 или 4, добавляем во вторую группу. Алгоритм повторяется до тех пор, пока все вершины графа не будут распределены по своим группам. В результате получаем в первой группе вершины 1, 5, 7, 6 и 9, во второй – 2, 3, 4, 8 и 10. Граф, редактируемый по ходу решения, показанный на рисунке 48 является крайне удобным, наглядным решением.

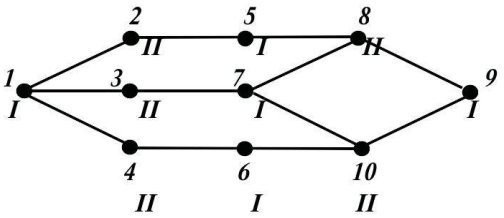


Рисунок 48. Граф, показывающий деление вершин на группы (метод поиска в ширину)

Занятие 5. Краски. Графы с цветными ребрами

Кейс – практическая задача

Вид кейса: практический

Метод: ситуативного анализа

Компания “*N*” арендует помещения в бизнес – центре для проведения семинаров по изучению иностранных языков. В понедельник там читают семь

лекций, каждая из которых длится один час (греческий, английский, французский, немецкий, китайский, итальянский и польский языки). Некоторые из них проводит один и тот же преподаватель, так же есть слушатели, которые посещают несколько разных лекций и др. В результате есть лекции, которые не могут читаться одновременно. В таблице 3 указана совместимость лекций (здесь знак “–”, означает, что данные лекции не могут проходить в одно и то же время).

Таблица 3. Совместимость лекций

	Греч. язык	Англ. язык	Франц. язык	Нем. язык	Кит. язык	Итал. язык	Польск. язык
Греческий яз.		–		–			–
Англ.яз.	–		–		–	–	
Франц.яз.		–			–	–	–
Немецкий яз.	–				–	–	
Китайский яз.		–	–	–		–	
Итальян.яз.		–	–	–	–		
Польский яз.	–		–				

Задание. Определите минимальное количество времени, за которое прочитают все лекции в понедельник.

Решение. Сначала ученикам необходимо построить граф G несовместимости лекций по данным таблицы. Вершины этого графа представляют собой лекции. Смежные вершины указывают на то, что эти лекции невозможно проводить в одно и то же время. Граф, полученный учениками, представлен на рисунке 49.

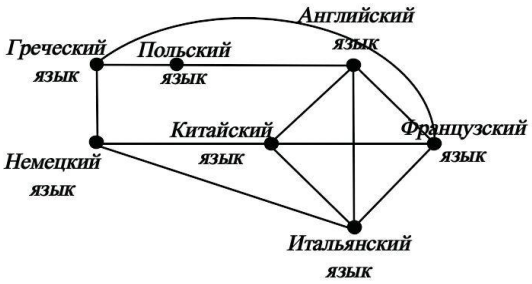


Рисунок 49. Граф несовместимости лекций

В данной задаче любая правильная раскраска определяет какое–либо расписание занятий: если вершины окрашены в одинаковый цвет, то соответствующие им лекции – совместимы. Обратное утверждение также справедливо: любое расписание задает правильную раскраску вершин графа G. Минимальное количество часов, необходимых для проведения занятий, равно $X(G)$.

Так как граф G содержит полный подграф K_4, то его вершины невозможно правильно раскрасить менее, чем в четыре цвета. На рисунке 50 указан один из возможных вариантов раскраски, из которого следует, что все лекции в понедельник можно прочитать минимум за четыре часа.

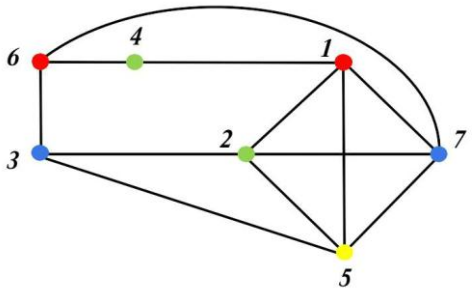


Рисунок 50. Вариант верной раскраски

2.6. Технологическая карта факультативного занятия по теме “Графы. Базовые определения. Лемма о рукопожатии”

Тема занятия	Графы. Базовые определения. Лемма о рукопожатии
Цель занятия	Образовательная: знакомство, понимание и первичное запоминание школьниками понятий граф, вершина графа, ребро графа, пустой граф, полный граф, смежные вершины, связный графа, двудольный граф. Развивающая: формирование умения отыскания графов в условиях задач и применения на практике; формирование интереса к отрасли дискретной математики. Воспитательная: развитие навыка самостоятельной учебной деятельности, навыков коммуникации, самооценивания.
Задачи	Образовательные: сформулировать базовые определения теории графов; познакомить учащихся с исторической справкой о графах, формировать навык перевода информации из словесного описания условия задачи на язык теории графов. Развивающие: развивать абстрактное мышление, грамотную речь учащихся; способствовать мыслительной деятельности школьников, мотивируя при этом каждый этап учебного процесса; благоприятствовать развитию мыслительными операциями, анализом и синтезом, умением делать выводы; создать условия для включения каждого ученика в активную учебно-познавательную

	деятельность. Воспитательные: развивать культуру общения учащихся; воспитывать желание школьников совершенствовать имеющиеся у них знания и получение новых знаний.
Планируемые результаты обучения	Личностные: понимание учениками важности и практической направленности математических знаний. Предметные: знать базовые определения теории графов; уметь применять полученные знания при решении олимпиадных задач по математике; уметь применять полученные знания в некоторых жизненных ситуациях; уметь выявлять закономерности. Метапредметные: умение определять её цели и задачи своей деятельности; умение правильно распределять время на выполнение задания; умение самостоятельно производить поиск, анализ, сбор необходимой информации; умение вести деятельность, как в коллективе, так и самостоятельно;
Компетенции, формируемые на уроке	Коммуникативные, учебно-познавательные, информационные.
УУД	Личностные УУД: развитие познавательных интересов, учебных мотивов, понимания важности изучения математики, расширение знаний о возможных способах решения задач, уважительное отношение к окружающим; формирование самооценки.

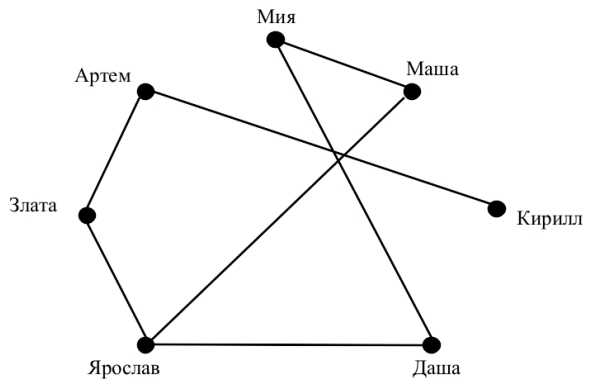
	Регулятивные УУД: целеполагание – умение отделять уже изученный материал от того неизведанного; планирование – умение определять разумную очередность поставленных целей, задач и действий для получения финального результата; самооценка - осознание уровня собственных знаний и умений; определяют цель учебной деятельности с помощью учителя и самостоятельно, выполняют действия по нахождению средств её достижения. Коммуникативные УУД: развитие навыка работы в коллективе, умение выслушать собеседника и ввести культурно диалог, умение аргументировать свою точку зрения. Познавательные УУД: умение анализировать, сравнивать, классифицировать и обобщать; производить поиск и выделение информации, необходимой для выполнения поставленной задачи; делать выбор подходящего способа действия; умение целенаправленно применять полученные знания на практике.
Основные понятия	граф, вершина графа, ребро графа, пустой граф, полный граф, смежные вершины, связный графа, двудольный граф, лемма о рукопожатии.
УМК	Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3–е, испр. и доп. – М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009. – 232 с.
Тип занятия	Открытие новых знаний

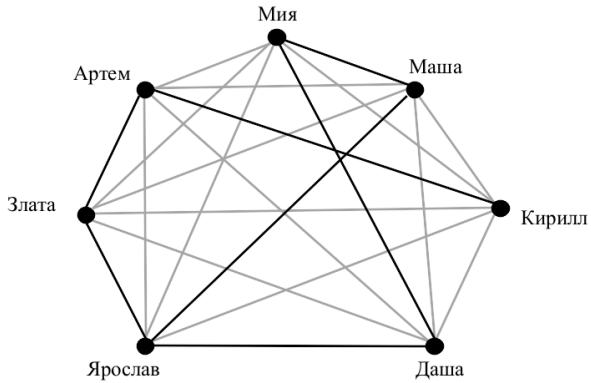
Формы работы учащихся	Фронтальная, групповая, индивидуальная
Необходимые средства обучения	Мультимедийное оборудование, кейсы, классная доска, мел.

ХОД УРОКА

Этапы урока	Цель этапа	Время	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	УУД	Оценка результатов деятельности ученика
1. Мотивация к учебной деятельности	Создать благоприятный психологический настрой на работу	3 мин.	Добрый, ребята! Я приветствую вас на факультативе “Увлекательные графы”. На этом занятии вы узнаете о существовании ранее неизвестного вам математического объекта.	Приветствуют учителя, готовят свои рабочие места. слушают учителя. Записывают в тетрадь число, классная работа.	Личностные: самоопределение, уважительное отношение к учителю и другим ученикам. Коммуникативные: планирование	Благоприятный психологический настрой, готовность к уроку, включени

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Запишите число, классная работа. Мы начинаем занятие.</td><td></td><td>дальнейшего сотрудничества с учителем и учениками.</td><td>е в работу.</td></tr>
<tr><td>2. Актуализация знаний и фиксирование индивидуального затруднения в пробном учебном действии.</td><td>Актуализация субъективного опыта (опорных знаний и способов действий, ценностных отношений).</td><td>15 мин.</td><td>Перед вами два кейса.
Сначала возьмем тот кейс, на котором указан №1.
Ознакомимся с ним.</td><td>Знакомятся с кейсом.
Вы являетесь одним из членов жюри танцевального турнира, в котором участвуют 8 человек: Алина, Маша, Ярослав, Злата, Артем, Даша, Кирилл, Мия. По правилам турнира все участники должны однократно состязаться друг с другом. Конкурс разделен на несколько соревновательных дней. Встречи первого дня представлены в таблице.
<table>
<tr><td>Даша</td><td>Мия</td></tr>
<tr><td>Мия</td><td>Маша</td></tr>
<tr><td>Маша</td><td>Ярослав</td></tr>
<tr><td>Ярослав</td><td>Даша</td></tr>
<tr><td>Ярослав</td><td>Злата</td></tr>
<tr><td>Злата</td><td>Артем</td></tr>
<tr><td>Артем</td><td>Кирилл</td></tr>
</table></td><td>Навыки коллективной деятельности.
Развитие познавательных интересов.
Умение грамотно стоить сою речь.</td><td>Устная оценка учителя.
Самооценка учащихся.</td></tr>
</table>

			Давайте попробуем условие этого кейса изобразить графически. Для этого в кейсе вам дана инструкция: Представьте условие в графическом виде. Для этого участников турнира обозначьте точками, а прямой, соединяющей эти точки, встречи проведенные между ними. Для того, чтобы определить количество оставшихся встреч соединим каждую	Итого проведено 7 встреч. Задание 1. Определите сколько еще встреч необходимо провести. Задание 2. Выясните, на какое количество дней рассчитан турнир, если каждый день будет проходить равное количество встреч. Составляют граф встреч первого дня по инструкции.  Строят граф всех встреч.		

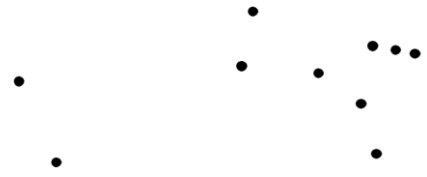
			точку со всеми точками на схеме (для наглядности эти прямые проведем другим цветом). Сделайте вывод. Возьмем тот кейс, на котором указан №2. Ознакомимся с ним.	 Дети делают вывод, что из полученных схем видно, что получили 21 прямую, т.к. каждая прямая соответствует встрече, значит, встреч должно быть 21. Значит, турнир рассчитан на 3 дня, при условии, что ежедневно проходит по 7 встреч. Знакомятся с кейсом №2. Владельцы компании “N” проводят ряд переговоров. Им необходимо побывать в 3 из 10 самых населенных столиц мира. Между городами существует возможность		

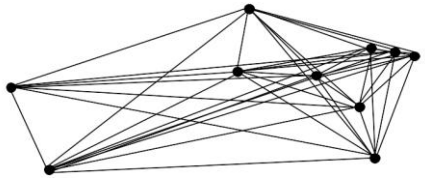
<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>Прочитаем задание 1.
Инструкция:
Представьте условие задачи графически. Для этого на карте поставьте точки на месте указанных городов. Соедините их линиями, так как указано в таблице рейсов.</td>
<td>авиа перелетов.
Авиакомпания предлагает следующие рейсы:
<table><tr><td>Пекин (Китай)</td><td>Сеул (Южная Корея)</td></tr><tr><td>Токио (Япония)</td><td>Дели (Индия)</td></tr><tr><td>Москва (Россия)</td><td>Дели (Индия)</td></tr><tr><td>Дели (Индия)</td><td>Пекин (Китай)</td></tr><tr><td>Сеул (Южн. Корея)</td><td>Джакарта (Индонезия</td></tr><tr><td>Джакарта (Индон.)</td><td>Бангкок (Таиланд)</td></tr><tr><td>Бангкок (Таиланд)</td><td>Токио (Япония)</td></tr><tr><td>Мехико (Мексика)</td><td>Каир (Египет)</td></tr><tr><td>Каир (Египет)</td><td>Лима (Перу)</td></tr><tr><td>Лима (Перу)</td><td>Мехико (Мексика)</td></tr></table>Ставят точки на карте.
Соединяют их линиями.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

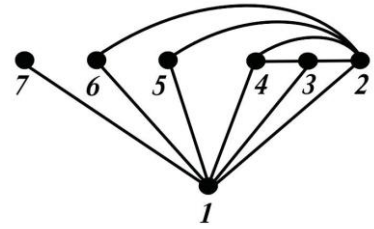
			Затем ответьте на вопросы: 1. Получится ли добраться из Дели в Пекин? 2. Из Пекина в Джакарту? 3. Из Джакарты в Токио? 4. Из Токио в Каир? При невозможности перелета зарезервируйте чартерный рейс, проведя его на карте от одной точки к другой. Задание 2. Покажите, как будет выглядеть схема рейсов, если каждый уз указанных городов будет соединен с любым другим.	 Отвечают на вопросы. Проводят все возможные линии на карте. Каждое задание выло выполнено с		

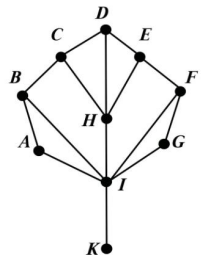
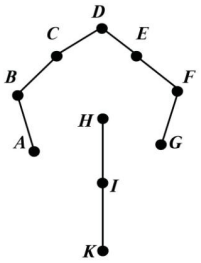
			Теперь сделайте вывод, что общего было в решении каждого задания. Важно заострить внимание учеников на едином способе решения представленных кейс – заданий, а именно переводе условия в графическое изображение. Подчеркнем, что это обеспечило наглядность заданий.	использованием точек и линий.		
3. Определение темы и целеполагание.	Сформулировать тему и цель занятия.	5 мин	В каждом случае при решении задач мы использовали новые математические объекты, такие как точки, подразумевая под ними детей или столицы, а так же		Личностные: проявляют интерес к учебному материалу. Регулятивные: определяют цель	Самооценка

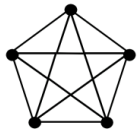
			линии, обозначающие встречи или рейсы соответственно. Эти объекты называются графами. Сформулируйте тему нашего занятия. Запишите число и классная работа.	Определяют тему занятия. Записывают число и классная работа.	учебной деятельности. Познавательные: самостоятельно делают предположения, какая информация необходима для решения предметной учебной задачи.	
4. Открытие новых знаний (первый этап)	Обеспечение мотивации учения школьниками, принятие ими целей занятия.	25 мин	Учитель определяет граф как геометрическую фигуру, состоящую из конечного множества точек, а также линий, соединяющих некоторые из них. Точки графа являются их вершинами, а линии – ребрами графа. В качестве повседневных и	Учащиеся записывают понятия в тетрадь и иллюстрируют каждое из них в тетради.	Личностные: развитие познавательных интересов, учебных мотивов, понимания важности изучения математики, расширение	Устная оценка учителя. Самооценка учащихся

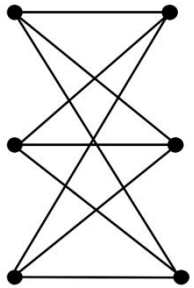
			общеизвестных примеров графов можно назвать схемы авиалиний, метрополитена, железных дорог, созвездий на картах звездного неба, генеалогическое древо и другие. Приведите ваши примеры графов. Затем даем историческую справку, которая начинается с задачи о Кёнигсбергских мостах. Вернемся к кейсу №2. Если граф состоит только из точек, то такой граф называется пустым. А каждая из этих точек является изолированной. После того как мы соединили линиями	Общественные отношения, построение маршрутов и другие. Слушают учителя. Записывают определения и иллюстрируют каждое из них.  Пустой граф	знаний о возможных способах решения задач, уважительное отношение к окружающим; формирование самооценки. Регулятивные: целеполагание – умение отделять уже изученный материал от того неизведанного;	

			некоторые точки, получили смежные вершины. Две вершины называются сменными, если они соединены ребром. Когда каждая вершина была соединена со всеми остальными, граф стал полным. Число ребер, выходящих из вершины, называется ее степенью. Так степень вершины полного графа из кейса №1 равна 6. Назовите степень вершины в полном графе из кейса №2.	 Смежные вершины  Полный граф Степень каждой вершины в этом графе равна 9.		
5. Этап закрепления	Благоприятствовать усвоению школьника	15 мин	Возьмите кейс №3. Решать его вы будете в группе. Затем вы представите ваше решение классу.	Знакомятся с кейсом. Вы журналист, который должен написать статью про шахматный турнир. Но часть заметок, сделанных во время его	Личностные: проявляют положительное отношение к	Устная оценка учителя. Самооцен

знаний и совершенствования способов действий (первый этап)	ми новых знаний, использование их в практических их заданиях. Выполнить коррекцию выявленных пробелов в знаниях учеников.		Ознакомьтесь с кейсом.	проведения. потерялись. Остались только эти. Шахматный турнир проводится по круговой системе. Каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В турнире участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя – пять, Леша и Дима – по три, Семен и Илья – по две, Женя – одну [11]. Задание. Для завершения статьи необходимо написать, кто из участников с кем играл. Учащиеся составляют граф встреч, в котором 1 соответствует Ване, 2 – Толе, 3 и 4 – Леше и Диме, 5 и 6 – Семену и Илье, 7 – Жене.  Из графа школьникам видно, что Ваня играл с каждым из ребят. Толя играл со	математике, дают разумную оценку и самооценку учебной деятельности. Познавательные: самостоятельно предполагают, какая информация необходима для решения предметной учебной задачи. Умение осознанно применять полученные знания на практике. Коммуникативные: умеют работать в группе,	ка и взаимооценка учащихся.

				всеми, кроме Жени. Леша и Дима играли друг с другом, а также с Ваней и Толей. Семен и Илья играли друг с другом, а также с Ваней и Толей. Женя играл только с Ваней.	вести диалог, слушать других. Умение грамотно и лаконично формулировать свои мысли.	
6. Открытие новых знаний (второй этап)	Обеспечение мотивации учения школьниками, принятие ими целей занятия.	25 мин	Когда любые две вершины можно соединить путем, т.е. последовательностью ребер, каждое из которых начинается из конца предыдущего, тогда граф называется связным. Противном случае – несвязным. Приведем пример связного и несвязного графов. Приведите свои примеры связного и несвязного графов. Лемма о рукопожатии.	 Связный граф  Несвязный граф Приводят свои примеры связного и несвязного графов. Записывают в тетрадь лемму о	Личностные: развитие познавательных интересов, учебных мотивов, понимания важности изучения математики, расширение знаний о возможных способах решения задач, уважительное	Устная оценка учителя. Самооценка учащихся

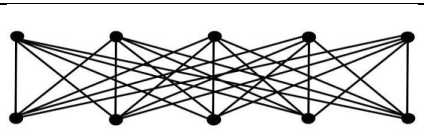
			Сумма степеней всех вершин графа – четное число, равное удвоенному количеству ребер. Проверим это утверждение. На рисунке дан граф  Сколько у него вершин? Сколько ребер у этого графа? Посчитайте, чему равна сумма степеней всех вершин этого графа? Какую степень имеет любая вершина в данном графе? Вычислите степень графа и сделайте вывод. Если вершины графа поделены на две группы и каждое ребро соединяет	рукопожатии. 5 вершин. 10 ребер. Сумма равна 20. Каждая вершина имеет степень 4. 4×5=20, значит, предположение верно. Записывают определение.	отношение к окружающим; формирование самооценки. Регулятивные: целеполагание – умение отделять уже изученный материал от того неизведанного;	

			вершины из различных групп, то такой граф считают двудольным. Обозначают $K_{p,q}$ где p и q – число вершин, в каждой группе графа. Например, $K_{3,3}$			
				Делают иллюстрацию в тетради.		
			Сколько вершин в каждой группе этого графа?	Две группы по три вершины.		
			Граф $K_{1,p}$ называется звездой. Построим граф $K_{1,p}$			
			Возьмите кейс №4. Ознакомьтесь с ним. Этот	Знакомятся с кейсом №4.		

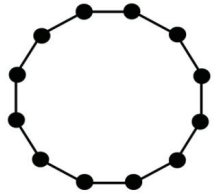
			кейс мы выполняем вместе. Дети поделены на две группы?	Лена и Катя спорят, на чьем празднике было больше подарков. Девочки посчитали, что на празднике, который устраивала Катя, гости подарили друг другу 34 подарка. А подарки на празднике Лены они затруднились посчитать. Поэтому и обратились к тебе. Девочки рассказали, что на празднике, организованным Леной, пришли 7 мальчиков и 5 девочек. Причем дружат некоторые из ребят. Каждый мальчик подарил подарок той девочке, с которой он дружит, а каждая девочка вручила подарок незнакомому мальчику. На этом подарки закончились. Задание. Помоги Кате и Лене решить их спор, выяснив, сколькими подарками обменялись на празднике, устроенном Леной. Да. Двудольным.		

			Тогда каким будет граф. Построенный по условию этой задачи? Сколько вершин в каждой группе этого графа? Можем ли мы найти число ребер? Какой вывод?	5 и 7 (по числу мальчиков и девочек). Да, потому что каждое ребро соединяет вершины из разных групп. Тогда 7×5=35 ребер, что соответствует 35 подаркам. Значит, выиграла Лена, т.к. на ее празднике на один подарок больше.		
7. Этап закрепления знаний и совершенствования способов действий (первый этап)	Благоприятствовать усвоению школьниками новых знаний, использование их в практических заданиях. Выполнить коррекцию	15 мин	Возьмите кейс №5. Решать его вы будете в группах. Затем вы представите ваше решение классу. Ознакомьтесь с кейсом.	Знакомятся с кейсом. Вы спортивный обозреватель, которому необходимо написать отчет о результатах соревнования по теннису. В турнире участвовало 12 спортсменов, а походил он по круговой системе. Все запланированные встрече проведены. Задание. Найдите число встреч турнира, чтобы закончить отчет. Решают кейс и представляют его классу. Ученики находят количество ребер в графе с 12 вершинами. Далее согласно лемме вычисляют, $\frac{12\times11}{2} = 66$, что соответствует	Личностные: проявляют положительное отношение к математике, дают разумную оценку и самооценку учебной деятельности. Познавательные: самостоятельно предполагают, какая информация	Устная оценка учителя. Самооценка и взаимооценка учащихся.

	выявленных пробелов в знаниях учеников.		Перейдем к кейсу №6. Знакомимся с ним.	66 встречам. Знакомятся с кейсом №6. В теннисном турнире каждый игрок команды синих встречается с каждым игроком команды красных. Число игроков в командах одинаково и не больше восьми. Синие выиграли в четыре раза больше встреч, чем красные [11]. Задание. Необходимо найти из какого числа игроков состоит каждая команда, графически изобразить рукопожатие всех членов команды с соперниками и продемонстрировать полученный граф на практике. В процессе решения, учащиеся вычисляют число ребер в графе n^2. Значит, $4x + x = n^2$. $5x = n^2$, следовательно, $n = 5$. Школьники составляют двудольный граф, представляющий дружеское рукопожатие обеих команд.	необходима для решения предметной учебной задачи. Умение осознанно применять полученные знания на практике. Коммуникативные: умеют работать в группе, вести диалог, слушать других. Умение грамотно формулировать свои мысли.	

				 Жмут друг другу руки, как показано на графе.		
8. Этап контроля и самоконтроля знаний и способов действий.	Определение качества и уровня усвоения школьниками знаний и способов действий.	10 мин	Объясняет задание. Организует деятельность по его выполнению. Этот кейс №7 каждый выполняет самостоятельно. Затем представляем его решение классу.	Слушают учителя. Знакомятся с кейсом №7. Однажды, в городе *N*. Кафе “Радуга”. 17:00. Управляющий: Дарья Алексеевна, я подготовила отчет за прошлый месяц. Директор: Ну, что же тут у нас? Да, кафе переживает не лучшее время. Управляющий: Несмотря на постоянные акции, клиентов совсем мало. Кризис. Еще и заказ на проведение мероприятия отменили. Правда, сегодня приходил один человек, но он готов заказать столик только при одном условии. Директор: Интересно, каком же? Управляющий: Он сказал, что в их	Личностные: дают разумную оценку и самооценку учебной деятельности. Регулятивные: определяют цель учебной деятельности, осуществляют поиск средств её достижения Познавательные: анализ объектов с целью выделения	Самооценка. Взаимооценка. Устная оценка учителем.

				компании будет двенадцать человек. Но среди трех любых человек из этой компании двое будут знакомы друг с другом и двое увидятся впервые. А каждый из них хочет сидеть за столом рядом со своим знакомым. Если мы сумеем рассадить их так за нашими круглыми столами, то можем рассчитывать на заказ. Для его подтверждения мы должны предоставить план рассадки гостей. Директор: Учитывая сложившуюся ситуацию, мы должны очень постараться, но не упустить этот заказ. Задание: Покажите, существует ли вариант рассадки компании за круглым столом, так чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые. Решение. Учащиеся строят граф, вершины которого символизируют людей, а ребра соединяют вершины только в случае	признаков. Коммуникативные: умеют грамотно и лаконично формулировать свои мысли в устной форме.	

				знакомства соответствующих гостей. По условию задачи подграф (трех вершин) не может быть ни полным, ни пустым. Так как среди любых трех гостей двое знакомы (соединяем две соответствующие вершины графа), а двое нет (переходим к другим двум вершинам), то получаем граф, представленный на рисунке. Этот граф представляет собой план рассадки гостей за круглым столом. 		
9. Этап информации о домашнем задании.	обеспечить понимание учащимися цели, содержания и способов	3 мин.	По результатам усвоения учащимися нового материала дает задание, предназначенное для последующего развития знаний по теме “Графы”. Выполнить кейс №8.	Берут кейс для выполнения задания дома.	Личностные: дают разумную оценку и самооценку учебной деятельности.	

	выполнения домашнего задания.		Лаборатория “*N*” занимается созданием различных электронных приборов. Недавно им поступил заказ на изобретение нового типа детектора лжи. Через некоторое время разработали экспериментальный образец. Для того, чтобы понять точно ли работает новый прибор необходимо провести тестирование. Этим предстоит заняться Вам. Доброволец, который вызвался участвовать в тестировании, утверждает, что в прошлом месяце он путешествовал в компании, где каждый был знаком ровно с 5 членами группы. При этом прибор показывает			

			ложь. Задание. Выясните, исправен ли новый детектор лжи.			
10. Этап рефлекси и учебной деятельн ости.	Инициировать рефлексию школьников в относительно их эмоционального состояния, мотивация к будущей деятельности и взаимодействия с учителем.	4 мин	Продолжите предложения: Сегодня я узнал … Теперь я умею… Меня удивило … Мне нужно поработать над… Я совершенно не понял… Я (не) достиг поставленной цели. Спасибо, ребята за вашу активную работу на занятии. На сегодня это все. До новых встреч.	Продолжают предложения. Выполняют самооценку своей учебной деятельности. Соотносят цель с результаты своей работы. До свидания.	Личностные:; дают адекватную оценку и самооценку своей учебной деятельности Коммуникативные: умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли.	Самооценка. Устная оценка учителя.

Таким образом, во второй части проведенного исследования был произведен анализ школьных учебников, рекомендованных Министерством Просвещения РФ, из чего сделан вывод, что в абсолютном большинстве указанной литературы не упоминается о теории графов. Также изучена дополнительная литература по исследуемой теме, подобраны соответствующие задания. Помимо этого рассмотрены задачи всевозможных олимпиад школьников за несколько прошедших лет и отобрано среди них достаточное количество заданий, решаемых посредством графов. Для наиболее интересных задач предоставлено решение, которое предлагают интернет – ресурсы, а также решение, выполненное посредством графов. Поскольку очевиден диссонанс между минимальным количеством информации содержащейся в некоторых учебных изданиях и внушительным содержанием заданий олимпиад был разработан факультативный курс для 9 классов “Увлекательные графы”. Главное отличие разработанного факультатива – применение кейс – технологии на каждом занятии. Даны методические разработки каждого из занятий. Предоставлены кейсы, используемые при проведении этих занятий. Разработана технологическая карта факультативного занятия по теме “Графы. Базовые определения. Лемма о рукопожатии”.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведения исследования была проделана следующая работа.

В первой главе произведен обзор основных средств обучения. Затем детально разобран процесс решения задач. Рассмотрено содержание основных этапов. Далее раскрыто понятие графа. Рассмотрена задача Л. Эйлера о мостах Кенигсберга и предоставлено ее изображение посредством графов. Определены такие виды графов как: нулевой, неполный и полный графы, ориентированный, уникурсальный граф, связный и несвязный графы, дерево, изоморфные графы, планарные (плоские) графы. Выделен ряд задач, решаемых с помощью графов.

Вторая глава данного исследования носит практический характер. Произведенный обзор учебников, входящих в федеральный перечень рекомендуемый Министерством Просвещения РФ, позволил сделать вывод, что в своем большинстве эти издания не подразумевают освещение темы “Графы”. Лишь в учебниках, авторами которых являются Виленкин Н.Я, Г.В. Дорофеев и И.Ф. Шарыгин, И.М. Смирнова и В.А. Смирнов есть небольшие упоминания о графах.

Произведя анализ заданий математических конкурсов за несколько прошедших лет, стало очевидно, что, несмотря на то, что тема графов фактически не поднимается в школьном курсе, значительное количество олимпиад включают в перечень своих заданий задачи, решаемые именно с помощью графов. Самые интересные задания были включены в данное исследование с подробным решением.

Практической частью данного исследования стала разработка факультативного курса для 9 классов “Увлекательные графы”. Курс рассчитан на 5 занятий по 2 часа, каждое из которых проводится с применением кейс – технологии, что позволяет ученикам увидеть практическую направленность графов и в незаурядной форме научиться

решать некоторые олимпиадные задачи. Составлена технологическая карта занятия по теме “Графы. Базовые определения. Лемма о рукопожатии”.

Разработанный факультативный курс может быть использован для проведения учителями математики дополнительных занятий с учениками 9 классов общеобразовательных учреждений.

Таким образом, можно сделать вывод, что все поставленные в выпускной квалификационной работе задачи выполнены, а цель достигнута.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Всероссийская олимпиада школьников по математике. 2019 – 2020 учебный год. Задания для 6 класса. URL: https://vos.olimpiada.ru/upload/files/Arhive_tasks/2019-20/school/math/ans-math-6-sch-msk-19-20.pdf Заглавие с экрана (дата обращения: 20.01.2020).

2. Всероссийская олимпиада школьников по математике. 2019 – 2020 учебный год. Задания для 7 класса. URL: https://vos.olimpiada.ru/upload/files/Arhive_tasks/2019-20/school/math/ans-math-7-sch-msk-19-20.pdf Заглавие с экрана (дата обращения: 20.01.2020).

3. Всероссийская олимпиада школьников по математике. 2019 – 2020 учебный год. Задания для 8 класса. URL: https://vos.olimpiada.ru/upload/files/Arhive_tasks/2019-20/school/math/ans-math-8-sch-msk-19-20.pdf Заглавие с экрана (дата обращения: 20.01.2020).

4. Всероссийская олимпиада школьников по математике. 2017 – 2019 учебный год. Задания для 9 класса. URL: https://vos.olimpiada.ru/upload/files/Arhive_tasks/2017-18/school/math/ans-math-9-day2-reg-17-18.pdf Заглавие с экрана (дата обращения: 20.01.2020).

5. Епишева О.Б. Общая методика обучения математике в средней школе [Текст]: курс лекций: учеб. пособие для студ. пед. вузов. – Тобольск: Изд–во ТГПИ им. Д.И. Менделеева, 2008. – 202 с.

6. Костюченко Р.Ю. Методика обучения учащихся решению математических задач: содержание этапов решения // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий: науч. – практ. журн. 2018. №4. С. 117 – 123.

7. Конкурсы для школьников. Кунгуру. 2019 год. 7 – 8 класс. URL: https://russian-kenguru.ru/konkursy/kenguru/zadachi/2019goda Заглавие с экрана (дата обращения: 18.01.2020).

8. Математика. 5 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин [и др.]; под ред. Н.Я. Виленкина. – 31–е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 280 с.

9. Математика. 6 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин [и др.]; под ред. Н.Я. Виленкина. – 30–е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 288 с.

10. Математика. 5 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев [и др.]; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина; Рос.акад.наук, Рос.акад.образования, издательство “Просвещение” – 12 изд. – М.: “Просвещение”, 2011. – 303 с.

11. Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд. 3–е, испр. и доп. – М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2009. – 232 с.

12. Методика обучения математике. В 2 ч. Часть 1: учебник для среднего профессионального образования / Н.С. Подходова [и др.]; под редакцией Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой. – М.: Юрайт, 2020. – 274 с.

13. Олимпиада “Курчатов” по математике – 2019. Заключительный этап. URL: https://olimpiadakurchatov.ru/2019/final/kurchatov-2019-final-math-9-sol.pdf Заглавие с экрана (дата обращения: 12.01.2020).

14. Олимпиада им. Эйлера. Задания. 2018 год. Региональный этап. День первый. URL: https://www.mccme.ru/euler/2018/reg-day1.pdf Заглавие с экрана (дата обращения: 21.01.2020).

15. Пойя Д. Как решать задачу. – М.: Либроком, 2010. – 208 с.

16. Пойя Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. / Д. Пойа; пер. с англ. В.С. Бермана. – 3–е изд., – М.: URSS, 2010. – 448 с.

17. Пырков В.Е. Лекция 7. Методика обучения решению математических задач. URL: http://docplayer.ru/59657522-Kand-ped-nauk-doc-vyacheslav-evgenevich-pyrkov-lekciya-7-metodika-obucheniya-resheniyu-matematicheskih-zadach.html Заглавие с экрана (дата обращения: 25.11.2019).

18. Педагогика: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Сластенин [и др.]; под ред. В.А. Сластенина. – М.: Академия, 2013. – 576 с.

19. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 7 – 9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. 2–е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2019. – 376 с.

20. Турнир городов. Олимпиада для школьников. Задания. URL: https://www.turgor.ru/problems/40/os-40-sl-avt.pdf Заглавие с экрана (дата обращения: 14.01.2020).

21. Фирсова Е. В. История развития дискретной математики и ее роль в обучении информатиков–экономистов // Молодой ученый. – 2012. – №2. – С. 304 – 311.

22. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи [Текст]: пособие для учащихся. М.: Просвещение, 2004. – 175 с.

23. Яковлев И.В. Олимпиадная математика. Графы. URL: https://mathus.ru/math/graphs.pdf Заглавие с экрана (дата обращения: 26.01.20)

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 08 2019 г.
Паньженский В. И.

Задание

По ВКР студента Шарниковой Анастасии Антоновны
(ФИО полностью)

Тема работы «Графы как средство обучения учащихся поиску решения задач»

Утверждена приказом по Университету от «15.10» 2019 г. № _____

Срок сдачи студентом законченной работы «23» мая 2020 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1	Подбор литературы по теме.	сентябрь	выполнено
2.	Научно–методические основы организации обучения поиска решения задач, посредством графов в основной школе.	октябрь-декабрь	выполнено
3.	Анализ учебной литературы и математических олимпиад на предмет наличия задач, решаемых с помощью графов	январь	выполнено
4.	Разработка программы факультативного курса «Увлекательные графы».	февраль	выполнено
5.	Разработка технологической карты урока.	март	выполнено
6.	Разработка методических рекомендации по каждому занятию с использованием кейс-технологий.	апрель	выполнено
7.	Оформление работы.	май	выполнено
8.	Подготовка презентации и выступления.	июнь	выполнено

Дата выдачи задания «23» 09 2019 г.

Руководитель _____ Глебова М.В
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Шарникова А.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Шарниковой Анастасии Антоновны

ЗАЯВЛЕНИЕ.

Я, Шарникова Анастасия Антоновна, студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 “Педагогическое образование”, профиль подготовки “Математика”, прошу провести проверку с использованием системы “Антиплагиат” бакалаврской работы на тему “Графы как средство обучения учащихся поиску решения задач”, выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета “Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программ бакалавриата, программ специалитета и программ магистратуры”, согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись студента

26.05.2020
дата

ВКР представлена на проверку (дата) 27.05.2020

Руководитель ВКР Глебова М.В.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Графы как средство обучения учащихся поиску решения задач» студентки 5 курса Шарниковой А.А. направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР М.В. Глебова

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: Шарникова Анастасия Антоновна nastya.sharnikova@mail.ru / ID: 2352
Проверяющий: Глебова Мария Владимировна (mymorgun@mail.ru / ID: 271)
Организация: Пензенский государственный университет

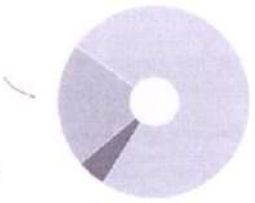
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://pnzgu.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 43
Начало загрузки: 30.05.2020 19:05:27
Длительность загрузки: 00:00:14
Имя исходного файла: Диплом_5 доработка рекомендаций - копия.pdf
Название документа: Диплом_5 доработка рекомендаций - копия.pdf
Размер текста: 1 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 99595
Слов в тексте: 12942
Число предложений: 1307

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 01.06.2020 08:03:41
Длительность проверки: 00:00:26
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска "ПГУ", Модуль поиска общеупотребительных выражений, Кольцо вузов, Цитирование, Модуль поиска перефразирований eLIBRARY.RU, Коллекция РГБ, Модуль поиска перефразирований Интернет, Сводная коллекция ЭБС, Коллекция eLIBRARY.RU, Модуль выделения библиографических записей, Коллекция Медицина, Модуль поиска ИПС "Адилет", Модуль поиска переводных заимствований, Модуль поиска переводных заимствований по elibrary (EnRu), Модуль поиска переводных заимствований по интернет (EnRu), Коллекция ГАРАНТ, Коллекция Патенты, Коллекция Wiley



ЗАИМСТВОВАНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
5,39%	0%	20,54%	74,07%

М.В. Глебова

ОТЗЫВ

РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

на тему: «Графы как средство обучения учащихся поиску решения задач»

студентки Шарниковой Анастасии Антоновны

факультета физико-математических и естественных наук

направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,

профиль подготовки «Математика», гр. 15ЗФПМ51.

Выпускная квалификационная работа Шарниковой А. А. посвящена процессу обучению учащихся поиску решения задач с помощью графов. Необходимость обучения учащихся данному способу поиска решения задач, обусловлено тем что, несмотря на то что тема графов фактически не поднимается в школьном курсе, значительное количество олимпиад включают в перечень своих заданий задачи, решаемые именно с помощью графов.

В первой главе выпускной квалификационной работы произведен обзор основных средств обучения, рассмотрен процесс решения задач, раскрыты основные понятия теории графов, выделен ряд задач из школьных олимпиад, решаемых с помощью графов.

Во второй главе произведенный обзор учебников и заданий математических конкурсов на предмет наличия задач, решаемых с помощью графов. Практической частью данной работы стала разработка факультативного курса для 9 классов “Увлекательные графы”. По каждой теме занятия, включенной в программу факультативного курса, приведены методические разработки с применением кейс – технологии, что позволяет ученикам увидеть практическую направленность графов и в незаурядной форме научиться решать некоторые олимпиадные задачи. Разработана технологическая карта одного занятия.

Разработанный факультативный курс может быть использован для проведения учителями математики дополнительных занятий с учениками 9 классов общеобразовательных учреждений.

Выпускная квалификационная работа Шарниковой А. А. «Графы как средство обучения учащихся поиску решения задач» заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР,
Глебова Мария Владимировна,
доцент кафедры «Математическое образование»,
доцент, к.ф.-м. н.

(подпись)