

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Степенная функция в курсе алгебры и начал математического анализа
общеобразовательной школы»**

Студент

Мет4 06.05.26 Метенцова Виктория Владимировна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

Ж- 06.05.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Ж- 15.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И.о. заведующего кафедрой

Ж- 01.06.26 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 26.06.26 № 17)

Секретарь ГЭК

Ж 26.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2026

Оглавление

Введение	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ	6
1.1 Содержание функциональной линии в курсе алгебры и начал математического анализа	6
1.2 Основные цели и задачи обучения теме «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы	12
1.3 Различные подходы к введению понятия «Степенная функция» в школьном курсе алгебры и начал математического анализа	16
1.4 Использование когнитивно-визуального подхода при изучении степенной функции	27
ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА КОМПЛЕКТА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ.....	34
2.1 Составление рабочих листов по теме «Степенная функция» с использованием когнитивно-визуального подхода.....	34
2.2 Рабочие листы по теме «Степенная функция, её свойства и график».	40
2.3 Конспект урока по теме «Степенная функция, её свойства и график»	57
Заключение.....	66
Список литературы	68

Введение

Динамичное развитие современного общества требует подготовки высокообразованных специалистов, способных к непрерывному самообразованию и устойчивой адаптации к изменяющимся условиям в различных сферах жизнедеятельности. Поэтому на школу накладывается достаточно важная и необходимая задача – создать условия для глубокого усвоения знаний и формирования умений, которые будут необходимы в дальнейшей профессиональной деятельности учащихся. Данная задача чётко отражена в требованиях современных образовательных стандартах, в том числе во ФГОС РФ.

Математика, как и другие дисциплины, требует постоянного совершенствования и изменения в силу сложности её фундаментальных понятий и необходимости баланса между теорией и практикой. Неоднократные реформы школьных программ проводились с целью устранения недочётов и противоречий в содержании предмета. Тем не менее, качество усвоения большинства тем остаётся невысоким, и одной из наиболее проблемных среди них является функциональная линия.

Несмотря на прикладную направленность, изучение функциональной линии в школьном курсе алгебры и начал математического анализа сохраняет абстрактно-теоретический характер. Учитывая изменённые взгляды нового поколения и особенности информационного восприятия, в современных условиях данное противоречие становится особенно ощутимым.

Актуальность работы обусловлена сложившимся к настоящему времени противоречиями. Во-первых, сохраняется необходимость разработки эффективных педагогических средств для совершенствования изучения функциональной линии. Во-вторых, именно степенная функция формирует начальное знание для дальнейшего изучения показательной и логарифмической функций и служит основой для дальнейшего изучения начал математического анализа в общеобразовательной школе.

Цель работы заключается в создании рабочих листов по теме «Степенная функция, её свойства и график» с использованием когнитивно-визуального подхода, обеспечивающих поэтапное формирование у учащихся 10 класса понятия степенной функции, её свойств и графиков, а также отработку практических навыков на всех этапах изучения темы.

Объект работы: процесс обучения математике в основной общеобразовательной школе в рамках изучения темы «Степенная функция, её свойства и график».

Предмет работы: методика обучения учащихся теме «Степенная функция, её свойства и график» в курсе алгебры и начал математического анализа в общеобразовательной школе.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Проанализировать теоретические основы и историю развития функциональной линии в школьном курсе математики;
2. Определить систему целей и задач изучения степенной функции;
3. Сравнить различные методические подходы к введению понятия степенной функции и изучению её свойств;
4. Рассмотреть механизмы применения когнитивно-визуального подхода как средства повышения эффективности освоения темы «Степенная функция, её свойства и график» в старшей школе;
5. Разработать рабочие листы по теме «Степенная функция, её свойства и график» с использованием когнитивно-визуального подхода;
6. Разработать конспект урока по теме «Степенная функция, её свойства и график».

Теоретическая значимость работы состоит в следующем:

1. Систематизированы целевые и содержательные аспекты обучения теме «Степенная функция, её свойства и график» в школьном курсе алгебры и начал математического анализа, что вносит вклад в методику обучения

математики через чёткое определение планируемых образовательных результатов и требований к математической подготовке учащихся;

2. Рассмотрены различные подходы к введению понятия «Степенная функция» в школьном курсе алгебры и начал математического анализа;

3. Выявлен комплекс методических особенностей обучения теме, что позволило по-новому взглянуть на пользу объединения алгебраических и графических методов в школьном курсе математики.

Практическая значимость работы определяется тем, что разработан комплект учебно-методических материалов по теме «Степенная функция, её свойства и график», который может использоваться учителем на уроке с целью повышения наглядности обучения, активизации познавательной деятельности учащихся, формирования навыков анализа и построения графиков степенной функции.

Данная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемых источников.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

1.1 Содержание функциональной линии в курсе алгебры и начал математического анализа

В математике формирование понятия функции носило длительный характер, возникая из различных задач практического характера, когда их решение сводилось к применению общих приёмов, не обращая внимания на частные условия задачи. В основу методологии легла концепция переменной величины. Историческое развитие понятия функции сопровождалось последовательным развитием, его содержание постоянно увеличивалось, усложнялось, а появление новых формулировок приводило к множеству противоречий в науке.

Функционально содержательно-методическая линия является одной из основных в школьном курсе алгебры и начал математического анализа. Представление о функции зародилось еще в древности [11]. Изначально оно формируется на основе арифметических зависимостей и формул для вычисления площадей и объёмов геометрических тел. Примерами табличного задания функции служат астрономические таблицы древнегреческих и индийских учёных. Словесное описание было использовано в теореме о постоянстве отношения площадей круга и квадрата, в определении конических сечений, которые, в свою очередь, рассматривались как геометрические образы. Сегодня же функциональная содержательно-методическая линия составляет содержательную основу для математического анализа и других высших разделов математических дисциплин [14].

Ключевая роль функциональной линии заключается в объединении математических знаний в целостную систему, которая отображает

практическую направленность приобретенных знаний и умений, устанавливает межпредметные связи в естественнонаучной области. Благодаря понятию функции учащиеся общеобразовательных школ формируют представление постоянно развивающегося характера окружающего мира, наблюдают изменчивость явлений и выявляют их закономерности [16].

Единое обозначение неизвестных было введено в XVII веке французскими учёными Рене Декартом и Франсуа Виетом. Ими была создана единая буквенная система обозначения, где начальные буквы латинского алфавита (a, b, c) стали обозначать известные величины, а последние буквы (x, y, z) – неизвестные [26].

К XVIII веку понятие функции было разработано и широко использовалось, однако его внедрение в школьную программу оказалось длительным. В западной системе образования немало важную роль в этом процессе сыграл немецкий математик Феликс Клейн. Учёный считал функцию центральным понятием математической науки и настоял на её включении в учебный план всех школ. Феликс Клейн воплотил свои взгляды в Меранской программе, в которой изучение функциональной зависимости было провозглашено основным элементом. Идеи разработанной программы быстро вышли за пределы страны, оказав значительное влияние на преподавание математики в других странах, включая также и Россию. Таким образом, установление функции как центральной темы в школьном курсе алгебры и начал математического анализа стало результатом педагогической реформы, инициатором которой стал Феликс Клейн. Меранская программа, предложенная им, послужила «толчком» этого процесса, оказав огромное влияние на школьное образование.

Включение функционально-графической линии в отечественные школьные программы произошла в начале XX века [11]. Этому послужило проведение I и II Всероссийских съездов (1912–1914 гг.) преподавателей математики, где была сформулирована главная установка реформы: исключить

из курса математики средней школы вопросы второстепенной важности и подробно раскрыть идею функциональной зависимости.

Активная разработка методического обеспечения функциональной линии для школьного курса алгебры и начал математического анализа началась ещё в 1960-е годы. В это время советский российский учёный Гончаров Василий Леонидович выделяет главное место числовой функции в своём пособии «Начальная алгебра». Развитие его идей продолжилось в работах Васильевой Екатерины Михайловны. Она подчёркивала необходимость графического представления зависимостей как основы формирования у учащихся понятия функции [10].

Методика изучения функции в современной школе основывается на теоретико-множественном подходе, который позволяет рассматривать все определения понятия функции, обеспечивает единую базу для изучения всех способов её задания: аналитического, графического, табличного и словесного. Разнообразие в трактовке понятия характеризуется возрастными особенностями школьников (от формирования наглядных представлений к усвоению строгого формального определения в старшей школе). Многие авторы учебников отдают предпочтение генетическому подходу, который акцентирует внимание на развивающийся аспект функции и на её прикладную ценность для построения математических моделей [14].

В курсе алгебры изучение функции начинается с 7 по 9 классы. Базовый уровень включает в себя знакомство с понятием функции, её свойствами, основными видами и графиками. В 10 и 11 классах особое внимание уделяется числовым функциям, где и аргумент, и значение функции являются числами. На всех этапах изучения этой темы центральными понятиями выступают область определения, область значений, график, нули, чётность и монотонность функции.

В структуре современного школьного курса математики не менее важное место занимает изучение элементарных функций, которые отличаются широкой

областью практического применения. По характеру выполняемых операций элементарные функции классифицируются на два класса: алгебраические и трансцендентные. Алгебраические, в свою очередь, подразделяются на рациональные (многочлены и дробные) и иррациональные [24]. В класс трансцендентных входят показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Термин «трансцендентный» произошёл от латинского «transcendens», что в переводе обозначает «перешагивать», «превосходить», «выходить за пределы».

Классификация элементарных функций в школьном курсе алгебры и начал математического анализа выполняет системообразующую функцию [11]. Важным критерием разделения на алгебраические и трансцендентные функции служит характер выполняемых ими операций, причем значение термина «трансцендентный» точно отражает суть функций как «выходящих за пределы» алгебраических операций.

В школьном курсе алгебры и начал математического анализа не вводятся формальные определения арифметических операций над функциями, однако их применение прослеживается на практике в виде комбинаций. Это проявляется при построении графиков и использовании некоторых формулировок задач, где осуществляется работа исключительно с числовыми функциями [23].

В соответствии с дидактическим принципом последовательного перехода от простого к сложному, с опорой на уже полученные знания учащихся и требований ФГОС [1], содержание функционально-графической линии можно структурировать по этапам и распределить по классам следующим образом (Таблица 1):

Таблица 1 – Распределение материала функционально-графической линии по классам

Этап	Класс	Осваиваемый материал
Пропедевтический этап. Представляет собой начальную подготовку	1-6 классы	Основы функциональной зависимости; построение и чтение таблиц; знакомство с прямоугольной системой координат,

учащихся к		определение координат точек на плоскости;
------------	--	---

Продолжение таблицы 1.

систематическому изучению функции в основной школе.		формулы нахождения периметра и площадей прямоугольника, квадрата; пропорциональные зависимости; первичное знакомство с графиками как моделями процессов.
Основной (систематический) этап. Представляет собой целенаправленное изучение понятия функции как фундаментальной математической модели.	7 класс	Индуктивный подход с акцентом на наглядность при изучении понятия функции на основе линейной зависимости. Знакомство с понятиями фундаментального анализа: независимая и зависимая переменные, область определения и множество значений функции. Изучение способов задания функциональной зависимости: словесное описание, табличное представление, графическая интерпретация, аналитическая формула. Рассмотрение графиков и свойств линейной функции. Знакомство с понятием степени с натуральным показателем, что позволяет перейти к изучению квадратичной функции вида $y = x^2$ и кубической функции вида $y = x^3$.
	8 класс	Изучение функции обратной пропорциональности вида $y = \frac{k}{x}$ и её графика; функции вида $y = \sqrt{x}$ и её графика. Сравнение функции $y = \sqrt{x}$ с квадратичной.
	9 класс	Систематизация и углубление понятия функции, введение его формального определения. Изучение квадратного трёхчлена и функции вида $y = ax^2 + bx +$

		c ,
Заключительный этап. Представляет собой переход	10-11 класс	Изучение понятия степенной функции при фиксированных показателях, функции корня

Продолжение таблицы 1.

к изучению элементов математического анализа		п-ой степени, обратных и сложных функций, а также показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций с анализом их свойств и графиков. Обобщение знаний и функций и переход к их исследованию с помощью производной и интеграла. Изучение производной степенной функции, синуса, косинуса, сложных и обратных функций. Её применение для нахождения экстремумов и асимптот.
--	--	---

Данные таблицы 1 демонстрируют, что изучение степенной функции и её частных случаев является стержневой линией всего курса. Именно этот класс функций служит основной моделью для введения общих свойств функций, понятий чётности, нечётности, сложной и обратной функции. Первые представления о производной и интеграле тоже формируются на примере степенной функции.

Таким образом, понятие функции служит ключевым инструментом моделирования, открывает возможности для научного познания и описания реальных процессов. Именно поэтому формирование функциональной грамотности у учащихся становится одной из важнейших задач, способствующей установлению межпредметных связей и раскрытию практической значимости математического знания.

1.2 Основные цели и задачи обучения теме «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы

Изучение темы «Степенная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы логически выстраивает функциональную линию курса математики и отвечает требованиям системно-деятельностного подхода. Исходя из роли степенной функции в развитии функционально-графических представлений учащихся и пользуясь требованиями ФГОС, перейдем к подробному рассмотрению основных целей и задач обучения в рамках исследуемой темы [1].

В учебнике для академического бакалавриата под редакцией Подходовой Н. С. и Снегуровой В. И. изучение функций является фундаментальной по нескольким причинам. Во-первых, авторы рассматривают функцию как инструментальную основу для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами, что реализуется через сравнение областей значений и графические методы. Во-вторых, понятие функции раскрывает основные идеи всеобщей связи, непрерывности и нахождения промежуточных значений. В-третьих, авторы показывают универсальность понятия, указывая, что оно лежит в основе множества других понятий и законов в различных научных дисциплинах. Следовательно, Подходова Н. С. и Снегурова В. И. представляют целостный взгляд на функцию, объединяющий её практическую значимость, теоретическую глубину и межпредметную роль [23].

Мордкович А. Г. подчёркивает, что школьный курс алгебры и начал математического анализа является объединением четырёх содержательно-методических линий: числовая линия, функциональная линия, линия уравнений и неравенств, линия преобразований. Для него не менее важной является функционально-графическая линия. Особое внимание этой линии имеет серьёзное психологическое объяснение. Существует противоречие между традиционным «левополушарным» характером школьного курса алгебры и

доминирующим «правополушарным» мышлением учащихся. Это противоречие смягчается в том случае, если делается акцент на графиках и функциональных зависимостях, так как активно задействуется правое полушарие через визуализацию и создаются условия для совместной работы обоих полушарий [17].

Развивающий потенциал функциональной линии в обучении алгебре реализуется за счёт опоры на зону ближайшего развития учащихся. Это означает, что новые, более сложные математические концепции вводятся интуитивно, исходя из личного жизненного опыта школьников, что одновременно раскрывает прикладную значимость изучаемого материала [21]. Наглядным примером служит анализ повседневной ситуации: дорога от дома до школы как зависимость скорости от времени. Размышления о необходимости рассчитать скорость, чтобы прийти вовремя, становятся содержательной основой для последующего знакомства с физическим законом равноускоренного движения $v = v_0 + at$.

Приоритет функционально-графической линии в обучении алгебре и начал математического анализа является психологически обоснованным. Опора на визуальное и образное восприятие не только облегчает понимание науки, но и способствует развитию гибкого мышления, которое необходимо для решения реальных практических задач.

Главная дидактическая цель обучения теме «Степенная функция» заключается в том, чтобы школьники сформировали поэтапное понимание степенной функции как эффективной математической модели для описания реальных процессов и научились исследовать её свойства, связывая аналитическое выражение функции с её графиком [14].

Согласно ФГОС основного общего образования, основной целью изучения функциональной линии является формирование у учащихся конкретных структурированных знаний о функции как универсального аппарата для моделирования и анализа разнообразных процессов [1].

Учитывая структуру изучения функциональной линии в основной школе и высокий уровень восприимчивости школьников к новым понятиям, важным этапом становится изучение степенной функции. Определим цели изучения степенной функции [14]:

1. Психолого-когнитивное развитие: создание условий для работы обоих полушарий головного мозга через анализ и визуализацию;
2. Овладение математическим языком: формирование умения работать с различными формами представления математической информации: словесная, символьная и графическая;
3. Развитие мышления и межпредметных связей;
4. Формирование фундаментальных понятий;
5. Преемственность знаний и умений: установление взаимосвязи между теоретическими знаниями учащихся и их практическим опытом;
6. Создание базы для дальнейшего обучения;
7. Развитие практических навыков: формирование навыков проектной, исследовательской и социальной деятельности.

Можно выделить следующие задачи изучения теме «Степенная функция» [14]:

1. Знаниевые и понятийные задачи:
 - 1.1 Сформировать чёткое определение степенной функции вида $y = x^p$, где p – действительное число;
 - 1.2 Выделить основные случаи в зависимости от показателя степени;
 - 1.3 Научить учащихся правильно находить область определения для каждого из этих случаев.
2. Задачи, связанные с исследованием свойств и построением графиков:
 - 2.1 Научить проводить сравнительный анализ свойств функций с разными показателями степени (чётность, монотонность, выпуклость, непрерывность, область значений);

2.2 Сформировать навык мысленного представления графика по виду функции;

2.3 Научить строить графики степенных функций.

3. Практико-ориентированные и прикладные задачи:

3.1 Показать, что многие закономерности в физике, биологии, экономике характеризуются степенными функциями;

3.2 Научить использовать свойства степенной функции для моделирования и решения практических задач.

4. Метапредметные развивающие задачи:

4.1 Развитие логического мышления;

4.2 Развитие абстрактного мышления;

4.3 Развитие исследовательских навыков.

Предложенная система задач обеспечивает целостное усвоение учебного материала и способствует развитию как предметных, так и метапредметных умений учащихся.

Согласно ФГОС среднего общего образования выделены следующие требования к знаниям и умениям по теме «Степенная функция» [1]:

1. Владение базовыми понятиями. Понимание и правильное применение терминов: степенная функция, функциональная зависимость, значение и аргумент функции, область определения и значений функции, график. Знание свойств функции: нули, промежутки знакопостоянства, монотонность, экстремумы, чётность и нечётность, асимптоты, обратная функция.

2. Вычислительные и графические умения. Построение и анализ графиков функции, нахождение значений функции при заданном аргументе.

3. Аналитические навыки. К ним относят определение свойств по её формуле или графику, нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, решение уравнений и неравенств с использованием свойств степенной функции.

4. Обобщение и применение:
- 4.1 Построение и исследование простейших математических моделей;
- 4.2 Выполнение геометрических преобразований графиков;
- 4.3 Применение функциональных знаний для решения практических задач.

Таким образом, данная тема играет важную роль, выступая основным звеном в развитии функционально-графической линии. Изучение темы «Степенная функция» позволяет освоить не только предметные знания, но и способствует развитию познавательной сферы учащихся за счёт визуализации, формирует навыки анализа и моделирования, а также обеспечивает межпредметную связь. Сформулированные цели и задачи, которые охватывают знаниевый, практический и развивающий аспекты, отражают современные тенденции в сфере образования. Они реализуют системно-деятельностный подход через единство теории и практики, сочетание стандартных и творческих задач, а также ориентацию на решение реальных проблем. Такой всесторонний подход создаёт надёжную основу для изучения всех тем математики и формирует целостное представление о функции как об универсальном инструменте моделирования.

1.3 Различные подходы к введению понятия «Степенная функция» в школьном курсе алгебры и начал математического анализа

Несмотря на то, что цели и задачи обучения функциональной линии, включая степенную функцию, остаются общими, существуют значительные различия в подходах к определению места этой теме в программе, формулировке её ключевых понятий и выборе педагогических методов.

Однако в современном образовании главным преимуществом в старшей школе становится подготовка выпускников, обладающих комплексом знаний, умений и навыков. Они должны позволить им в дальнейшем самостоятельно

расширять полученный опыт, эффективно адаптироваться к изменяющимся условиям жизни и проявлять активность в профессиональной деятельности. В соответствии с требованиями Федеральных государственных образовательных стандартов основное внимание в обучении, и, в частности, при освоении функциональной линии, уделяется лично-деятельностному подходу [1].

Для практической реализации этого подхода потребовалась существенная переработка существующих методик, форм и образовательных технологий, применяемых для обучения математической теории.

Знакомство с учебно-методическими материалами по алгебре, для 7-11 классов, включённых в федеральный перечень и рекомендованных к использованию в общеобразовательных организациях Российской Федерации, позволяет определять наличие существенного разнообразия в методических подходах к раскрытию темы «Степенная функция» и изучению её частных случаев. Каждый авторский коллектив предлагает собственную логику и последовательность введения данного понятия, расставляя различные дидактические упоры.

Решающей особенностью изучения степенной функции в современном школьном курсе является её дифференцированный и поэтапный характер [11]. Из-за фундаментальной сложности и обширного перечня частных проявлений, данный материал не может быть сконцентрирован в рамках одного тематического блока. Поэтому знакомство с ним начинается уже на ранних этапах – в 7 и 8 классах, с рассмотрения простейших случаев, и продолжается на протяжении всего курса математики средней и старшей школы, постепенно усложняясь и обобщая до общего вида $y = x^p$.

Важнейшим интегрирующим фактором выступает параллельное изучение темы «Степени и их свойства» [26]. Этот одновременный процесс обеспечивает не только формально-алгебраическую базу для использования степенных выражений, но и создаёт содержательную основу для глубокого функционального анализа. Такая взаимосвязь позволяет решать комплекс задач:

1. Систематизация и углубление функциональных представлений: учащиеся не просто запоминают отдельные графики, а формируют целостное представление степенной функции как о семействе, объединённом общими закономерностями, различные варианты которых зависят от показателя степени p .

2. Развитие сравнительного анализа: появляется возможность устанавливать связь между степенной функцией и другими ключевыми семействами (линейными, квадратичными, показательными, логарифмическими). Это касается обобщения и сопоставления таких основных свойств, как область определения и значений, характер монотонности на различных промежутках, чётность и нечётность, существование и вид обратной функции.

3. Освоение языка математических преобразований: изучение степенной функции становится реальным условием для введения и отработки символики, описывающей геометрические преобразования графиков. Это закладывает определённые навыки для работы с любыми функциями.

4. Расширение комплекса знаний для решения уравнений и неравенств: освоение степенной функции закономерно приводит к необходимости решения новых, более сложных типов уравнений (иррациональных, содержащих степени с рациональным показателем) и неравенств, что развивает умение решать и функционально-графическое мышление учащихся.

Подробное изучение учебников алгебры для 7-9 классов Макарычева Н. Ю. [3, 4, 6] и Алимова Ш. А. [8] показывает, что в основе методики лежит проблемный подход с выраженной практической направленностью. Основной задачей авторы видят формирование у учащихся представления о функции как о модели, описывающей реальные зависимости. Само понятие функции вводится в 7 классе на более формальном уровне, а строгое определение степенной функции даётся в 9 классе. Однако пропедевтическая работа начинается

значительно раньше: уже в 7 и 8 классах при изучении конкретных функций – квадратичной, кубической, обратной пропорциональности и функции квадратного корня – учащиеся приходят к осознанию того, что эти частные случаи принадлежат к более общему классу степенных функций, не вводя при этом формального определения этого класса.

В учебнике алгебры и начал математического анализа Алимова Ш. А. изучение степенной функции строится по принципу последовательного обобщения и усложнения материала. Автор начинает с систематизации и повторения ранее пройденного функционального материала, подводя учащихся к наиболее простому восприятию степенных функций. Параллельно вводятся существенные для математического анализа понятия ограниченности функции на множестве, а также её наименьшего и наибольшего значений [8]. Основное содержание делает акцент на детальном исследовании свойств степенной функции в зависимости от вида показателя степени p . Рассмотрение ведётся по нарастающей сложности: от подробного анализа случаев с целым показателем (чётным и нечётным натуральным, целым отрицательным) к более сложным случаям с рациональным нецелым показателем. Причём из изучения функций с чётным отрицательным показателем следует введение важных понятий горизонтальной и вертикальной асимптот. Материал, посвящённый свойствам степенной функции с положительным и отрицательным нецелым показателем, автор обозначает как предназначенный для углублённого, профильного уровня изучения, завершая тем самым смысл перехода от частных примеров к общему случаю и от базовых тем к более сложным [8].

Принцип изложения свойств степенной функции в рассматриваемых учебниках отличается системностью и наглядностью. Описание каждого частного случая включает стандартный набор характеристик: область определения и значений, исследование на чётность, анализ монотонности, ограниченности на заданном множестве, а также определение наибольшего и наименьшего значения. Каждой из характеристик соответствует наглядная

иллюстрация – график функции, что обеспечивает визуальное закрепление теоретического материала. Главной особенностью данного подхода является его личностно-ориентированная направленность. Благодаря понятному, структурированному изложению и эффективной визуализации, учебный материал становится доступным для самостоятельного изучения школьниками. Это позволяет учащимся с разным уровнем подготовки осваивать тему, развивая навыки самообразования и ответственность за собственные учебные результаты.

Учебно-методические комплексы Никольского С. М. по алгебре реализуют принцип дифференцированного обучения на всех этапах школьного курса. Так, в учебниках для 8 и 9 классов представлен единый набор заданий, предназначенный как для базового уровня, так и для классов с углублённым изучением математики [5, 7]. В изданиях для старшей школы эта линия продолжается: материал структурирован с учётом деления на базовый и профильный уровни [27]. Содержание учебников отличается высокой степенью научности и фундаментальности. Линия изучения функций в данном учебно-методическом комплексе выстраивается последовательно, начиная с 8 класса. Введение в тему начинается с общего определения функции как соответствия между множествами. Затем поэтапно рассматриваются основные частные случаи: линейная функция, квадратичная и обратная пропорциональность. На этом же этапе вводятся и обрабатываются важнейшие понятия чётной и нечётной функции, что закладывает основу для дальнейшего изучения более сложных функциональных зависимостей.

Далее авторы опираются на ранее пройденный материал, рассматривая конкретные примеры уже знакомых обучающимся функциям, что позволяет получать новые знания на более простой основе. Визуализация в основном сосредоточена на представлении графиков функций в рамках теоретического блока. Существенной особенностью изучения степенной функции в данном учебно-методическом комплексе является отсутствие её общего определения

как единой математической модели $y = x^p$. Вместо обобщения различные классы функций рассматриваются отдельно, без указания на их принадлежность к степенным функциям с разными показателями [5, 7]. Основное внимание в задачах и упражнениях уделяется формированию аналитических навыков работы с функциями. При этом практически не затрагиваются задачи межпредметного или прикладного характера, которые могли бы продемонстрировать практическую значимость изучаемых зависимостей в других науках или реальных ситуациях.

Изучение темы «Степенная функция» по учебно-методическому комплексу Муравина Г. К. строится в соответствии с принципами системно-деятельностного подхода, что проявляется в последовательном применении таких методических приёмов, как дифференциация учебных заданий и объединение изучаемых тем в блоки [18]. Работа с функциональными понятиями начинается уже в 7 классе на наглядно-интуитивном уровне, а непосредственное определение степенной функции даётся в 10 классе через сравнительный анализ свойств уже изученных частных случаев – квадратичной и кубической функции. Формулировка области определения вводится интуитивно, без акцента на строгую терминологию, например, указание, что функции «определены и непрерывны на всей числовой прямой», делает понятие доступным для первоначального восприятия [19]. Положительной стороной методики является исследовательский характер подачи материала, где теоретические пояснения сопровождаются визуализацией. Такой подход не только облегчает усвоение, но и целенаправленно развивает у учащихся навык сравнительного анализа. После области определения последовательно рассматриваются область значений функций и их свойства возрастания и убывания, причём автор пытается не использовать стандартные обозначения в объяснениях, заменяя их на простые словесные, что делает материал более доступным и способствует лучшему пониманию сути свойств.

Упражнения в данном учебно-методическом комплексе отличаются разными уровнями сложности и направлены на достижение более чёткого понимания функциональных понятий, освоение терминологии и символики, а также на закрепление практического навыка построения графиков функций на основе проведённого анализа их формул [20]. Несмотря на обширный и разнообразный задачный материал, в нём наблюдается большой «минус» – практически полное отсутствие задач, которые требуют построения математических моделей для описания реальных процессов. Их недостаток ограничивает возможности объяснения практической значимости изучаемого материала. Реализуемый автором подход к разработке содержания учебно-методического комплекса по алгебре для средней и старшей школы соответствует современным образовательным требованиям, в частности, благодаря своей готовности в организации самостоятельной учебной деятельности учащихся [19]. Многие из представленных упражнений носят исследовательский характер, однако эта исследовательская составляющая в основном осуществляется в рамках анализа теоретических свойств функций без включения задач, объединяющих математические знания с другими предметными областями. Их отсутствие уменьшает возможности для формирования межпредметных связей и целостного восприятия математики как инструмента познания окружающего мира.

В учебниках Мордковича А. Г. реализуется проблемный подход к обучению, определяющей особенностью которого является активная позиция самого ученика [9]. Как подчёркивает автор, именно учащийся должен научиться самостоятельно выявлять проблемные ситуации и находить пути их решения. Введение функциональных понятий требует системного подхода, состоящего из трёх последовательных уровней. Изучение начинается с наглядно-интуитивного этапа, затем переходит к описательному уровню, и лишь при возникновении необходимости осуществляется переход к формальному определению понятий на строгом математическом языке [17].

При изложении элементов алгебры и математического анализа в старших классах Мордкович А. Г. делает особый упор на более доступное объяснение. Он предлагает увеличить иллюстрации, рисунки, графики и таблицы в учебном материале, что выражается в установке: «больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше мягких моделей, больше опоры на правое полушарие мозга» [9]. Эта позиция полностью согласуется с его концепцией рассмотрения математики как гуманитарной дисциплины, направленной на развитие мышления и интуиции.

Покровский В. П. указывает на то, что основным методом в обучении функциональной линии является синтез графического и аналитического подходов. Такой интегрированный метод, по его мнению, способствует общему развитию мышления школьников, поскольку одновременно задействует оба полушария головного мозга: правое (ответственное за образное восприятие и визуализацию) и левое (отвечающее за логику и абстрактные рассуждения) [24].

Вместе с тем автор утверждает, что в старшей школе обоснованно усиливается роль аналитического метода. Это объясняется возрастным развитием у учащихся способности к работе с абстрактными понятиями. Покровский особо акцентирует важность формирования у учащихся 10 и 11 классов умения «читать» графики, другими словами, переводить визуальную информацию, представленную на графике, на строгий и символический язык математики [24]. Таким образом, главной задачей становится обучение содержательного анализа графиков.

Автор выступает за разнообразие форм в выборе методических подходов к изложению материала, не акцентируя внимание только на формальной строгости. Он указывает, что общие свойства функций могут вводиться разными способами: через наглядно-интуитивное представление, с помощью словесного описания или посредством строгого определения. Особое внимание Покровский уделяет значимости геометрической интерпретации функциональных зависимостей. По его мнению, именно визуализация через

графики способствует формированию лучшего восприятия и глубокого понимания закономерностей, лежащих в основе реальных процессов.

Покровский В. П. предлагает пять этапов методической системы формирования и закрепления понятий, связанных с функциональной зависимостью [24].

1. Мотивационный этап. Изучение нового вида функций начинается с решения нескольких практических текстовых задач. В процессе их анализа у учащихся формируются первоначальные представления о функции, и выводится её аналитическая формула.

2. Формулировочный этап. На основе полученной формулы производится обобщение: вводится название функции, выделяются её характерные признаки. Это позволяет школьникам уметь различать функцию данного вида от других.

3. Графический этап. Выполняется построение графика функции. На начальном уровне построение осуществляется «по точкам» путём составления таблицы значений. Затем проводится анализ графика с целью выделения его характерных особенностей и визуального определения свойств изучаемой функции.

4. Исследовательский этап. Проводится сравнительный анализ свойств новой функции с уже известными. Покровский отмечает, что в старших классах это исследование должно осуществляться аналитически, на основе формулы функции, а не только путём чтения графика.

5. Этап закрепления. Заключительная стадия направлена на применение изученных теоретических знаний через решение системы задач и упражнений.

С точки зрения личностно-деятельностного подхода были разработаны и другие частные методики обучения функциональной линии. В частности, методика Капкаевой Л. С. строится на принципе исследовательской деятельности учащихся. Согласно этому подходу, школьники под руководством учителя самостоятельно, в процессе длительного исследования, приходят к формулировкам основных функциональных понятий и закономерностей. Для

реализации данной методики автором создана специальная система дидактических материалов, основанная на методе листков. Суть метода заключается в том, что учащимся предлагается последовательность специально сконструированных заданий и наводящих вопросов, которые поэтапно подводят их к пониманию понятия функции и полному усвоению их свойств [14].

Иванова И. Ю. подчёркивает, что основную роль в педпрофильной подготовке при изучении функциональной зависимости играют задачи, которые носят исследовательский характер. Это соответствует метаматематическому подходу, потому что углубление метапредметных связей на уроках математики развивает у школьников навык создания наглядных изображений – способность, особо важная для решения практических задач в будущих профессиях. Автор также рассматривает возможность организации модульного обучения для старшеклассников с использованием дистанционных и интерактивных технологий. В работе Иванова отмечает, что абстрактность математических понятий и отсутствие их связи с жизнью затрудняет их усвоение. Поэтому при введении новых понятий важно опираться на личный опыт учащихся, описывая связи между родовыми и частными определениями. Такой подход, устанавливая связь между новым понятием, его свойствами и общим видом, способствует лучшему запоминанию [13]. В качестве примера автор показывает применение метаматематического подхода к изучению понятия «функция» (Рисунок 1).

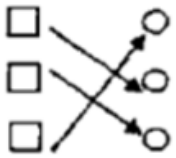
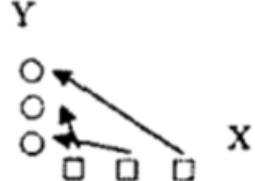
<i>Образ межпредметного понятия «функция» (соподчиненные)</i>	<i>Образ математического понятия «функция» (родовое)</i>
	
<p>Примеры: функции телефона, функции менеджера, функции растений, функции кровеносной системы.</p>	<p>Элементы множества располагаются на координатных осях. Образ отображает графическое представление функции</p>

Рисунок 1 – Создание взаимосвязи между родовым и частным понятием
по Ивановой И. Ю.

В зарубежной педагогике при обучении математике, в том числе функциям, увеличивается потребность и интерес к конструктивистскому подходу. Исследователи утверждают, что формирование абстрактных математических понятий должно опираться на личный практический опыт учащихся. Для этого требуется анализировать сложные понятия, позволяя школьникам самостоятельно выстраивать их понимание [26]. Процесс познания рассматривается как вариативная деятельность, где учитель выступает в роли навигатора: он создаёт проблемные ситуации, которые приводят к проведению активной дискуссии, групповых обсуждений, интерпретацию и рефлексию. Таким образом, создаются условия, при которых ученик становится автором собственных знаний о математических понятиях, связанных с его собственным жизненным опытом.

В трудах Далингера В. А. заложены основы для создания дидактической системы, обеспечивающей баланс между логическим и наглядно-образным мышлением. Основным достоинством этого подхода автор считает учёт индивидуальных особенностей восприятия учащихся: одни представляют целостный образ и после выделяют конкретные детали, другие фокусируются на отдельных признаках, постепенно собирая общее понимание. Далингер определяет функцию и её график как «ядро школьной математики», ставя главной целью учителя формирование у учеников умения выявлять закономерности между объектами и явлениями. При этом он подчёркивает, что развитие «математического зрения» - процесс достаточно сложный и постепенный, как обучение письму или речи [12].

Анализ современных учебников алгебры и методических исследований, посвящённых обучению функциональной линии, выявляет устойчивое стремление к более доступному и простому изложению. Оно выражается в

постепенном переходе от строгого формализма к осмысленному восприятию. Основными инструментами этого стали увеличение наглядности, активное использование моделирования реальных процессов и включение в обучение контекстных междисциплинарных задач.

Таким образом, можно сделать вывод, что осознанное усвоение понятий функциональной линии, включая степенную функцию, в наибольшей степени обеспечивается комплексом методов: применением наглядно-образного подхода, решением практических межпредметных задач и использованием заданий исследовательского характера. Вместе с тем, для предотвращения неравномерности в развитии мышления необходимо систематически сочетать аналитические и графические методы представления функций. Такое сочетание, дополненное решением задач исследовательской и прикладной направленности, формирует у учащихся именно те компетенции, которые будут востребованы в их будущей профессиональной деятельности.

1.4 Использование когнитивно-визуального подхода при изучении степенной функции

Для эффективного изучения степенной функции в старших классах, которое объединяет графические и аналитические методы, устанавливает межпредметные связи и подчёркивает прикладную ценность темы, наиболее эффективным представляется когнитивно-визуальный подход [2]. Его основной принцип заключается в создании устойчивой связи между абстрактно-логическим содержанием учебного материала и наглядно-интуитивными способами его подачи, что непосредственно стимулирует познавательную активность учащихся.

Главным преимуществом когнитивно-визуального подхода является его ориентация на личностные особенности учащихся, а именно на преобладающий тип восприятия: аналитический или наглядно-образный склад мышления [16].

Однако, как отмечает Ротенберг В. С., даже для «аналитиков» образное мышление играет критически важную роль в логическом структурировании знаний, позволяя избежать формального усвоения материала [25]. Для «геометров», у которых доминирует наглядно-образное мышление, создание зрительных образов для каждого нового понятия становится необходимым условием формирования глубоких, детализированных и устойчивых знаний и умений.

Практика показывает, что изучение функциональных понятий исключительно через логическое мышление приводит к их механическому запоминанию без осмысления сути. Когнитивно-визуальный подход помогает равномерной мозговой деятельности, потому что в нём сочетаются логика и образное мышление [16].

Далингер В. А. разработал методику, центральным элементом которой является система визуализированных задач в сочетании с информационно-компьютерными технологиями. Поскольку учебная деятельность на уроках математики в основном строится на решении задач, с позиций когнитивно-визуального подхода именно такие задания становятся основным инструментом для формирования глубокого понимания функциональной линии.

Автор определяет визуализированную задачу как задачу, в которой образ явно или неявно присутствует в условии, ответе, определяет метод решения, служит опорой на каждом этапе решения либо сопровождает её на определённых стадиях [12]. Классификация таких задач по месту визуального образа схематически представлена на рисунке 2.

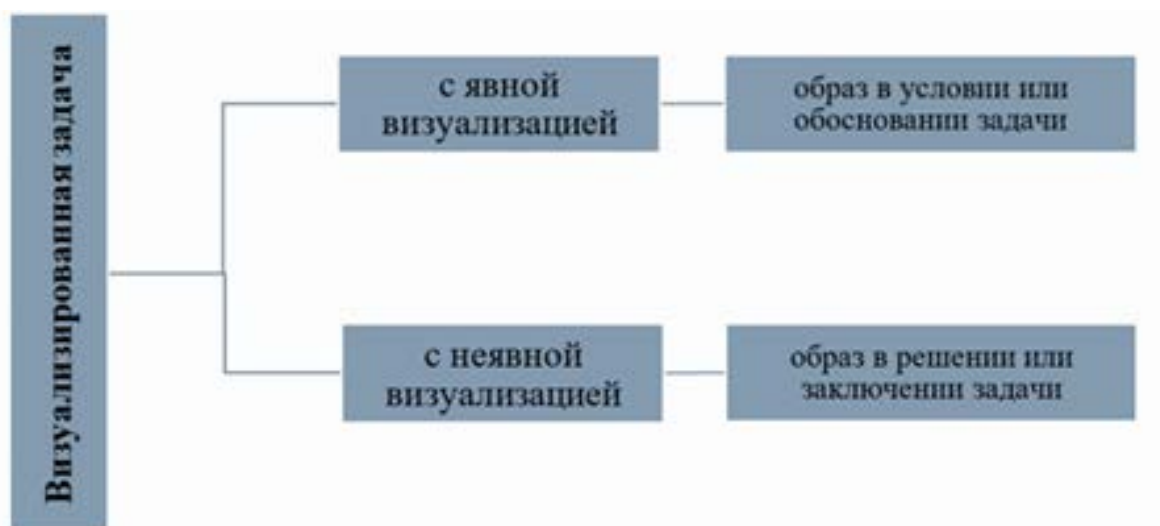


Рисунок 2 – Классификация визуализированных задач по месту визуального образа по Далингеру В. А.

Согласно выполняемым дидактическим функциям, классификация визуализированных задач по месту применения визуального образа приведена на рисунке 3.

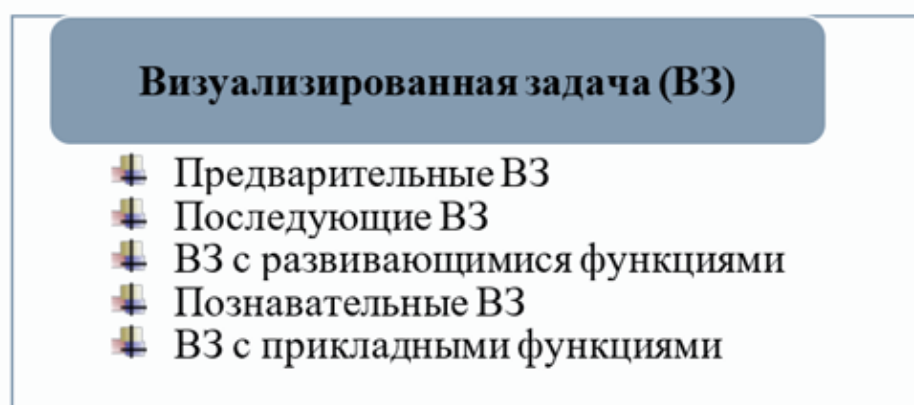


Рисунок 3 – Классификация визуализированных задач по месту согласно дидактическим функциям по Далингеру В. А.

Подобный подход изучается в исследованиях Князевой О. О. и Фирер А. В. В их работах в качестве основного инструмента используются информационно-компьютерные технологии и специально созданные программы для математической визуализации.

В частности, Князева О. О. в контексте обучения элементам математического анализа выделяет современные технологии как существенный компонент при построении графиков функций и диаграмм, иллюстрирующих динамику различных процессов [15]. Автором предлагается следующая схема реализации данного подхода, представленная на рисунке 4.



Рисунок 4 – Схема внедрения средств наглядности с использованием информационно-коммуникационных технологий

Фирер А. В. указывает, что применение информационно-коммуникационных технологий в обучении расширяет спектр подходов к решению задач. Это достигается за счёт проведения опытов на компьютере, исследования информационных моделей и создания коллективных продуктов в режиме реального времени. Автор подчёркивает, что, несмотря на обширный набор существующих программ и интерактивных приложений, их выбор на практике ограничивается тремя факторами: уровнем цифровой грамотности педагога, наличием русифицированного интерфейса и общедоступностью ресурса. Данная методика, как и предыдущие, делает акцент на решении визуализированных задач. Фирер классифицирует их на два типа: с явной визуализацией (когда наглядный элемент содержится в условии задачи) и с неявной (когда визуальный компонент возникает в процессе решения) [28].

Основным положением работы является утверждение о том, что инструментами визуализации при изучении функциональной линии могут служить не только графики, но и другие формы: таблицы, диаграммы (круги Эйлера), модели (например, модель Фрейера), блок-схемы и кластеры.

Автор также обосновывает необходимость последовательного и целенаправленного применения визуального сопровождения на всех этапах

изучения функциональных понятий, предлагая ряд конкретных методических приёмов [28]:

1. Распределение по группам для развития навыка классификации данных;
2. Составление модели Фрейера, например, с выделением блоков «аналитический вид функции» и «графический вид функции», что формирует умение сопоставлять формулу с её геометрическим образом;
3. Создание ментальных карт для систематизации известных фактов по изучаемой теме;
4. Алгоритмизация информации с помощью блок-схем;
5. Перекодирование информации из одной формы в другую;
6. Дополнение рисунка, когда в заданную графическую схему вносится новый элемент;
7. Выделение цветом ключевых элементов для акцентирования внимания.

Пермякова М. Ю., анализируя типичные затруднения учащихся при изучении функций, обусловленные обобщённостью формулировок, рекомендует комбинировать когнитивно-визуальный подход с различными моделями представления функционального материала. При этом она подчёркивает важность сохранения традиционных методик, направленных на формирование функционально-графической грамотности [22]. В качестве одной из таких эффективных моделей выделяется графический алгоритм, который автор определяет как «эффективное средство визуального описания динамики процесса решения функционально-графической задачи». Основной принцип построения такого алгоритма – максимальное сокращение текстового описания и предельно ясное, лаконичное представление информации.

Для успешного применения когнитивно-визуального подхода при изучении степенной функции необходимо руководствоваться следующими базовыми принципами построения визуальной образовательной среды [2]:

1. Опора на визуальное восприятие при введении новых понятий. Новые функциональные понятия следует представлять в наглядно-образной форме (таблицы, схемы, графики), так как это способствует более эффективному запоминанию по сравнению с устной или текстовой подачей;
2. Учёт природы мышления учащихся. Мыслительный процесс школьников строится на ассоциациях с конкретными образами, формами и явлениями окружающего мира, а не с абстрактными категориями;
3. Систематичность и структурированность в использовании наглядности. Визуальные материалы должны применяться поэтапно: от целостного обзора к выделению основных и вспомогательных элементов с последующим возвращением к общей картине;
4. Активное вовлечение учащихся в создание визуализаций. Самостоятельное создание учениками графиков, схем и других визуальных материалов не только закрепляет знания, но и активно развивает их мышление;
5. Интеграция компьютерных технологий. Использование информационно-коммуникационных технологий для иллюстрации, исследования и закрепления нового материала;
6. Сочетание трёх форм представления знаний. Одновременное использование графического, символического и словесного способов описания функционально-графических закономерностей;
7. Учёт индивидуальных особенностей восприятия. Принятие во внимание личных качеств и возможностей учащихся в расшифровке и понимании визуальной информации;
8. Сбалансированность и обдуманный выбор методов. Выбор визуальных методов в соответствии с учебными задачами.

Таким образом, когнитивно-визуальный подход является целостной и методически обоснованной системой обучения степенной функции в старших классах. Его центральная идея заключается в создании устойчивых связей между логическим содержанием материала и наглядными формами его

представления, что активизирует познавательную деятельность учащихся с разным типом мышления – как аналитическим, так и образным [2]. Теоретической основой подхода служат исследования Ротенберга В. С. о критической роли образного мышления в структурировании знаний и разработки Далингера В. А., в которых главным инструментом выступают визуализированные задачи, которые классифицируются по месту и дидактической функции визуального образа [12]. Методическая копилка подхода разнообразна и включает не только графики, но и такие формы визуализации, как таблицы, диаграммы, модели Фрейера, блок-схемы и кластеры, а также конкретные приёмы, такие как цветовое выделение, перекодирование информации и дополнение графических схем. Когнитивно-визуальный подход представляет собой современную, технологически насыщенную и гибкую методическую систему, направленную на формирование глубокого, осмысленного и устойчивого понимания функциональных понятий через сочетание логического и образного компонентов мышления и целенаправленное использование визуальных средств на всех этапах обучения в общеобразовательной школе.

ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА КОМПЛЕКТА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ

2.1 Составление рабочих листов по теме «Степенная функция» с использованием когнитивно-визуального подхода

Рабочие листы представляют собой разработанные дидактические материалы, которые включают в себя задания, составленные учителем, которые ученик выполняет на листке бумаги или в электронном варианте на уроке или дома в качестве домашнего задания. В основном они включают в себя подборку задач, упражнений, примеров, чертежей, графиков, таблиц, а также записи решений либо рассуждений. Данные материалы объединены общей темой урока.

Рабочие листы на уроках применяются для того, чтобы:

1. Экономить время. Учитель с их помощью может не диктовать огромное количество заданий, а ученику не обязательно переписывать условия задач, так как все материалы готовы изначально и можно сразу приступить решать.
2. Индивидуализировать обучение. Для определённого класса учитель может подготовить листы различного уровня сложности, то есть одним дать базовые примеры, а другим преподнести задания углублённого уровня.
3. Наглядно отрабатывать навыки. Смысл заключается в том, что примеры в рабочих листах составлены с использованием когнитивно-визуального подхода как с явной, так и не с явной визуализацией.
4. Быстро проверить понимание. Учитель-предметник видит не только ответы обучающихся, но и логичный ход рассуждений.
5. Использовать как тренажёр. Один и тот же тип задач можно повторять на разных листах, пока не закрепится навык решения той или иной задачи.

Основной целью разработки рабочих листов по теме «Степенная функция» с использованием когнитивно-визуального подхода с явной и неявной визуализацией заключается в том, чтобы обеспечить системное и осознанное усвоение учащимися 10 класса понятия степенной функции с различными видами показателей с помощью компактного, структурированного и визуализированного материала. В условиях ограниченного учебного времени, которое отводится на изучение данного раздела в школьном курсе математики, большинство учащихся склонны к формальному усвоению материала. Они способны назвать определение, однако могут испытывать затруднения при установлении свойств функции по её графику, при установлении соответствия между аналитической и графической формами задания, а также при определении области определения в зависимости от показателя степени. Именно поэтому важно использование когнитивно-визуального подхода при составлении рабочих листов по изучаемой теме.

Рассмотрим задачи рабочих листов по теме «Степенная функция»:

1. Дидактическая задача. Она состоит в том, чтобы отработать умение определять область определения степенной функции в зависимости от показателя, соотносить аналитическую запись функции с её графиком, а также развить навык определения свойств функции по её графику.
2. Методическая задача – обеспечить возможность индивидуальной и парной работы, создать инструмент для быстрой диагностики типичных ошибок и предоставить материал для разноуровневых заданий.
3. Развивающая и мотивационная задача – сформировать устойчивую зрительную память на виды графиков степенных функций и понизить нагрузку за счёт использования в листах таблиц и группировок.

Обозначим важность рабочих листов по теме «Степенная функция»:

1. Устранение «отставания» в изучении данной темы. В действующих программах по математике для 10 класса на изучение функций отводится ограниченное количество часов. Учителю достаточно трудно на уроке дать

каждому ученику достаточно примеров по теме «Степенная функция». Рабочие листы способствуют более глубокому запоминанию темы и детальному рассмотрению каждого из видов степенной функции.

2. Преодоление типичных содержательных ошибок. Основные ошибки в теме «Степенная функция» связаны с непониманием области определения при дробных показателях, нахождением промежутков.

3. Формирование визуального мышления. Степенная функция является достаточно серьёзным понятием, знание которого требует чёткого понимания формулы и графика функции. Без составленного визуального образа дальнейшее изучение функций становится достаточно затруднительным. Рабочие листы с использованием когнитивно-визуального подхода при составлении заданий закладывают эту базу.

4. Инструмент индивидуализации и дифференциации. В одном классе некоторая часть учеников может только начинать различать виды функций, а другие могут быть готовы к более глубокому изучению темы. В данном случае создание рабочих листов обуславливается выбором разноуровневых заданий по теме «Степенная функция».

Разработанные рабочие листы по теме «Степенная функция» являются необходимым дидактическим средством в условиях ограниченного учебного времени. Они обеспечивают переход от поверхностного восприятия к активной визуально-аналитической деятельности каждого ученика, служат инструментом для дифференцированного обучения и формируют основу функциональной грамотности, которая будет необходима в дальнейшем для успешного изучения следующих разделов алгебры и начал математического анализа.

Когнитивно-визуальный подход основывается на использовании одновременно логики и зрительной памяти, благодаря чему материал запоминается легче и понимается на более углублённом уровне. При разработке рабочих листов данный подход можно применять следующим образом: построить график, написать рядом формулу и таблицу значений так, чтобы все

было в доступной форме; выделять разные типы показателей разными цветами; составление заданий на соответствие «график-формула». С помощью таких заданий ученик будет осознанно понимать свойства функции, глядя на графики, таблицы и картинки, а не просто заучивать определения и правила.

Таким образом, разработанные рабочие листы помогают понять, что такое степенная функция. Обучающиеся по графику учатся «видеть», определять нечётный или чётный показатель степени, область определения. Использование данного материала на уроках алгебры может дать значительный результат в изучении темы «Степенная функция». Рабочие листы делают учёбу интереснее и насыщеннее и позволяют давать каждому ученику обратную связь лично.

Разработанные листы учитель может применять на различных этапах изучения темы в зависимости от поставленных задач:

1. На уроках введения нового материала в качестве первичного закрепления. Учащиеся в паре или индивидуально знакомятся с функцией и формулируют выводы о влиянии показателя степени на свойства функции.
2. В режиме текущего контроля. Выполнение заданий на сопоставление формулы и графика или на выбор верного утверждения.
3. В качестве домашнего задания.
4. В режиме диагностики затруднений. Учитель собирает выполненные рабочие листы, проверяет и анализирует, на каком типе заданий допущено максимальное количество ошибок. Следовательно, на основании данного анализа он в дальнейшем будет делать упор на решение подобных заданий.

Перечислим ожидаемые результаты после использования рабочих листов для учителя: получение сведений об уровне усвоения темы каждым учеником; возможность осуществления помощи при выявлении затруднений; экономия времени на проверку. Выделим ожидаемые результаты для ученика: формирование навыка визуального анализа; усвоение основных свойств степенной функции; умение строить графики функций. Овладение

выработанными навыками поможет в дальнейшем в изучении показательной, логарифмической и тригонометрической функций.

Рассмотрим содержание каждого рабочего листа (Таблица 2).

Таблица 2 – Анализ содержания разработанных рабочих листов

№	Название темы	Содержание
1	Степенная функция $y = x^p$, где $p=2n$ – чётное натуральное число.	Рабочие листы представляют собой разработанные дидактические материалы, предназначенные для учащихся 10 класса, направленные на закрепление, систематизацию и углубление знаний по данному виду функций. Листы включают в себя по 7 заданий на отработку знаний о степенной функции в зависимости от показателя степени. Данные материалы содержат задания на узнавание и соотнесение графиков функций с формулой, отработку свойств функции, построение графика функции по точкам, сравнение функций. Узнавание и соотнесение графиков функций с формулой помогает различать графики степенных функций в зависимости от показателя степени. Отработка свойств функции направлена на систематизацию теоретических знаний. Построение графика функции позволяет развить визуальное и аналитическое мышление. Сравнение функций и их графиков создаёт понимание взаимосвязи и умение классифицировать функции.
2	Степенная функция $y = x^p$, где $p=2n-1$ – нечётное натуральное число.	
3	Степенная функция $y = x^p$, где $p=-2n$ (n – натуральное число).	
4	Степенная функция $y = x^p$, где $p=-(2n-1)$ (n – натуральное число).	
5	Степенная функция $y = x^p$, где p – положительное действительное нецелое число.	
6	Степенная функция $y = x^p$, где p – отрицательное действительное нецелое число.	
7	Степенная функция $y = x^p$, где p – действительное число, её свойства и график.	Данные рабочие листы представляют собой разработанные дидактические материалы для 10 классов, которые направлены на отработку и закрепление знаний по теме «Степенная

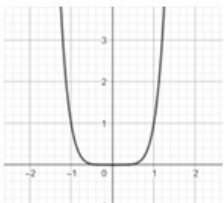
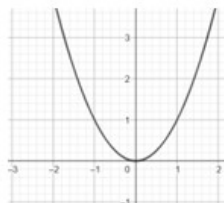
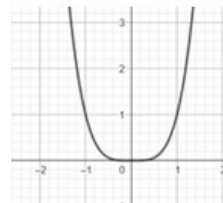
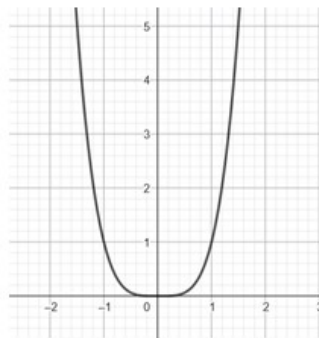
Продолжение таблицы 2.

8	Степенная функция $y = x^p$, где p – действительное число, её свойства и график.	функция». Листы включают в себя по 6 заданий, ориентированные на умение различать степенные функции в зависимости от показателя степени, закрепление теоретических знаний (свойств функции), а также практических навыков (построение графика функции по точкам, со смещением).
---	---	---

Таким образом, разработанные рабочие листы по теме «Степенная функция» с использованием когнитивно-визуального подхода направлены на формирование у учащихся связей между содержанием материала и его наглядно-образного представления. Главной особенностью данного материала является опора на визуальное восприятие при изучении темы, систематичность в использовании наглядности, что обеспечивает целостное и осмысленное усвоение такого не менее важного раздела в алгебре, как «Степенная функция».

2.2 Рабочие листы по теме «Степенная функция, её свойства и график»

Рабочий лист №1

Ф.И. _____	Класс _____	Дата _____	Алгебра						
Степенная функция $y = x^p$, где $p=2n$ – чётное натуральное число.									
<p>1 Соотнесите формулу функции с её графиком:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: left;"> <p>1. $y = x^2$</p> <p>2. $y = x^4$</p> <p>3. $y = x^6$</p> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>A</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>Б</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>В</p> </div> </div> <table border="1" style="margin-top: 10px; width: 100%; text-align: center;"> <tr style="background-color: #4a86e8; color: white;"> <td style="width: 33%;">1</td> <td style="width: 33%;">2</td> <td style="width: 33%;">3</td> </tr> <tr style="height: 20px;"> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> </div>				1	2	3			
1	2	3							
<p>2 Запишите область определения функции $y = x^p$, где $p=2n$ – чётное натуральное число.</p> <p>Ответ:</p>		<p>Является ли функция $y = x^8$ чётной или нечётной?</p> <p>Проверьте аналитически: $f(-x) = (-x)^8 =$</p> <p>Ответ:</p>							
<p>3 Укажите для функции $y = x^4$</p> <p>Нули функции:</p> <p>Промежутки возрастания:</p> <p>Промежутки убывания:</p> <p>Наибольшее значение:</p> <p>Наименьшее значение:</p>									

Ф.И.

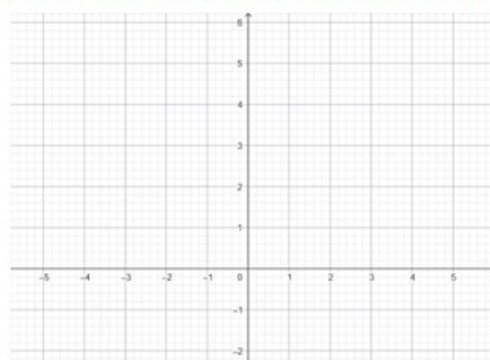
Класс

Дата

Алгебра

- 4 Постройте график функции $y = x^2$ на интервале $x \in [-2; 2]$ по точкам:

x	-2	-1	0	1	2
y					



- 5 График функции $y = x^p$ проходит через точку (2;16). Найдите p.

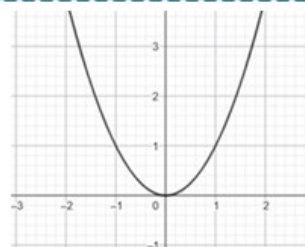
Ответ:

- 6 Определите, принадлежит ли точка A(-3;81) графику функции $y = x^4$?

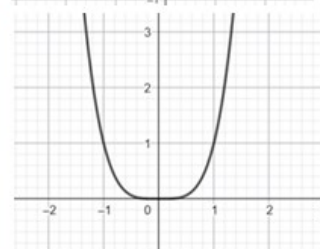
Ответ:

- 7 Сравните значения функций $y = x^2$ и $y = x^4$ в точках: $x = 0,5$; $x = 1$; $x = 1,5$. Заполните таблицу.

x	x^2	x^4	Сравнение
0,5			x^2 x^4
1			x^2 x^4
1,5			x^2 x^4



$$y = x^2$$



$$y = x^4$$

Ф.И. _____ Класс _____ Дата _____ Алгебра

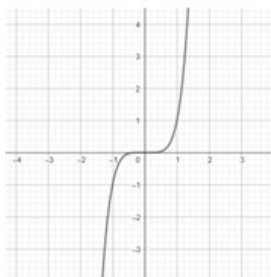
Степенная функция $y = x^p$, где $p=2n-1$ – нечётное натуральное число.

1 Соотнесите формулу функции с её графиком:

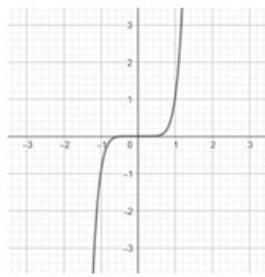
1. $y = x^3$

2. $y = x^5$

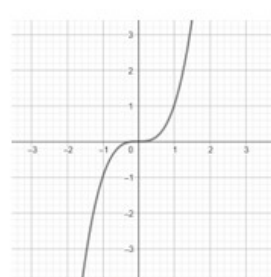
3. $y = x^7$



А



Б



В

1	2	3

2 Запишите область определения функции $y = x^p$, где $p=2n-1$ – нечётное натуральное число.

Ответ:

Является ли функция $y = x^7$ чётной или нечётной?

Проверьте аналитически:

$$f(-x) = (-x)^7 =$$

Ответ:

3 Укажите для функции $y = x^5$

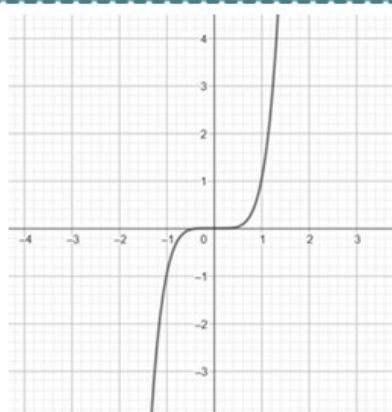
Нули функции:

Промежутки возрастания:

Промежутки убывания:

Чётность:

Симметрия графика:



Ф.И. _____

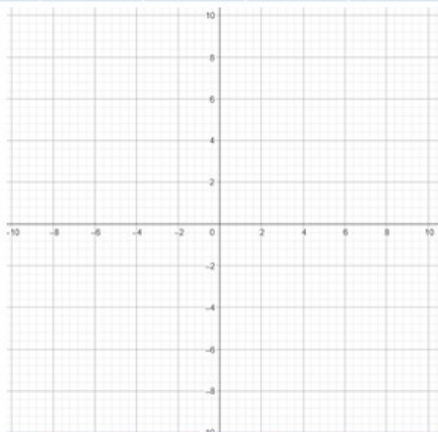
Класс _____

Дата _____

Алгебра

- 4 Постройте график функции $y = x^3$ на интервале $x \in [-2; 2]$ по точкам:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
y									



- 5 График функции $y = x^p$ проходит через точку (2;32). Найдите p.

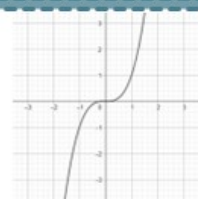
Ответ:

- 6 Определите, принадлежит ли точка A(-3; -243) графику функции $y = x^5$?

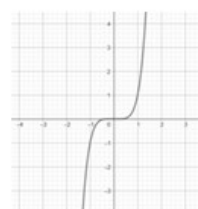
Ответ:

- 7 Сравните значения функций $y = x^3$ и $y = x^5$ в точках: $x = 0,5$; $x = 1$; $x = 1,5$. Заполните таблицу.

x	x^3	x^5	Сравнение
0,5			x^3 x^5
1			x^3 x^5
1,5			x^3 x^5



$$y = x^3$$



$$y = x^5$$

Ф.И. _____ Класс _____ Дата _____ Алгебра

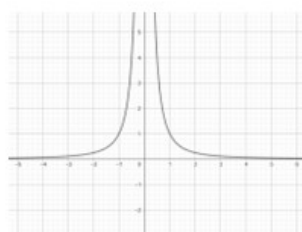
Степенная функция $y = x^p$, где $p = -2n$ (n – натуральное число).

1 Соотнесите формулу функции с её графиком:

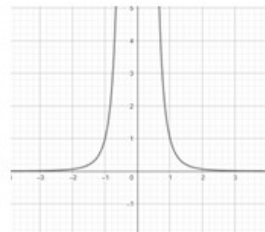
1. $y = x^{-2}$

2. $y = x^{-4}$

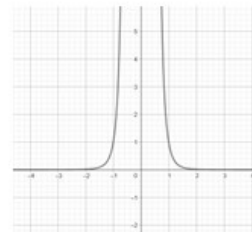
3. $y = x^{-6}$



А



Б



В

1	2	3

2 Запишите область определения функции $y = x^p$, где $p = -2n$ (n – натуральное число).

Ответ:

Является ли функция $y = x^{-6}$ чётной или нечётной?

Проверьте аналитически:

$$f(-x) = (-x)^{-6} =$$

Ответ:

3 Укажите для функции $y = x^{-4}$

Нули функции:

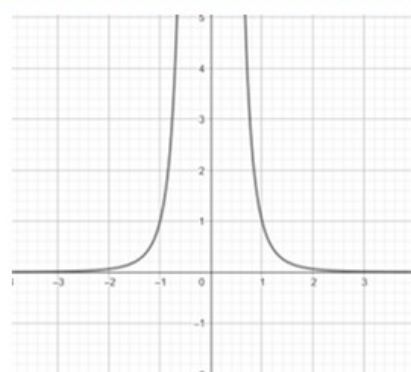
Асимптоты:

Промежутки возрастания:

Промежутки убывания:

Чётность:

Симметрия графика:



Ф.И. _____

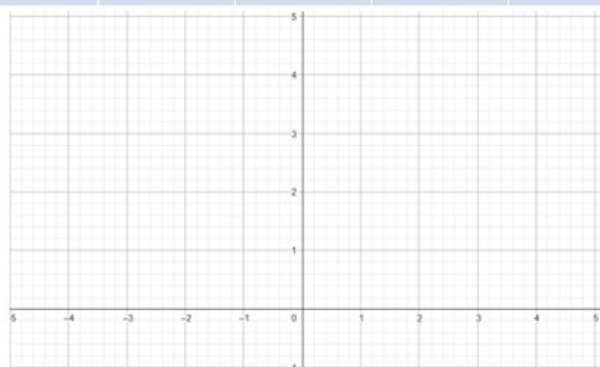
Класс _____

Дата _____

Алгебра

- 4 Постройте график функции $y = x^{-2}$ на интервалах $x \in [-2; -0.5]$ и $x \in [0.5; 2]$ по точкам:

x	-2	-1	-0.5	0.5	1	2
y						



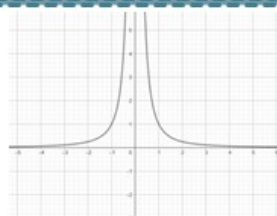
- 5 График функции $y = x^p$ проходит через точку $(2; \frac{1}{16})$. Найдите p.

Ответ:

- 6 Определите, принадлежит ли точка $A(-3; \frac{1}{81})$ графику функции $y = x^{-4}$?

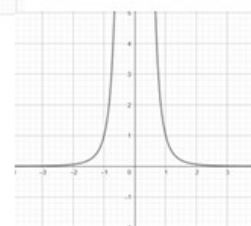
Ответ:

- 7 Сравните значения функций $y = x^{-2}$ и $y = x^{-4}$ в точках: $x = 0.5$; $x = 1$; $x = 2$. Заполните таблицу.



$$y = x^{-2}$$

x	x^{-2}	x^{-4}	Сравнение
0,5			x^{-2} x^{-4}
1			x^{-2} x^{-4}
2			x^{-2} x^{-4}



$$y = x^{-4}$$

Ф.И. _____ Класс _____ Дата _____ Алгебра

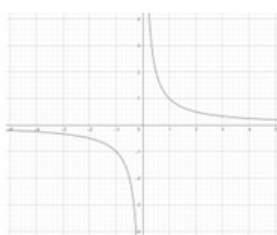
Степенная функция $y = x^p$, где $p = -(2n-1)$ (n – натуральное число).

1 Соотнесите формулу функции с её графиком:

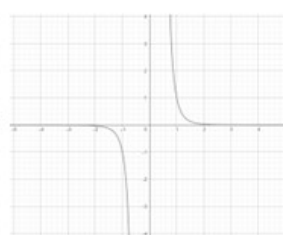
1. $y = x^{-1}$

2. $y = x^{-3}$

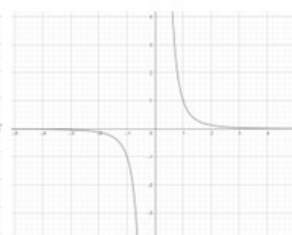
3. $y = x^{-5}$



A



Б



В

1	2	3

2 Запишите область определения функции $y = x^p$, где $p = -(2n-1)$ (n – натуральное число).

Ответ:

Является ли функция $y = x^{-5}$ чётной или нечётной?

Проверьте аналитически:

$$f(-x) = (-x)^{-5} =$$

Ответ:

3 Укажите для функции $y = x^{-3}$

Нули функции:

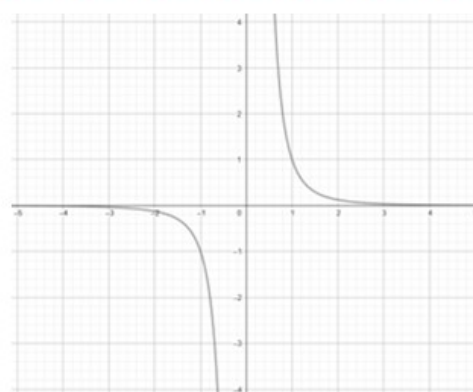
Асимптоты:

Промежутки возрастания:

Промежутки убывания:

Чётность:

Симметрия графика:



Ф.И. _____

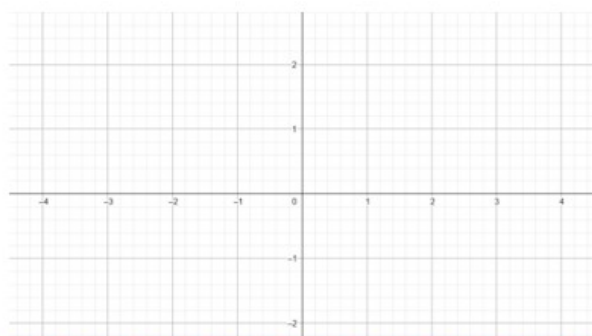
Класс _____

Дата _____

Алгебра

- 4 Постройте график функции $y = x^{-1}$ на интервалах $x \in [-2; -0.5]$ и $x \in [0.5; 2]$ по точкам:

x	-2	-1	-0.5	0.5	1	2
y						



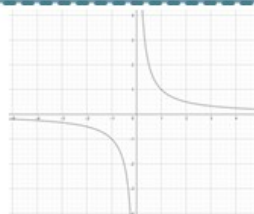
- 5 График функции $y = x^p$ проходит через точку $(2; \frac{1}{8})$. Найдите p.

Ответ:

- 6 Определите, принадлежит ли точка $A(-3; -\frac{1}{27})$ графику функции $y = x^{-3}$?

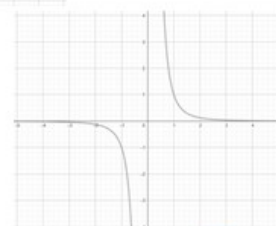
Ответ:

- 7 Сравните значения функций $y = x^{-1}$ и $y = x^{-3}$ в точках: $x = 0.5$; $x = 1$; $x = 2$. Заполните таблицу.



$$y = x^{-1}$$

x	x^{-1}	x^{-3}	Сравнение
0,5			x^{-1} x^{-3}
1			x^{-1} x^{-3}
2			x^{-1} x^{-3}



$$y = x^{-3}$$

Ф.И. _____ Класс _____ Дата _____ Алгебра

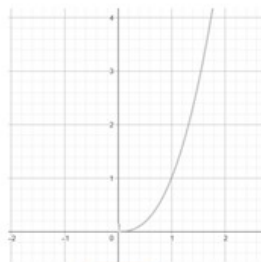
Степенная функция $y = x^p$, где p – положительное действительное нецелое число.

1 Соотнесите формулу функции с её графиком:

1. $y = x^{\frac{1}{2}}$

2. $y = x^{\frac{4}{3}}$

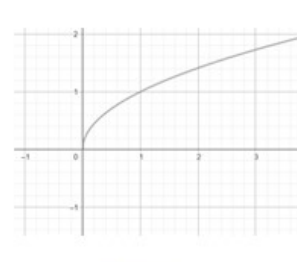
3. $y = x^{\frac{5}{2}}$



А



Б



В

1

2

3

2 Запишите область определения функции $y = x^p$, где $p = \frac{m}{n} > 0$ – положительная несократимая дробь.

Является ли функция $y = x^{\frac{4}{3}}$ чётной или нечётной?

Проверьте аналитически:

$$f(-x) = (-x)^{\frac{4}{3}} =$$

Ответ:

Ответ:

3 Укажите для функции $y = x^{\frac{1}{2}}$

Нули функции:

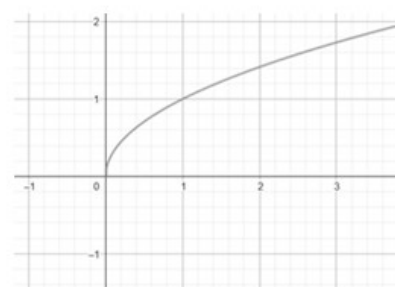
Область значений:

Промежутки возрастания:

Промежутки убывания:

Наибольшее значение:

Наименьшее значение:



Ф.И. _____

Класс _____

Дата _____

Алгебра

- 4 Постройте график функции $y = x^{\frac{1}{2}}$ на интервале $x \in [0; 16]$ по точкам:

x	0	1	4	16
y				



- 5 График функции $y = x^p$ проходит через точку (8; 16). Найдите p, где $p = \frac{m}{n} > 0$

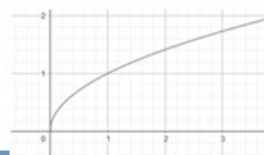
Ответ:

- 6 Определите, принадлежит ли точка A(27; 81) графику функции $y = x^{\frac{4}{3}}$

Ответ:

- 7 Сравните значения функций $y = x^{\frac{1}{2}}$ и $y = x^{\frac{4}{3}}$ в точках: $x = \frac{1}{4}$; $x = 1$; $x = 8$. Заполните таблицу.

x	$x^{\frac{1}{2}}$	$x^{\frac{4}{3}}$	Сравнение
$\frac{1}{4}$			$x^{\frac{1}{2}}$ $x^{\frac{4}{3}}$
1			$x^{\frac{1}{2}}$ $x^{\frac{4}{3}}$
8			$x^{\frac{1}{2}}$ $x^{\frac{4}{3}}$



$$y = x^{\frac{1}{2}}$$



$$y = x^{\frac{4}{3}}$$

Ф.И. _____ Класс _____ Дата _____ Алгебра

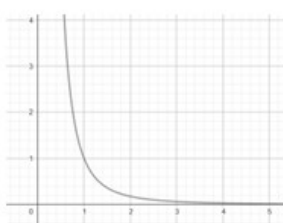
Степенная функция $y = x^p$, где p – отрицательное действительное нецелое число.

1 Соотнесите формулу функции с её графиком:

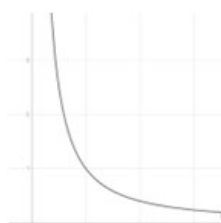
1. $y = x^{-\frac{1}{2}}$

2. $y = x^{-\frac{4}{3}}$

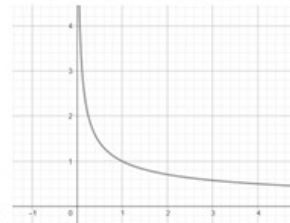
3. $y = x^{-\frac{5}{2}}$



A



Б



В

1	2	3

2 Запишите область определения функции $y = x^p$, где $p = -\frac{m}{n} > 0$ – положительная несократимая дробь.

Ответ:

Является ли функция $y = x^{-\frac{4}{3}}$ чётной или нечётной?

Проверьте аналитически:

$$f(-x) = (-x)^{-\frac{4}{3}} =$$

Ответ:

3 Укажите для функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$

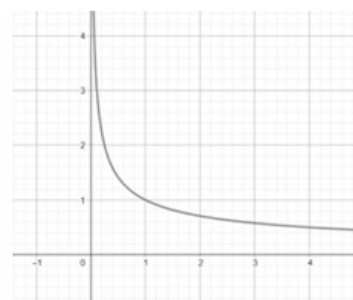
Нули функции:

Область значений:

Промежутки возрастания:

Промежутки убывания:

Чётность:



Ф.И. _____

Класс _____

Дата _____

Алгебра

- 4 Постройте график функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$ на интервале $x \in [0.25; 25]$ по точкам:

x	0.25	1	4	16	25
y					



- 5 График функции $y = x^p$ проходит через точку $(8; 0.25)$. Найдите p , где $p = \frac{m}{n} > 0$

Ответ:

- 6 Определите, принадлежит ли точка $A(\frac{1}{27}; 81)$ графику функции $y = x^{-\frac{4}{3}}$?

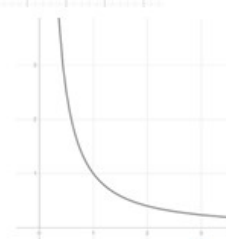
Ответ:

- 7 Сравните значения функций $y = x^{-\frac{1}{2}}$ и $y = x^{-\frac{4}{3}}$ в точках: $x = \frac{1}{4}$; $x = 1$; $x = 8$. Заполните таблицу.

x	$x^{-\frac{1}{2}}$	$x^{-\frac{4}{3}}$	Сравнение
$\frac{1}{4}$			$x^{-\frac{1}{2}}$ $x^{-\frac{4}{3}}$
1			$x^{-\frac{1}{2}}$ $x^{-\frac{4}{3}}$
8			$x^{-\frac{1}{2}}$ $x^{-\frac{4}{3}}$



$$y = x^{-\frac{1}{2}}$$



$$y = x^{-\frac{4}{3}}$$

2

Ф.И. _____

Класс _____

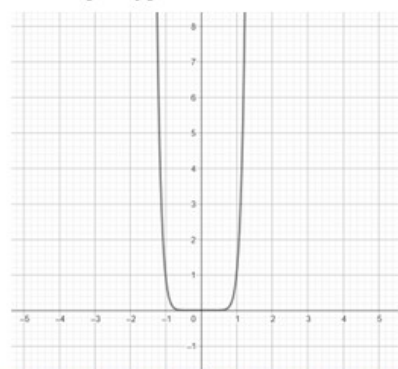
Дата _____

Алгебра

Степенная функция $y = x^p$, где p – действительное число, её свойства и график.

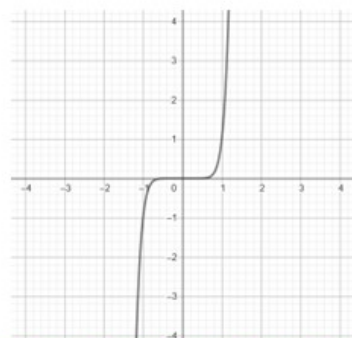
1 Отметьте галочкой верные утверждения для функции $y = x^{10}$. Неверные утверждения исправьте на верные. Как записать данную функцию в общем виде?

1. Область определения: $x \geq 0$
2. Функция чётная
3. Функция убывает на $(-\infty; 0]$
4. График симметричен относительно оси Oy
5. Наибольшее значение функции равно 0



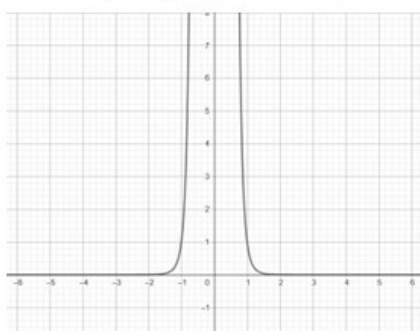
2 Отметьте галочкой верные утверждения для функции $y = x^9$. Неверные утверждения исправьте на верные. Как записать данную функцию в общем виде?

1. Область определения: $x \geq 0$
2. Функция нечётная
3. Функция убывает на $(-\infty; 0]$
4. График симметричен относительно начала координат
5. Наименьшее значение функции равно 0
6. Функция возрастает на всей области определения



3 Отметьте галочкой верные утверждения для функции $y = x^{-8}$. Неверные утверждения исправьте на верные. Как записать данную функцию в общем виде?

1. Область определения: $x \neq 0$
2. Функция нечётная
3. График имеет горизонтальную асимптоту $y=0$
4. График имеет вертикальную асимптоту $x=0$
5. Функция возрастает на $(0; +\infty)$
6. Функция убывает на $(-\infty; 0)$
7. Функция принимает только положительные значения



Ф.И.

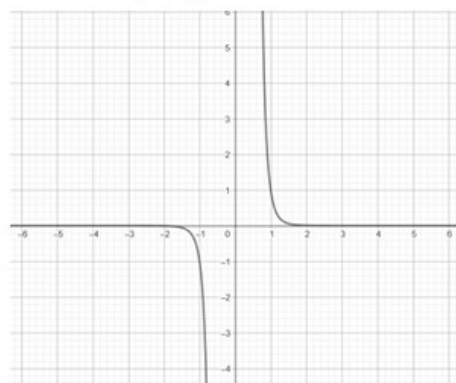
Класс

Дата

Алгебра

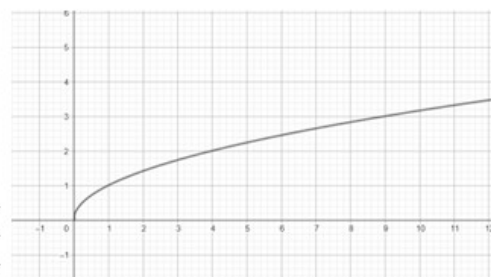
4 Отметьте галочкой верные утверждения для функции $y = x^{-7}$. Неверные утверждения исправьте на верные. Как записать данную функцию в общем виде?

1. Область определения: $x \neq 0$
2. Функция чётная
3. График имеет горизонтальную асимптоту $y=0$
4. График имеет вертикальную асимптоту $x=0$
5. Функция возрастает на $(0; +\infty)$
6. Функция убывает на $(-\infty; 0)$
7. Функция принимает только положительные значения



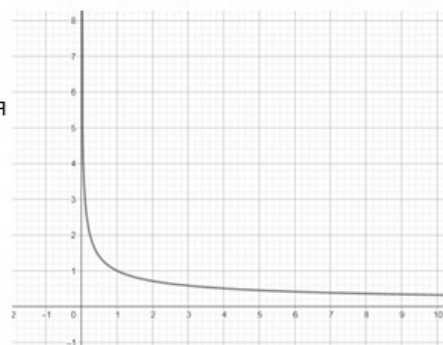
5 Отметьте галочкой верные утверждения для функции $y = x^{\frac{1}{2}}$. Неверные утверждения исправьте на верные. Как записать данную функцию в общем виде?

1. Область определения: $x \geq 0$
2. Функция возрастает на всей области определения
3. Функция убывает на всей области определения
4. Область значений: $y \geq 0$
5. Функция ограничена снизу



6 Отметьте галочкой верные утверждения для функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$. Неверные утверждения исправьте на верные. Как записать данную функцию в общем виде?

1. Область определения: $x > 0$
2. Функция возрастает на всей области определения
3. Функция убывает на всей области определения
4. Область значений: $y > 0$
5. График функции проходит через начало координат



2

Ф.И. _____ Класс _____ Дата _____ Алгебра

Степенная функция $y = x^p$, где p – действительное число, её свойства и график.

Заполните таблицу.

№	Вид показателя p	Область определения	Монотонность	Пример	График

1

Выбери формулу, соответствующую графику степенной функции:



1. $y = x^{-\frac{1}{3}}$

2. $y = x^{\frac{1}{4}}$

3. $y = x^{-2}$

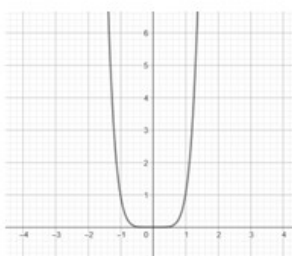
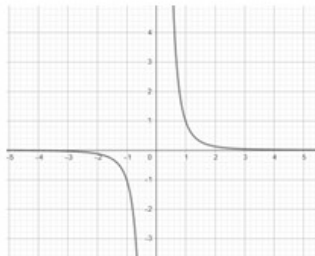
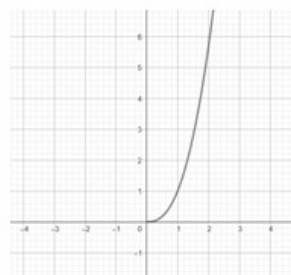
4. $y = x^9$

5. $y = x^{0.5}$

Ответ:

2

На каком рисунке изображен график функции $y = x^6$? Отметьте галочкой.



3

Придумайте формулу степенной функции с нечётным натуральным показателем, график которой:

1. Проходит через точку (1; 1)

2. Проходит через точку (−2; −32)

Сколько таких функций существует? Почему?

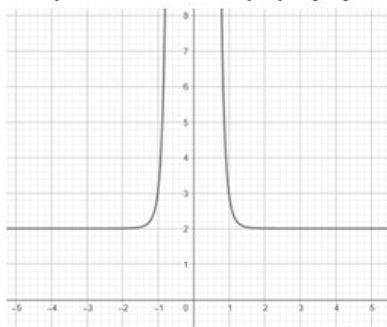
Ф.И. _____

Класс _____

Дата _____

Алгебра

- 4 На рисунке изображён график функции $y = x^{-8}$ со сдвигом на 2 единицы вверх. Запишите формулу полученной функции.



Ответ:

- 5 Постройте график функции $y = x^{-\frac{1}{3}}$ при $x > 0$. Опишите её свойства.

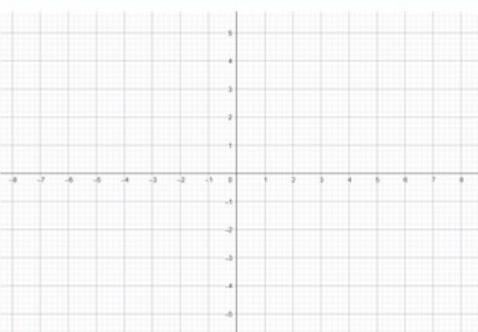


x					
y					

1. Область определения:
2. Область значений:
3. Функция убывает на
4. Чётность/нечётность:
5. Функция ограничена _____

- 6 Постройте график функции $y = x^{-1}$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-3; -1]$

x					
y					



Ответ:

2.3 Конспект урока по теме «Степенная функция, её свойства и график»

Класс: 10

Тема: «Степенная функция, её свойства и график»

Тип урока: закрепления знаний

Форма работы: фронтальная, индивидуальная.

Цель урока: научиться определять свойства и график функции $y = x^p$ по виду показателя степени.

Задачи урока:

1. Научиться определять вид графика функции $y = x^p$ в зависимости от показателя степени.
2. Отработать навык соотносить график функции с формулой.
3. Закрепить умение определять свойства степенной функции.
4. Развить логическое мышление учащихся и сформировать умение правильно использовать математические понятия.

Оборудование: интерактивная доска, рабочий лист №8.

Структура урока:

1. Организационный момент.
2. Актуализация опорных знаний.
3. Формулирование темы и цели урока.
4. Систематизация знаний и применение изученного материала.
5. Рефлексия, домашнее задание.

Ход урока:

1. Организационный момент.

Учитель: Добрый день, ребята! Рада приветствовать вас на сегодняшнем уроке. Все готовы?

Ученики: приветствуют учителя и включаются в деловой ритм урока.

2. Актуализация опорных знаний.

Учитель: Ребята, давайте вспомним, какую тему мы изучали с вами на прошлом уроке.

Ученики: Мы изучали тему «Степенная функция, её свойства и график».

Учитель: Верно! Напомните мне, какая функция в математике называется степенной?

Ученики: Степенной функцией называется функция вида $y = x^p$, где p – заданное действительное число.

Учитель: Правильно! Назовите, какие показатели степени вы знаете.

Ученики: Мы знаем шесть показателей степени: $p=2n$ – чётное натуральное число; $p=2n-1$ – нечётное натуральное число; $p=-2n$, где n – натуральное число; $p=-(2n-1)$, где n – натуральное число; p – положительное действительное нецелое число; p – отрицательное действительное нецелое число.

Учитель: Да, вы правы, для степенной функции мы рассматривали шесть видов показателей степени. Итак, сейчас я раздам каждому по две карточки: зелёную и красную. Давайте посмотрим на доску. На ней вы видите таблицу, в которой шесть утверждений. Вы по очереди будете зачитывать их и поднимать карточку. Если утверждение верно, то вы поднимаете карточку зелёного цвета, и соответственно для неверного – красного цвета.

№	Утверждение	Ответ
1.	Область значений функции $y = x^4$ – неотрицательные числа, т. е. $y \geq 0$.	
2.	Функция $y = x^{-3}$ определена при всех «х».	
3.	Если $p = \frac{1}{3}$, то график функции проходит через точки (0;0) и (1;1).	
4.	Область определения функции $y = x^{-\frac{2}{3}}$ – все действительные числа.	
5.	Для $p = -4$ функция убывает на интервале	

	$(0; +\infty)$.	
6.	Функция $y = x^3$ чётная.	

Ученики читают утверждения и поднимают соответствующие карточки.

Учитель: Ребята, давайте проверим наши ответы.

№	Утверждение	Ответ
1.	Область значений функции $y = x^4$ – неотрицательные числа, т. е. $y \geq 0$.	Верно
2.	Функция $y = x^{-3}$ определена при всех «х».	Неверно, так как область определения данной функции – множество действительных чисел, кроме нуля.
3.	Если $p = \frac{1}{3}$, то график функции проходит через точки $(0;0)$ и $(1;1)$.	Верно
4.	Область определения функции $y = x^{-\frac{2}{3}}$ – все действительные числа.	Неверно. Область определения этой функции – множество положительных чисел $x > 0$
5.	Для $p = -4$ функция убывает на интервале $(0; +\infty)$.	Верно
6.	Функция $y = x^3$ чётная.	Неверно. Функция нечётная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$

3. Формулирование темы и цели урока.

Учитель: Вы отлично справились с заданием. Давайте сформулируем тему сегодняшнего урока и цель, которую в результате занятия мы должны будем достичь.

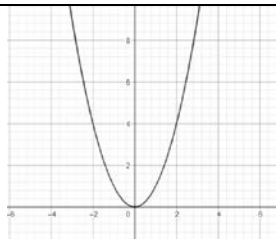
Ученики: Мы продолжаем изучать тему «Степенная функция, её свойства и график»; должны закрепить свои знания по данной теме, научиться различать показатели степени и в зависимости от них определять свойства и график функции.

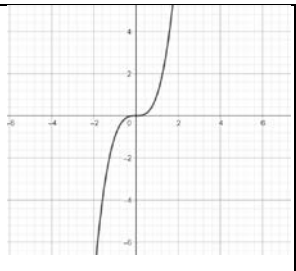
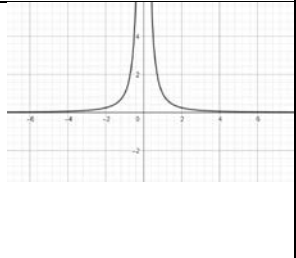
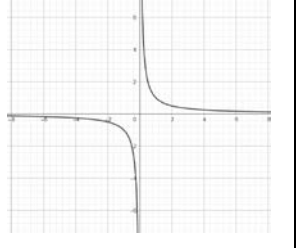
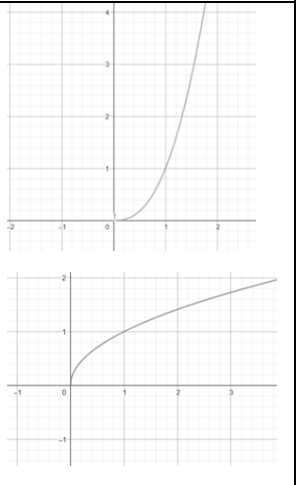
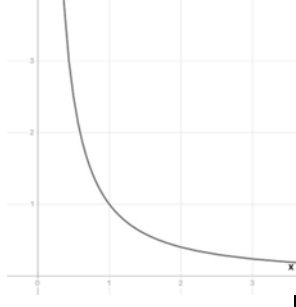
4. Систематизация знаний и применение изученного материала.

Учитель: Сейчас я вам раздам рабочие листы каждому (Рабочий лист №8). Обратим внимание на первую страницу. Вы видите незаполненную таблицу, в ней необходимо вписать все шесть видов показателя p , область определения, монотонность, пример функции в зависимости от показателя степени p , а также схематично изобразить график.

№	Вид показателя p	Область определения	Монотонность	Пример	График
1					
2					
3					
4					
5					
6					

Ученики заполняют таблицу все вместе. Учитель выбирает по очереди любого обучающегося, тот называет вид показателя и работает с ним, потом очередь переходит к другому.

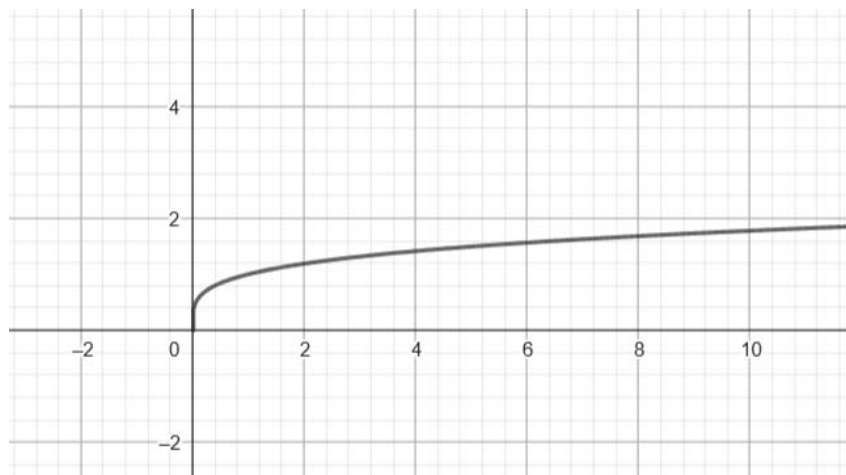
№	Вид показателя p	Область определения	Монотонность	Пример	График
1	$p=2n$ – чётное натуральное число	Множество действительных чисел	Возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$	x^2, x^4	

2	$p=2n-1$ – нечётное натуральное число	Множество действительных чисел	Возрастает на всей действительной оси	x^3, x^5	
3	$p=-2n$ (n – натуральное число)	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	Возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$	x^{-2}, x^{-4}	
4	$p=-(2n-1)$ (n – натуральное число)	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	Убывает на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	x^{-1}, x^{-3}	
5	p – положительное действительное нецелое число	$[0; +\infty)$	Возрастает на $[0; +\infty)$	$x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{4}{3}}$	
6	p – отрицательное действительное нецелое число	$(0; +\infty)$	Убывает на $(0; +\infty)$	$x^{-\frac{2}{3}}, x^{-\frac{1}{2}}$	

Учитель: Молодцы! Мы правильно заполнили таблицу. Её вы оставляете себе и учителе. При необходимости при решении задач в дальнейшем можете использовать её, если, к примеру, забыли как выглядит график функции.

Приступаем к решению задач на второй станции рабочего листа. Решаем по очереди на доске.

Задание 1. Выбери формулу, соответствующую графику степенной функции.



1. $y = x^{-\frac{1}{3}}$

2. $y = x^{\frac{1}{4}}$

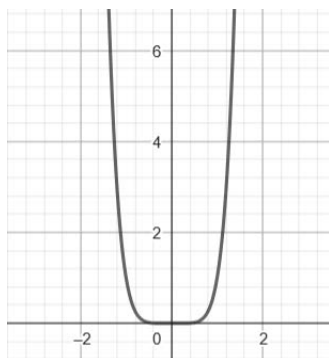
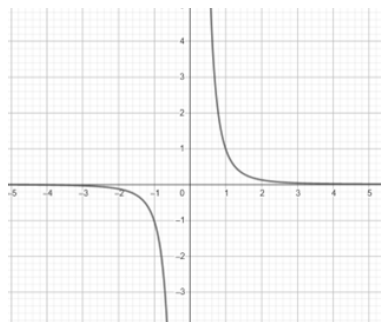
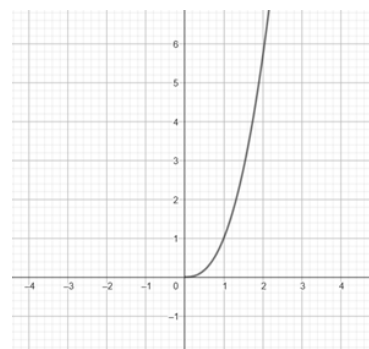
3. $y = x^{-2}$

4. $y = x^9$

5. $y = x^{0.5}$

Ответы учеников: 2.

Задание 2. На каком рисунке изображен график функции $y = x^6$?
Отметьте галочкой.



Ответы учеников: выбирают первый рисунок.

Задание 3. Придумайте формулу степенной функции с нечётным натуральным показателем, график которой: 1. Проходит через точку (1;1); 2. Проходит через точку (-2; -32). Сколько таких функций существует? Почему?

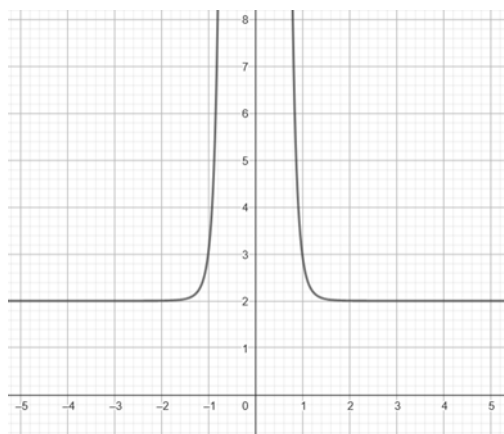
Ответы учеников:

1. Любая функция $y = x^p$ с нечетным натуральным показателем проходит через точку (1;1), так как $1^p = 1$.

2. Подставляем координаты в формулу: $-32 = (-2)^p$, откуда $p=5$.

Ответ: $y = x^5$; только одна такая функция существует, потому что только показатель p обеспечивает прохождение через точку (-2; -32).

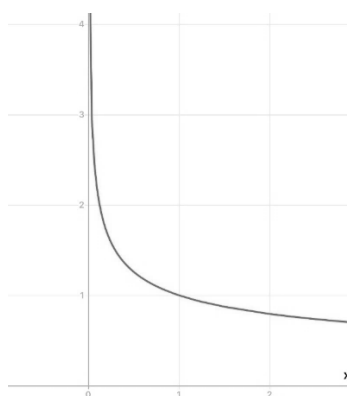
Задание 4. На рисунке изображён график функции $y = x^{-8}$ со сдвигом на 2 единицы вверх. Запишите формулу полученной функции.



Ответы учеников: $y = x^{-8} + 2$.

Задание 5. Постройте график функции $y = x^{-\frac{1}{3}}$ при $x > 0$. Опишите её свойства.

Ответы учеников:

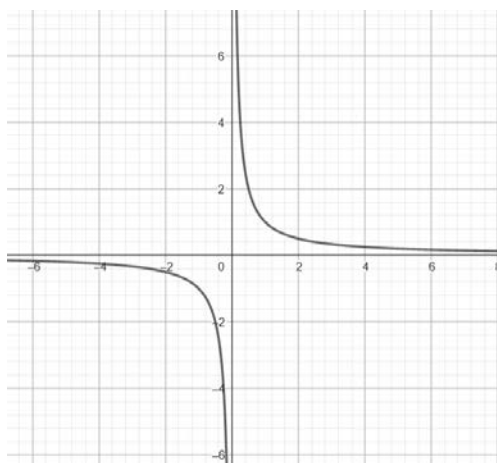


Свойства:

1. Область определения: $(0; +\infty)$.
2. Область значений: $(0; +\infty)$.
3. Функция убывает на $(0; +\infty)$.
4. Функция ни чётная, ни нечётная.
5. Функция ограничена снизу.

Задание 6. Постройте график функции $y = x^{-1}$. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-3; -1]$.

Ответы учеников:



Наибольшее значение функции на данном отрезке равно $-\frac{1}{3}$.

Наименьшее значение функции на данном отрезке равно -1 .

Учитель: Молодцы! Мы справились со всеми заданиями.

5. Рефлексия, домашнее задание.

Учитель: Ребята, давайте подведём итоги урока. Чему вы научились сегодня?

Ученики: Мы закрепили свои знания по теме «Степенная функция, её свойства и график», научились различать показатели степени и в зависимости от них определять свойства и график функции.

Учитель: Записываем домашнее задание.

Задание 1. Построить графики функций и описать их свойства:

1. $y = x^6$;
2. $y = x^9$;
3. $y = x^{-4}$;
4. $y = x^{-3}$;
5. $y = x^{\frac{5}{2}}$;
6. $y = x^{\frac{2}{3}}$.

Ученики записывают домашнее задание.

Учитель: Ребята, спасибо за урок! До новых встреч.

Заключение

Степенная функция является одной из основных функциональных содержательно-методических линий школьного курса алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы. Она проходит через все этапы обучения: от пропедевтики через систематическое изучение до завершающего аналитического этапа. Данная тема занимает центральное место в школьном математическом образовании. Её успешное усвоение является необходимым условием для дальнейшего изучения математического анализа и других дисциплин.

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы была достигнута поставленная цель: созданы рабочие листы по теме «Степенная функция, её свойства и график» с использованием когнитивно-визуального подхода, обеспечивающие поэтапное формирование у учащихся 10 класса понятия степенной функции, её свойств и графиков, а также отработку практических навыков на всех этапах изучения темы.

В данной работе были решены следующие задачи:

1. Проанализированы теоретические основы и история развития функциональной линии в школьном курсе математики;
2. Определена система целей и задач изучения степенной функции в курсе алгебры и начал математического анализа;
3. Проведено сравнение различных методических подходов к введению понятия степенной функции и изучению её свойств;
4. Рассмотрены механизмы применения когнитивно-визуального подхода как средства повышения эффективности освоения темы «Степенная функция, её свойства и график» в старшей школе;
5. Разработаны рабочие листы по теме «Степенная функция, её свойства и график» с использованием когнитивно-визуального подхода;
6. Разработан конспект урока по теме «Степенная функция, её свойства и график».

Таким образом, разработанный учебно-методический комплекс не только обеспечивает поэтапное формирование понятия степенной функции, её свойств и графиков, но и служит эффективным учебным материалом, который реализует принципы когнитивно-визуального подхода – развитие образного мышления, формирование связей между аналитической записью и графическим образом. Данные материалы могут быть использованы учителем математики как для организации учебной деятельности, так и для самостоятельной работы обучающихся.

Список литературы

1. Федеральный государственный общеобразовательный стандарт основного общего образования : Приказ Минпросвещения России от 31.05.2021 № 287 (ред. От 18.06.2025) // Минюст России. 2021. №64101. С. 91.
2. Абильева З. А., Кошелева Н. Н., Павлова Е. С. Применение когнитивно-визуального подхода к изучению степенной функции в школе // Математическое образование в школе и вузе: опыт, проблемы, перспективы. 2021. №1. С. 9 -15.
3. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразовательных организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 16-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 256 с.
4. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразовательных организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 17-е изд., стер. М. : Просвещение, 2013. 287 с.
5. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.] ; 10-е изд. стер. М. : Просвещение, 2022. 303 с.
6. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразовательных организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 4-е изд. стер. М. : Просвещение, 2017. 271 с.
7. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.] ; 9-е изд. стер. М. : Просвещение, 2022. 335 с.
8. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учеб. для общеобразовательных организаций / Ш. А. Алимов [и др.] ; под ред. А. М. Колмагорова. 3-е изд. стер. М. : Просвещение, 2016. 463 с.
9. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч.1. : учеб. для общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович [и др.] ; 14-е изд. стер. М. : Мнемозина, 2013. 400 с.
10. Васильева М. В. Формирование универсальных учебных действий ученика средствами открытого тематического зачета по математике в старших

классах // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. 2011. № 3. С. 29–35.

11. Гончаров В. Л. Начальная алгебра : учеб. пособие. М. : Изд-во Академии педагогических наук РСФСР, 1960. 452 с.

12. Далингер В. А., Симонженков С. Д. Методика обучения математике. Когнитивно-визуальный подход : учеб. для академического бакалавриата. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Юрайт, 2016. 340 с.

13. Иванова О. А. Обучение функциональной линии на уроках математики в 7-11 классах на основе метаметодического подхода // Теория и методика обучения и воспитания. 2013. № 1. С. 23.

14. Капкаева Л. С. Теория и методика обучения математике: частная методика : учеб. пособие. М. : Юрайт, 2023. 519 с.

15. Князева О. О. Реализация когнитивно-визуального подхода в обучении старшеклассников началам математического анализа // Теория и методика обучения и воспитания. 2003. № 2. С. 24.

16. Кошелева Н. Н., Абильева З. А. Роль визуализированных задач в процессе обучения учащихся понятию и свойствам степенной функции в курсе алгебры и начал математического анализа // Азимут научных исследований: педагогика и психология. 2020. №1. С. 1 – 15.

17. Мордкович А. Г. О некоторых проблемах школьного математического образования // Математика в школе. 2012. №10. С. 35-43.

18. Муравин Г. К., Муравина О. В. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразовательных организаций. М. : Дрофа, 2013. 288 с.

19. Муравин Г. К., Муравина О. В. Алгебра и начала математического анализа. Геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень : учеб. пособие. 2-е изд., М. : Дрофа, 2014. 269 с.

20. Муравин Г. К., Муравина О. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень : учеб. для общеобразовательных учреждений. 9-е изд., стер. М. : Дрофа, 2013. 285 с.

21. Олексюк Т. А. Цифровые учебно-методические материалы для изучения математического раздела «Степенные функции» в школе // Образование в России и актуальные вопросы современной науки. 2020. №1. С. 222 - 227.
22. Пермякова М. Ю. Формирование функционально-графической грамотности учащихся в контексте федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования // Инновационная наука. 2015. № 3. С. 112.
23. Подходова Н. С., Снегурова В. И. Методика обучения математике : учеб. для бакалавров. М. : Изд-во Юрайт, 2017. 274 с.
24. Покровский В. П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия : учеб. пособие. М. : Изд-во ВлГУ, 2014. 143 с.
25. Ротенберг В. С. Мозг. Обучение. Здоровье : книга для учителя. М. : Просвещение, 1989. 239 с.
26. Токарева Л. И. Формирование теоретических систем понятий у учащихся общеобразовательных школ // Наука и школа. 2008. № 4. С. 21–23.
27. Фёдорова Н. Е., Ткачёва М. В. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10-11 классы : учеб. пособие для образовательных организаций. 3-е изд., перераб. и доп. М. : Просвещение, 2017. 172 с.
28. Фирер А. В. Развитие познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной линии алгебры средствами визуализации // Теория и методика обучения и воспитания. 2018. № 1. С. 225.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: и.о. зав. кафедрой
« 16 » 02 2026 г.
Паньженский В.И. Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студентки Метенцовой Виктории Владимировны
(ФИО полностью)

Тема работы: «Степенная функция в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы»

Утверждена приказом по Университету от « 14.02 » 20 26 г. № 015324/0

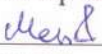
Срок сдачи студентом законченной работы « 06 » 05 20 26 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение и анализ литературы по теме исследования	Ноябрь-декабрь 2025 г.	Выполнено
2.	Определение места степенной функции в курсе алгебры и начал математического анализа	Январь 2026 г.	Выполнено
3.	Анализ подходов к введению понятия «Степенная функция»	Февраль-март 2026 г.	Выполнено
4.	Разработка рабочих листов по теме «Степенная функция, её свойства и график»	Март-апрель 2026 г.	Выполнено
5.	Разработка конспекта урока по теме «Степенная функция, её свойства и график»	Апрель 2026 г.	Выполнено
6.	Оформление библиографического списка	Май 2026 г.	Выполнено
7.	Оформление работы, подготовка презентации, выступления	Май-июнь 2026 г.	Выполнено

Дата выдачи задания «11» 09 2025г.

Руководитель  Журавлева Е.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
 Метенцова В.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

И.О ректора Пензенского
государственного университета
Д.В. Артамонову
студента (ки) 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения

Метелковой Викторией
Владимировной

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Метелкова Виктория Владимировна,
Ф.И.О. студента
студент (ка) 4 курса очной формы обучения направления подготовки
44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика»
прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ»
бакалаврской работы на тему «Степенная функция в курсе алгебры
и начал математического анализа общеобразовательной
школы»,
выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

Метел
ПОДПИСЬ
06.05.26
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 06.05.26
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР М Муромцев Е. 2
ПОДПИСЬ И.О.Ф.

ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе "Антиплагиат.ВУЗ" выпускной квалификационной работы на тему : «**Степенная функция в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы**» студентки 4 курса Метенцовой Виктории Владимировны направления подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование"

профиль подготовки "Математика"

Руководитель ВКР Журавлева Е.Г.



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://pnzgu.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

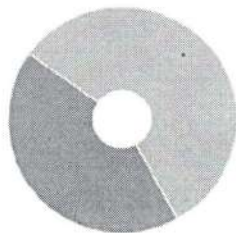
Автор: Метенцова Виктория Владимировна

Название документа: Степенная функция в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы

Проверяющий: Журавлёва Екатерина Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
42,74%

Оригинальность:
57,26%

ИИ-контент:
0%

Цитирования:
0%

Самоцитирования:
0%

1 «Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

1 Проверено: 91,82% текста документа, исключено из проверки: 8,18% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Титульный лист, Библиография, Таблицы

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы: библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 156

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 06.05.2026 09:45:36

Дата корректировки: 01.06.2026 11:26:00

Количество страниц: 74

Символов в тексте: 79476

Слов в тексте: 9344

Число предложений: 1740

Комментарий: не указано

Руководитель ВКР

М- 01.06.26

Е.Г. Журавлева

дата, подпись

ОТЗЫВ

**РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Степенная функция в курсе алгебры и начал
математического анализа общеобразовательной школы»
студентки Метенцовой Виктории Владимировны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»
профиль «Математика», гр. 22ФПМ1**

Выпускная квалификационная работа Метенцовой Виктории Владимировны посвящена методике изучения степенной функции в школьном курсе математики.

Функциональная линия является одной из главных содержательных линий курса математики. Её изучение имеет огромное общекультурное и мировоззренческое значение для школьников. Функции позволяют описывать множество реальных процессов, что дает обучающимся возможность обобщить представления о зависимостях, приобретенные в повседневной жизни и в процессе изучения других предметов. Это позволяет им научиться мыслить в терминах переменных и зависимостей, развивает представление о взаимной зависимости величин — что играет огромную роль в познании ребёнком реального мира. Существуют различные проблемы при изучении функциональной линии. Они связаны с дефицитом наглядности при построении графиков, установлении закономерностей изменения графиков в зависимости от входящих параметров, нехваткой возможностей реализовать экспериментальную деятельность на уроках, а так же с элементарной нехваткой времени для рассмотрения большего числа примеров и задач.

Выпускная квалификационная работа Метенцовой В.В. состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В ходе выполнения работы студенткой были решены следующие задачи: проанализированы теоретические основы развития функциональной линии в школьном курсе математики; определены система целей и задач изучения степенной функции; проведен сравнительный анализ методических подходов к введению понятия степенной функции и изучению её свойств; рассмотрены механизмы применения когнитивно-визуального подхода как средства повышения эффективности освоения темы «Степенная функция, её свойства и график» в старшей школе; разработаны рабочие листы по теме «Степенная функция, её свойства и график» с использованием когнитивно-визуального подхода; разработан конспект урока по теме «Степенная функция, её свойства и график».

Работа является самостоятельным исследованием. Полученные результаты могут быть использованы в общеобразовательных организациях для повышения эффективности образовательного процесса.

Выпускная квалификационная работа Метенцовой В.В. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным работам и заслуживает оценки «отлично».

Руководитель, к.п.н., доцент кафедры
«Математическое образование»



Е.Г. Журавлева