

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методические аспекты изучения производной в школьном курсе»

Студент

Е.Бацуна 06.05.25
(подпись, дата)

Бацунина Екатерина Дмитриевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Никитина 06.05.25
(подпись, дата)

Никитина О. Г.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

М- 23.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е. Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой

Паньж. 2.06.25
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 26.06.25 № 1)

Секретарь ГЭК

М 26.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ.....	6
1.1 История развития понятия производной.	6
1.2 Анализ существующих методических пособий и учебников по теме «Производная». Анализ различных подходов к преподаванию темы «Производная».....	9
1.3 Применение производной в ЕГЭ.	13
1.4 Психолого-педагогические особенности усвоения темы «Производная» учащимися. Особенности восприятия абстрактных понятий, работа с графиками, развитие логического мышления.	24
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ	29
2.1 Разработка методической памятки и комплекса практических упражнений для подготовки к восьмому заданию ЕГЭ по математике.	29
2.2 Конспект урока контроля знаний и коррекции по теме «Применение производной».	35
2.3 Конспект урока открытия новых знаний по теме «Уравнение касательной».	46
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	55
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	56

ВВЕДЕНИЕ

Переход из средней школы обучения в старшую начинается с изучения алгебры и начал анализа в 10 классе. При этом учащиеся сталкиваются с довольно немалыми препятствиями. Это касается и одной из ключевых тем школьного курса — «Производной», особенно самого понятия производной.

Практика доказывает, что сравнительно несложно научить учащихся давать формулировку производной, вычислять ее, находить производную функции в точке, используя основные правила дифференцирования. Без каких-либо затруднений учащиеся решают задачи и на применение производной к исследованию функции. Для этого, приступая к изучению темы, нужно найти верный путь введения производной, изложить на доступном для понимания всеми учащимися уровне учебный материал. Если учащийся сможет использовать определение производной для ее нахождения, показать геометрический и физический смыслы, то можем отметить, что он сумеет и далее применять ее в различных приложениях, например, в физике, химии или биологии.

Актуальность темы выпускной квалификационной работы, состоит в том, что изучение производной в школьном курсе математики является важным элементом математической подготовки учащихся. Производная как инструмент для исследования функций, нахождения экстремумов и решения прикладных задач широко применяется в различных областях науки и техники: физике, экономике, биологии и других. Владение методами дифференцирования позволяет глубже понять свойства функций, моделировать реальные процессы и применять математические знания в практической деятельности. Однако изучение производной в школьном курсе часто вызывает трудности у учащихся. Это обусловлено как сложностью самого понятия, так и отсутствием достаточного количества наглядных примеров и практических задач, иллюстрирующих его применение. В связи с этим разработка эффективных методик обучения производной, учитывающих

специфику школьного курса и особенности восприятия материала учащимися, становится крайне актуальной задачей.

Объектом исследования выпускной квалификационной работы является процесс изучения производной в школьном курсе математики учащимися 10-11 классов.

Предмет исследования - методические аспекты изучения производной, включая анализ существующих методических подходов, разработку новых методических приемов и оценку их эффективности.

Целью работы является разработка методических рекомендаций по изучению производной в школьном курсе математики, направленных на повышение эффективности усвоения материала и развитие навыков применения производной при решении различных задач. Для достижения этой цели были поставлены следующие *задачи*.

1. Провести анализ существующих методик преподавания производной в школьном курсе математики.

2. Изучить психолого-педагогические особенности восприятия учащимися 10-11 классов абстрактных математических понятий, связанных с производной.

3. Выявить типичные ошибки и затруднения учащихся при изучении производной.

4. Разработать систему методических приёмов, направленных на преодоление выявленных затруднений и повышение мотивации учащихся к изучению производной. В частности, разработать:

- памятку для подготовки к восьмому заданию ЕГЭ;
- урок открытия новых знаний по теме «Уравнение касательной»;
- урок закрепления изученного материала по теме «Производная и ее применение».

5. Представить конспекты уроков и сформулировать выводы.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников.

Первая глава посвящена теоретическим основам изучения производной, вторая — разработке методических материалов. Заключение содержит обобщение полученных результатов и выводы о перспективах дальнейшего исследования.

Практическая значимость работы. Предложенные методические рекомендации могут быть использованы при разработке уроков и планировании учебного процесса по теме «Производная».

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 История развития понятия производной

Понятие производной, являющееся одним из краеугольных камней дифференциального исчисления, имеет глубокие исторические корни, уходящие в античность, и прошло долгий путь развития, прежде чем обрести современный вид.

I. Зарождение и предыстория (Античность – XVII век).

Хотя непосредственно понятие производной не существовало в древности, идеи, лежащие в его основе, уже тогда начали зарождаться. Одной из главных задач, стоявших перед математиками, было решение проблем, связанных с касательными к кривым и вычислением площадей фигур (задачами, обратными друг другу и тесно связанными с производной и интегралом).

- Древняя Греция. Значительный вклад внесли древнегреческие математики, в частности, Евклид, Архимед и Аполлоний Пергский. Архимед разработал методы вычисления площадей и объемов, которые можно считать предтечами интегрального исчисления. Он использовал метод исчерпывания, чтобы аппроксимировать площадь криволинейных фигур, вписывая и описывая многоугольники. Его работы заложили основы для понимания предельных переходов. Аполлоний исследовал конические сечения, что привело к изучению касательных к этим кривым.

- Средневековье и эпоха Возрождения. В этот период интерес к математике сохранился, но значительного прогресса в развитии идей дифференциального и интегрального исчисления не произошло. Основным достижением было сохранение и изучение античного наследия.

II. Рождение дифференциального и интегрального исчисления (XVII век)

XVII век стал эпохой великих открытий в математике. В этот период произошло рождение дифференциального и интегрального исчисления, заслуга которого принадлежит двум великим ученым: Исааку Ньютону и Готфриду Вильгельму Лейбницу. Они независимо друг от друга разработали фундаментальные методы, которые в корне изменили математику и оказали огромное влияние на развитие науки.

- Исаак Ньютон (1643-1727). Разработал метод флюксий, который являлся основой для дифференциального и интегрального исчисления. В своих работах, в частности, в “Математических началах натуральной философии” (1687), Ньютон рассматривал переменные величины (флюэнты) и скорости их изменения (флюксии). Он разработал алгоритмы для нахождения касательных к кривым, определения скоростей и ускорений. В его подходе дифференциальное исчисление было тесно связано с физикой, особенно с механикой. Именно Ньютон первым понял фундаментальную связь между задачами нахождения касательных и площадей, что привело к пониманию обратимости операций дифференцирования и интегрирования.

- Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716). Независимо от Ньютона, разработал другую форму дифференциального и интегрального исчисления. Его подход был более ориентирован на математику и включал в себя более удобные обозначения, такие как dx , dy , $\int$, что сделало его методы более удобными для использования. Он сформулировал правила дифференцирования и интегрирования, которые мы используем и сегодня. Лейбниц акцентировал внимание на алгебраической формализации, что упростило работу с производными и интегралами. Он первым ввел символ производной (хотя и не в современной форме). Лейбниц также понимал взаимную обратность операций дифференцирования и интегрирования.

III. Развитие и формализация (XVIII-XIX века).

После открытия Ньютона и Лейбница начался бурный период развития дифференциального и интегрального исчисления. Ученые активно использовали новые методы для решения задач физики, механики,

астрономии. Однако, подходы Ньютона и Лейбница не были достаточно строгими с математической точки зрения, что вызывало споры и критику.

- XVIII век. Основные усилия были направлены на применение новых методов к решению конкретных задач. Ученые, такие как братья Бернулли, Леонард Эйлер, Жозеф Луи Лагранж, внесли огромный вклад в развитие математического анализа. Эйлер разработал многие важные результаты, ввел обозначения для тригонометрических функций, числа e , π , и стал одним из основных популяризаторов исчисления. Лагранж попытался создать исчисление без использования бесконечно малых, основываясь на разложениях функций в ряды.

- XIX век. К XIX веку стало ясно, что методы дифференциального и интегрального исчисления нуждаются в более строгом обосновании. Основным недостатком подходов Ньютона и Лейбница было использование бесконечно малых величин без строгого определения. Большой вклад в формализацию внесли Огюстен Луи Коши, Карл Вейерштрасс, Бернхард Больцано. Коши дал строгое определение предела и непрерывности, что позволило ему формально определить производную и интеграл. Вейерштрасс предложил ε - δ -определение предела, что стало основой для современного математического анализа. Эти ученые заложили фундамент для строгого математического обоснования дифференциального и интегрального исчисления, сделав его надежным инструментом для решения математических и прикладных задач.

IV. Современный период (XX-XXI века).

В XX и XXI веках дифференциальное исчисление продолжило развиваться, но уже в более формализованном виде.

Таким образом, история развития понятия производной представляет собой яркий пример эволюции математической мысли, от зарождения идеи в античности до строгой формализации в XIX веке и дальнейшего развития в современном мире. Эта история показывает, как тесно связана математика с потребностями практики, как постепенно уточнялись и совершенствовались

методы решения задач. Знание истории развития понятия производной позволяет глубже понять его природу и значимость, а также является важным компонентом математического образования.

1.2 Анализ существующих методических пособий и учебников по теме «Производная». Анализ различных подходов к преподаванию темы «Производная»

1. Анализ учебника Ш. А. Алимова [2].

Структура учебника.

Глава V. Производная и ее применение.

§22. Производная.

§23. Производная степенной функции.

§24. Правила дифференцирования.

§25. Производные некоторых элементарных функций.

§26. Геометрический смысл производной.

Глава VI. Применение производной к исследованию функций.

§27. Возрастание и убывание функции.

§28. Экстремумы функции.

§29. Применение производной к построению графиков функции.

§30. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Понятие производной. Определение производной.

В учебнике Алимова [2] вначале определение производной дается через механический смысл: производная - это мгновенная скорость. Это соответствие, пожалуй, наиболее доступно для понимания школьника. Рассмотрев задачу на скорость, Алимов сразу же переходит к точному определению производной через пределы, кратко объяснив значение понятия «предел» в той же задаче применительно к мгновенной скорости. Проанализировав систему ознакомления учащегося с понятием производной в этих учебниках, можно выявить следующие особенности: короткое

вступление главы о производных в учебнике Алимова дает возможность учащимся, получив минимум информации о производной, как можно быстрее приступить к вычислению производных. Далее, понятие производной обогащается новыми приложениями и свойствами и все это немедленно подкрепляется задачами.

Вычисление производной. Правила дифференцирования.

Учебник Алимова [2] содержит доказательства только двух первых формул, зато к каждой формуле есть по 1-2 примера.

Что касается сложной функции: $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$. Алимов решил упростить данный раздел, заменив формулу сложной функции на ее частный случай - линейную замену аргумента: $(f(kx + b))' = kf'(kx + b)$.

Эта формула, конечно, гораздо менее ёмкая, зато ее доказательство короче и менее абстрактно.

Производные элементарных функций.

Алимов рассматривает степенную функцию перед правилами дифференцирования, а формулы производных других элементарных функций (показательной, логарифмической, тригонометрических) - после и в отдельном пункте. Доказательство приводится только для синуса, но для каждой функции есть решенная задача. Удобство заключается в том, что все элементарные функции и правила дифференцирования рассматриваются последовательно и нет необходимости возвращаться к уже пройденному материалу.

Исследование функций. Возрастание и убывание функций.

Формулировка признаков возрастания и убывания представлена в начале раздела.

Экстремумы функций.

Алимов делает упор на рассмотрение задач, разбирает на примере конкретной задачи.

Схема исследования функций.

Исследует только на монотонность.

Приложения производной. Применение производной в физике.

Приближенные вычисления автором не рассматриваются.

Стандарту общего образования соответствует.

2. Анализ учебника А.Г.Мерзляка [15].

Структура учебника.

Глава 5. Производная и ее применение.

§33. Представление о пределе функции в точке и о непрерывности функции в точке.

§34. Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции.

§35. Понятие производной.

§36. Правила вычисления производных.

§37. Уравнение касательной.

§38. Признаки возрастания и убывания функции.

§39. Точки экстремума функции.

§40. Применение производной при нахождении наибольшего и наименьшего значений функции.

§41. Построение графиков функции.

- Вторая производная
- Применение производной для решения уравнений и доказательства неравенств.

Подход Мерзляка отличается от других авторов тем, что глава, посвященная производной, начинается с определения предела функции в точке и непрерывности функции в точке. Понятие предела рассматривается на примерах. В следующем пункте автор объясняет, что такое касательная к графику функции и дает определение мгновенной скорости. Причем, в этом пункте автор дает определение приращения аргумента функции в точке.

Определение производной: Производной функции f называется функция f' , значение которой в точке x_0 выражается формулой:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

После введения определения производной через предел, дается схема нахождения производной по определению:

- 1) найти выражение для приращения $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ функции f ;
- 2) найти отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;
- 3) найти предел полученного отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $x \rightarrow 0$.

Далее Мерзляк выводит геометрический и механический смысл производной, в учебнике представлены различные графики и полное их описание.

Вычисления производной. Правила дифференцирования.

С помощью примеров выводятся формулы вычисления производных элементарных функций. Формулы более сложных функций (показательной, тригонометрической) даются как факт, без доказательств.

Правила дифференцирования представлены в отдельном пункте. Для начала рассматривается пример, после в виде теорем представлены правила, и их доказательства. Что касается сложной функции $y'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0)$, Мерзляк дает ее определение и формулу без доказательства, и далее рассматривает пример на ее применение.

Рассматривается применение производной: для нахождения экстремумов; для отыскания наибольших и наименьших значений функции на отрезке; для исследования функций на возрастание и убывание.

Даются определения: максимума и минимума функции. Определяется правило отыскания наибольших и наименьших значений функции на отрезке. Производная второго порядка, выпуклость функции.

Таким образом, можно сделать вывод, что учебник Ш. А. Алимова [2] делает больший упор на практическую сторону. В тексте много примеров решения задач, некоторые пункты даже целиком состоят из них. К каждому пункту прилагается большой набор задач для самостоятельного решения.

Доказательства - слабая сторона учебника, т. к. они кратки, а зачастую их нет совсем. Некоторые аспекты темы опущены.

Что касается учебника А. Г. Мерзляка [15], он позволяет сформировать у учащихся прочную базу знаний и умений, необходимых для дальнейшего изучения математического анализа и его приложений. Учебник обеспечивает научную корректность и систематичность изложения, предоставляя строгие определения и доказательства основных теорем. Наличие большого количества примеров и задач различной сложности способствует закреплению теоретического материала и формированию практических навыков.

1.3 Применение производной в ЕГЭ

Одним из фундаментальных инструментов математического анализа и одновременно одним из ключевых элементов, оцениваемых на едином государственном экзамене по математике профильного уровня, является понятие производной. Знание и понимание производной не только позволяет решать широкий спектр задач, но и демонстрирует глубокое понимание математических концепций и умение применять их на практике. Задания, связанные с производной, охватывают различные разделы курса алгебры и начал математического анализа, включая исследование функций, нахождение экстремумов, решение оптимизационных задач, а также интерпретацию графиков и диаграмм.

Успешное освоение методов применения производной является важным шагом на пути к успешной сдаче ЕГЭ, открывающего двери в высшие учебные заведения технической и естественно-научной направленности. Однако, как показывает практика, многие учащиеся сталкиваются с трудностями при решении задач, требующих использования производной. Эти трудности могут быть связаны с недостаточным пониманием теоретических основ, неумением применять правила дифференцирования,

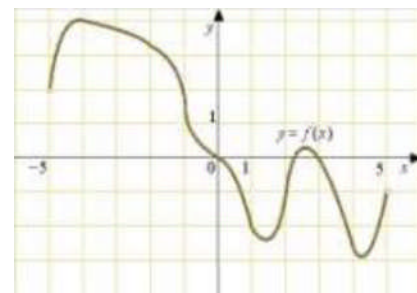
сложностями в анализе графиков или ошибками в построении математических моделей при решении задач прикладного характера.

В связи с этим данный раздел выпускной квалификационной работы посвящён анализу применения производной в заданиях ЕГЭ по математике профильного уровня.

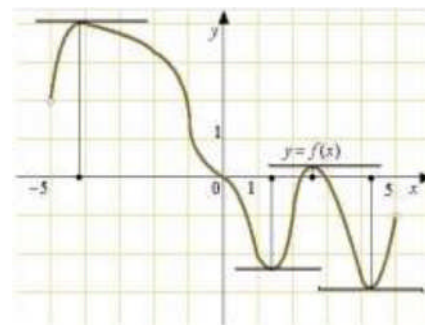
В ЕГЭ производная применяется как в первой части заданий, так и во второй. Для начала рассмотрим задание 8 из первой части. В этом задании, как правило, дан график функции или её производной, и нужно при помощи этого графика сделать выводы про функцию или её производную.

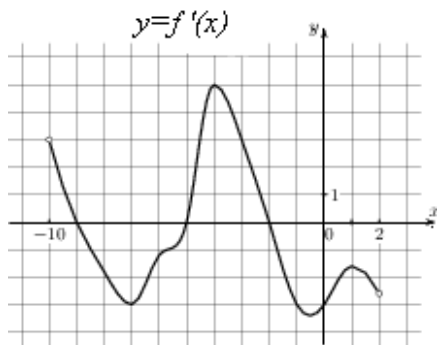
Решение этого номера не займет у ученика много времени, но оно требует особой внимательности при прочтении задания. Зачастую причиной ошибок в восьмом номере является недостаточно внимательное ознакомление с условием. Самая распространённая ошибка заключается в том, что учащиеся не обращают должного внимания на то, что представлено на изображении: график самой функции или график её производной. Обратим внимание на следующие пары задач. При беглом прочтении они могут показаться ученику одинаковыми. Но это не так!

1.1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.



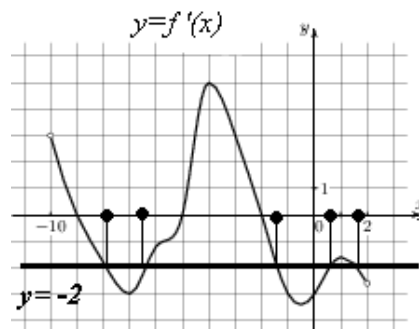
Решение. Прямая $y = 6$, о которой идет речь в условии, параллельна оси Ox . Следовательно касательная к графику функции также должна быть параллельна оси Ox . Это условие выполняется для точек экстремума функции. Таких точек на рисунке четыре (они отмечены на оси Ox).





1.2. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.

Эта задача по формулировке похожа на предыдущую. Но это принципиально другая задача! Здесь на рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$.



Решение. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 параллельна прямой $y = kx + b$ (или совпадает с ней), если $f'(x_0) = k$.

Угловым коэффициентом прямой $y = -2x - 11$ равен -2 . Поэтому нас интересует число решений уравнения $f'(x_0) = -2$. Из рисунка хорошо видно, что число решений этого уравнения равно пяти, то есть производная принимает значение -2 в пяти точках интервала $(-10; 2)$.

Приведем еще примеры «парных» заданий, которые часто путают выпускники.

2.1. Дан график производной некоторой функции. Требуется определить количество точек экстремума этой функции на указанном промежутке.

2.2. Дан график функции. Требуется определить количество точек экстремума этой функции на указанном промежутке или сумму точек экстремума этой функции.

Это далеко не все примеры «парных» заданий, имеющих принципиально разные решения. Невнимательное прочтение их условия, неумение проанализировать эти условия, перевести для себя условие задачи с

«графического» языка на «формальный» язык приводит к досадным ошибкам на экзамене.

По данным ФИПИ в 2024 году средний процент выполнения восьмого номера составил 61,2%. Это свидетельствует о том, что значительная часть выпускников не обладает достаточным уровнем понимания и навыков применения производной для решения задач, требующих как теоретических знаний, так и практического применения.

Далее рассмотрим применение производной при решении задач во второй части ЕГЭ. Номер 16 относится к задачам повышенной сложности и проверяет умение применять математические методы для решения экономических задач. Часто, хотя и не всегда, для успешного решения этих задач требуется использовать производную для оптимизации некоторой целевой функции.

Типы экономических задач №16, решаемых с помощью производной.

Хотя вариативность задач №16 весьма широка, можно выделить несколько основных типов, для решения которых применение производной наиболее эффективно.

1. Оптимизация прибыли/дохода: задачи, в которых требуется найти оптимальный объем производства, цену товара или другие параметры, максимизирующие прибыль или доход предприятия.

2. Минимизация издержек/затрат: задачи, в которых необходимо найти оптимальные условия, минимизирующие производственные издержки, транспортные расходы или другие затраты.

3. Оптимизация инвестиций: задачи, связанные с выбором оптимальной стратегии инвестирования средств с целью максимизации дохода или минимизации риска.

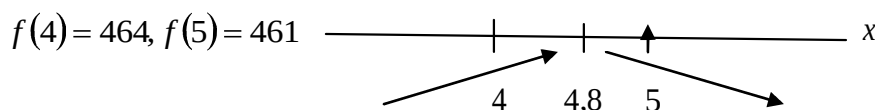
4. Задачи на кредиты и вклады: в некоторых задачах на кредиты и вклады использование производной может упростить анализ и поиск оптимальных параметров (например, размера платежей).

Рассмотрим несколько из них.

Задание №1. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у. е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Решение. Пусть на первый объект будет направлено x рабочих, суточная зарплата которых составит $f_1(x) = 4x^2$. Тогда на второй объект будет направлено $(24 - x)$ рабочих — суточная заработная плата составит $f_2 = (24 - x)^2 = 576 - 48x + x^2$. В день начальник будет должен платить рабочим $f(x) = f_1 + f_2 = 5x^2 - 48x + 576$ у. е.

Рассмотрим функцию $f(x)$ при $0 < x < 24, x \in N$. Это квадратичная функция, старший коэффициент положителен, следовательно, она имеет наименьшее значение при $x_0 = 4,8$. Заметим, что точка минимума не является натуральным числом, поэтому исследуемая функция достигает наименьшего значения в точке 4 или в точке 5. Найдем и сравним эти значения:



Тем самым, на множестве натуральных значений аргумента наименьшее значение функции достигается в точке 5. Поэтому необходимо направить 5 рабочих на первый объект, 19 рабочих — на второй объект. Зарплата рабочих составит 461 у. е.

Ответ: 5 рабочих на 1-й объект, 19 рабочих на 2-й объект; 461 у.е.

Задание 2. В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во

второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно за сутки суммарно добыть в двух областях?

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, а рабочие первой области одинаково эффективно добывают и алюминий, и никель, они могут добывать любой из металлов. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0,1 = 80$ кг металла.

Пусть во второй области алюминий добывают t рабочих, а никель — $160 - t$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5t}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160 - t)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{5t} + \sqrt{800 - 5t}$ для натуральных t , не больших 160. Имеем:

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5t}} - \frac{5}{2\sqrt{800 - 5t}} = \frac{5(\sqrt{800 - 5t} - \sqrt{5t})}{2\sqrt{5t}\sqrt{800 - 5t}}$$

Найдем нули производной: $\sqrt{800 - 5t} - \sqrt{5t} = 0, t = 80$

При t меньших 80 производная положительна, а при t больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f(80) = 40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Тем самым, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 120 кг металла.

Ответ: 120 кг.

Задание 3. Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 1500 - P, 1000 \leq P \leq 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от

продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену товара на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение. Прибыль фирмы выражается как $f(P) = PQ - (3000Q + 5000000) = -P^2 + 18000P - 5000000$, то есть квадратично зависит от цены P . Пусть первоначальная цена равнялась P_0 . После снижения цена стала равняться $0,8P_0$. Наибольшая прибыль достигается при значении P , для которого $f(P)$ достигает максимума. График функции $y = f(P)$ — парабола с ветвями, направленными вниз, поэтому максимум $f(P)$ достигается в вершине параболы. Поскольку $f(P_0) = f(0,8P_0)$ вершина параболы находится в точке $\frac{P_0 + 0,8P_0}{2} = 0,9P_0$. Значит, нужно увеличить цену с $0,8P_0$ до $0,9P_0$, то есть на 12,5%.

Ответ: 12,5.

Как мы видим, использование производной является эффективным методом решения многих экономических задач, предлагаемых в задаче № 16 ЕГЭ по математике профильного уровня. Успешное применение этого метода требует от учащихся не только знания математических формул и алгоритмов, но и умения строить математические модели реальных экономических ситуаций, а также анализировать полученные результаты с учётом ограничений и условий задачи. Тщательная подготовка и практика решения разнообразных задач позволят учащимся успешно справиться с этим сложным, но интересным заданием.

Производная также используется в № 18 ЕГЭ по математике профильного уровня. Задачи с параметром, предлагаемые на ЕГЭ, традиционно вызывают затруднение у школьников. Действительно, для их решения нужна хорошая математическая база, которая создается годами кропотливым трудом учителя и ученика. Нужны отработанные методики решения стандартных задач,

чтобы их можно было использовать и при решении более сложных задач. Нужны глубокие знания и умение переносить усвоенные приемы решения задач в новые нестандартные ситуации.

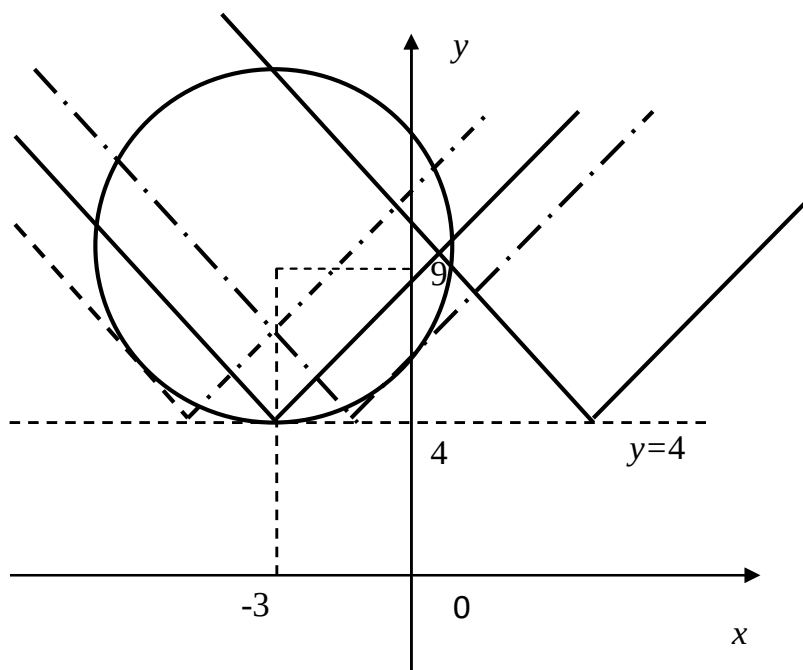
Во многих учебных пособиях по подготовке к ЕГЭ по математике предлагаются задачи следующего типа: найти все значения параметра, при которых уравнение или система уравнений с параметром имеет одно, два или более решений. Некоторые из этих задач можно решить с использованием производной функции. Рассмотрим примеры решения таких задач.

Задача 1 [13]. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x+3)^2 + (y-9)^2 = 25, \\ y = |x-a| + 4 \end{cases}$$

имеет три решения.

Решать аналитически эту систему сложно. Для поиска метода решения сделаем рисунок. Заметим, что первое уравнение это уравнение окружности с центром в точке $(-3; 9)$, радиус которой равен 5. График функции $y = |x-a| + 4$ получается из графика функции $y = |x|$



смещением на 4 единицы вверх вдоль оси Oy и на a единиц вдоль оси Ox вправо или влево в зависимости от знака a . То есть вершина графика функции $y = |x-a| + 4$ при любом значении параметра a находится на прямой $y=4$. Перемещая график этой функции вдоль этой прямой (см.

рисунок), заметим, что у окружности и графика функции $y = |x - a| + 4$ будет три точки пересечения (соответственно система будет иметь три решения) только в том случае, когда либо вершина графика функции имеет координаты $(-3; 4)$, либо один из лучей, составляющих этот график, является касательным к окружности. Рассмотрим эти случаи.

1. Вершина графика функции $y = |x - a| + 4$ имеет координаты $(-3; 4)$ при $a = -3$.

2. Выясним, при каком значении параметра a правый луч графика функции $y = |x - a| + 4$, то есть прямая $y = x - a + 4$ ($x \geq a, a > -3$), является касательной к нижней полуокружности, то есть к графику функции

$\tilde{y} = 9 - \sqrt{25 - (x + 3)^2}$. Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\begin{cases} \tilde{y}'(x_0) = 1, \\ \tilde{y}(x_0) = y(x_0). \end{cases}$$

Преобразуем выражение для функции $\tilde{y}$:

$\tilde{y} = 9 - \sqrt{16 - x^2 - 6x}$ и найдем ее производную: $\tilde{y}' = \frac{x + 3}{\sqrt{16 - x^2 - 6x}}$. Решая

уравнение $\tilde{y}'(x_0) = 1$, то есть $\frac{x_0 + 3}{\sqrt{16 - x_0^2 - 6x_0}} = 1$, получим $x_0 = -3 \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Учитывая, что $x_0 > -3$, имеем: $x_0 = \frac{5\sqrt{2}}{2} - 3$. Решая второе уравнение

системы $\tilde{y}(x_0) = y(x_0)$, то есть $9 - \sqrt{25 - (x_0 + 3)^2} = x_0 - a + 4$, получим:

$$9 - \sqrt{25 - (x_0 + 3)^2} = x_0 - a + 4 \Rightarrow a = \sqrt{25 - (x_0 + 3)^2} + x_0 - 5 =$$

$$\sqrt{25 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - 3\right) - 5.$$

Откуда $a = -8 + 5\sqrt{2}$.

3. Аналогично выясняется, при каком значении параметра a левый луч графика функции $y = |x - a| + 4$, то есть прямая $y = -x + a + 4$ ($x \leq a, a < -3$), является касательной к нижней полуокружности, то есть к графику функции

$\tilde{y} = 9 - \sqrt{25 - (x + 3)^2}$. Рассматривая систему $\begin{cases} \tilde{y}'(x_0) = -1, \\ \tilde{y}(x_0) = y(x_0), \end{cases}$ получим

$$a = 2 - 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $-3; -8 + 5\sqrt{2}; 2 - 5\sqrt{2}$.

Задача 2 [13]. Найти все значения параметра a , при которых система

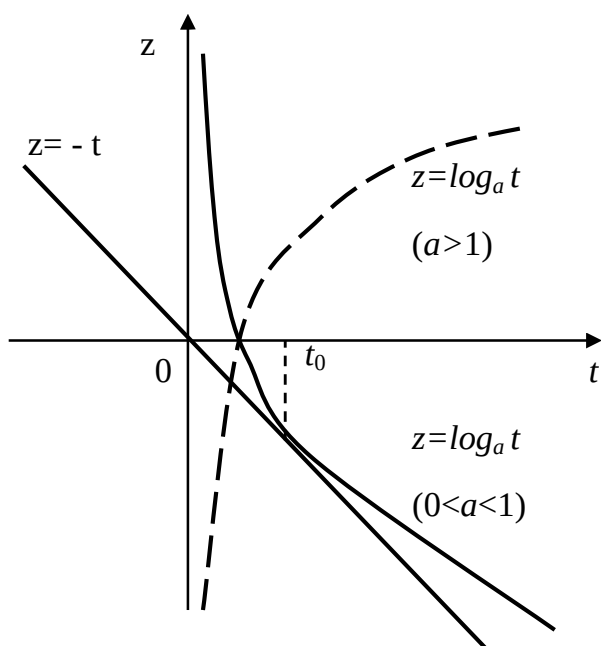
$$\begin{cases} \log_a(x + y - 1) = x - 3, \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Отметим, прежде всего, допустимые значения параметра a : $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Выразим из второго уравнения системы y и подставим в первое уравнение. Получим: $\log_a(3 - x) = x - 3$. Обозначив $3 - x = t$, придем к уравнению:

$$\log_a t = -t.$$

Так как каждому решению t этого уравнения соответствует единственная пара $(x; y)$, которая будет являться решением системы, то нас интересует, при каких значениях параметра a это уравнение имеет единственное решение. Найти точное решение этого уравнения не удастся, но это и не



требуется. Построим графики функций $\tilde{z} = \log_a t$ и $z = -t$ и выясним, при каких значениях параметра a эти графики пересекаются лишь в единственной точке.

Из рисунка видно, что при любом $a > 1$ графики пересекаются в единственной точке. Следовательно, при всех $a > 1$ система имеет единственное

решение. А при $0 < a < 1$ графики будут пересекаться в единственной точке только в том случае, когда прямая $z = -t$ является касательной к графику

функции $\tilde{z} = \log_a t$. То есть когда $\tilde{z}'(t_0) = -1$ и $\tilde{z}(t_0) = z(t_0)$. Найдем производную функции $\tilde{z} = \log_a t$. Получим $\tilde{z}' = \frac{1}{t \ln a}$. Решая уравнение

$$\tilde{z}'(t_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{t_0 \ln a} = -1, \text{ найдем } t_0 = -\frac{1}{\ln a}. \text{ Подставим } t_0 = -\frac{1}{\ln a} \text{ во}$$

второе уравнение $\tilde{z}(t_0) = z(t_0)$ и решим его относительно параметра a :

$$\log_a t_0 = -t_0 \Leftrightarrow \log_a \left(-\frac{1}{\ln a} \right) = \frac{1}{\ln a} \Leftrightarrow \frac{\ln \left(\frac{1}{\ln a^{-1}} \right)}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{1}{\ln a^{-1}} \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln a^{-1}} = e \Leftrightarrow \ln a^{-1} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = e^{\frac{1}{e}}.$$

Ответ: $a = e^{\frac{1}{e}}$ и $a > 1$.

По данным ФИПИ за 2024 год средний процент выполнения этого номера составляет 5,2%, что доказывает сложность этого задания.

Таким образом, использование производной в задачах с параметрами требует от учащихся не только глубокого понимания концепции производной и умения её вычислять, но и развитого логического мышления, навыков анализа, а также способности комбинировать различные математические методы. Умение находить область определения функции, исследовать функцию на монотонность и экстремумы с учётом параметра, правильно интерпретировать полученные результаты.

Несмотря на то, что не все задачи с параметрами можно эффективно решить с помощью производной, владение этим методом значительно расширяет арсенал инструментов, доступных учащимся, и повышает вероятность успешного решения задания №18 ЕГЭ по математике профильного уровня, даже с учётом крайне низкого процента его выполнения.

1.4 Психолого-педагогические особенности усвоения темы «Производная» учащимися. Особенности восприятия абстрактных понятий, работа с графиками, развитие логического мышления

Изучение темы “Производная” в школьном курсе математики представляет собой трудоемкий процесс, требующий учета психолого-педагогических особенностей учащихся. Успешное усвоение материала зависит не только от математической строгости изложения, но и от понимания того, как ученики воспринимают абстрактные понятия, работают с графической информацией и развивают свое логическое мышление. Данный раздел посвящен анализу этих особенностей с целью разработки более эффективных методов преподавания.

Возрастные и психологические особенности учащихся 10-11 классов.

Учащиеся 10-11 классов находятся в периоде поздней юности и ранней зрелости. Для этого возраста характерны следующие психологические особенности, которые необходимо учитывать при обучении.

- Развитие абстрактного мышления. Способность оперировать абстрактными понятиями и логическими конструкциями достигает высокого уровня, что позволяет изучать достаточно сложные математические концепции. Однако, опора на наглядность и конкретные примеры по-прежнему остается важной.
- Формирование мировоззрения. В этот период происходит активное формирование мировоззрения и ценностных ориентаций. Поэтому важно показывать практическую значимость изучаемого материала и его связь с реальными проблемами.
- Повышение уровня самосознания. Учащиеся более осознанно относятся к своим способностям и интересам, что позволяет им выбирать индивидуальную траекторию обучения. Важно предоставлять возможность для дифференцированного обучения и самостоятельной работы.

- Мотивация к обучению. Мотивация к обучению может быть различной: от интереса к предмету до стремления успешно сдать экзамены и поступить в вуз. Важно учитывать эти мотивы и создавать условия для их реализации.

Особенности восприятия абстрактных понятий, связанных с производной.

Понятие производной является достаточно абстрактным и требует от учащихся умения оперировать с пределами, бесконечно малыми величинами и другими сложными математическими концепциями. Для успешного усвоения этого материала необходимо учитывать следующие особенности восприятия:

- Предел. Понятие предела, лежащее в основе определения производной, часто вызывает затруднения у учащихся. Важно обеспечить интуитивное понимание предела, прежде чем переходить к формальному определению. Можно использовать примеры с последовательностями, приближающимися к определенному числу, или с графиками функций, стремящимися к определенной точке.

- Бесконечно малые величины. Понятие бесконечно малой величины также является достаточно сложным для восприятия. Важно показать, что это не просто “очень маленькое число”, а величина, стремящаяся к нулю. Можно использовать аналогию с микроскопом, позволяющим увидеть все более мелкие детали.

- Производная как скорость изменения. Один из способов сделать понятие производной более понятным – связать его с физическим понятием скорости. Можно рассмотреть примеры с движением тела, где производная описывает мгновенную скорость изменения координаты.

- Геометрический смысл. Геометрический смысл производной (угловой коэффициент касательной) также является важным для понимания. Важно использовать графические иллюстрации и динамические модели, показывающие, как касательная приближается к графику функции при уменьшении приращения аргумента.

- **Формальное определение.** Формальное определение производной через предел должно быть представлено после того, как учащиеся получили интуитивное понимание этого понятия. Важно объяснить смысл каждого элемента в определении и связать его с геометрическим и физическим смыслом производной.

Работа с графиками функций и их производных.

Графики функций и их производных являются важным инструментом для понимания свойств функций и их связей.

Учащиеся должны уметь следующее.

- **Читать графики.** Определять значения функции в заданных точках, находить точки экстремума, определять интервалы монотонности и выпуклости по графику.
- **Строить графики.** Строить графики функций по заданному уравнению и, наоборот, находить уравнение функции по графику.
- **Связывать графики функции и ее производной.** Понимать, как график производной отражает свойства исходной функции (возрастание/убывание, экстремумы, выпуклость).

Для развития этих умений необходимо использовать следующее.

- **Графические иллюстрации.** Использовать большое количество графических иллюстраций, показывающих связь между функцией и ее производной.
- **Интерактивные ресурсы.** Использовать компьютерные программы и онлайн -сервисы, позволяющие строить графики функций и их производных в динамическом режиме.
- **Задания на сопоставление.** Предлагать учащимся задания на сопоставление графиков функций и их производных.
- **Задания на построение.** Предлагать учащимся самостоятельно строить графики функций и их производных, используя полученные знания.

Развитие логического мышления.

Изучение производной требует от учащихся высокого уровня логического мышления, умения анализировать, синтезировать и делать выводы.

Для развития этих способностей необходимо:

- Четкие определения и формулировки. Представлять материал в четкой и логичной форме, с использованием строгих определений и формулировок.
- Доказательства теорем. Предлагать учащимся знакомиться с доказательствами основных теорем, связанных с производной.
- Решение задач. Предлагать учащимся решать задачи различного уровня сложности, требующие применения логического мышления.
- Дискуссии и обсуждения. Организовывать дискуссии и обсуждения, позволяющие учащимся обмениваться мнениями и развивать свои аргументационные навыки.
- Задачи на доказательство. Предлагать учащимся решать задачи на доказательство, требующие построения логических цепочек рассуждений.

Методические рекомендации.

Учитывая психолого-педагогические особенности усвоения темы «Производная», можно сформулировать следующие методические рекомендации:

1. Начинать с интуитивного понимания. Прежде чем переходить к формальным определениям, необходимо обеспечить интуитивное понимание понятия производной, связав его с физическими и геометрическими представлениями.
2. Использовать наглядность. Активно использовать графические иллюстрации, динамические модели и компьютерные программы для визуализации понятий и закономерностей.
3. Предоставлять возможность для дифференцированного обучения. Учитывать индивидуальные особенности учащихся и предлагать им задания различного уровня сложности.
4. Мотивировать учащихся. Показывать практическую значимость изучаемого материала и его связь с реальными проблемами.
5. Развивать логическое мышления. Представлять материал в четкой и логичной форме, предлагать учащимся решать задачи на доказательство и участвовать в дискуссиях.

6. Создавать положительную эмоциональную атмосферу. Поддерживать учащихся, поощрять их активность и самостоятельность, создавать условия для успешного усвоения материала.

Можно сделать вывод, что учет психолого-педагогических особенностей учащихся является необходимым условием успешного усвоения темы “Производная”. Понимание того, как ученики воспринимают абстрактные понятия, работают с графической информацией и развивают свое логическое мышление, позволяет разработать более эффективные методы преподавания и повысить качество обучения. Предложенные методические рекомендации направлены на то, чтобы сделать этот процесс обучения более эффективным, интересным и доступным для всех учащихся.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ

2.1 Разработка методической памятки и комплекса практических упражнений для подготовки к восьмому заданию ЕГЭ по математике

В рамках исследования применения производной в ЕГЭ, для себя мы выделили 8 номер, который с одной стороны кажется ученикам достаточно простым, а с другой имеет в себе подводные камни. Так анализ результатов ЕГЭ последних лет показал тенденцию к допущению ошибок в этом номере, это можно объяснить невнимательностью школьников к формулировке задания. В связи с этим разработка методической памятки, направленной на предупреждение типичных ошибок при решении задания № 8 ЕГЭ по математике, представляется актуальной и методически обоснованной.

Памятка для задания 8 ЕГЭ (Таблицы 1, 2)

1. Смотрим график функции $y=f(x)$ или ее производной.

Таблица 1 – Памятка для графика $y=f(x)$

Если дан график функции $y = f(x)$	
Читаем задание, что нам необходимо найти	
Задание	Решение
На оси абсцисс отмечены семь точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна(отрицательна)?	Найти все точки на графике лежания на промежутках возрастания (убывания) функции.

Продолжение таблицы 1

На оси абсцисс отмечены точки $-1, 2, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее (наименьшее)?	<p>1) Выделяем точки в которых производная положительна (отрицательна).</p> <p>2) Проводим касательные к этим точкам.</p> <p>3) Смотрим в какой точке угол наклона касательной к оси Ox больше (меньше).</p>
На интервале $(-9; 5)$ найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.	<p>1) Отметить границы интервала.</p> <p>2) Считаем точки экстремума (точки перегиба) в этом интервале.</p>
На интервале $(-4; 13)$ определите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 14$.	<p>1) Отметить границы интервала.</p> <p>2) Считаем точки экстремума (точки перегиба) в этом интервале. (Так как $k=0, y'(x_0) = \tan \alpha = k=0$)</p>
Найти значение производной в точке x_0 .	<p><u>1. Если касательная задается возрастающей функцией:</u></p> <p>1) Найти две «хорошие» точки на прямой.</p> <p>2) Из верхней точки опускаемся до уровня нижней и считаем пройденное расстояние «а».</p> <p>3) Теперь по горизонтали доходим до нижней точки, и также посчитаем пройденное расстояние «b».</p> <p>4) Делим «а» на «b» - $\frac{a}{b} = c$.</p> <p>5) В ответ пишем «с».</p> <p><u>2. Если касательная задается убывающей функцией:</u></p> <p>Выполняем пункты 1)-4).</p> <p>Далее пишем в ответ «-с».</p>
Найдите количество корней уравнения $f'(x) = 0$ принадлежащих отрезку $[-7; 2]$.	<p>1) Отметить границы.</p> <p>2) Считаем точки экстремума (точки перегиба) в этом отрезке.</p>

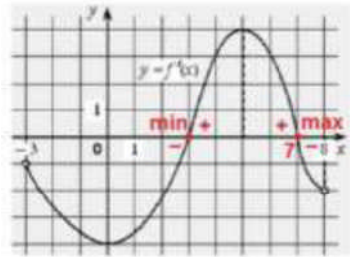
Продолжение таблицы 1

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 2]$.	<p>Перефразируем задание: нам дан график функции $F(x)$ и спрашивают в скольких точках производная $F'(x)=0$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Отмечаем границы. 2) $F'(x)=0$ в точках максимума и минимума функции. 3) Отмечаем эти точки в границах.
На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна (отрицательна)?	<ol style="list-style-type: none"> 1) Перефразируем задание: Нам дан график функции $F(x)$ и спрашивают в скольких точках производная положительна (отрицательна), 2) Производная положительна (отрицательна) на интервалах возрастания (убывания) функции. 3) Отмечаем подходящие нам точки.

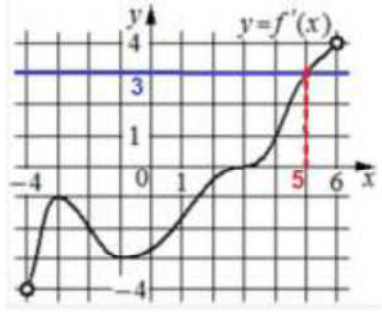
Таблица 2 – Памятка для графика производной $y=f'(x)$

Если дан график производной $y=f'(x)$	
Читаем задание, что нам необходимо найти	
Задание	Решение
На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания (возрастания) функции $f(x)$?	<p>Убыванию (возрастанию) дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют отрицательные (неотрицательные) значения её производной.</p> <p>То есть смотрим в каких точках график ниже (выше) оси абсцисс.</p>

Продолжение таблицы 2

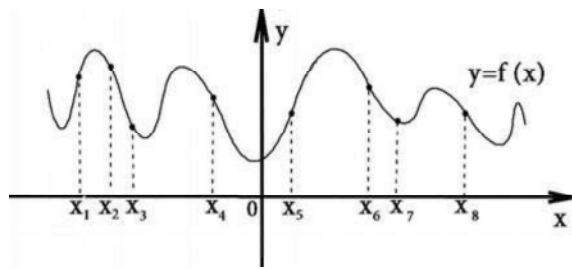
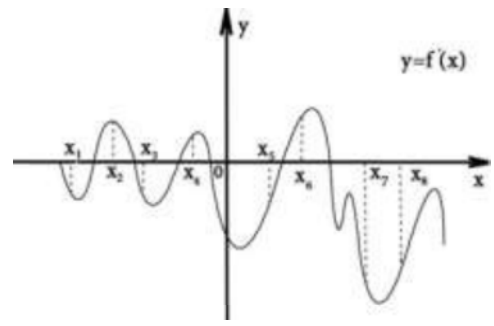
<p>На интервале $(-3; 8)$ в какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает <u>наименьшее</u> значение?</p>	<p>1) Если график производной расположен выше оси Ox, то функция возрастает, а если ниже, то убывает.</p> <p>2) Смотрим, как ведет себя функция на нашем промежутке.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Если функция убывает, наименьшее значение находится справа. • Если функция возрастает, то наименьшее значение находится слева.
<p>На интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция $f(x)$ принимает <u>наибольшее</u> значение?</p>	<p>1) Если график производной расположен выше оси Ox, то функция возрастает, а если ниже, то убывает.</p> <p>2) Смотрим, как ведет себя функция на нашем промежутке.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Если функция убывает, наибольшее значение находится слева. • Если функция возрастает, то наибольшее значение находится справа.
<p>На интервале $(-19; 3)$ найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17; -4]$.</p>	<p>1) Отмечаем границы отрезка</p> <p>2) Находим точки пересечения графика $y=f'(x)$ с осью Ox.</p> <p>3) Считаем их количество.</p>
<p>На интервале $(-9; 8)$ найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.</p>	<p>1) Отмечаем границы отрезка</p> <p>2) Находим точку пересечения графика $y=f'(x)$ с осью Ox.</p>
<p>На интервале $(-3; 8)$ найдите точку максимума (минимума) функции $f(x)$.</p>	<p>1) Отмечаем границы</p> <p>2) Находим точку, где производная меняет знак с $+$ на $-$ (для точки минимума с $-$ на $+$).</p> 

Продолжение таблицы 2

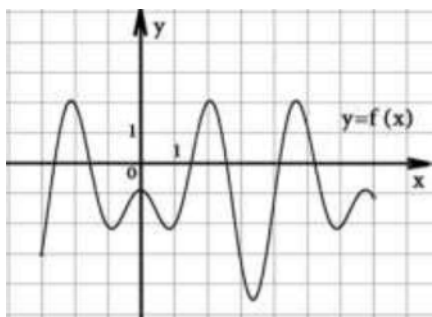
<p>Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.</p>	<p>Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, то есть k (из уравнения $y=kx+b$)</p> <p>1) Смотрим, чему равен наш угловой коэффициент касательной в данном случае.</p> <p>2) Находим при каких x производная принимает это значение.</p> 
--	---

Данную памятку нужно использовать при подготовке к ЕГЭ, что бы сформировать необходимую базу знаний для правильного решения 8 номера. Ниже представлены попарно подобранные упражнения, в которых дети наиболее часто допускают ошибки.

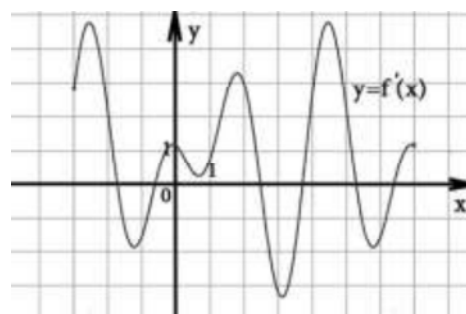
Таблица 3 – Парные задания 8 номера ЕГЭ

<p>1. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?</p> 	<p>На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены восемь точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?</p> 
<p>Продолжение таблицы 3</p> <p>2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на</p>	<p>2. На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$,</p>

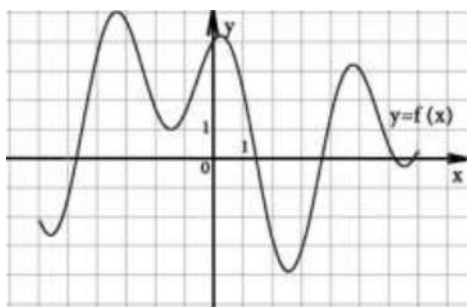
интервале $(-3;5)$. Определите количество точек экстремума на интервале $(-3;5)$.



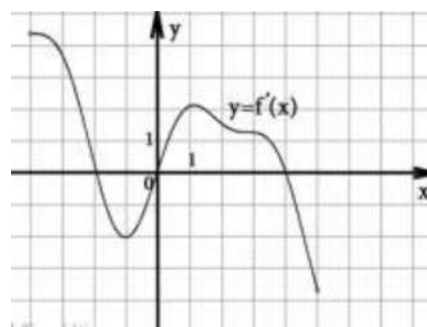
определенной на интервале $(-4;5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-4;5)$.



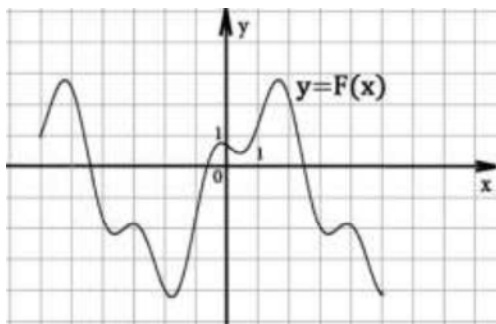
3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;7)$. Определите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$ или совпадает с ней.



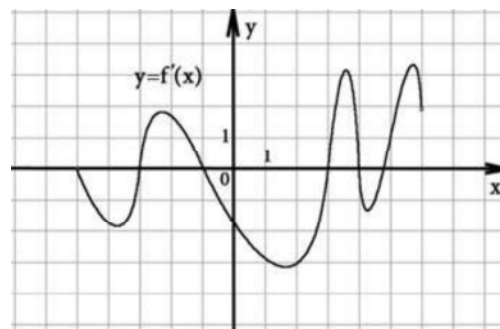
На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x + 14$ или совпадает с ней.



4. На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на интервале $(-6;5)$.
(- Продолжение таблицы 3)



На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;6)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Можно проследить, как схожа формулировка заданий, но их решение существенно различается.

2.2. Конспект урока контроля знаний и коррекции по теме «Применение производной»

Данный урок подготовлен для 10 класса, может быть вставлен в учебный процесс после изучения главы «Производная и ее применение».

Конспект урока.

Тема «Применение производной».

Цели урока. 1. Закрепление и обобщение знаний по данной теме.

2. Рассмотрение задач, связанных с этой темой, базового и повышенного уровней сложности.

3. Организовать работу школьников на уровне, соответствующем уровню их знаний по изученной теме.

Задачи урока. 1. Повторить изученные определения по данной теме.

2. Используя правила нахождения производной, применить их для решения конкретных задач.

3. Развить аналитическое мышление и умение быстро находить решение.

Тип урока: Практикум

Оборудование: Интерактивная доска, раздаточный материал.

Ход урока.

I. Организационная часть.

Здравствуйте ребята! На прошлом уроке мы с вами закончили изучать главу «Производная и ее применение», поэтому сегодня у нас в вами обобщающий урок по данной теме, на котором мы повторим все, что изучили. Проверьте на своих столах раздаточные материалы, и свою готовность к уроку.

II. Практическая часть.

Если все готовы, то можем начинать наше занятие, а начнем мы его вот с такого задания (Рисунок 1):

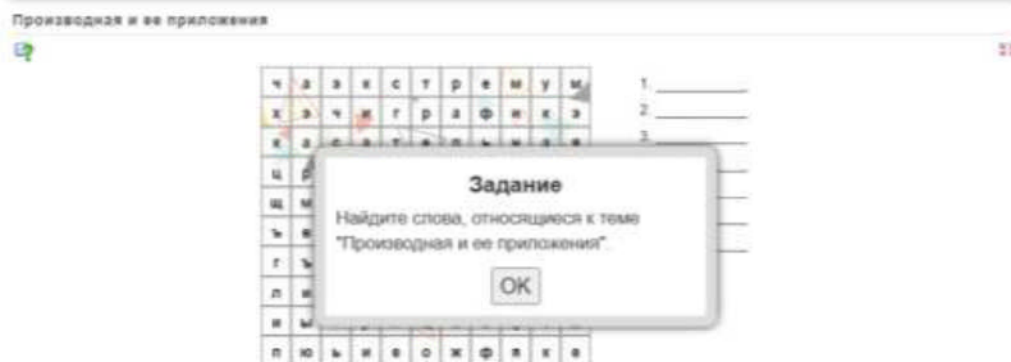


Рисунок 1

Вам необходимо найти слова, связанные с нашей темой, и дать им определения, а после проверить себя, правильно ли вы сформулировали определение (Рисунок 2, 3).



Рисунок 2



Рисунок 3

Вы большие молодцы! Идем дальше, определения мы с вами вспомнили, теперь давайте вспомним, как вычислять производную, для этого посмотрите на доску. Здесь представлено такое интересное задание (Рисунок 4):



Рисунок 4

Вам необходимо сопоставить функцию и ее производную, но как вы можете заметить, карточки перевернуты, то есть вам так же нужно запоминать где какая функция и производная были, и постараться за меньшее число открываний карточек все сопоставить (Рисунок 5, 6, 7).

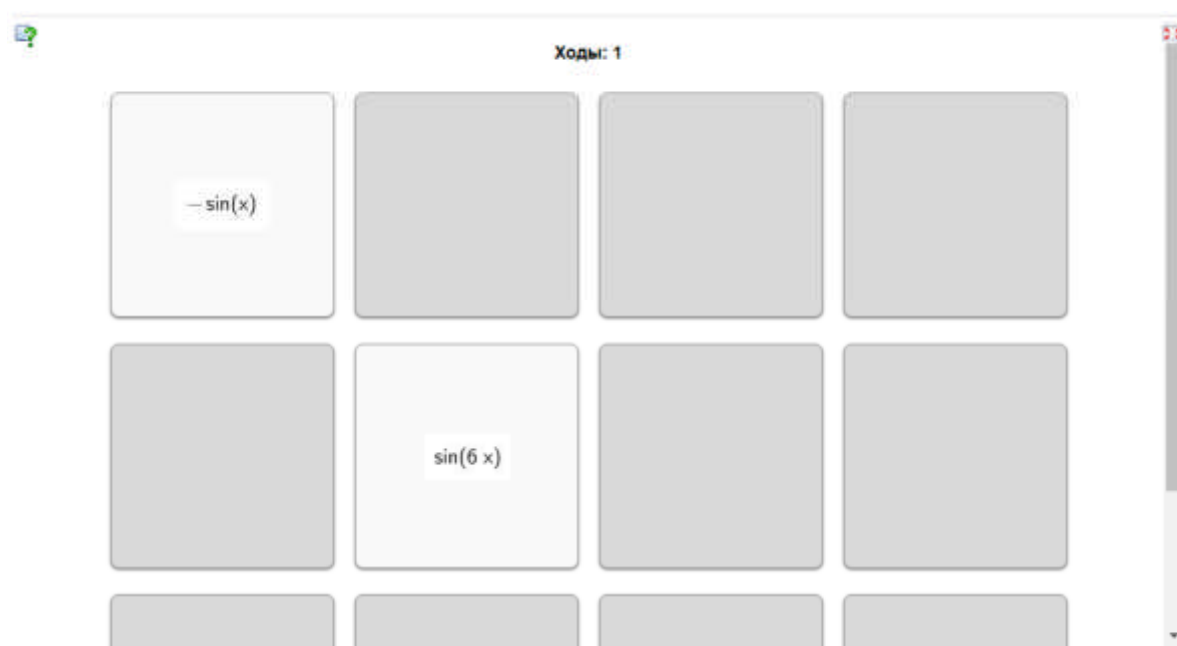


Рисунок 5

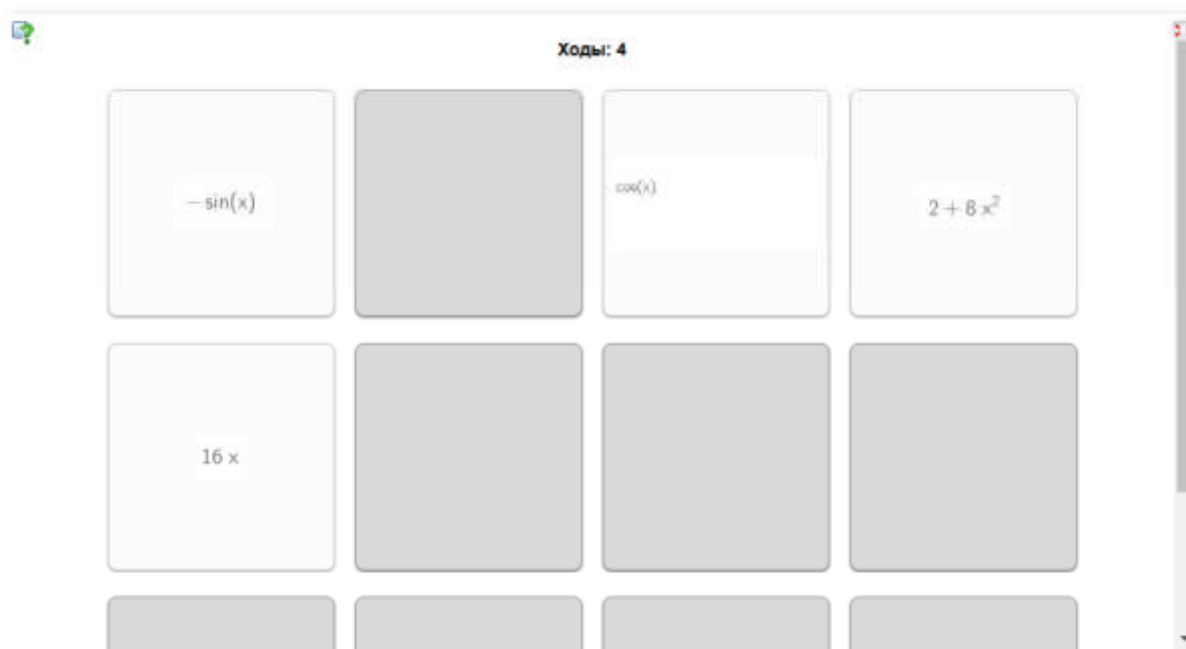


Рисунок 6

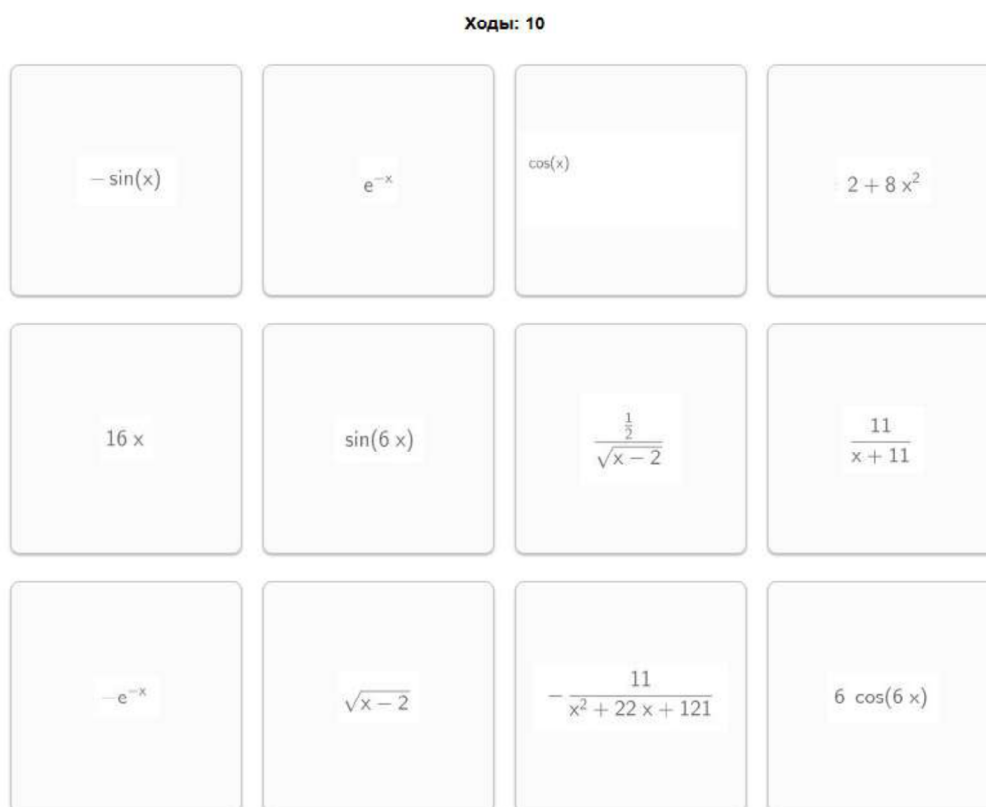


Рисунок 7

Отлично! Как вычислять простые производные мы вспомнили, теперь давайте вспомним как вычислять производные посложнее. На ваших столах лежат карточки (Таблица 4), сверху как вы можете увидеть, у вас написаны функции, а внизу нужно вписать ее производную, и также в последнем столбце задание со звездочкой, у вас наоборот написана производная, и нужно понять от какой функции она найдена. У вас есть 7 минут на выполнение этого задания, после проверим его.

Таблица 4 – Задание на вычисление производной

$F(x)=2 \cdot \sin^2(x) + 6x^5$	$F(x)=\frac{5}{x} + 3 \cdot \sqrt{x}$	$F(x)= (x^2+4) \cdot \operatorname{tg}(x)$	$F(x)=\frac{x-7}{12+x}$	
				$*F'(x)=10x - \cos(x)$

Хорошо, теперь давайте проверим, я называю человека, и он говорит мне производную данной функции. (Таблица 5).

Таблица 5 – Выполненное задание на вычисление производной

$F(x)=2 \cdot \sin^2(x) + 6x^5$	$F(x)=\frac{5}{x} + 3 \cdot \sqrt{x}$	$F(x)= (x^2+4) \cdot \operatorname{tg}(x)$	$F(x)=\frac{x-7}{12+x}$	$*F(x)=5x^2 - \sin(x)$
$F'(x)=2 \cdot \sin(2x) + 30x^4$	$F'(x)=-\frac{5}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$	$F'(x)=\frac{\sin(2x) \cdot x + x^2 + 4}{\cos^2(x)}$	$F'(x)=\frac{19}{(12+x)^2}$	$*F'(x)=10x - \cos(x)$

Молодцы, вы справились даже с заданием под звездочкой! Как вычислять производную мы с вами вспомнили, теперь предлагаю поработать немного с графиками, и посмотреть вот такое задание (Рисунок 8, 9).

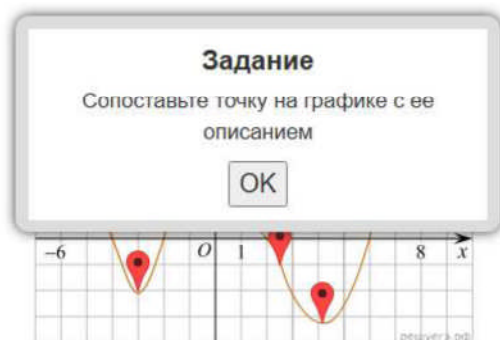


Рисунок 8

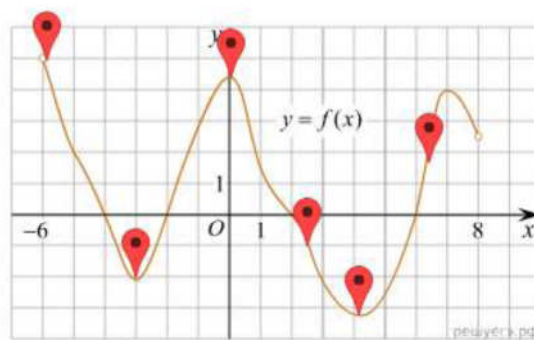


Рисунок 9

У вас на графике функции отмечены точки, и нажимая на нее, необходимо выбрать, что это за точка. Давайте попробуем (Рисунок 10 - 15):

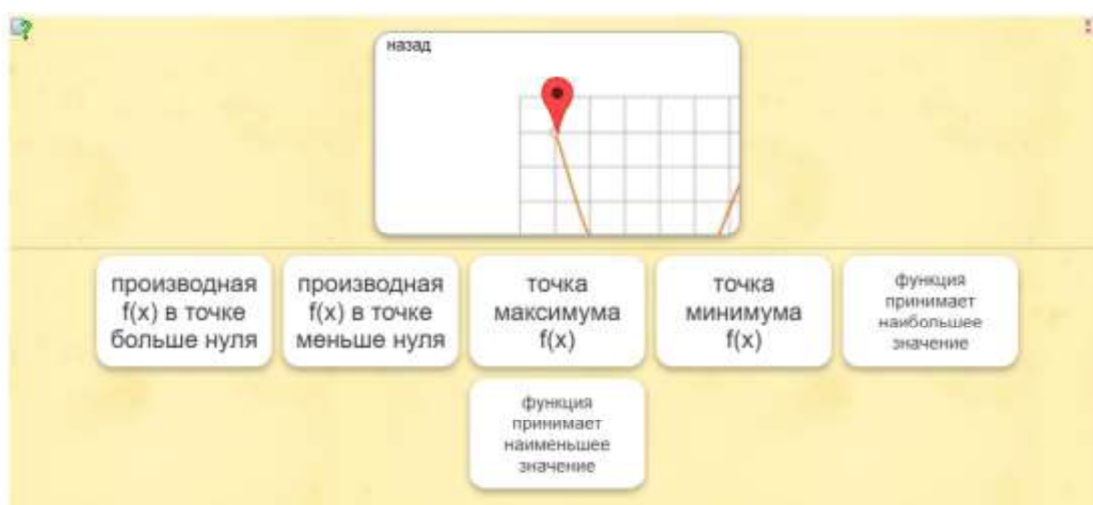


Рисунок 10



Рисунок 11



Рисунок 12

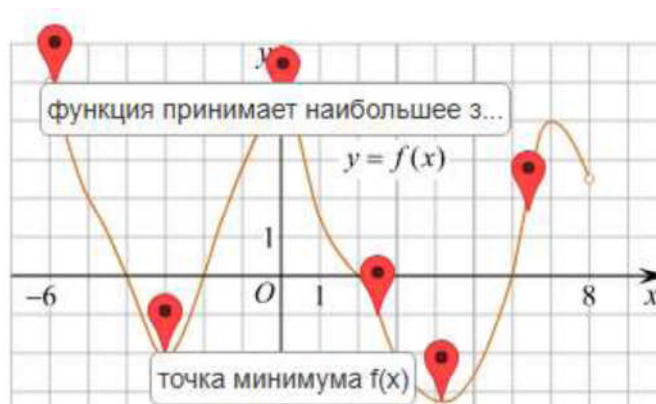


Рисунок 13

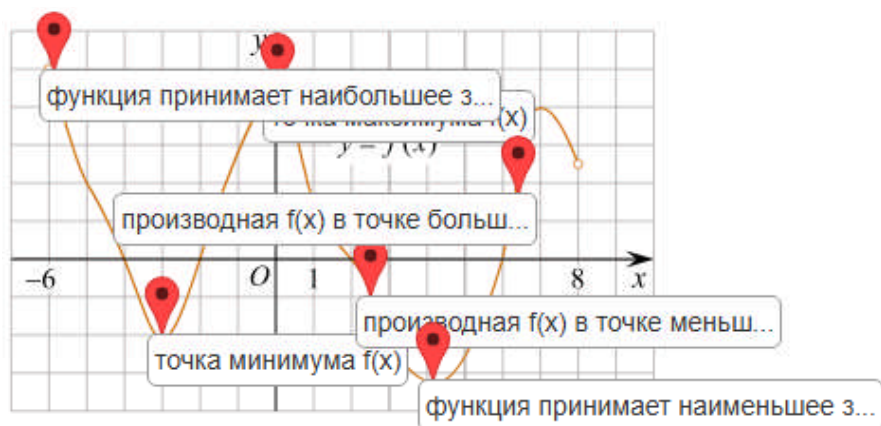


Рисунок 14

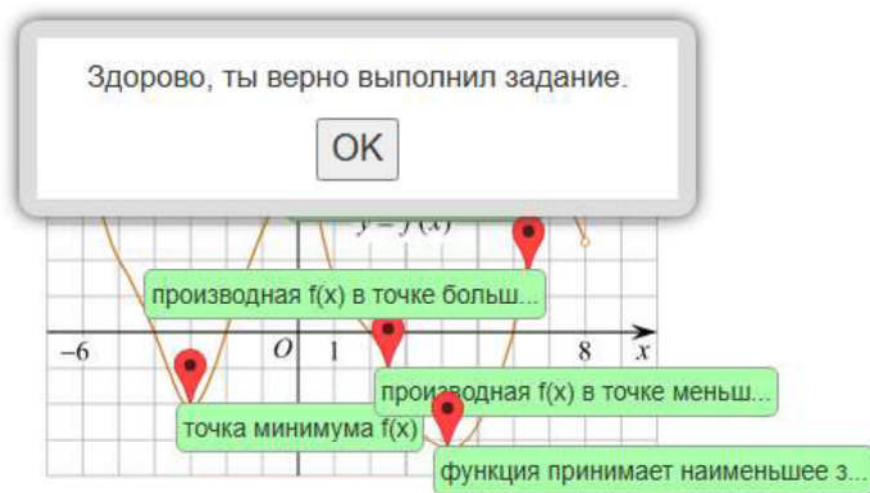


Рисунок 15

Отлично с графиком функции поработали, сейчас давайте выполним аналогичное задание, но для графика производной (Рисунок 16 – 22):

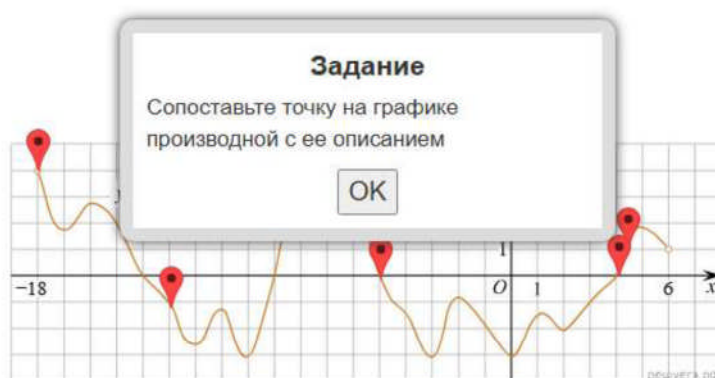


Рисунок 16

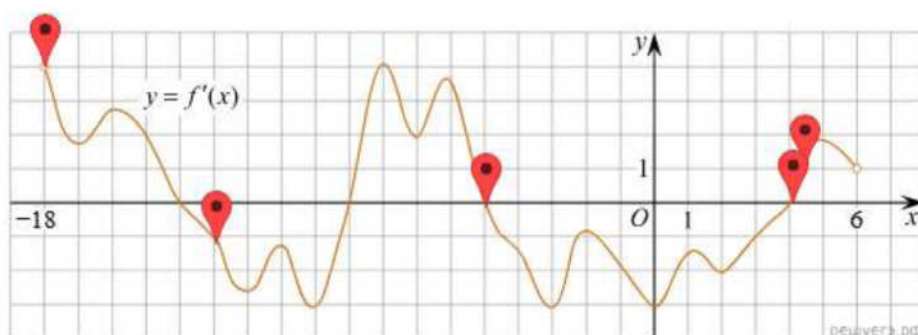


Рисунок 17

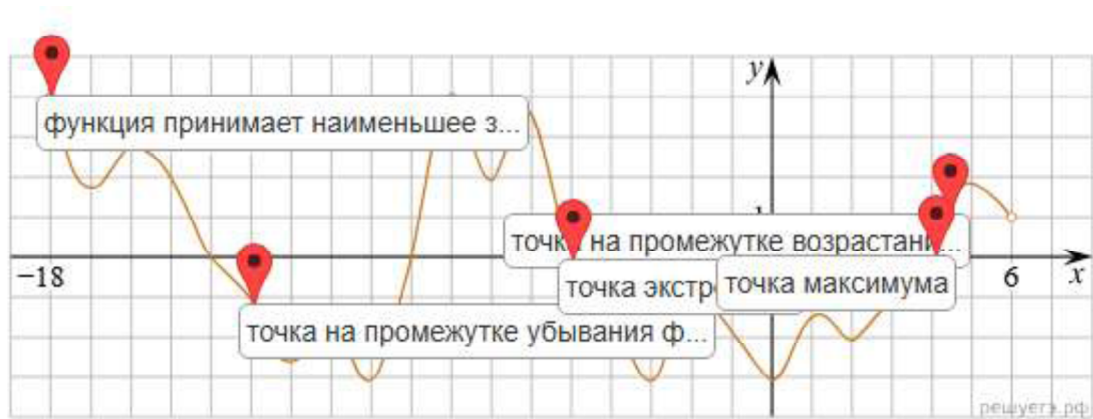


Рисунок 21

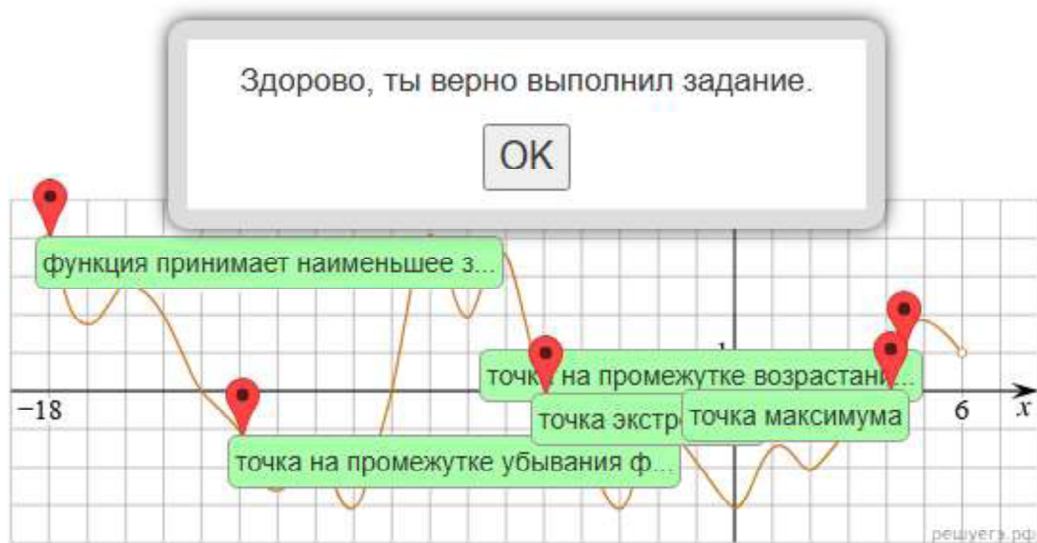


Рисунок 22

Итак, ребята, мы с вами отлично поработали, и решили много задач, теперь давайте проверим насколько хорошо вы все усвоили. Перед вами лежат карточки с небольшой самостоятельной работой, время выполнения 10-15 минут (Таблица 6).

Таблица 6 – Самостоятельная работа

1 вариант	2 вариант
-----------	-----------

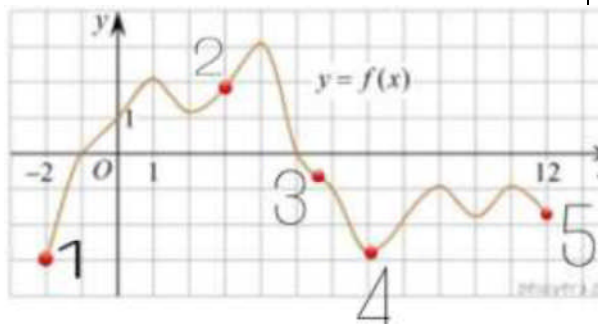
1. Вычислите значение производной в точке x_0

а) $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{7 - x}$, $x_0 = 3$

б) $h(x) = 5 \cdot \cos(x) + 2 \cdot \sqrt{2x}$, $x_0 = 2$

2. Сопоставьте точки и их названия

Дан график функции $y = f(x)$



А-производная функции $f(x)$ в этой точке положительна

В- производная функции $f(x)$ в этой точке отрицательна

С-значение производной в этой точке наибольшее

Д- значение производной в этой точке наименьшее

Е-точка экстремума

1	2	3	4	5

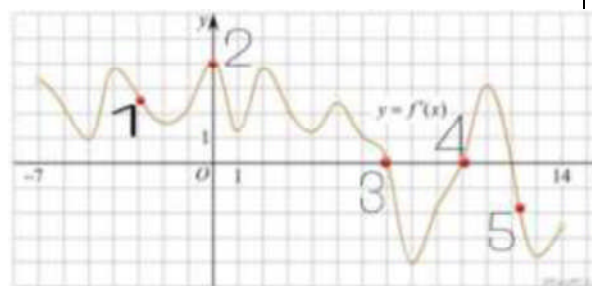
1. Вычислите значение производной в точке x_0

а) $f(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{4}{\sqrt{4x}} - \operatorname{ctg}(x)$, $x_0 = 2$

б) $h(x) = e^x \cdot (\sin x + x^2)$, $x_0 = 4$

2. Сопоставьте точки и их названия

Дан график производной функции $y = f'(x)$



А-точка экстремума

В- точка максимума

С- в этой точке на промежутке $[-7;0]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение

Д- точка лежит на промежутке возрастания функции $f(x)$

Е- точка лежит на промежутке убывания функции $f(x)$

1	2	3	4	5

Вот и подошел к концу наш с вами урок, мы с вами отлично поработали, повторили и закрепили знания о применении производной. А теперь давайте немного поразмышляем о том, что мы сегодня делали:

- Узнали ли вы что-то новое для себя?
- Какое упражнение вам показалось наиболее интересным? И почему?
- Вызвало ли какое упражнение у вас сложности?
- Как вы оцениваете свою деятельность на уроке?

Спасибо за урок, до свидания!

2.3 Конспект урока открытия новых знаний по теме «Уравнение касательной»

Данный урок подготовлен для учеников 10 класса, с использованием интерактивных методов обучения, которые способствуют наиболее эффективно применять полученные знания для понимания и составления уравнения касательной.

Конспект урока.

Тема «Уравнение касательной».

Цели урока. 1. Сформировать представления об уравнении касательной к графику функции в точке.

2. Вывести уравнение касательной к графику функции в точке и разработать алгоритм нахождения уравнения касательной к графику функции в данной точке.

3. Рассмотреть типы задач на уравнение касательной к графику функции в точке.

Задачи урока. 1. Актуализировать знания о понятие производной и ее геометрическом смысле.

2. Научиться применять полученные знания для решения задач.

3. Расширить кругозор и улучшить математическую речь.

Тип урока: Урок открытия новых знаний

Оборудование: Интерактивная доска, раздаточный материал.

Учебник: Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый уровень - Мерзляк А.Г., Номировский Д.А. и др.

Ход урока.

1. Организационный момент.

Здравствуйте ребята! Проверьте свою готовность к уроку, и если все готовы, то давайте начнем наш урок.

2. Актуализация знаний.

На прошлом уроке мы с вами изучили правила вычисления производных, и перед вами на доске представлены эти правила (Рисунок 23), проверьте их, все ли написано правильно?

$(f + g)'$	$f' + g'$
$(f \cdot g)'$	$f' \cdot g'$
$(k \cdot f)'$	$k \cdot f'$
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$\frac{f' - g'}{g'}$

Рисунок 23

$(f + g)'$	$f' + g'$
$(f \cdot g)'$	$f' \cdot g'$
$(k \cdot f)'$	$k \cdot f'$
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$\frac{f' - g'}{g'}$

Рисунок 24

Да, вы абсолютно верно заменили, что не все правильно написаны правила вычисления производной произведения и деления (Рисунок 24), тогда давайте исправим! Назовите мне верные правила (Рисунок 25).

$(f + g)'$	$f' + g'$
$(f \cdot g)'$	$f' \cdot g + g' \cdot f$
$(k \cdot f)'$	$k \cdot f'$
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$

Рисунок 25

Отлично! Теперь давайте вспомним, как их применять, на доске вы можете видеть два столбика, справа написаны функции, а слева их производные (Рисунок 26).

$y=f(x)$	$y=f'(x)$
$7x + 15$	$\frac{11}{\cos^2(x)}$
$\frac{12}{\sqrt{x}}$	$63x^2$
$4x \cos(x)$	7
$21x^2$	$\frac{12}{2 + \sqrt{x}}$
$11 \lg(x)$	$4 \cos(x) - 4x \sin(x)$

Рисунок 26

Вам, необходимо, пользуясь правилами вычисления производных, верно соединить функцию с ее производной (Рисунок 27, 28).

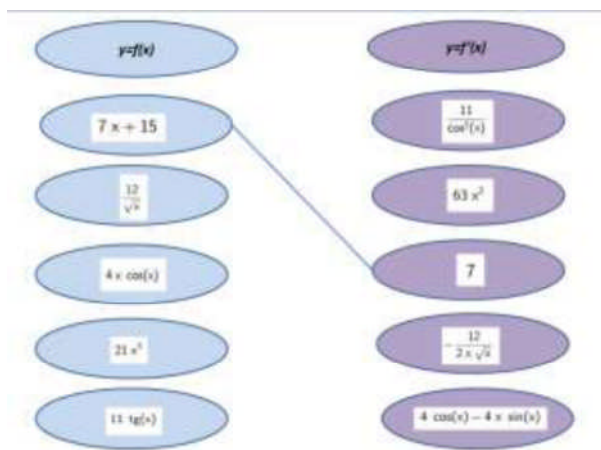


Рисунок 27

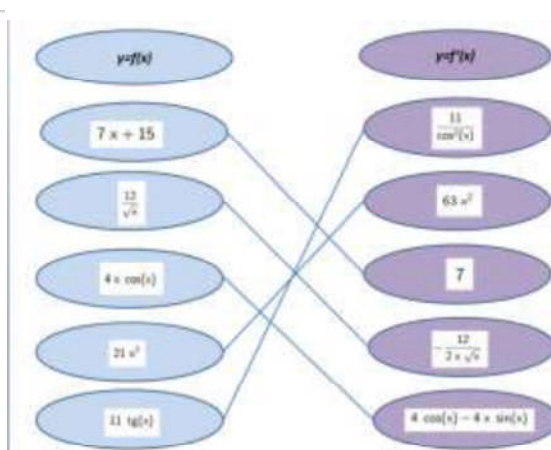


Рисунок 28

Отлично ребята, я вижу, эту тему вы усвоили хорошо, поэтому двигаемся дальше.

3. Проблемная ситуация.

Для того чтобы узнать тему нашего сегодняшнего урока, давайте для начала представим, нам дан сложный график, и сказано «коснуться» этого графика прямой в определенной точке. Как нам это сделать, знаем ли мы с вами какие-то способы решения этой задачи? И что это будет за прямая?

Верно, прямая это будет касательная, а что вы вообще знаете о касательных?

Я вижу вы затрудняетесь ответить на мой вопрос, о том как же решить данную задачу, поэтому сегодня мы с вами раскроем секрет этой загадочной прямой, касающейся графика в одной точке, и научимся решать такие задачи.

И темой нашего урока является «Уравнение касательной» Запишите себе в тетради, и посмотрите на доску. Перед вами представлены два графика (Рисунок 29, 30), но в чем же отличие?

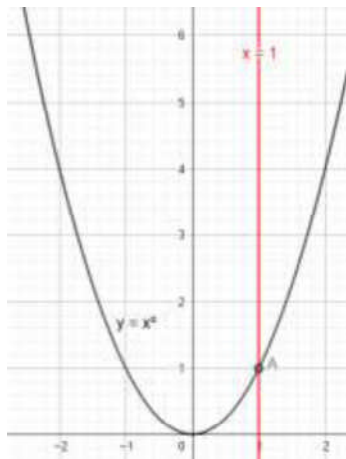


Рисунок 29

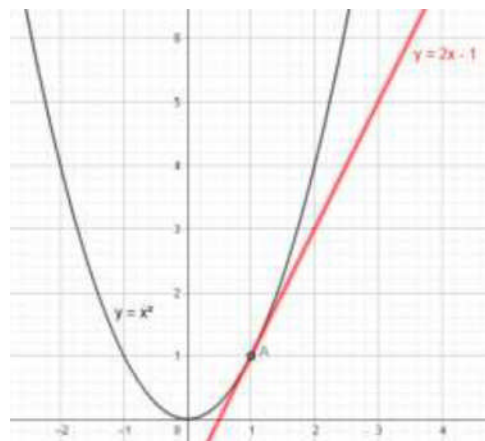


Рисунок 30

Как мы можем увидеть и на первом и на втором рисунке, прямая пересекает график в одной и той же точке $A(1;1)$, но чем же отличается положение прямой $x=1$ от положения прямой $y=2x-1$

Теперь постарайтесь сделать вывод сами, что же такое касательная? Верно, это некое предельное положение прямой, в которой она сейчас вот вот пересечет график. И раз касательная это прямая, то для того что бы вывести ее уравнение, что нам необходимо вспомнить? (Нужно вспомнить общий вид уравнения прямой.)

Уравнение прямой $y=kx+b$, а как называют число k ? (Угловой коэффициент.) А как угловой коэффициент прямой связан с углом наклона этой прямой к оси Ox ? (Тангенс угла между этой прямой и положительным направлением оси Ox , $k = \operatorname{tg}(\alpha)$.)

А в чем заключается геометрический смысл производной? (Тангенс угла наклона между касательной и положительным направлением оси Ox). Значит я могу записать вот так $k=f'(x_0)$ и следовательно уравнение касательной можно записать так : $y = f'(x_0) \cdot x + b$.

Давайте посмотрим на доску. Пусть нам дана функция $y=f(x)$ и точка A принадлежащая этому графику (Рисунок 31).

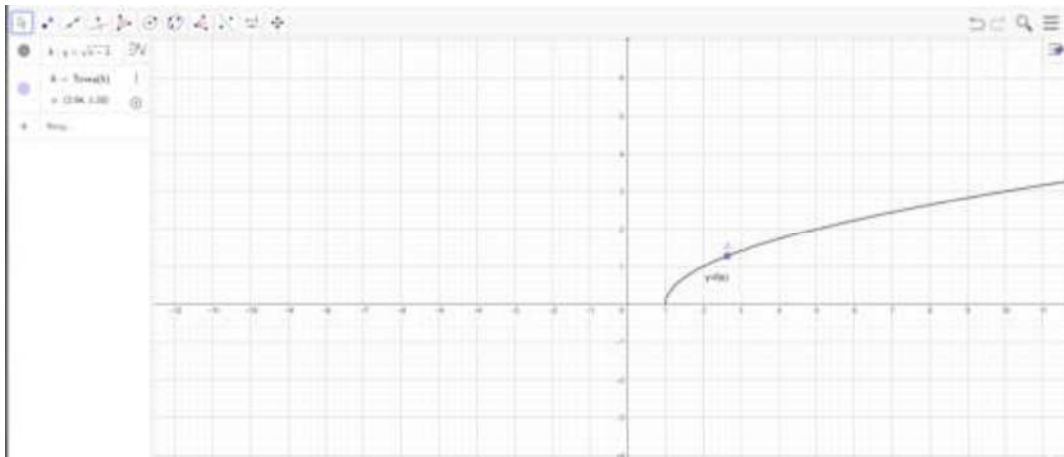


Рисунок 31

Давайте определим ее координаты следующим образом: $x = x_0$, $y = f(x_0)$, то есть $A(x_0, f(x_0))$ и пусть существует производная $f'(x_0)$, то есть в данной точке производная определена (Рисунок 32).

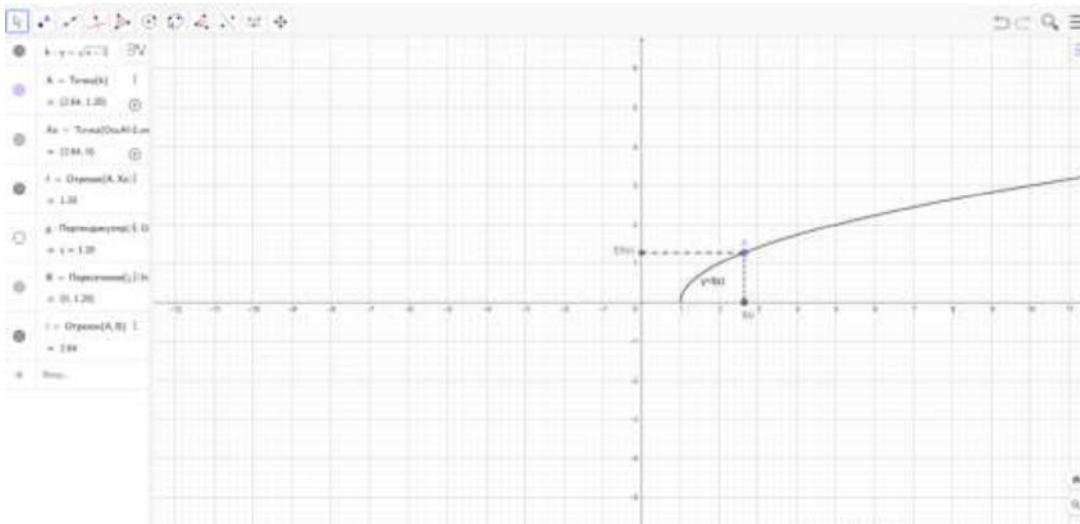


Рисунок 32

Проведем через точку A касательную (Рисунок 33). Уравнение касательной, мы сегодня с вами уже вспоминали, это уравнение прямой, поэтому оно имеет вид: $y = kx + b$, или как мы с вами уже записали $y = f'(x_0) \cdot x + b$. Следовательно, наша задача состоит в том, чтобы отыскать b .

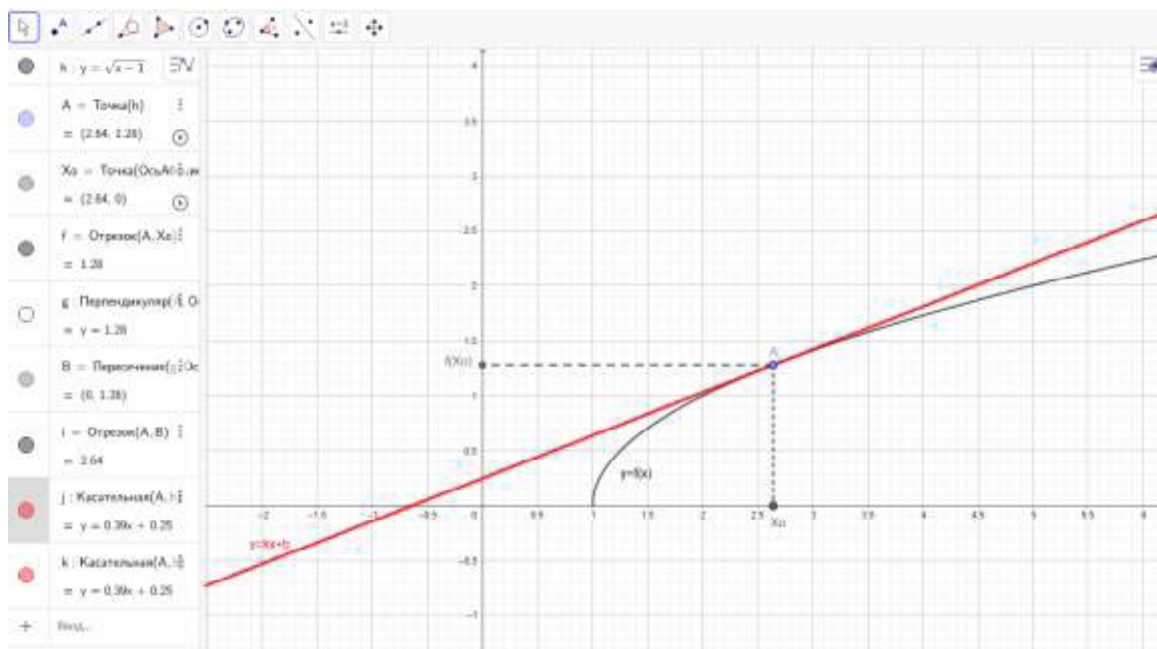


Рисунок 33

Как нам с вами найти b ? Искомая прямая проходит через точку $A(x_0, f(x_0))$, подставим эти координаты в уравнение прямой: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, и отсюда получаем $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Мы нашли с вами b , а значит уравнение прямой мы можем записать следующим образом:

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Итак, если функция f дифференцируема в точке x_0 , то уравнение касательной, проведенной к графику функции f в точке с абсциссой x_0 , имеет вид:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Чтобы уверенно решать задачи на касательную, нужно четко понимать смысл каждого элемента в данном уравнении. Давайте ещё раз остановимся на этом:

- 1) $(x_0, f(x_0))$ – координаты точки касания;
- 2) $f'(x_0) = \tan \alpha$ - тангенс угла наклона или угловой коэффициент;
- 3) $(x; y)$ – координаты любой точки касательной.

Следовательно, мы вывели уравнение касательной. Теперь давайте еще раз повторим все, что мы сделали, и так у нас появится алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y=f(x)$ в заданной точке.

- Алгоритм. 1. Обозначаем абсциссу точки касания буквой x_0 .
2. Вычисляем $f(x_0)$.
3. Находим $f'(x)$ и вычисляем $f'(x_0)$.
4. Подставляем найденные значения числа $f(x_0)$, $f'(x_0)$ и x_0 в уравнение касательной.
5. $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Отлично, теперь предлагаю вам немного отвлечься и посмотреть на анимированную точку касания и касательную (Рисунок 34, 35).

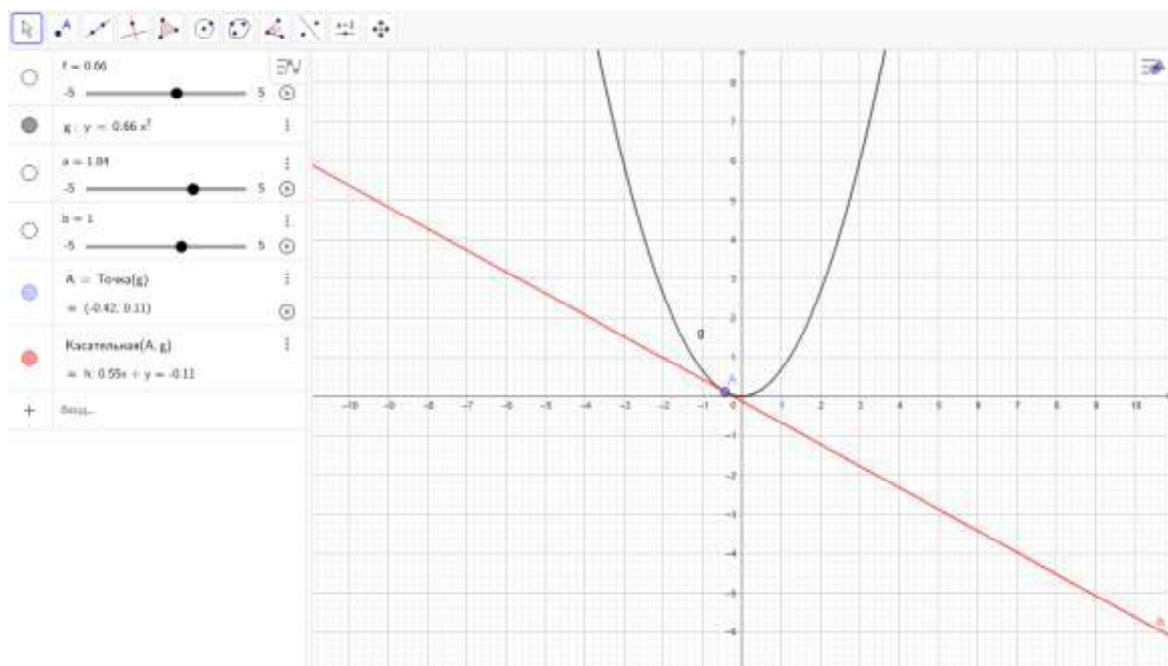


Рисунок 34

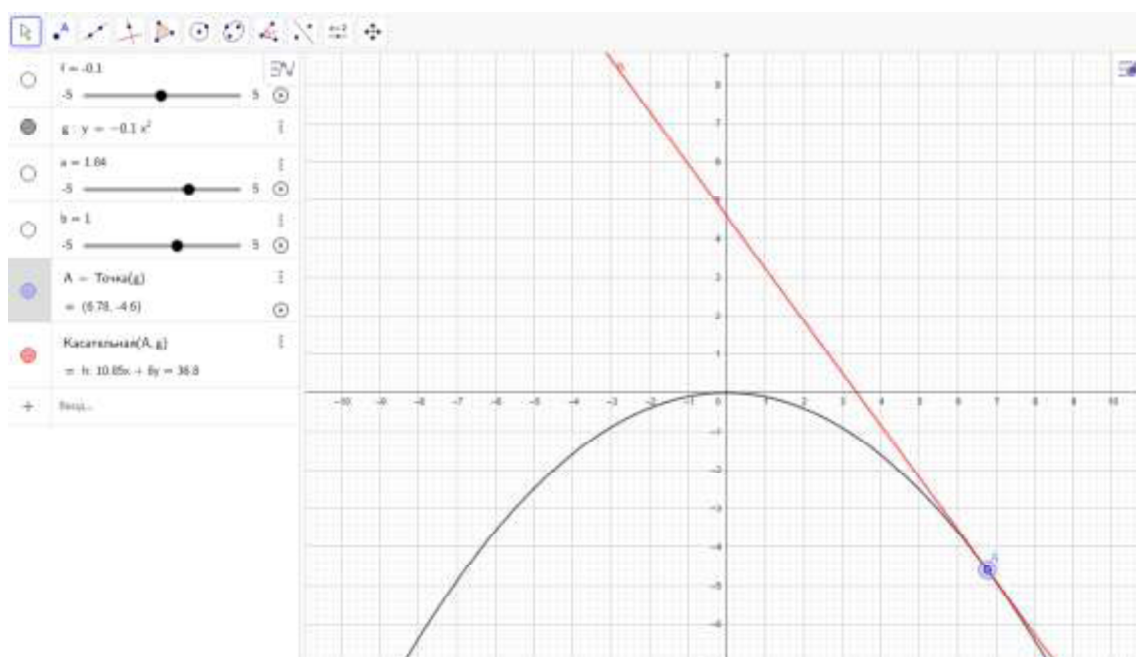


Рисунок 35

4. Первичное закрепление нового материала.

Первый пример решаю сама у доски с подробными комментариями для учеников.

1) Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)=2 - 4x- 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Итак, сначала вычисляем $f(x_0)$, то есть подставляем координату x_0 в наше уравнение функции:

1. $f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2$;

2. Далее находим $f'(x) = -4 - 6x$;

3. Далее $f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8$

4. И теперь подставляем все найденные числовые значения в уравнение касательной, и получаем: $y = 8 \cdot (x+2) - 2$, то есть $y = 8x + 14$.

Сейчас открываем учебник на странице 272 и решаем упражнение 37.1 под четными цифрами.

5. Самостоятельная работа.

Хорошо ребята, а сейчас я вам раздам небольшую самостоятельную работу (Таблица 7).

Таблица 7 – Обучающая самостоятельная работа

Вариант 1	Вариант 2
Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0	Напишите уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0
$y = 5x^2 + 4x, x_0 = 2$	$y = x^2 + 2x - 2, x_0 = 1$

6. Рефлексия.

Отлично ребята, мы сегодня с вами познакомились с очень важной и интересной темой, и давайте вспомним её основные факты.

- Что же называется касательной к графику функции в точке?

- В чем же заключается геометрический смысл производной?
- Сформулируйте алгоритм нахождения уравнения касательной в точке.

Остались ли у вас какие-то вопросы? Если да, то задайте мне, а если нет, то запишите домашнее задание: Параграф 37, №37.2. Спасибо вам за урок, до свидания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной выпускной квалификационной работы была рассмотрена актуальная проблема повышения эффективности изучения производной в школьном курсе математики. Анализ существующих методик преподавания выявил ряд сильных и слабых сторон, а также подтвердил наличие типичных затруднений, с которыми сталкиваются учащиеся при изучении данной темы.

Изучение психолого-педагогических особенностей восприятия абстрактных математических понятий учащимися 10-11 классов позволило выявить факторы, влияющие на успешность обучения производной, и учесть их при разработке методических материалов. В частности, было установлено что визуализация, использование аналогий из реальной жизни, акцент на геометрическом и физическом смысле понятия способствуют лучшему усвоению материала.

На основе проведённого анализа была разработана система методических приёмов, направленных на преодоление выявленных затруднений и повышение мотивации учащихся к изучению производной. В частности, были разработаны: памятка для подготовки к заданию 8 ЕГЭ, урок открытия новых знаний по теме «Уравнение касательной» и урок закрепления изученного материала по теме «Производная и её применение».

Таким образом, цель работы — разработка методических рекомендаций по изучению производной в школьном курсе математики, направленных на повышение эффективности усвоения материала и развитие навыков применения производной при решении различных задач — достигнута.

Разработанные методические материалы могут быть использованы для совершенствования процесса обучения производной в 10-11 классах, а также для подготовки учащихся к сдаче ЕГЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО). Утвержден Приказом Минпросвещения РФ № 413.
2. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов [и др.] ; 3-е издание. М. : Просвещение, 2016. 464 с.
3. Артищева Е. К., Гриценко В. А. О целесообразности отделения начала анализа от курса элементарной математики // Математика в школе. 1999. № 6. С. 43–45
4. Башмаков И. М. Математика 10-11 : учебное пособие для 10-11 классов гуманитарного профиля. М. : Просвещение, 2004 г. 336 с.
5. Башмаков И. М. Профили и уровни обучения математике // Математика. 2006. № 14. С. 18–21.
6. Бутузов В. Ф. , Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л. Математика 11 : учебное пособие для обучающихся 11 классов общеобразовательных учреждений. М. : Просвещение, 1995 г. 254 с.
7. Бутузов В. Ф., Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л. Математика 10 : учебное пособие для обучающихся 10 классов общеобразовательных учреждений. М. : Просвещение, 1995 г. 236 с.
8. Вопросы преподавания алгебры и начала анализа в средней школе: сб. статей / сост. Е. Г. Глаголева [и др.] ; М. : Просвещение, 1980. 256 с.
9. Галицкий М. Л., Мошкович М. М., Шварцбурд С. И. Углубленное изучение алгебры и математического анализа : метод. рекомендации и дидакт. материалы : пособие для учителя. 3-е изд., дораб. М. : Просвещение, 1997. 352 с
10. Глейзер Г. И. История математики в школе. 9 - 10 кл. : пособие для учителя. М. : Просвещение, 1983. 351 с.

11. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: книга для учителя. М. : Просвещение, 1990. 224 с.
12. Дорофеев Г. В., Кузнецова Л. В. *Дидактические материалы по алгебре и началам анализа. 10–11 класс.* М. : Просвещение, 2021.
13. ЕГЭ 2012. Математика. Типовые тестовые задания/ под ред. А.Л. Семенова, И.В.Ященко.- М. : изд-во “Экзамен”, 2012. 95 с.
14. Кодификатор элементов содержания ЕГЭ по математике (профильный уровень). ФИПИ, 2025
15. Мерзляк А. Г. Алгебра и начала математического анализа : учебник для 10-11 классов общеобразовательных организаций : базовый и углубленный уровни / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. Б. Полонский, М. С. Якир. М. : Вентана-Граф, 2023. 400 с.
16. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2: учебник для академического бакалавриата / Н.С. Подходова [и др.] ; под ред. Н.С. Подходовой, В.И. Снегуровой. М. : Издательство Юрайт, 2017. 299 с
17. Мордкович А. Г. Методические проблемы изучения элементов математического анализа в общеобразовательной школе // Математика в школе. 2002. № 9. С. 2–12.
18. Никитина О. Г., Курзакова К. А., Лягина Е. В. Использование проблемных ситуаций на занятиях по математическому анализу/ Педагогический институт им. В.Г.Белинского: традиции и инновации: Материалы науч. конф., посвящ. 79-летию Педагогического института им. В.Г.Белинского Пензенского государственного университета под общ. ред. О.П.Суриной. Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. С. 148–152.
19. Никитина О. Г., Никитин Н. Д. О некоторых особенностях организации устной работы со студентами на занятиях по математическому анализу/ Педагогический институт им. В.Г.Белинского: традиции и инновации: сб. статей науч. конф., посвящ. 78-летию Педагогического института им. В.Г.Белинского Пензенского государственного университета под общ. ред. О.П.Суриной. Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. С. 153–156.

20. Понтрягин Л. С. Математический анализ для школьников. М. : Наука. 1988. 96 с.
21. Потапов М. К., Шевкин А. В. Методика преподавания темы "Производная" в школе. // Математика в школе, 2022, № 4. С. 12–18.
22. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе. М. : Просвещение, 2020.
23. Федосеев В. П. Графические методы в изучении производной. // Математическое образование, 2021, № 3. С. 45–52.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 30 » 10 20 24 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Бацуниной Екатерины Дмитриевны

(ФИО полностью)

Тема работы «Методические аспекты изучения производной в школьном курсе»

Утверждена приказом по Университету от « 25.12 » 20 24 г. № 1350/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 6 » *май* 20 25 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Подбор и изучение литературы по теме выпускной квалификационной работы.	Сентябрь-октябрь 2024 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
2.	Изучение истории развития понятия производной.	Ноябрь 2024 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
3.	Анализ материала школьных учебников по алгебре и началам анализа по теме ВКР.	Декабрь 2024 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
4.	Изучение психолого-педагогических особенностей освоения темы «Производная» учащимися. Анализ заданий ЕГЭ связанных с использованием производной.	Январь-февраль 2025 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
5.	Разработка методической памятки и комплекса практических упражнений для подготовки к восьмому заданию ЕГЭ по математике.	Март 2025 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
6.	Разработка конспектов уроков.	Апрель 2025 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
7.	Систематизация материала. Оформление работы.	Май 2025 г.	Выполнено <i>Никитина</i>

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель *Никитина* Никитина О. Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению *Бацунина* Бацунина Е. Д.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Бацуниной Екатерины Дмитриевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Бацунина Екатерина Дмитриевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «*Методические аспекты изучения производной в школьном курсе*», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



подпись студента

11.05.25

дата

ВКР представлена на проверку 11.05.25
дата

Руководитель ВКР  Бацунина Е.Д.
подпись Ф.И.О.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему: «Методические аспекты изучения производной в школьном курсе»

студентки 4 курса Бацуниной Екатерины Дмитриевны

направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://vuzgu.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

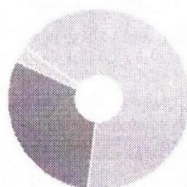
Автор: Бацунина Екатерина Дмитриевна

Название документа: ВКР Бацуниной Екатерины

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет»

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадений
30.09%

Оригинальность
66.64%

Цитирований
3.27%

Самодиттирование
0%

- Совпадения** — фрагменты проверенного текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самодиттированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверенного текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- Самодиттирование** — фрагменты проверенного текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверенного документа. Показатель «Самодиттирование» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самодиттированию, в общем объеме текста.
- Цитирование** — фрагменты проверенного текста, которые не являются заголовками, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированию относятся также шаблоны: «Ссылка на библиографию», фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант» нормативно-правовых документов. Показатель «Цитирование» — это доля фрагментов проверенного текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверенного документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- Оригинальный текст** — фрагменты проверенного текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отнесенные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверенного текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверенного документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом: определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверенного документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 115

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 11.05.2025 15:17:29

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 54

Символов в тексте: 59626

Слов в тексте: 8111

Число предложений: 253

Дата 11.05.25 Никитина (Никитина О. Г.)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические аспекты изучения производной
в школьном курсе»
студентки Бацуниной Екатерины Дмитриевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Бацуниной Екатерины Дмитриевны посвящена вопросам изучения производной в школьном курсе математики.

Актуальность темы выпускной квалификационной работы, состоит в том, что изучение производной в школьном курсе математики является важным элементом математической подготовки учащихся. Производная как инструмент для исследования функций, нахождения экстремумов и решения прикладных задач широко применяется в различных областях науки и техники: физике, экономике, биологии и других. Владение методами дифференцирования позволяет глубже понять свойства функций, моделировать реальные процессы и применять математические знания в практической деятельности. Однако изучение производной в школьном курсе часто вызывает трудности у учащихся. Это обусловлено как сложностью самого понятия, так и отсутствием достаточного количества наглядных примеров и практических задач, иллюстрирующих его применение.

Целью работы является разработка и апробация методических рекомендаций по изучению производной в школьном курсе математики, направленных на повышение эффективности усвоения материала и развитие навыков применения производной при решении различных задач.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников.

Первая глава посвящена теоретическим основам изучения производной, вторая — разработке методических материалов. Заключение содержит обобщение полученных результатов и выводы о перспективах дальнейшего исследования.

Работа Бацуниной Е.Д. является самостоятельным исследованием. Практическая значимость работы состоит в том, что предложенные методические рекомендации могут быть использованы при разработке уроков и планировании учебного процесса по теме «Производная».

Выпускная квалификационная работа Бацуниной Екатерины Дмитриевны заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна, доцент кафедры
«Математическое образование», к.ф.-м.н. 