

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методические особенности обучения решению задач, связанных с сечениями многогранников, в контексте подготовки к ЕГЭ профильного уровня»

Студент

Дул 6.05.25
(подпись, дата)

Дулатова Рахима Ильясовна
(ФИО полностью)

Руководитель

Сорокина 6.05.25
(подпись, дата)

Сорокина М.В.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева 23.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой

Паньженский 02.06.25
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 4 (хор) (протокол заседания ГЭК от 27.06.25 № 10)

Секретарь ГЭК

Журавлева 27.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2025

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Теоретические и методические основы изучения параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.	5
1.1. Параллельность прямых и плоскостей в школьном курсе математики	5
1.2. Перпендикулярность прямых и плоскостей в школьном курсе математики	7
1.3. Теоретические основы построения сечений многогранников	9
1.4. Место темы в содержании единого государственного экзамена по математике (профильный уровень)	14
Глава 2. Методические основы обучения решению задач на сечениях многогранников.....	17
2.1. Анализ задач на построение сечений многогранников в школьных учебниках.	17
2.2. Примеры решения стереометрических задач, связанных с параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей второй части ЕГЭ профильного уровня	21
2.3. Программа элективного курса «Построение сечений многогранников».....	34
2.4. Технологическая карта урока элективного курса.	39
Заключение.....	47
Список литературы	49
Приложения.....	51

Введение

В изучении геометрии выделяют те же цели, что и в изучении математики. Приведём из них несколько специфических: ознакомление с геометрическими фигурами и их свойствами, развитие логического мышления и пространственного воображения, овладение навыками выполнения чертежей. В систематическом курсе стереометрии особое значение имеет формирование пространственного мышления, выполнение и чтение чертежей.

Задачи на построение сечений имеют развивающий характер. При решении таких задач повторяются и закрепляются ранее изученные темы геометрии. Например, в некоторых задачах на построение сечений используется параллельность и перпендикулярность плоскостей и основные аксиомы стереометрии. Построение сечений многогранников оказывает большое влияние на формирование пространственного мышления. Задачи, связанные с сечениями, вызывают затруднения у обучающихся в школе и при подготовке к ЕГЭ. Основные причины, вызывающие затруднения при решении таких задач:

- правильное и четкое построение многоугольника, являющегося сечением многогранника;
- построение сечений многогранников методом следов;
- обоснование каждого шага решения задачи, с использованием параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей;
- построение неправильного следа сечения.

Однако эта тема имеет большое значение в курсе стереометрии. Например, задачи на построение сечений встречаются в заданиях ЕГЭ профильного уровня.

Объект исследования – процесс изучения стереометрических задач на построение сечений.

Предметом исследования является методика обучения построению сечений многогранников.

Цель исследования – изучение методики обучения решению задач на по-

строение сечений многогранников, с использованием параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

Чтобы реализовать цель, нужно решить следующие задачи исследования:

1. Изучить теоретический материал о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.
2. Рассмотреть методы построения сечений многогранников.
3. Проанализировать место темы сечений многогранников в школьном курсе геометрии и содержании ЕГЭ по математике профильного уровня.
4. Привести примеры задач на построение сечений с использованием параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.
5. Разработать программу элективного курса, связанного с построением сечений многогранников.

Методы исследования: структуризация теоретического материала, изучение методической и научной литературы, моделирование задачного материала, анализ используемой литературы.

Практическая значимость: полученные знания могут быть полезны при решении задач на построение сечений в ЕГЭ, а также могут быть применены на элективных занятиях в школьном курсе геометрии.

Структура работы состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

1.1 Параллельность прямых и плоскостей в школьном курсе математики

Проанализируем примерную основную образовательную рабочую программу по геометрии для 10 класса (ФГОС СОО). Тема «Параллельность прямых и плоскостей» рассматривается в курсе геометрии, в котором выделяют два уровня: базовый и углубленный. В 10 классе на базовом уровне отводится 68 часов (2 часа в неделю).

В начале 10 класса ученики рассматривают основные понятия стереометрии (точка, прямая, плоскость, пространство), аксиомы стереометрии и их следствия. Затем начинают изучать параллельность прямых и плоскостей в пространстве. Выделим основные темы этого раздела:

- параллельность прямых в пространстве;
- параллельность прямой и плоскости;
- параллельность плоскостей;
- взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

По рабочей программе на изучение этих тем в школьном курсе геометрии отводится 12 часов. После темы параллельных прямых и плоскостей ученики переходят к изучению тетраэдра и параллелепипеда.

Выделим следующие предметные результаты исходя из рабочей программы: знать понятия параллельных прямых и плоскостей, классифицировать взаимное расположение прямых и плоскостей, применять определения и признаки при решении задач, строить сечения многогранников методом следов.

На изучение геометрии углубленного уровня в 10 классе выделяется 102 часа, то есть 3 часа в неделю. В углубленном уровне также изучают взаимное расположение прямых в пространстве, признаки скрещивающихся прямых. Особенностью углубленного уровня является изучение параллельного и

центрального проектирования. Выделяют свойства параллельного проектирования и рассматривают изображение фигур в параллельной проекции.

К предметным результатам углубленного уровня можно отнести: свободное оперирование основными понятиями параллельности прямых и плоскостей, применение аксиом и их следствий при решении задач, классификацию взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве, выполнение параллельного и центрального проектирования фигур на плоскость, построение сечений многогранников различными методами. Таким образом, все предметные результаты углубленного уровня совпадают с результатами базового уровня.

Рассмотрим более подробно содержание темы параллельности прямых и плоскостей в учебнике Атанасяна Л.С, Бутузова В.Ф. и др. 10-11 класс. Вся первая глава посвящена параллельности прямых и плоскостей. Первый параграф начинается с темы параллельности прямых в пространстве. Ученики изучают взаимное расположение прямых в пространстве и знакомятся с понятием параллельных прямых. В этом параграфе рассматривается теорема, необходимая для построения сечений: через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной. Также обучающиеся проходят теорему о параллельности трех прямых и лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми.

При изучении темы параллельности прямой и плоскости выделяются три случая взаимного расположения прямой и плоскости: прямая лежит в плоскости, прямая пересекает плоскость (одна общая точка), прямая и плоскость не имеют общих точек. Далее даётся определение и признак параллельности прямой и плоскости. Во втором параграфе формулируется определение скрещивающихся прямых и доказывается признак. Затем обучающиеся классифицируют взаимное расположение прямых в пространстве (прямые пересекаются, параллельны и скрещиваются). Здесь же приводится тема углов между скрещивающимися и пересекающимися прямыми.

В параграфе 3 рассматривается параллельность плоскостей. Ученики

формулируют определение параллельных плоскостей и доказывают теорему, которую называют признаком параллельности плоскостей.

После прохождения данных тем ученики должны уметь решать задачи на доказательство, используя параллельность плоскостей и прямых.

1.2 Перпендикулярность прямых и плоскостей в школьном курсе математики

После изучения параллельности прямых и плоскостей ученики переходят к главе "Перпендикулярность прямой и плоскости". В этой главе рассматриваются следующие темы:

- перпендикулярность прямой и плоскости
- перпендикуляр и наклонная, угол между прямой и плоскостью
- перпендикулярность плоскостей.

В теме «Перпендикулярность прямой и плоскости» ученики изучают понятие перпендикулярности прямых в пространстве, признак перпендикулярности прямой и плоскости и теорему о прямой, перпендикулярной плоскости. Затем изучаются углы в пространстве: двугранный угол, линейный угол двугранного угла и угол между прямой и плоскостью. Также рассматриваются перпендикуляр и наклонная. Вводится расстояние от точки до плоскости, от прямой до плоскости, проекция фигуры на плоскость. Далее формулируется признак перпендикулярности двух плоскостей и теорема о трёх перпендикулярах.

Для изучения темы «Перпендикулярность прямой и плоскости» отводится 12 часов. Выделим предметные результаты базового уровня из рабочей программы: оперировать понятиями двугранного угла, линейного угла двугранного угла; знать определение перпендикулярных плоскостей; формулировать признак перпендикулярности прямой и плоскости.

В углубленном уровне добавляются следующие предметные результаты: доказывать лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей

прямой, признак перпендикулярности прямой и плоскости, решать стереометрические задачи, связанные с перпендикулярностью прямой и плоскости.

В учебнике Атанасяна Л.С., Бутузова В. Ф. и др. вторая глава начинается с темы "Перпендикулярность прямой и плоскости". В этом параграфе даётся определение перпендикулярных прямых в пространстве и лемма о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой. Также формулируется определение перпендикулярности прямой и плоскости: прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Далее доказываются теоремы, связанные с параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

- Теорема 1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.
- Теорема 2. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Вводится признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Во втором параграфе ученики начинают изучать понятие перпендикуляра, наклонной и проекции, рассматривают расстояние от точки до плоскости. После введенных понятий формулируется теорема о трех перпендикулярах: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной и перпендикулярная её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной. Вводится определение угла между прямой и плоскостью.

Третий параграф начинается с изучения двугранного угла. Ученики формулируют определение двугранного угла, линейного угла двугранного угла. После вводится определение и признак перпендикулярности двух плоскостей. В конце параграфа изучают прямоугольный параллелепипед.

1.3 Теоретические основы построения сечений многогранников

Тему «Построение сечений многогранников» начинают изучать в 10 классе после изучения параллельности прямых и плоскостей. В начале рассматривают тетраэдр и параллелепипед, а затем приступают к изучению сечений многогранников. Сечения многогранников используются для решения разных задач на нахождение площадей, углов между плоскостями и расстояний между плоскостями.

Изучение этой темы нужно начинать с повторения аксиом стереометрии, взаимного расположения прямых и плоскостей, параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Необходимы основные аксиомы для построения сечений:

1. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
2. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, содержащую данную точку.

Ученики должны актуализировать способы задания плоскости: через три точки, через точку и прямую, через пересекающиеся прямые и через параллельные прямые.

Построение чертежей в планиметрии не вызывает никаких трудностей, потому что изображением является фигура, подобная оригиналу. С изображением пространственных фигур возникают затруднения. При построении изображений используют центральное и параллельное проектирование. Центральное проектирование является более наглядным, но в тоже время сложным. В школе используют параллельное проектирование.

Рассмотрим центральное проектирование (рис.1). Пусть нам задана плоскость α , точка K , которая не принадлежит плоскости α . Пусть F_1 некоторая фигура в пространстве. Через каждую точку $M_1 \in F_1$ проводим луч KM_1 , которая пересекает плоскость α в точке M . Точка M называется центральной проекцией

точки M_1 . Множество всех точек, рые являются проекцией $M_1 \in F_1$, называется центральным проекцией F фигуры F_1 .

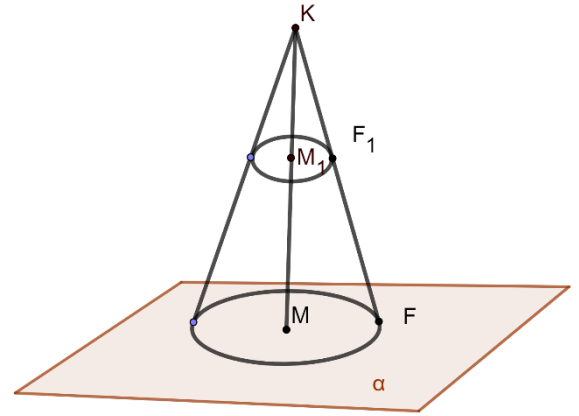


Рисунок 1

Перейдем к рассмотрению параллельного проектирования. Пусть нам дана плоскость β и прямая ℓ , которая не является параллельным к той плоскости.

Чтобы задать параллельное проектирование, нужно задать направление проектирования, то есть прямую ℓ .

Рассмотрим некоторую фигуру, например, треугольник $A_1B_1C_1$ (рис 2).

Проведём через каждую вершину треугольника прямую, параллельную прямой ℓ . Прямые пересекают плоскость β в точках A, B, C . Эти точки называются проекциями точек A_1, B_1, C_1 при параллельном проектировании π . $\pi(A_1) = A, \pi(B_1) = B, \pi(C_1) = C$. Треугольник ABC является параллельной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$.

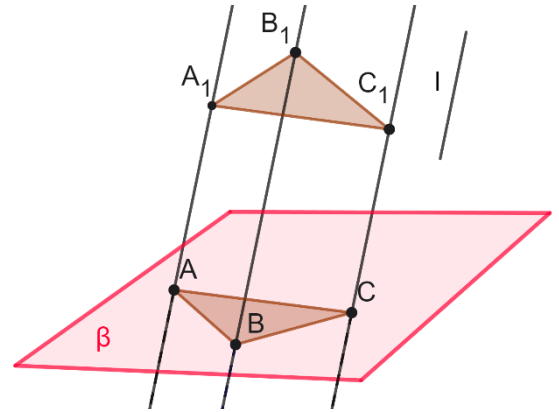


Рисунок 2

Плоскость треугольника $A_1B_1C_1$ не параллельна плоскости β в общем случае. Отрезок B_1C_1 не будет параллелен отрезку BC и т.д.

Выделим свойства параллельного проектирования:

1. Проекцией точки является точка (прямая пересекает плоскость в одной точке).
2. При параллельном проектировании прямая переходит в прямую.
3. Параллельные прямые переходят в параллельные прямые.
4. При параллельном проектировании сохраняется отношение трёх точек на прямой.
5. Проекцией отрезка является отрезок.

6. Параллельные отрезки проектируются в параллельные отрезки.

В учебнике Атанасяна Л.С. определение «сечение многогранника» даётся в главе о параллельности прямых и плоскостей после изучения темы тетраэдра и параллелепипеда. Сначала вводится определение секущей плоскости: это плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника. Секущая плоскость пересекает грани данного многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением данного многогранника. Подробнее изучение темы «Многогранник» происходит позже, ученики знакомятся только с тетраэдром и параллелепипедом, поэтому определение сечения даётся для этих многогранников. Однако при изучении темы многогранника ученики повторяют определение сечения многогранника и секущей плоскости еще раз.

Выделяют 3 метода построения сечений многогранников:

- 1) метод внутреннего проектирования
- 2) метод следов
- 3) комбинированный метод

В школьном курсе геометрии чаще всего используется метод следов. Особенностью этого метода является построение прямой, которая является пересечением секущей плоскости с плоскостью грани многогранника, эту прямую называют следом секущей плоскости. Сначала строятся точки пересечения соответствующих ребер с секущей плоскостью. С помощью этих точек строятся следы на остальных гранях многогранника.

При построении сечений методом следов следует соединить две данные точки, которые лежат в одной грани, если они имеются. Эта прямая будет являться следом секущей плоскости. Затем построить след на плоскости основания многогранника и продолжить одну из сторон грани, в которой лежит точка сечения, эти прямые пересекутся. Провести прямую через полученную точку и точку сечения в выбранной грани. Отметить точки пересечения её с рёбрами. Рассмотрим метод следов на примере.

Пример 1. Дана треугольная пирамида $SABC$. На ребре SB лежит точка M , точка N принадлежит ребру AB , точка K лежит на ребре SC . Построить сечение пирамиды $SABC$ плоскостью MNK .

Решение.

1. Точки N и M лежат в одной плоскости ASB , через две точки можем провести прямую MN , которая будет принадлежать плоскости ASB и плоскости сечения, а значит она является линией пересечения этих плоскостей. MN -след секущей плоскости и грани пирамиды.

2. Соединяем точки M и K , так как они принадлежат одной плоскости, получаем прямую MK .

3. Заметим, что прямая BC лежит в одной грани со следом MK и с точкой сечения N . Прямая MK пересекает BC в точке T , которая принадлежит плоскости ABC .

4. Точки N и T лежат в одной плоскости ABC и плоскости сечения, это прямая является их линией пересечения.

5. NT пересекает ребро AC в точке P . Соединяем точки P и N , которые лежат в грани ABC .

6. PK -линия пересечения плоскости сечения и грани ASC . Получаем искомое сечение пирамиды плоскостью MNK .

Перейдём к рассмотрению метода внутреннего проектирования. Этот метод применяется для построения сечений призм, цилиндров, пирамид и конусов. В методе внутреннего проектирования используется построение точек искомого сечения по их вторичным проекциям. Такой метод удобно применять, когда след секущей плоскости далеко удалён от заданной фигуры. Рассмотрим

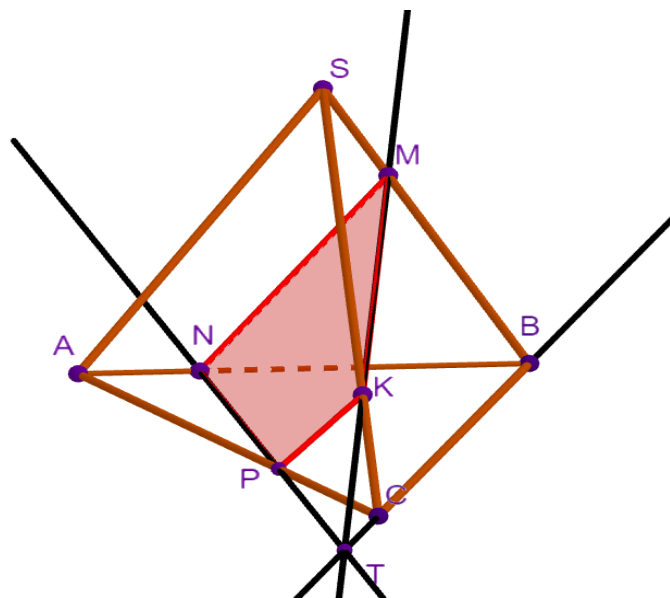


Рисунок 3

применение метода на примерах.

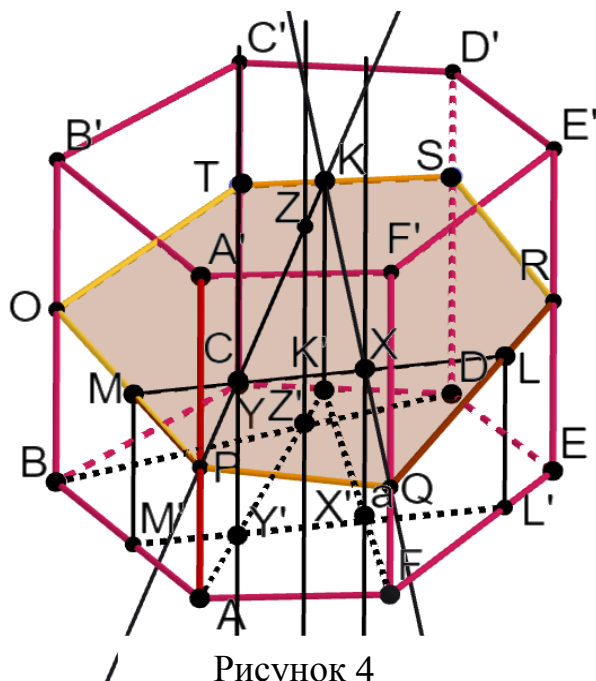


Рисунок 4

Пример 2. Дана шестиугольная призма $ABCDEF A'B'C'D'E'F'$. Три точки лежат в трех боковых гранях, никакие две из которых не являются смежными. Построить сечение этой призмы, которое проходит через эти точки.

1. Пусть точка M лежит в грани $ABB'A'$, L лежит в $EFF'E'$, K лежит в $CDD'C'$. Точки M' , L' , K' являются проекциями точек M , L , K . Обозначим плоскость сечения за α .

2. Найдем точку пересечения плоскости α и с ребром FF' . Прямая $M'L'$ пересекает $K'F$ в точке X' . Для точки X' найдем проекцию X , которая лежит в плоскости сечения. Проведем прямую a через точку X' , параллельную боковому ребру AA' . Точка X является точкой пересечения прямой ML и прямой a . KX пересекает ребро FF' в точке Q . Соединяем точки QL , эта прямая пересекает ребро EE' в точке R .

3. Аналогично строим точку Y . $M'L'$ пересекает AK' в точке Y' . Строим прямую через точку Y' , параллельную ребру AA' . Эта прямая пересекает ML в точке Y . KY пересекает ребро AA' в точке P , соединяем точки M и P . Получаем PO и PQ -стороны сечения.

4. Строим точку Z , для этого $BD \cap AK' = Z'$. Проводим прямую параллельную ребру CC' . Эта прямая пересекает KP в точке Z . OZ пересекает ребро DD' в точке S . Строим стороны SR , TS и OT – стороны сечения.

5. $OPQRST$ -иское сечение многогранника.

1.4. Место темы в содержании единого государственного экзамена по математике (профильный уровень)

Задачи на тему «Сечение многогранников» встречаются в 14-м задании Единого государственного экзамена по математике профильного уровня. Стереометрическая задача разделена на две части: в пункте а) доказываются некоторые утверждения; в пункте б) вычисляются площади фигур, сечений или определяются расстояния или углы между объектами. За правильное решение задачи максимально можно получить 3 балла. Приведём критерии оценивания 14-го задания:

- верно доказано утверждение в пункте а) и получен правильный ответ в пункте б) -3 балла;
- получен обоснованный ответ в пункте б) или есть верное доказательство утверждения пункта а), но в пункте б) есть вычислительная ошибка -2 балла;
- есть верное доказательство в пункте а) или обоснованное решение в пункте б) с вычислительной ошибкой -1 балл.

В таблице 1 мы привели статистику выполнения 14-го задания за последние 3 года. По этим данным, умение строить многогранники и их сечения вызывает у обучающихся затруднения.

Год	Средний процент выполнения задания
2022	3,1 %
2023	1.7 %
2024	3,4 %

В стереометрической задаче ЕГЭ встречаются следующие темы:

- расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости и между прямой и плоскостью;
- сечения многогранников;

- угол между прямой и плоскостью, между плоскостями и между скрещивающимися прямыми;
- объёмы многогранников;
- круглые тела и их сечения;

Рассмотрим виды задач, которые встречаются на построение сечений многогранников. Можно выделить три вида: сечение пирамиды, призмы и параллелепипеда. В пункте а) требуется доказать какое-либо утверждение: плоскость сечения параллельна боковому ребру пирамиды; диагональ основания и ребро пирамиды перпендикулярны; плоскость сечения перпендикулярна ребру; плоскость сечения перпендикулярна плоскости основания пирамиды; доказать перпендикулярность двух прямых в призме; доказать, что плоскость сечения делит ребро пополам; доказать, что плоскость сечения призмы – квадрат. Также в этом пункте просят построить сечение призмы через три точки и доказать, что сечением является равнобедренная трапеция; найти площадь сечения куба через три точки.

Проанализируем кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы. Кодификатор отражает преемственность предметных требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования на основе ФГОС.

Из перечня проверяемых требований к результатам основной образовательной программы можно выделить следующие умения: оперировать понятиями двугранного угла, скрещивающихся прямых, параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, расстояния от точки до плоскости, расстояния между прямыми, расстояния между плоскостями; угла между плоскостями, угла между прямой и плоскостью; применять изученный материал при решении задач; владеть понятием сечения многогранника; строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и их сечения; формулировать определения изучаемых фигур; выполнять необходимые дополнительные построения.

Таким образом, проанализировав рабочую программу и кодификатор ЕГЭ, можно сделать вывод, что задания ЕГЭ соответствуют рабочей программе.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА СЕЧЕНИЯХ МНОГОГРАННИКАХ

2.1 Анализ задач на построение сечений многогранников в школьных учебниках

В учебнике Атанасяна Л.С. и др. по геометрии (10-11 класс) задачи на сечение многогранников с использованием параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей требуют понимания ключевых понятий и умения применять их на практике. В параграфе 4 первой главы, в теме «Тетраэдр», приведены следующие задачи под номерами 69 и 70 (приложение 2): доказать, что плоскость сечения пересекает грани по параллельным прямым; доказать, что плоскость, проходящая через середины рёбер, параллельна основанию. [2]

Также встречаются задачи в номерах 71, 72 и 75 (приложение 2):

- на построение точки пересечения какой-либо прямой, лежащей на грани, и плоскости основания;
- на построение сечения тетраэдра, которое проходит через точку, лежащую внутри грани, и параллельно основанию;
- на построение сечения плоскостью, проходящей через ребро и середину другого ребра, и доказательство того, что плоскость, проходящая через середины отрезков, параллельна плоскости.

Далее рассмотрим задачи под номерами 79, 82, 84 (приложение 2) на построение сечений после темы «Параллелепипед»:

- построить сечение через три данные точки и доказать, что построенное сечение является параллелограммом;
- построить сечение, которое проходит через точку, лежащую в одной из граней, параллельно плоскости основания;
- построить сечение параллелепипеда через три точки (две из которых являются серединами рёбер, а одна точка – вершиной) и доказать, что полученное сечение – трапеция. В данных темах чаще всего встречаются задачи на по-

строение сечений через три точки.

Задачи, где используются параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, также приведены после изучения призмы, пирамиды, усеченной пирамиды. После темы «Призма» приведены задачи на построение сечений в номерах 233 и 234 с использованием свойств перпендикулярности плоскостей (приложение 2). В теме «Пирамида» можно выделить следующую задачу под номером 262: в правильной пирамиде проведена плоскость через боковое ребро и высоту боковой грани, доказать, что эта плоскость перпендикулярна боковой грани. Также под номером 260 приведена задача с использованием свойств перпендикулярности прямой и плоскости.

После проведённого анализа можно сделать вывод, что в школьном учебнике Атанасяна Л.С. содержится недостаточное количество задач на построение сечений с использованием свойств параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Поэтому проанализируем дополнительный задачный материал.

В дидактическом материале А.П. Ершовой, В.В. Голобородько за 10 класс в задачах на построение сечений многогранников используются свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, приведённые в самостоятельных работах номер 9, 10, 20. Рассмотрим типы таких задач. [4]

Первый случай, когда секущая плоскость параллельна какой-либо прямой или плоскости, и линии пересечения с гранями будут параллельны этой прямой. Приведём пример: построить сечение куба плоскостью, параллельной диагонали основания. Здесь необходимо найти направляющую прямую (диагональ), провести линии в гранях, параллельные ей, и получаем сечение многогранника. Такого типа задачи приведены в самостоятельной работе 9 под номерами 1 и 3, вариант Б1, и в самостоятельной работе 10, вариант Б1 (приложение 3).

Второй случай, когда плоскость сечения перпендикулярна ребру или грани, и линия пересечения с перпендикулярной гранью будет перпендикулярна этому ребру. Например, в правильной четырёхугольной пирамиде построить

сечение, перпендикулярное боковому ребру. Здесь находим точку пересечения плоскости с ребром и проводим перпендикуляр в каждой грани. Получаем исходное сечение – многоугольник (трапеция или прямоугольник). В самостоятельной работе 20 в вариантах Б1 и В1 есть такие типы задач.

Выделим следующие задачи на параллельность прямой и плоскости: в кубе построить сечение плоскостью, проходящей через точку на ребре и параллельной диагонали (самостоятельная работа 10 в приложении 3); в правильной треугольной пирамиде построить сечение, параллельное плоскости и проходящее через точку (самостоятельная работа 9, задача 1, вариант Б1).

Перейдём к рассмотрению задач из дидактического материала Зива Б.Г.. Автор выделил задачи на построение сечений в отдельный параграф 6, где привёл сечения тетраэдра и параллелепипеда. [5]

В задачах на тетраэдр чаще всего встречается построение сечений через заданные точки и параллельное либо ребру, либо плоскости. Также требуется найти площадь построенного сечения, используя свойство параллельности, подобия и формулы площадей. При этом заданы некоторые условия: длины рёбер; соотношение отрезков; указаны точки, через которые проходит плоскость сечения. Приведём некоторые примеры:

1. Дана точка и требуется провести плоскость, параллельную одной из граней (параграф 6, задача 2.1 в приложении 3).

2. Плоскость сечения проходит через точки и параллельна заданному ребру, при этом сечением может быть треугольник или трапеция (параграф 6, задача 3.1 в приложении 3).

Рассмотрим задачи на построение сечений параллелепипеда. Здесь сечение может проходить через точки на ребрах и параллельно ребру или грани. Например, построить сечение, проходящее через две точки и параллельное боковому ребру, или требуется провести плоскость через точку, параллельную другой плоскости.

Использование свойств перпендикулярности прямых и плоскостей в за-

дачах на построение сечений в дидактическом материале Зива Б.Г. приведено в отдельном параграфе 8 в номерах 5.2, 6.2, 7.2, 8.2. Можно разделить условия таких задач на типы: построение сечения перпендикулярного заданным прямым или плоскостям, доказательство перпендикулярности прямых в данном многограннике, нахождение площади сечения.

Рассмотрим примеры задач на построение перпендикулярных сечений: дана точка, которая является чаще всего серединой ребра, нужно провести плоскость, перпендикулярную заданной прямой. В таких типах задач часто используется теорема о трёх перпендикулярах и ортогональные проекции.

В учебнике геометрии Шарыгина И.Ф. (10-11 класс) задачи на построение сечений впервые встречаются во второй главе "Многогранники" после тем параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. В параграфе 2.2, в теме "Построения на изображениях", приведены метод следов и вспомогательных плоскостей. В этой теме есть ряд задач, в которых необходимо построить сечение многогранников: по трём точкам, по двум точкам и параллельно какой-либо прямой. [13]

Проанализируем задачи из параграфа 2.5 "Правильная пирамида". В этих задачах используются свойства параллельности плоскостей и подобия фигур. Задачи 9, 10, 20 (в) (приложение 5) объединяет параллельные сечения в пирамиде, подобные основанию или граням, и отношения площадей сечений. Задача 21 требует построения сечения через сторону основания и середину противоположного ребра, а также использования свойств правильной пирамиды и подобия треугольников. Задача 30 включает в себя сечение, параллельное скрещивающимся рёбрам, и применение теоремы о средней линии и пропорций.

Рассмотрим задания из сборника задач по геометрии И.Ф. Шарыгина, Р.К. Гордина. [12] Классифицируем задачи по типам многогранников:

- пирамиды: 3655, 3671, 3679, 3702, 3819
- призмы и параллелепипеды: 3737, 3738
- кубы: 3725, 3798, 3841. (приложение 6)

Основными методами построений сечений в этих задачах является параллельность прямых, плоскостей и перпендикулярность прямых, плоскостей. В номерах 3655, 3679, 3702 в условии задачи сечения параллельны основанию, в номерах 3671, 3725, 3738 сечения параллельны ребрам или диагоналям. Сечение, перпендикулярное основанию, встречается в задаче номер 3819, а сечение, перпендикулярное диагонали куба в номере 3841. Для кубов характерны задачи на перпендикулярность к диагоналям.

Уровень сложности приведённых задач отличается. Номера 3655 и 3702 можно определить как базовый уровень. Здесь можно использовать прямое применение свойства. Средний уровень задач – 3671, 3679, требуется 2-3 логических перехода. Сложный уровень встречается в задачах 3725, 3798. Данный набор задач обеспечивает системное освоение темы, начиная с базовых понятий и заканчивая сложными комбинированными случаями.

2.2 Примеры решения стереометрических задач, связанных с параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей второй части ЕГЭ профильного уровня

Задача 1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA , AB , BC взяты точки K , M , N соответственно так, что $KA = AM = NC = 2$.

а) Докажите, что плоскость KNM перпендикулярна ребру SD .

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости KNM .

Решение:

Пункт а)

1. Построим сечение KNM , для этого соединим KM и NM . Из условия $\frac{AK}{KS} = \frac{AM}{MB}$ следует, что KM параллельна SB (обратная теорема о пропорциональных отрезках).

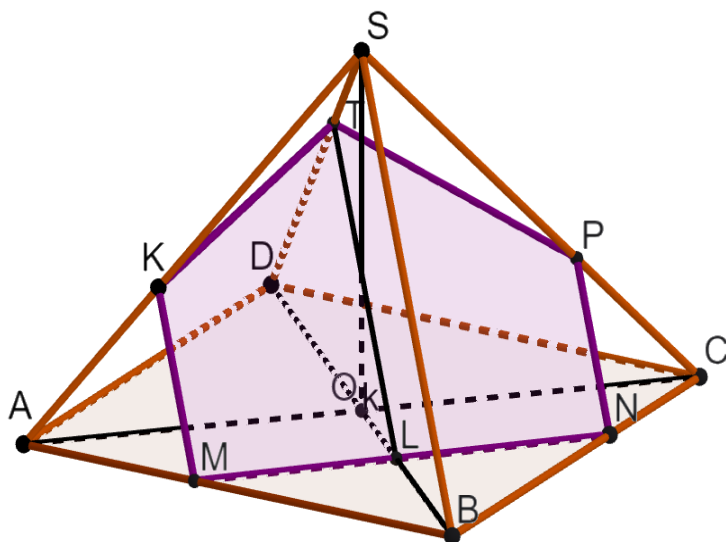


Рисунок 5

2. В грани SBC дём прямую через точку N , параллельную SB , получим PN -линия пересечения плоскости SBC и сечения KNM .

3. Рассмотрим плоскость SDB . $L = MN \cap DB$. Через точку L проводим прямую LT , параллельную прямой SB . Соединяем прямые KT и PT , получаем искомое сечение $KMNPT$ ($(KNM) \parallel SB$).

4. Докажем, что $(KNM) \perp SD$, для этого нам нужно доказать, что плоскость KNM перпендикулярна двум пересекающимся прямым (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

5. Заметим, что $MN \parallel AC$ (по обратной теореме о пропорциональных отрезках). В основании пирамиды лежит квадрат, поэтому диагонали $DB \perp AC$, отсюда следует, что $MN \perp DB$. Также $MN \perp SO$, так как $SO \perp (ABC)$, а значит SO перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Из этого следует, что $MN \perp (SDB)$, значит $MN \perp SD$.

6. Треугольники $DSB = DAB$, так как $SD = SB = DA = DB = 5$ и DB -общая (по трём сторонам), а значит треугольник DSB – прямоугольный. Прямая $SD \perp SB$ и $LT \parallel SB$, следовательно, $LT \perp SD$.

7. Мы доказали, что $SD \perp LT$ и $SD \perp MN$, а значит $SD \perp (KNM)$.

Пункт б)

1. Расстоянием от точки D до плоскости KNM будет прямая DT , так как $DT \perp (KNM)$.

2. Из доказательства пункта а) следует $DT \perp LT$ и $DT \perp MN$, соответственно $DT \perp (KNM)$.

3. Рассмотрим треугольник KST : $\angle KST = 60^\circ$ ($\triangle ASD$ -правильный),

$\angle KTS=90^\circ$, $\angle SKT=30^\circ$, следовательно, $TS=\frac{1}{2}KS=\frac{3}{2}=1,5$. Прямая $DT=5-1,5=3,5$.

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через диагональ BD_1 проведена плоскость β , параллельная прямой AC .

а) Докажите, что прямая, пересечения плоскости β с плоскостью основания $A_1 B_1 C_1 D_1$, параллельна прямой $A_1 C_1$.

б) Найдите угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если $AB=6$, $BC=8$, $CC_1=10$.

Решение:

Пункт а)

1. Построим плоскость β , проходящую через диагональ BD_1 , параллельной AC . Диагонали AC и $A_1 C_1$ параллельны. Тогда можем построить прямую t параллельную прямой $A_1 C_1$.

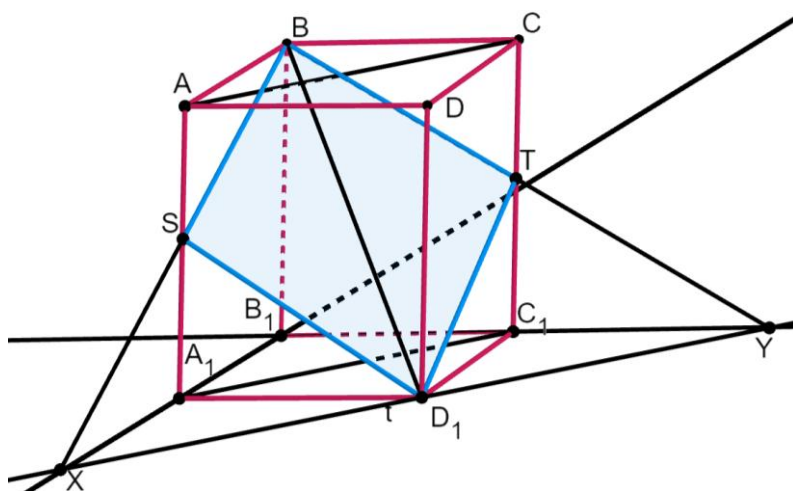


Рисунок 6

2. Прямая t пересечёт прямую $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ в точках X и Y .

3. Прямая XB пересечёт ребро AA_1 в точке S , а YB пересечёт CC_1 в точке T . $SBTD_1$ – искомое сечение.

4. Линией пересечения плоскости β и плоскости основания является прямая XY . Из условия $\beta \parallel AC$ следует, что $XY \parallel A_1 C_1$.

Пункт б)

1. Построим $B_1 P \perp XY$ и соединим точки B и P .

2. $B_1 P$ является проекцией в треугольнике $BB_1 P$, BP – наклонная. Из этого следует, что $XY \perp BP$ (теорема о трёх перпендикулярах). $\angle B_1 P B$ искомый угол.

3. $H=A_1 C_1 \cap B_1 P$. $\angle XA_1 D_1 = \angle A_1 B_1 C_1$ (по стороне и двум углам).

Отсюда следует, что $\frac{B_1P}{B_1H} = \frac{2}{1}$.

$$4. B_1P = 2 \cdot B_1H = \frac{2 \cdot A_1B_1 \cdot B_1C_1}{A_1C_1} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{\sqrt{36+64}} = \frac{48}{50}. BB_1 = CC_1 = 10. \operatorname{tg} \angle B_1PB = \frac{BB_1}{B_1P} = \frac{10 \cdot 5}{48} = \frac{25}{24}$$

$$\angle B_1PB = \operatorname{arctg} \frac{25}{24}$$

$$\text{Ответ: } \angle B_1PB = \operatorname{arctg} \frac{25}{24}$$

Задача 3. Дана правильная четырехугольная пирамида PABCD. Все ребра равны 4, точка K является серединой бокового ребра AP.

а) Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC.

б) Найти площадь сечения.

Решение:

Пункт а)

1. Проведём KL параллельно прямой PB. Также проведём LM параллельно BC.

2. Точка L и M являются серединами AB и CD. Плоскость KLM параллельна прямым PB и

BC (признак параллельности прямой и плоскости).

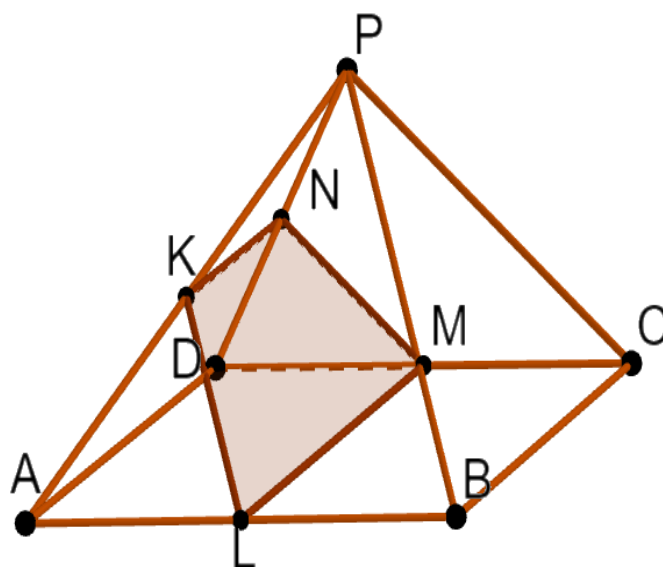


Рисунок 7

3. Прямая LM параллельна плоскости PAD, так как LM параллельна AD.

4. Плоскость сечения проходит по прямой KN, параллельной LM.

5. KLMN – искомое сечение пирамиды.

Пункт б)

1. В треугольниках APB и DPC отрезки KL и MN равны и являются средними линиями. Тогда сечением является равнобедренная трапеция.

2. Точка L и M – середины сторон квадрата, а отрезок LM=AD=4. Также отрезки KL=MN=KN= $\frac{4}{2}=2$ (средняя линия треугольника).

3. Для того, чтобы найти площадь, необходимо вычислить высоту KH.

Рассмотрим $\triangle KHL$: $LH = \frac{LM - KN}{2} = 1$, тогда $KH = \sqrt{KL^2 - HL^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

4. Теперь можем найти площадь трапеции, $S_{KLMN} = \frac{4+2}{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $S_{KLMN} = 3\sqrt{3}$.

Задача 4. Дана правильная треугольная пирамида $MABC$ с вершиной M . Высота пирамиды равна 9, а боковые рёбра равны 15.

а) Доказать, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и BC параллельно прямой MB , является прямоугольником.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение:

Пункта)

1. Обозначим за середины сторон AB и BC точки F и G .

2. Через точку F строим прямую, параллельную прямой MB . Эта прямая пересекает ребро MA в точке K .

3. Аналогично строим прямую, параллельную MB , через точку G , получаем точку L на ребре MC .

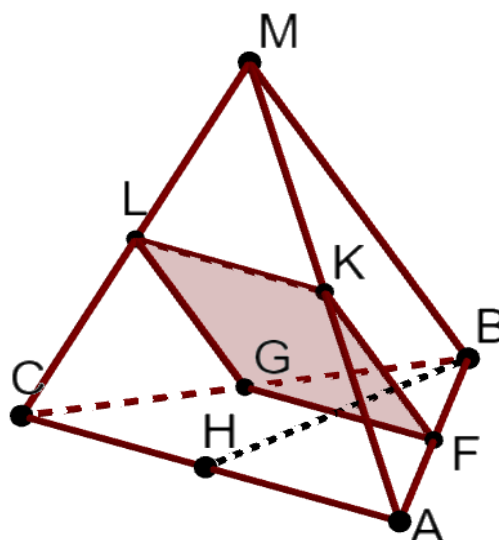


Рисунок 8

4. Точки K и L являются серединами сторон MA и MC . $FK = GL = \frac{MB}{2}$ (средняя линия треугольника). Получаем $LKFG$ – искомое сечение.

5. В треугольнике MAC : MH – высота и медиана. В треугольнике ABC : BH – медиана и высота. Отсюда следует, что $AC \perp (MBH)$ и $AC \perp MB$.

6. $FK \parallel MB$ и $FG \parallel AC$, следовательно, $FGLK$ – прямоугольник.

Пункт б)

1. Зная высоту MO и ребро MB , можем найти отрезок $OB = 12$.

2. Треугольник ABC – правильный, O – центр этого треугольника. Найдём сторону $AC = R \cdot \sqrt{3} = OB \cdot \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

3. В прямоугольнике LKFG: $FG = \frac{AC}{2} = 6\sqrt{3}$ и $KF = \frac{MB}{2} = \frac{15}{2}$.

4. $S_{LKFG} = FG \cdot KF = 6\sqrt{3} \cdot \frac{15}{2} = 45\sqrt{3}$.

Ответ: $S_{LKFG} = 45\sqrt{3}$.

Задача 5. Дана правильная четырехугольная пирамида MABCD с вершиной M, стороны основания которого равны 15, а боковые ребра равны 16.

а) Докажите, что прямые MC и BD перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку В и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение:

Пункта)

1. Проекцией прямой MC на плоскость ABCD является прямая AC.

2. AC перпендикулярна BD, так как в квадрате диагонали взаимно перпендикулярны.

3. Из теоремы о трёх перпендикулярах следует, что прямая BD перпендикулярна проекции CO, перпендикулярна и самой наклонной MC.

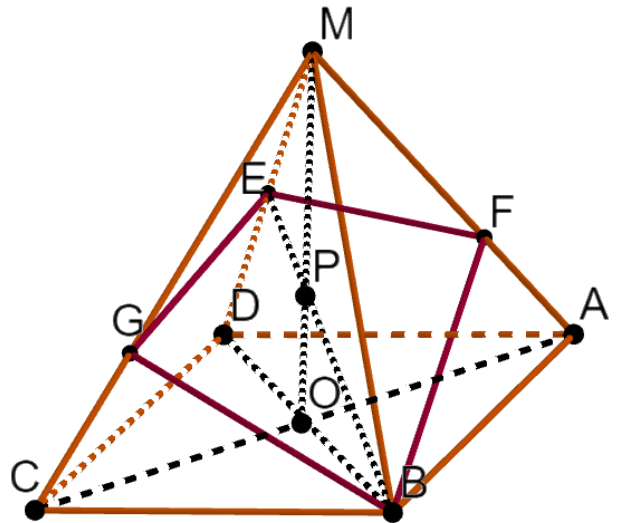


Рисунок 9

Пункт б)

1. Серединой ребра MD является точка E. Отрезок BE проходит через плоскость MAC и пересекает его в точке P.

2. Рассмотрим треугольник MBD: точка P – пересечение медиан, значит $MP : PO = 2:1$, точка O является центром основания пирамиды.

3. Построим отрезок FG параллельно отрезку AC через точку P. BGEF – искомое сечение.

4. Тогда по теореме о пропорциональности отрезков следует, что $MP : PO = MG : GC = MF : FA = 2:1$.

$$5. \text{Найдём } FG = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2 \cdot 15\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}.$$

$$6. \text{BE является медианой треугольника MBD. } BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \\ = \frac{\sqrt{2BD^2 + MB^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = \frac{\sqrt{225 \cdot 4 + 256}}{2} = \frac{\sqrt{225 \cdot 4 + 256}}{2} = \frac{\sqrt{1156}}{2} = 17.$$

7. $BD \perp (MAC)$, тогда диагонали $FG \perp BE$.

$$8. S_{BGEF} = \frac{FG \cdot BE}{2} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 17}{2} = 85\sqrt{2}.$$

Ответ: $S_{BGEF} = 85\sqrt{2}$.

Задача 6. В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD все рёбра равны 12. Точка N является серединой бокового ребра MA, точка K делит боковое ребро MB в отношении 2 : 1, считая от вершины M.

а) Доказать, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки N и K параллельно прямой AD, является равнобедренной трапецией.

б) Найти площадь этого сечения.

Решение:

Пункт а)

1. Построим отрезок NK. Через точки N и K проведём прямые параллельно ребру AD. Прямые пересекаются с рёбрами в точках P и L. KLPN – искомое сечение пирамиды.

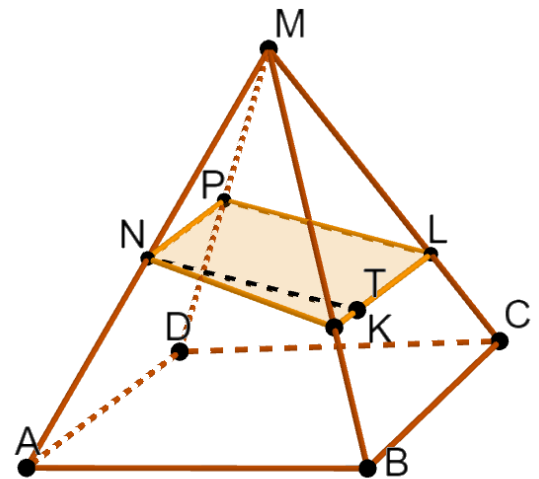


Рисунок 10

2. По построению отрезки NP и KL параллельны и не являются равными, NK и PL не параллельны. Из этого следует, что KLPN – трапеция.

3. Рассмотрим треугольники NMK и PML: $\angle NMK = \angle PML$, $NM = MP$, $MK = ML$. Следовательно, $NK = PL$ и трапеция является равнобедренной.

Пункт б)

$$1. \text{NP является средней линией треугольника, } NP = \frac{1}{2} \cdot AD = 6.$$

$$2. KL = \frac{2}{3} \cdot BC = 8.$$

3. Треугольник МАВ равносторонний, поэтому $\angle NMK=60^\circ$. Найдём $MK=ML=\frac{2}{3} \cdot MB=8$. $NM=MP=6$.

4. Теперь можем вычислить НК по теореме косинусов: $NK^2 = NM^2 + MK^2 - 2 \cdot NM \cdot MK \cdot \cos \angle NMK = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 52$.

5. Трапеция KLPN равнобедренная, поэтому $KT = \frac{KL - NP}{2} = 1$. Высоту найдём по теореме Пифагора, рассматривая треугольник NTK:

$$NT = \sqrt{NK^2 - TK^2} = \sqrt{52 - 1} = \sqrt{51}.$$

6. Вычислим площадь KLPN: $S_{KLPN} = \frac{NP+KL}{2} \cdot NT = \frac{6+8}{2} \cdot \sqrt{51} = 7\sqrt{51}$.

$$\text{OTBET: } S_{\text{KLPN}} = 7\sqrt{51}.$$

Задача 7. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8.

а) Докажите, что плоскость, проходящей через точку В и середину ребра MD параллельно прямой AC, делит ребро MC в отношении 2:1, считая от вершины М.

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

Решение:

Пункта)

1. Серединой ребра MD является точка E . Отрезок BE проходит через плоскость MAC и пересекает его в точке P .

2. Рассмотрим треугольник MBD: точка Р – пересечение медиан, значит МР: РО=2:1, точка О является центром основания пирамиды.

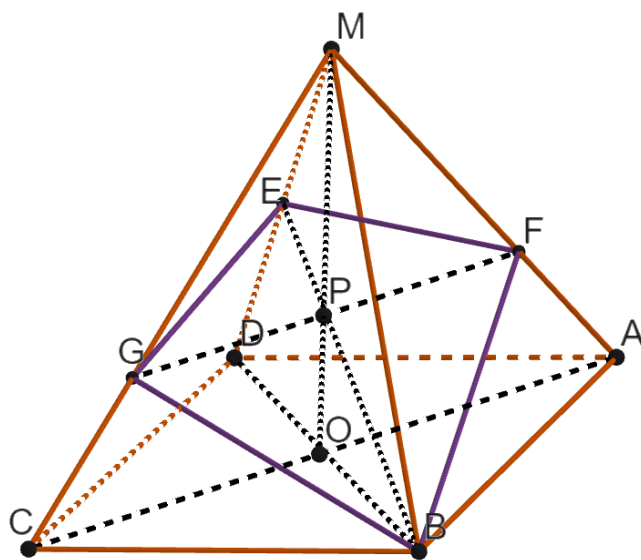


Рисунок 11

3. Построим отрезок FG параллельно отрезку AC через точку P.

4. Тогда по теореме о пропорциональности отрезков следует, что $MP:PO$

$$=MG:GC=MF:FA=2:1.$$

Пункт б)

$$1. \text{ Найдём } FG = \frac{2}{3} \cdot AC = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}.$$

$$2. \text{ BE является медианой треугольника MBD. } BE = \frac{\sqrt{2BD^2 + 2MB^2 - MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{2BD^2 + MB^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2 + MB^2}}{2} = \frac{\sqrt{36 + 64}}{2} = 5.$$

3. $BD \perp (MAC)$, тогда диагонали $FG \perp BE$.

$$4. S_{BGEF} = \frac{FG \cdot BE}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 10}{2} = 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Ответ: } S_{BGEF} = 10\sqrt{2}.$$

Задача 8. Точка Q делит ребро AB правильной четырёхугольной пирамиды SABCD в отношении $AQ:QB = 1:2$. Точка P – середина ребра AS.

а) Доказать, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найти площадь сечения DPQ, если площадь сечения DSB равна.

Решение:

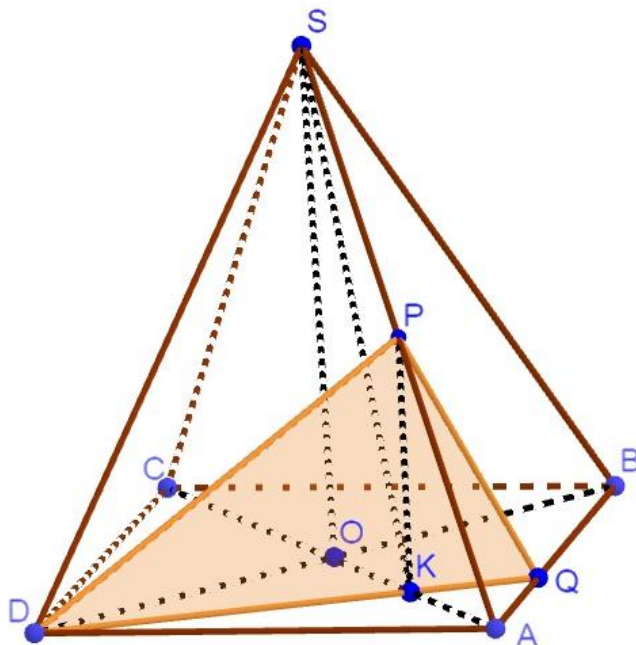


Рисунок 12

Из этого следует, что треугольники $AKQ = OKN$ (по стороне и двум прилежащим углам).

Пункт а)

1. Обозначим центр основания за точку O. Пусть точка M является серединой ребра AD. Отрезки $AO \cap DQ = K$ и $MO \cap DQ = N$.

2. MO является средней линией треугольника ADB. NO также является средней линией треугольника QDB.

$$3. \text{ Следовательно, } NO = \frac{QB}{2} = AQ$$

$$\angle KNO = \angle KQA, \angle NOK = \angle KAQ \text{ (накрест лежащие).}$$

4. Значит, точка К является серединой АО. Таким образом, РК-это средняя линия треугольника SOA. Так как SO и РК параллельны, а SO перпендикулярна основанию (высота пирамиды), следовательно, РК также перпендикулярна плоскости основания.

5. РК содержится в плоскости DPQ, поэтому эта плоскость тоже перпендикулярна плоскости основания.

Пункт б)

1. Сторона основания пирамиды пусть равна $3a$, высота пирамиды равна h .

$$2. S_{DSB} = \frac{DB \cdot SO}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot ah}{2} = 6, \text{отсюда } ah = 2\sqrt{2}.$$

$$3. S_{DPQ} = \frac{\sqrt{DA^2 + AQ^2}}{2} \cdot \frac{SO}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot ah}{4} = \sqrt{5}.$$

Ответ: $S_{DPQ} = \sqrt{5}$.

Задача 9. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD с вершиной S стороны основания равны 18, а боковые ребра 15. Точка R принадлежит ребру SB, причем $SR:RB = 2:1$.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки C и R параллельно BD делит ребро SA пополам.

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

Решение:

Пункт а)

1. Построим плоскость сечения. Для этого соединим точки C и R, затем через точку R проведем прямую, параллельную BD. Эта прямая пересекает ребро SD в точке T.

2. Отрезок RT принадлежит плоскости сечения и пересекает высоту SO в точке K.

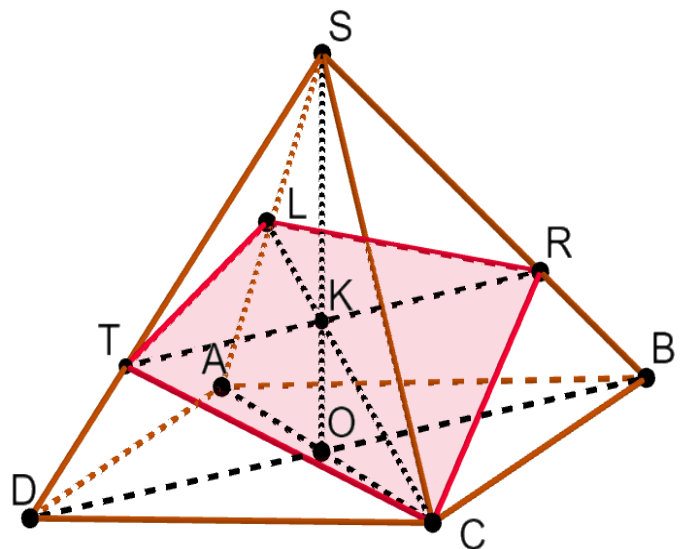


Рисунок 13

3. Проведём прямую КС, которая пересекает ребро SA в точке L. TLRC – искомое сечение пирамиды.

4. Точка L является точкой пересечения КС и SA. Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что отрезки SK:KO, SR:RB, ST:TD как 2:1 соответственно.

5. В треугольнике SAC отрезок SO является медианой (т. к. диагонали точкой пересечения делятся пополам). Точка К – это пересечение медиан в этом треугольнике, следовательно, CL также является медианой и SL=LA.

Пункт б)

1. Сечение CRLT – это дельтоид, который состоит из двух равнобедренных треугольников. Площадь дельтоида равна половине произведения диагоналей.

$$2. RT = \frac{2}{3} \cdot BD = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot BC = 12\sqrt{2}$$

3. Пусть E является проекцией точки L на AC.

$$LE = \frac{1}{2} \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{SB^2 - BO^2} = \frac{1}{2} \sqrt{SB^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot BC\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{15^2 - (9\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{225 - 162} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{63} = \frac{3}{2} \sqrt{7}.$$

$$4. CE = CO + OE = CO + \frac{CO}{2} = \frac{3}{4} \cdot CA = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot BC = \frac{27 \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

$$5. CL = \sqrt{CE^2 - LE^2} = \sqrt{\left(\frac{27 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3 \sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{39}{2}.$$

$$6. S_{CRLT} = \frac{RT \cdot CL}{2} = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} \cdot \frac{39}{2} = 117\sqrt{2}.$$

$$\text{Ответ: } S_{CRLT} = 117\sqrt{2}.$$

Задача 10. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$; длина ребра основания равна 4, а длина бокового ребра равна 2.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью β , проходящей через середину ребра АВ перпендикулярно отрезку, соединяющему середины рёбер ВС и A_1B_1 , делит ребро AC в отношении 1: 3, считая от вершины А.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α .

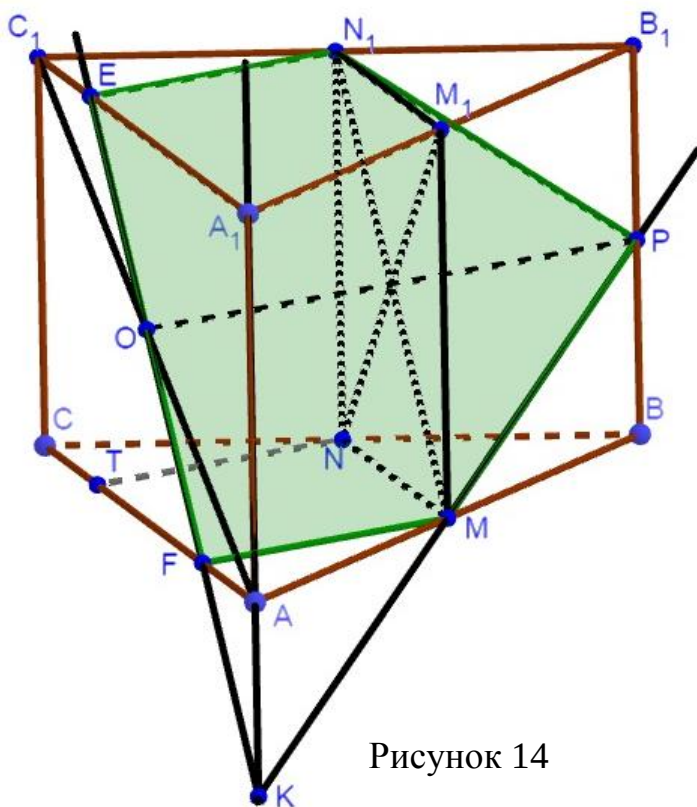


Рисунок 14

Решение:

Пункт а)

1. Обозначим середины рёбер AB, BC, A_1B_1, B_1C_1 точками M, N, M_1, N_1 соответственно.

2. MNM_1N_1 является квадратом, следовательно, перпендикулярны диагонали MN_1 и NM_1 и делятся пополам точкой пересечения.

3. Точка P является серединой ребра BB_1 , а точку центра грани ACC_1A_1 обозначим

точкой O . Прямая OP будет перпендикулярна плоскости MNN_1 , из этого следует, что прямая OP перпендикулярна прямой M_1N .

4. Прямая M_1N перпендикулярна прямым MN_1 и OP . Прямые MN_1 и OP принадлежат плоскости β .

5. Прямые $PM \cap AA_1 = K$, а прямая OK пересекается с рёбрами AC и A_1C_1 в точках F и E . Получаем искомое сечение призмы – EN_1PMF .

6. Рассмотрим треугольники $PBM = KAM$ (по второму признаку равенства треугольников), следовательно, $PB = KA$ и $A_1K = 1 + 2 = 3$.

7. $\frac{EA_1}{FA} = \frac{A_1K}{AK} = \frac{3}{1}$ (следует из подобия треугольников EA_1K и FAK), $C_1E = FA$, следовательно, $EA_1 = CF$ и $FA:CF = 1:3$.

Пункт б)

1. Основание ABC и плоскость β пересекаются по прямой FM . Прямая M_1N перпендикулярна плоскости β . Отсюда следует, что плоскости MNM_1N_1 и β перпендикулярны.

2. $\angle N_1MN = 45^\circ$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями ABC и β .

3. Пятиугольник $TFMBN$ – ортогональная проекция пятиугольника EN_1PMF на плоскость ABC .

$$4. S_{CNT} = S_{C_1N_1E} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_{ABC}}{2}, \text{ следовательно, } S_{FMA} = \frac{1}{8} S_{ABC}.$$

$$5. S_{TFMBN} = \frac{3}{4} S_{ABC} = 3\sqrt{3} \text{ и } S_{EN_1PMF} = \frac{3\sqrt{3}}{\cos \angle N_1MN} = \frac{3\sqrt{3}}{\cos 45^\circ} = 3\sqrt{6}.$$

Задача 11. Дана прямая призма $ABCA_1B_1C_1$. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AB . На AB отмечена точка P такая, что $AP : PB = 3 : 1$. Точка Q делит пополам ребро B_1C_1 . Точка M делит пополам ребро BC . Через точку M проведена плоскость перпендикулярная PQ .

а) Докажите, что прямая AB параллельна плоскости α .

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит отрезок PQ , если $AA_1 = 5$, $AB = 12$ и $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$.

Решение:

Пункт а)

1. Для того, чтобы доказать, что прямая AB параллельна плоскости α , докажем, что прямая AB перпендикулярна PQ .

2. В равнобедренном треугольнике ABC высота CH является и медианой, и биссектрисой, поэтому точка H является серединой AB .

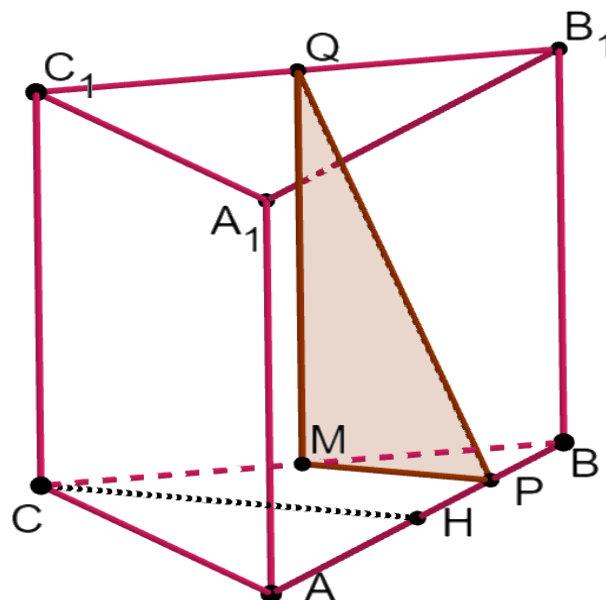


Рисунок 15

3. Перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую AB , делит отрезок HB пополам и пересекает его в точке P (по теореме Фалеса для $\angle CBA$).

4. QM перпендикулярен BC . боковая грань призмы перпендикулярна основанию ABC .

5. Отсюда следует, если AB перпендикулярна MP , то AB перпендикулярна и отрезку PQ (по тереме о трёх перпендикулярах), следовательно, прямая AB параллельна плоскости α .

Пунктб)

1. Рассмотрим треугольник ABC: $\cos \angle ABC = \frac{BH}{BC}$, где $BC = 10$, по теореме Пифагора находим $CH = 8$, следовательно, $MP = 4$ (средняя линия треугольника BСН. $QM = BV_1 = AA_1 = 5$).

2. Обозначим за точку X пересечение плоскости α и отрезка PQ. Отрезок MX перпендикулярен отрезку PQ.

3. В прямоугольном треугольнике PQM отрезок MX является высотой, проведенной к гипотенузе. Точка X делит гипотенузу в отношении квадратов катетов, поэтому $PX:XQ=16:25$.

2.3 Программа элективного курса «Построение сечений многогранников»

Элективный курс «Построение сечений многогранников» предназначен для обучающихся 10-х классов общеобразовательных школ и рассчитан на 14 академических часов.

В рамках курса рассматриваются не только классические методы построения сечений, но и их усложненные варианты, основанные на применении свойств параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Элективный курс представлен в виде практикума, который позволит систематизировать и расширить знания учеников по стереометрии и позволит начать подготовку к ЕГЭ.

Анализ рабочей программы и содержание учебника Атанасяна Л.С. показал, что теме «Сечения многогранников» уделяется мало времени. В результате многие ученики испытывают трудности при решении задач на построение сечений многогранников. В особенности ученикам трудно даются задачи на построение сечений с использованием свойств параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

Актуальность курса обусловлена его практической значимостью: задачи на построение сечений многогранников регулярно встречаются во второй части

ЕГЭ профильного уровня. Умение анализировать взаимное расположение фигур в пространстве и применять свойства параллельности и перпендикулярности позволяет решать сложные стереометрические задачи.

Содержание уроков представляет собой решение задач на построение сечений многогранников, а именно призм и пирамид, с использованием свойств параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

Целью данного элективного курса является изучение задач на построение сечений многогранников с использованием свойств параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, развитие пространственного мышления и подготовка к решению стереометрических задач ЕГЭ профильного уровня.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- систематизировать и обобщить теоретический материал о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей;
- отработать навыки решения задач на построение сечений с использованием параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

Категория обучающихся: программа данного элективного курса предназначена для обучающихся 10-х классов, желающих углубить свои знания и развить навыки решения пространственных задач.

Режим занятий: 1 занятие в неделю, продолжительность занятия – 40 минут.

Формы занятий: практикум, лекция, зачёт.

Методы обучения: наглядные, словесные, практические.

Средства обучения: презентация, программа GeoGebra.

В ходе прохождения элективного курса обучающиеся научатся:

- применять свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей;
- решать сложные стереометрические задачи из ЕГЭ профильного

уровня;

- строить сечения многогранников, используя основные методы.

Основное содержание программы

В рамках рабочей программы элективного курса «Построение сечений многогранников» разработано тематическое планирование. В таблице 1 представим календарно-тематический план.

Таблица 1 – Календарно-тематическое планирование элективного курса «Построение сечений многогранников с использованием свойств параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей».

№ урока	Тема	Кол-во уроков	Форма проведения урока
1	Основные признаки и теоремы параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.	1	лекция
2	Построение сечений многогранников методом следов.	1	практикум
3-4	Построение сечений призмы с использованием свойств параллельности прямых и плоскостей.	2	практикум
5-6	Построение сечений пирамиды с использованием свойств параллельности прямых и плоскостей.	2	практикум
7-8	Построение сечений призмы с использованием свойств перпендикулярности прямых и плоскостей.	2	практикум
9-10	Построение сечений пирамиды с использованием свойств перпендикулярности прямых и плоскостей.	2	практикум

Продолжение таблицы 1

11-12	Создание моделей куба, призмы, пирамиды и их сечений в программе GeoGebra.	2	практикум
13	Построение сечений многогранников с использованием свойств параллельности прямых и плоскостей.	1	практикум
14	Обобщение изученного материала.	1	зачёт

Тема 1. Основные признаки и теоремы параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Определение параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей. Определение перпендикулярности плоскостей. Признаки параллельности прямой и плоскости, двух плоскостей. Теоремы о перпендикулярности прямой к плоскости, двух плоскостей. (Приложение 2, номера 68, 69, 70).

Тема 2. Построение сечений многогранников методом следов. Алгоритм метода следов. Построение сечения куба, призмы, пирамиды. Разбор типовых ошибок. (Приложение 2, номера 71, 72).

Тема 3. Построение сечений призмы с использованием свойств параллельности прямых и плоскостей. Сечение, параллельное основанию призмы. Сечение, параллельное боковому ребру. Сечение, параллельное заданной грани. Построение сечений в прямой и наклонной призмах. Нахождение площади сечения. (Приложение 2, номера 79, 82, 84; приложение 4, параграф 12, номер 8.2; приложение 6, номера 3737, 3738).

Тема 4. Построение сечений пирамиды с использованием свойств параллельности прямых и плоскостей. Сечение, параллельное основанию пирамиды. Сечение, параллельное боковой грани. Сечение, параллельное заданной прямой (например, медиане или высоте основания). Задачи на деление высоты пирамиды в заданном отношении. (Приложение 2, номера 75, 263; приложение 4, номера 2.1, 3.1, 4.1; приложение 4, номера 5.2, 6.2; приложение 6, номера 3655, 3671, 3679, 3702).

Учебно-методическое обеспечение элективного курса.

Тема 5. Построение сечений призмы с использованием свойств перпендикулярности прямых и плоскостей. Перпендикулярные сечения: построение и свойства. Вычисление площадей сечений. (Приложение 2, номера 233, 234; приложение 4, номера 7.2, 8.2; приложение 6, номера 3841).

Тема 6. Построение сечений пирамиды с использованием свойств перпендикулярности прямых и плоскостей. Перпендикулярные сечения в правильной пирамиде. Применение теоремы о трех перпендикулярах. (Приложение 2, номера 260, 262; приложение 3, с/р 20 номер 1).

Тема 7. Создание моделей куба, призмы, пирамиды и их сечений в программе GeoGebra. Визуализация сечений с помощью параллельности и перпендикулярности. Проектная работа: построение собственных моделей.

Тема 8. Построение сечений многогранников с использованием свойств параллельности прямых и плоскостей. Комбинированные задачи. (Приложение 3, с/р 9 Вариант Б1 номера 1,3; с/р 10 Вариант Б1 номер 3, приложение 5, номера 5, 9, 10, 20).

Заключительное занятие. Контрольная работа. Подведение итогов. Обсуждение интересующих вопросов.

Общие методические указания организации работы обучающихся.

В рамках элективного курса предусматриваются следующие формы работы: лекционные занятия – изложение теоретического материала с демонстрацией ключевых понятий и методов; практикумы – решение задач различного уровня сложности; проектная деятельность – создание моделей сечений с использованием ИКТ.

Методика проведения занятий:

1. разбор каждого метода на конкретных примерах;
2. постепенное усложнение заданий;
3. применение 3D-моделирования (GeoGebra);
4. промежуточная проверочная работа.

Технические средства: ноутбук/компьютер; мультимедийный проектор; экран.

Библиотечный фонд:

1. Геометрия: 10 –11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян [и др.]; 27-е изд. М.: Просвещение, 2021. 255 с.

2. Ершова А. П., Голобородько В. В. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 10 класса: учебное пособие. 6-е изд., испр. Москва: Илекса, 2011. 207 с.

3. Зив Б. Г. Задачи к урокам геометрии для 7-11 классов: пособие для учителей, школьников. 10-е изд. Санкт-Петербург: Петроглиф, Victory, 2014. 605 с.

4. Шарыгин И. Ф., Гордин Р. К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами: учебное пособие. Москва: Астрель: АСТ, 2001. 396 с.

5. Шарыгин И. Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень 10-11 классы: учебник. М.: Дрофа.

Информационные средства и Интернет-ресурсы:

1. 1С: Урок. Учебный портал с интерактивными наглядными учебными материалами. URL: <https://urok.1c.ru/?ysclid=mb6ihkv1f464258631>

2. Динамическая математическая программа GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org/classic?lang=ru>

3. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». URL: <https://ege.sdamgia.ru>

4. Федеральный институт педагогических измерений: официальный сайт. Москва, 2004. URL: <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory?ysclid=m9zngmxe2a941996596#!/tab/151883967-2>

2.4 Технологическая карта урока элективного курса.

Технологическая карта урока «Построение сечений многогранников с исполь-

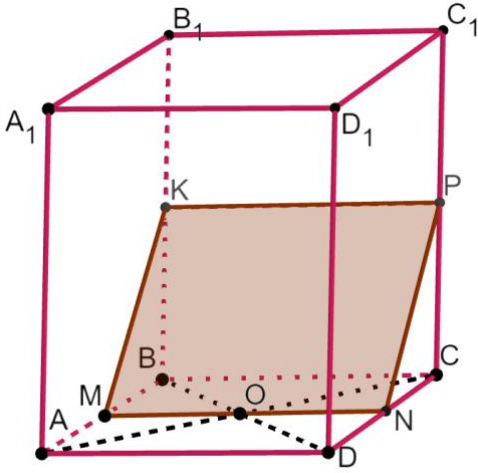
зованием свойств параллельности прямых и плоскостей»

Класс	10
Тип занятия	Урок обобщения и систематизации знаний
Цель	Создать условие для развития у обучающихся умений строить сечения многогранников.
Формы работы	Фронтальная, индивидуальная.
Оборудование	Проектор, презентация, раздаточный материал.
Формируемые результаты	Предметные: формировать умение решать задачи на построение сечений многогранников. Личностные: формировать умение формулировать собственные выводы. Метапредметные: формулировать умение анализировать свои действия и искать пути её выполнения.
Предметные умения (умения применять свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей при решении задач на построение сечений).	Коммуникативное УУД: умение четко и точно выражать свои мысли устно. Личностное УУД: умение делать вывод; формирование интереса к теме. Познавательные УУД: умение обобщать; создание алгоритма действия; анализ утверждений. Регулятивные УУД: умение определять цель урока; умение планировать по поставленным задачам.
Термины	Многогранник, грань, ребро, прямая, плоскость, сечение многогранника, параллельность прямых, параллельность прямой и плоскости.

Технология изучения

Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
Организационный	Учитель приветствует и организует обучающихся.	Приветствуют учителя. Открывают тетради, пишут

	<p>- Ребята, умение строить сечения помогают при выполнении 14 задания ЕГЭ профильного уровня. Часто в таких задачах встречаются построения сечений многогранников с использованием свойств параллельности прямых и плоскостей. Сегодня мы еще раз обобщим применение этих свойств.</p>	<p>число и тему урока.</p>
<p>Актуализация знаний и умений</p>	<p>Для начала давайте вспомним все свойства о параллельности прямых и плоскостей. Для этого выполним задания.</p> <p>1. Вам даны неверные утверждения и необходимо их исправить:</p> <ul style="list-style-type: none"> - прямая параллельна плоскости, если она пересекает хотя бы одну прямую в плоскости; - прямая параллельна плоскости, если она перпендикулярна всем прямым в этой плоскости; - две плоскости параллельны, если прямая одной плоскости 	<p>Ученики исправляют неверные утверждения:</p> <ul style="list-style-type: none"> - прямая параллельна плоскости, если она не пересекается с этой плоскостью (не имеют общих точек) - прямая параллельна плоскости, если она параллельна хотя бы одной прямой, лежащей в этой плоскости - если плоскости параллельны, то две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

	<p>параллельна прямой в другой плоскости.</p> <p>2 Задание. В тетраэдре $DABC$ постройте сечение плоскостью, которая проходит через точку M параллельно основанию ABC, точка M является серединой ребра AD.</p> <p>Как построить плоскость, параллельную данной, которая проходит через заданную точку?</p>	<p>Ученики отвечают на вопрос. Один ученик выходит к доске и строит сечение.</p>
<p>Обобщение и систематизация знаний</p>	<p>Теперь давайте перейдём к решению задач.</p> <p>Задача 1. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ постройте сечение, которое проходит через точку пересечения диагоналей грани $ABCD$ параллельно плоскости $AB_1 C_1$.</p>  <p>Рисунок 16</p>	

	<p>- Что означает «сечение параллельно плоскости AB_1C_1?</p> <p>- Ребята, какой признак параллельности нужно использовать в этой задаче?</p> <p>- Какие пересекающиеся прямые данной плоскости можем использовать для построения сечения?</p> <p>Решим следующую задачу.</p> <p>Задача 2. В тетраэдре $DABC$ точка M лежит на ребре AB, так что $AM:MB=1:3$, точка N – середина ребра CD. Постройте сечение тетраэдра,</p>	<p>- Сечение многогранника не пересекается с плоскостью AB_1C_1, и все прямые в сечении параллельны прямой в плоскости AB_1C_1.</p> <p>- Ученики называют признак параллельности двух плоскостей.</p> <p>- Плоскость сечения должна содержать прямые, например, параллельные прямой AB_1 и AD. Строим прямую, параллельную AD, через точку O – пересечение диагоналей.</p> <p>Аналогично, строим прямую, параллельную AB_1, через точку M. Строим прямую KP параллельно MN. Соединяем точки N и P. $MKPN$ – искомое сечение.</p>
--	--	---

проходящее через точки М и N, параллельно прямой АС.

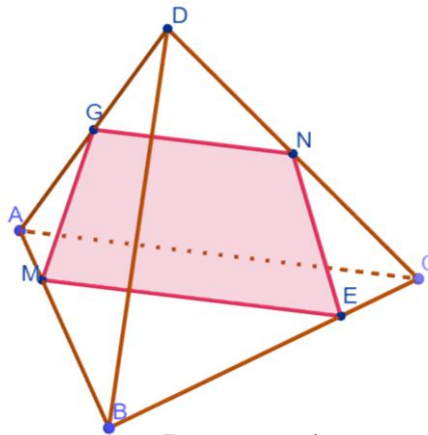


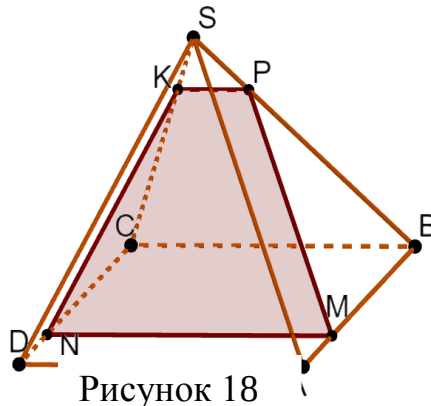
Рисунок 17

- Что означает, что сечение параллельно прямой АС?
- Как проведем сторону сечения через точку М?
- Как построим линию сечения в плоскости АСD?

Задача 3. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD на рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, так что $DN : NC = SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC. Докажите, что плос-

- В сечении должна быть прямая, параллельная АС.
- Для этого через точку М проводим прямую до пересечения с ребром ВС в точке Е. Точки N и Е соединяем.
- Построим прямую через точку N параллельно прямой АС до пересечения с ребром AD в точке G. Получили искомое сечение – MGNE.

плоскость α параллельна прямой SA .



- Что значит, что плоскость α параллельна прямой BC ?

- Какие точки плоскости сечения можем соединить?

- Каким образом построим линию пересечения плоскости α и плоскости SCB ?

- Какую сторону сечения мы еще можем построить?

- Как связать SA с нашими построениями?

- Как доказать, что α не пересекается с прямой SA .

- В плоскости α должна лежать прямая, параллельная BC .

- Соединяем точки K и N , так как они лежат в одной плоскости.

- Для этого через точку K проводим прямую параллельно BC , которая пересекает ребро SB в точке P .

- Через точку N проведем прямую, параллельную BC . Эта прямая пересекает ребро AB в точке M . $NKPM$ – искомое сечение.

- SA лежит в плоскости SAB . Плоскость α не должна пересекаться с прямой SA .

- Нужно показать, что прямая SA параллельна какой-

	<ul style="list-style-type: none"> - Какой прямой может быть параллельна прямая SA? - Как можем доказать, что PM и SA параллельны? - Какой вывод можем сделать из параллельности прямых PM и SA? 	<p>нибудь прямой, лежащей в плоскости сечения.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Например, PM параллельна SA. - По теореме о пропорциональных отрезках следует, что если $SP:PB=AM:MB=1:3$, то прямые PM и SA параллельны. - Прямая SA параллельна прямой PM, значит SA параллельна плоскости α,
Рефлексия	<p>Домашнее задание: выполнить номера 263 и 266 по учебнику.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Чем мы сегодня занимались на уроке? - Что нового вы узнали для себя на нашем занятии? - Какие сложности возникли при решении задач? - Какая задача, на ваш взгляд, была самой сложной? 	<p>Ученики записывают домашнее задание и отвечают на вопросы учителя.</p>

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи на построение сечений многогранников оказывают большое влияние на понимание теоретической базы геометрии и развитие пространственного мышления. Они помогают запомнить и закрепить ранее введенный теоретический материал. Также изучение задач на построение сечений встречается в заданиях Единого Государственного Экзамена профильного уровня. Проведенное исследование имеет практическую значимость.

В ходе проведения исследования были решены следующие задачи:

1) на основании анализа литературы сформулировано определение понятия «сечение плоскости», «секущая плоскость».

2) далее выделены и описаны методы построения сечений многогранников, приведены примеры задач к каждому из методов, рассмотрены центральное и параллельное проектирование.

3) подробно описан теоретический материал о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

4) произведен анализ учебной литературы и рассмотрено место темы сечений многогранников в содержании ЕГЭ по математике профильного уровня. В результате получен вывод, что в школьных учебниках содержится недостаточно задач на построение сечений, позволяющих обучающимся эффективно подготовиться к успешному выполнению задач ЕГЭ, поэтому также были проанализированы другие учебники с задачами.

5) в практической части данного исследования представлены примеры задач на построение сечений 14 задания ЕГЭ, используя свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей;

6) разработан элективный курс, направленный на развитие у обучающихся умения решать задачи на построение сечений и позволяющий им подготовиться к успешной сдаче ЕГЭ профильного уровня. Составлена технологическая карта урока по теме: «Построение сечений многогранников с использова-

нием свойств параллельности прямых и плоскостей».

Таким образом, цель данной выпускной квалификационной работы достигнута, все поставленные задачи решены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боженкова Л. И. Обучение учащихся построению сечений многогранников: учебно-методическое пособие. Калуга: КПКУ, 2005. 72 с.
2. Геометрия: 10 –11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян [и др.]; 27-е изд. М.: Просвещение, 2021. 255 с.
3. Горшкова Л. С, Сергеечев М. В. Методы изображений: учебное пособие для студентов и преподавателей педагогических вузов. Пенза: Пензенский гос. пед. ун-т им. В. Г. Белинского, 2006. 109 с.
4. Ершова А. П., Голобородько В.В. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 10 класса: учебное пособие. 6-е изд., испр. Москва: Илекса, 2011. 207 с.
5. Зив Б. Г. Задачи к урокам геометрии для 7-11 классов: пособие для учителей, школьников. 10-е изд. Санкт-Петербург: Петроглиф, Victory, 2014. 605 с.
6. Лысенко Ф. Ф., Кулабухова С. Ю. Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Сечения многогранников: учебно-методическое пособие. М.: Легион, 2018. 96 с.
7. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев [и др.]; под ред. В. А. Гусева. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 368 с.
8. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования: [одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию]. М.: Институт стратегии развития образования, 2022. 569 с.
9. Резникова Н. М., Фридман Е. М. Математика. ЕГЭ. Сечения многогранников. Профильный уровень: учебно-методическое пособие. М. : Легион, 2016. 64 с.

10. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. Сечения многогранников: учебно-методическое пособие. М.: Издательство «Экзамен», 2011. 255 с.
11. Федеральный институт педагогических измерений: официальный сайт. Москва, 2004. URL: <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory?ysclid=m9zngmxe2a941996596#!/tab/151883967-2> (дата обращения: 23.03.25)
12. Шарыгин И. Ф., Гордин Р. К. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами: учебное пособие. Москва: Астрель: АСТ, 2001. 396 с.
13. Шарыгин И. Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень 10-11 классы: учебник. М.: Дрофа, 2013. 236 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Краткая теория параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

Определения:

1. Две прямые в пространстве параллельны, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
2. Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.
3. Прямая и плоскость параллельны, если они не имеют общих точек.
4. Две плоскости параллельны, если они не имеют общих точек.
5. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .
6. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.
7. Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

Аксиомы:

1. Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
2. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.
3. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.
4. Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости.
5. Если две несовпадающие плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по некоторой прямой.

Теоремы

1. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.
2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.
3. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.
4. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.
5. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
6. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.
7. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.
8. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.
9. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.
10. Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.
11. Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Леммы

1. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.
2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Приложение 2. Задачи из учебника Атанасяна Л.С., 10-11 класс

68. Точки M и N — середины рёбер AB и AC тетраэдра $ABCD$. Докажите, что прямая MN параллельна плоскости BCD .

69. Через середины рёбер AB и BC тетраэдра $SABC$ проведена плоскость параллельно ребру SB . Докажите, что эта плоскость пересекает грани SAB и SBC по параллельным прямым.

70. Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер AB , AC и AD тетраэдра $ABCD$, параллельна плоскости BCD .

71. Изобразите тетраэдр $DABC$ и на рёбрах DB , DC и BC отметьте соответственно точки M , N и K . Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости ABC ; б) прямой KN и плоскости ABD .

72. Изобразите тетраэдр $DABC$ и постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости грани ABC , если: а) точка M является серединой ребра AD ; б) точка M лежит внутри грани ABD .

75. Изобразите тетраэдр $KLMN$.

а) Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN .

б) Докажите, что плоскость, проходящая через середины E , O и F отрезков LM , MA и MK , параллельна плоскости LKA . Найдите площадь треугольника EOF , если площадь треугольника LKA равна 24 см^2 .

79. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и постройте его сечение: а) плоскостью ABC_1 ; б) плоскостью ACC_1 . Докажите, что построенные сечения являются параллелограммами.

82. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и отметьте внутреннюю точку M грани $AA_1 B_1 B$. Постройте сечение параллелепипеда, проходящее через точку M параллельно: а) плоскости основания $ABCD$; б) грани $BB_1 C_1 C$; в) плоскости BDD_1 .

84. Изобразите параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD . Докажите, что построенное сечение – трапеция.

233. Основанием прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B . Через ребро BB_1 проведено сечение $BB_1 D_1 D$, перпендикулярное к плоскости грани $AA_1 C_1 C$.

Найдите площадь сечения, если $AA_1 = 10$ см, $AD = 27$ см, $DC = 12$ см.

234. Основанием прямой призмы является прямоугольный треугольник. Через середину гипотенузы перпендикулярно к ней проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если катеты равны 20 см и 21 см, а боковое ребро равно 42 см.

260. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ через боковое ребро DC и высоту DO пирамиды проведена плоскость α . Докажите, что: а) ребро AB перпендикулярно к плоскости α ; б) перпендикуляр, проведённый из вершины C к апофеме грани ADB , является перпендикуляром к плоскости ADB .

262. Докажите, что плоскость, проходящая через высоту правильной пирамиды и высоту боковой грани, перпендикулярна к плоскости боковой грани.

263. В правильной пирамиде $MABCD$ точки K, L и N лежат соответственно на рёбрах BC, MC и AD , причём KN параллельна BA , KL параллельна BM . а) Постройте сечение пирамиды плоскостью KLN и определите вид сечения. б) Докажите, что плоскость KLN параллельна плоскости AMB .

Приложение 3. Задачи из дидактического материала Ершова А. П, Голобородько В. В., 10 класс.

Самостоятельная работа 9

Вариант Б1

1. В тетраэдре $DABC$ все ребра равны a . Точки A_1, B_1, C_1 – середины ребер DA, DB и DC соответственно:

а) Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точку C , параллельно плоскости BA_1C .

б) Найдите площадь построенного сечения.

3. В тетраэдре $DABC$ точка E лежит на ребре AD . Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точку E параллельно прямым AC и DB . Определите вид построенного сечения.

Вариант В1

1. В тетраэдре $DABC$ все ребра равны a . Точка M лежит на ребре AB , причем $AM:MB = 1:3$, точка N – середина ребра CD .

а) Постройте сечение тетраэдра, проходящее через точки M и N параллельно прямой AC .

б) Найдите площадь построенного сечения.

Самостоятельная работа 10:

Вариант Б1

3. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, постройте сечение, проходящее через прямую BD параллельно прямой A_1C .

Вариант В1

1. Ребро куба $ABCD$ равно a . Постройте сечение куба, проходящее через точку C и середину ребра AD параллельно прямой DA_1 , и найдите площадь этого сечения.

Самостоятельная работа 20:

Вариант Б1

1. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с катетами 15 и 20 см. Высота пирамиды равна 16 см и проходит через вершину прямого угла. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через ее высоту перпендикулярно к гипотенузе основания.

Вариант В1

1. Основание пирамиды – прямоугольный треугольник с гипотенузой 65 см и катетом 25 см. Высота пирамиды проходит через вершину прямого угла

основания и равна 80 см. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через меньший катет основания перпендикулярно к большему боковому ребру.

Приложение 4. Задачи из дидактического материала Зив Б. Г.

Параграф 6

2.1. В тетраэдре $DABC$ $DA = DC = 13$, $AC = 10$; E – середина BC . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E параллельно плоскости ADC , и найдите площадь сечения.

3.1. В тетраэдре $DABC$ точка M – середина AD , точка P принадлежит DC и $DP : PC = 1 : 3$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M и P и параллельно BC . Найдите площадь сечения, если все ребра тетраэдра равны a .

4.1. В тетраэдре $DABC$ точка P – середина AD , точка E принадлежит DB , причем $DE : EB = 1 : 3$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки P и E и параллельной AC , и найдите площадь сечения, если все ребра тетраэдра равны a .

Параграф 8

5.2. $DABC$ – тетраэдр, все ребра которого равны a , точка E – середина BC . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку E и перпендикулярной DB , и найдите площадь сечения.

6.2. В тетраэдре $DABC$ ребро DB перпендикулярно плоскости ABC . Угол $ACB = 90^\circ$, $BC = BD$, точка F – середина AD . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точку F и перпендикулярной CD .

7.2. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольники. M – внутренняя точка сечения $AA_1 C_1 C$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной BB_1 .

8.2. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольники. M – внутренняя точка сечения $AA_1 C_1 C$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной BC .

Параграф 12

8.2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AD = 4$; $CD = 3$ и $CC_1 = 14$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середины AD и DC и параллельной $B_1 D$. Найдите площадь сечения.

Приложение 5. Задачи из учебника геометрии Шарыгина И.Ф 10-11 класс.

Параграф 2.5 "Правильная пирамида"

9. В пирамиде $ABCD$ площадь грани ABC в четыре раза больше площади грани ABD . Возьмём на ребре CD точку M такую, что $CM : MD = 2$. Через M проведены плоскости, параллельные граням ABC и ABD . Найдите отношение площадей получившихся при этом сечений.

10. Боковое ребро пирамиды разделено на 100 равных частей, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите отношение площадей наибольшего и наименьшего из получившихся сечений.

20 (в). В основании пирамиды лежит многоугольник, площадь которого равна 6. Плоскость, параллельная основанию, делит высоту пирамиды в отношении 1 : 2 (считая от вершины). Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью. 21. В основании правильной треугольной пирамиды лежит треугольник площади S , площадь боковой грани равна Q . Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и середину противоположного ребра.

30. Через середину какого-то ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, параллельное двум её скрещивающимся рёбрам. Найдите площадь этого сечения, если сторона основания пирамиды равна a , а её боковое ребро равно b .

Параграф 7.3 "Тетраэдр, куб и октаэдр"

5. Рассмотрим единичный куб и октаэдр с вершинами в центрах граней куба. Определите вид и найдите площади сечений, по которым каждый из этих

многогранников пересекает плоскость, проходящая через середину диагонали куба и ей перпендикулярная.

Приложение 6. Сборник задач по геометрии Шарыгина И.Ф 10-11 класс.

3655. Площадь основания пирамиды равна S . Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная плоскости основания. Найдите площадь полученного сечения.

3671. Угол между противоположными ребрами AB и CD пирамиды $ABCD$ равен α , $AB = a$, $CD = b$. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC параллельно прямым AB и CD .

3679. В пирамиде $ABCD$ площадь грани ABC в три раза больше площади грани ABD . На ребре CD взята точка M причем $CM:MD = 2$. Через точку M проведены плоскости, параллельные граням ABC и ABD . Найдите отношение площадей получившихся сечений.

3702. Основание четырехугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCB$.

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно плоскости SAD .

2) Найдите площадь полученного сечения, если площадь грани SAD равна 16.

3725. Через середину ребра AB куба $ABCA_1B_1C_1D_1$, с ребром, равным a , проведена плоскость, параллельная прямым BD_1 и A_1C_1 .

1) В каком отношении эта плоскость делит диагональ BD_1 ?

2) Найдите площадь полученного сечения.

3737. Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, плоскостью, проходящей через точки A_1 и C параллельно прямой BC_1 . В каком отношении эта плоскость делит ребро AB ?

3738. Через середины M и N ребер AD и CC_1 параллелепипеда

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проведена плоскость параллельно диагонали DB_1 . Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью. В каком отношении она делит ребро BB_1 ?

3798. Через диагональ куба, ребро которого равно a , проведена плоскость, параллельная диагонали одной из граней куба. Найдите площадь полученного сечения.

3819. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной основанию и делящей две стороны основания пополам. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 4.

3841. Через середину диагонали куба перпендикулярно ей проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно a .

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ.В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
Естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«12» 02 2025 г.
Лев Паньковский В.И.

Задание

По ВКР студента Дулатовой Рахимы Ильясовны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методические особенности обучения решению задач, связанных с
сечениями многогранников, в контексте подготовки к ЕГЭ профильного уровня»

Утверждена приказом по Университету от «28.02» 2025 г. № 240/0

Срок сдачи студентом законченной работы «6» мая 2025 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов:	Сроки выполнения этапов	Примечания
1.	Подбор литературы по теме.	сентябрь	выполнено
2.	Изучение и анализ учебной литературы.	октябрь- декабрь	выполнено
3.	Анализ задач ЕГЭ на построение сечений многогранников.	январь	выполнено
4.	Разработка программы элективного курса.	февраль-март	выполнено
5.	Разработка технологической карты.	апрель	выполнено
6.	Оформление работы.	май	выполнено
7.	Подготовка презентации и выступления.	июнь	выполнено

Дата выдачи задания «10» 02 2025г.

Руководитель  Сорокина М.В.
(подпись) (Ф.И.О)

Задание принял к исполнению  Рыкова Р.И.
(подпись) (Ф.И.О)

Ректору Пензенского государственного
университета А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН очной формы
обучения
Дулатовой Рахимы Ильясовны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Дулатова Рахима Ильясовна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методические особенности обучения решению задач, связанных с сечениями многогранников, в контексте подготовки к ЕГЭ профильного уровня», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



подпись
18.05.25

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 18.05.25

ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  _____ Сорокина М.В.
подпись Ф.И.О.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему:

«Методические особенности обучения решению задач, связанных с сечениями многогранников, в контексте подготовки к ЕГЭ профильного уровня»

студентки 4 курса Дулатовой Рахимы Ильясовны

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

профиля подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Сорокина М.В

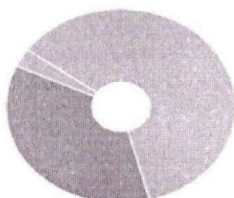
Автор: Сорокина Марина Валерьевна

Название документа: VKR_ar (2)

Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
35,88%



Цитирование:
3,4%



Оригинальность:
60,72%



Самочитирование:
0%



1 «Совпадения», «Цитирование», «Самочитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

1 Проверено: 96,22% текста документа, исключено из проверки: 3,78% текста документа. Разделы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самочитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самочитирование** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самочитирование» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самочитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирование** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы: библиография: фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирование» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 96

Тип документа: Не указано

Дата проверки: 18.05.2025 14:26:24

Дата корректурки: Нет

Количество страниц: 42

Символов в тексте: 48185

Слов в тексте: 6446

Число предложений: 1593

18.05.25
ДД.ММ.ГГГГ.

ПОДПИСЬ

Сорокина М.В

Ф.И.О. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические особенности обучения решению задач,
связанных с сечениями многогранников, в контексте
подготовки к ЕГЭ профильного уровня»
студентки Дулатовой Рахимы Ильясовны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Дулатовой Р. И. посвящена изучению методических особенностей обучения решению задач, связанных с сечениями многогранников. Основное внимание уделено рассмотрению заданий, в которых искомое сечение удовлетворяет условию параллельности или перпендикулярности прямой или плоскости.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы и приложений. Во введении представлены цель и задачи исследования, отмечается актуальность темы, выделены предмет и объект исследования. В первой главе излагаются основные теоретические сведения, необходимые в процессе исследования. В частности, напоминаются теоремы, касающиеся параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, входящие в школьный курс математике. Рассматривается метод сечений. Проводится анализ школьных учебников и рабочих программ.

Во второй главе представлена рабочая программа элективного курса «Построение сечений многогранников». Подобраны задачи для реализации этой программы. Проведен анализ заданий, связанных с построением сечений, встречающихся во второй части ЕГЭ по математике профильного уровня. Разработана технологическая карта одного занятия.

Выпускная квалификационная работа Дулатовой Р.И. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть использованы в работе учителя математики при организации подготовки к единому государственному экзамену.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «отлично».

Руководитель, к. ф.-м. н, доцент кафедры
«Математическое образование»



М.В. Сорокина