

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Пензенский государственный университет»

Факультет вычислительной техники
Кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования

ОТЧЕТ

по производственной практике
(научно-исследовательская работа)
«Приближенное вычисление определенных интегралов»

Выполнил: студент гр. 19ВМ1

Яковлева А. Д.

Руководитель: старший преподаватель

Мартынова В. Ю.

Пенза 2021

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Пензенский государственный университет»

«УТВЕРЖДАЮ»

Зав. кафедрой МСМ, д.ф.-м.н.

_____ Ю.Г. Смирнов

ЗАДАНИЕ

на производственную практику

(4 семестр)

Вариант 1

Реализовать программно-численные методы для приближенного вычисления интегралов. Корректность работы программы необходимо проверить на тестовой задаче, представленной ниже.

Вычислить определенный интеграл:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos(x)}{(1 + \cos(x) - \sin(x))^2} dx.$$

Руководитель работы, ст. преподаватель

Мартынова В. Ю.

Содержание

I. Теоретическая часть	4
1. Методы интегрирования.....	4
2. Метод левых прямоугольников	6
3. Метод трапеций.....	7
II. Практическая часть	8
Заключение	12
Список используемой литературы	13

I. Теоретическая часть

1. Методы интегрирования

Интегрирование функций является составной частью многих научных и технических задач. Поскольку аналитическое интегрирование не всегда возможно, используют различные методы численного интегрирования [5].

Математическая постановка задачи: необходимо найти значение определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

где a, b – конечны, $f(x)$ – непрерывна на $[a; b]$.

При решении практических задач часто бывает, что интеграл неудобно или невозможно взять аналитически: он может не выражаться в элементарных функциях, подынтегральная функция может быть задана в виде таблицы и пр. В таких случаях применяют методы численного интегрирования [1].

Известно, что определенный интеграл численно равен значению площади фигуры, ограниченной подынтегральной функцией, осью x , прямыми $x = a$ и $x = b$. Общий подход к вычислению интеграла численными методами, сводится к нахождению этой площади. Чаще всего интервал $[a; b]$ разбивают множеством меньших интервалов. Находят приблизительно площади каждой полоски и сумму площадей. Формулы численного интегрирования носят название *квадратурных формул*.

Можно выделить три группы методов:

1) Методы с разбиением отрезка интегрирования на равные интервалы. Разбиение на интервалы производится заранее, обычно интервалы выбирают равными. Вычисляют площади и суммируют их (методы прямоугольников, трапеций, Симпсона).

2) Методы с разбиением отрезка интегрирования с помощью специальных точек (формулы типа формул Гаусса).

3) Вычисление интегралов с помощью случайных чисел (метод Монте – Карло) [3].

2. Метод левых прямоугольников

2.1 Суть метода прямоугольников.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Нам требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Обратимся к понятию определенного интеграла [2]. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Внутри каждого отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ выберем точку ξ_i . Так как по определению определенный интеграл есть предел интегральных сумм при бесконечном уменьшении длины элементарного отрезка разбиения

$$\lambda = \max_{i=1,2,\dots,n} (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0,$$

то любая из интегральных сумм является приближенным значением интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Суть метода прямоугольников заключается в том, что в качестве приближенного значения определенного интеграла берут интегральную сумму [4].

2.2 Метод левых прямоугольников.

В методе прямоугольников криволинейную трапецию, ограниченную функцией $f(x)$ на каждом отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяют на прямоугольник [5]. В методе левых прямоугольников высота прямоугольника выбирается равной $y_i = f(x_i)$ – значение функции в крайней левой точке отрезка $[x_i; x_{i+1}]$, где $x_i = a + i \cdot h$ (i – номер точки); $x_0 = a$; $x_n = b$; шаг интегрирования $h = \frac{b-a}{n}$. Площадь этого прямоугольника $S_i = h \cdot y_i$. Тогда интеграл приближенно может быть найден с помощью суммы

$$I \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i.$$

3. Метод трапеций

Метод трапеций – это метод приближённого интегрирования, полезный в тех случаях, когда нет возможности найти первообразную функции и вычислить интеграл через неё [1].

Метод трапеций, по сути, похож на метод прямоугольников, но при этом он менее точный, чем метод средних прямоугольников.

В методе трапеций криволинейная трапеция на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ заменяется на прямолинейную, основаниями которой являются отрезки y_{i+1} и y_i . Шаг интегрирования $h = \frac{b-a}{n}$. Площадь трапеции $S_i = h \cdot \frac{y_{i+1} + y_i}{2}$. Тогда интеграл может быть найден с помощью суммы

$$I = \sum_{i=0}^n S_i = \sum_{i=0}^n h \cdot \frac{y_{i+1} + y_i}{2} = h \cdot \frac{y_0 + y_n}{2} + h \cdot \sum_{i=1}^{n-1} y_i.$$

II. Практическая часть

Задание №1. Найти точное решение определенного интеграла:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos(x)}{(1 + \cos(x) - \sin(x))^2} dx.$$

Решение. Для решения этого интеграла будем использовать универсальную тригонометрическую подстановку $u = \tan \frac{x}{2}$, $du = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx$; тогда $\sin(x) = \frac{2u}{u^2+1}$, $\cos(x) = \frac{1-u^2}{u^2+1}$ и $dx = \frac{2du}{u^2+1}$, также изменятся и границы интеграла: нижняя будет равна -1, а верхняя 0.

Подставляя все, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \frac{2(1-u^2)}{(u^2+1)^2 \left(1 + \frac{1-u^2}{u^2+1} - \frac{2u}{u^2+1}\right)^2} du = \\ & = \int_{-1}^0 \frac{2(1-u^2)}{(u^2+1+1-u^2-2u)^2} du = \int_{-1}^0 \frac{u+1}{2(1-u)} du. \end{aligned}$$

Разобьём теперь наш интеграл на два:

$$\int_{-1}^0 \frac{u+1}{2(1-u)} du = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{2} \right) du = \int_{-1}^0 \frac{1}{1-u} du - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 du.$$

Найдем, чему равен первый интеграл:

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{1-u} du = -\ln|1-u| \Big|_{-1}^0 = \ln|2|.$$

Найдем, чему равен первый интеграл:

$$\int_{-1}^0 du = u \Big|_{-1}^0 = 1.$$

Подставим найденные результаты и получим, что:

$$\int_{-1}^0 \frac{u+1}{2(1-u)} du = \int_{-1}^0 \frac{1}{1-u} du - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 du = \ln|2| - \frac{1}{2} \approx 0,19315.$$

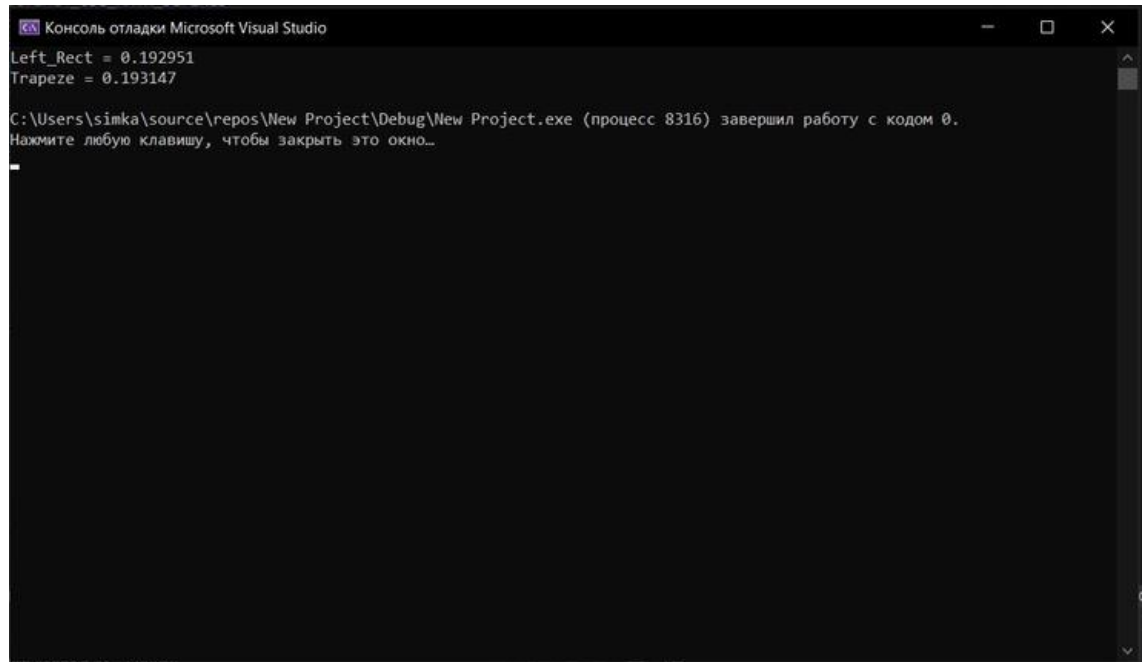
Задание №2. Реализовать программно-численные методы для приближенного вычисления интеграла:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos(x)}{(1 + \cos(x) - \sin(x))^2} dx.$$

Реализация.

```
#define _USE_MATH_DEFINES
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;
double f(double x) {
    return cos(x) / pow((1 + cos(x) - sin(x)), 2);
}
#Объявляем функцию, в которой будем считать интеграл методом левых прямоугольников
double Left_Rect(double a, double b, int n) {
    double h = (b - a) / n;
    double sum = 0.0;
    for (int i = 0; i <= n - 1; i++) {
        sum += h * f(a + i * h);
    }
    return sum;
}
#Объявляем функцию, в которой будем считать интеграл методом трапеций
double Trapeze(double a, double b, int n) {
    double h = (b - a) / n;
    double sum = f(a) + f(b);
    for (int i = 1; i <= n - 1; i++) {
        sum += 2 * f(a + i * h);
    }
    sum *= h / 2;
    return sum;
}
int main()
{
    double a, b;
    int n;
    #Задаем пределы интегрирования a и b, а также число разбиений n
    a = -M_PI / 2;
    b = 0;
    n = 1000;
    #Выводим результаты на экран
    cout << "Left_Rect = " << Left_Rect(a, b, n) << endl;
    cout << "Trapeze = " << Trapeze(a, b, n) << endl;
    return 0;
}
```

Результат работы программы.



The screenshot shows the 'Консоль отладки Microsoft Visual Studio' (Microsoft Visual Studio Debug Console) window. The output text is as follows:

```
Left_Rect = 0.192951
Trapeze = 0.193147

C:\Users\simka\source\repos\New Project\Debug\New Project.exe (процесс 8316) завершил работу с кодом 0.
Нажмите любую клавишу, чтобы закрыть это окно...
```

Заключение

В данной работе были рассмотрены два метода численного интегрирования: метод левых прямоугольников и метод трапеций.

В практической части работы было получено точное решение определенного интеграла, а также реализованы программно-численные методы для приближенного вычисления этого интеграла.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что наиболее точным методом численного интегрирования из двух представленных, является метод трапеций, так как его ответ ближе к точному решению интеграла, по сравнению с ответом, полученным методом левых прямоугольников.

Список используемой литературы

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 6-е изд. – М. : БИНОМ, 2008. – 636 с.
2. Зорич, В. А. Математический анализ. Часть I. / В. А. Зорич. – 10-е изд., испр. – М. : МЦНМО, 2019. – 564 с.
3. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
4. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование: учебное пособие / В. Д. Колдаев; под ред. Л. Г. Гагариной. – М. : ФОРУМ, 2009. – 336 с.
5. Самарский, А. А. Численные методы: учебное пособие / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.