МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль: «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методические особенности изучения содержательной линии «Вычисления и тождественные преобразования» в школьном курсе математики»

Студент 06.06.2024 Бушова Екатерина Витальевна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель 6.06.2024 Сорокина М.В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 24.06.24 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 07.06.24 № 12)

Заведующий кафедрой 07.0624 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 24.06.24 № 2)

Секретарь ГЭК 24.06.24 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2024

Оглавление

Введение..... 3

Глава 1. Понятие и виды тождественных преобразований. 6

1.1 Понятие тождества. Типы тождественных преобразований. 6

1.2 Тождественные преобразования в школьном курсе математики (анализ учебников)..... 10

1.3Тождественные преобразования алгебраических выражений. 16

1.4Тождественные преобразования тригонометрических выражений..... 20

1.5 Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений..... 23

Глава 2. Методические особенности изучения тождественных преобразований..... 27

2.1 Методические особенности изучения тождественных преобразований алгебраических выражений..... 27

2.1.1 Обучающие самостоятельные работы по теме «Тождественные преобразования» для 7 – 9 классов..... 37

2.2 Методические особенности изучения тождественных преобразований тригонометрических выражений..... 49

2.3 Методические особенности изучения тождественных преобразований логарифмических выражений. 58

Заключение. 66

Список используемой литературы. 67

Введение

Линия тождественных преобразований играет важную роль в школьном курсе математики, на ее основе формируются представления об аналитических методах решения задач. Преобразования тождеств применяются в различных областях математики и используются практически при решении любой задачи, требующей аналитического подхода. Этот метод предполагает выполнение конкретных тождественных преобразований.

Изучение тождественных преобразований начинается с начальной школы и постепенно развивается на протяжении всего курса обучения. Знания и умения, связанные с применением тождественных преобразований в процессе решения задач, играют важную роль в построении математического мышления учащихся и помогают им развивать аналитические навыки. Важно отметить, что эта тема является фундаментальной и служит основой для более сложных математических операций, которые изучаются в дальнейшем

Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) определяет обязательный минимум содержания основных образовательных программ для различных предметов. Обязательный минимум содержания основных образовательных программ по тождественным преобразованиям включает в себя следующие ключевые понятия и навыки:

1. Выполнять несложные преобразования для вычисления значений числовых выражений, которые содержат степень с натуральным и отрицательным показателем;
2. Выполнять несложные преобразования целых выражений, а именно: раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые;
3. Использовать формулы сокращенного умножения в ходе упрощения выражений;
4. Выполнять несложные преобразования дробно – линейных выражений и выражений с арифметическими корнями.

Последовательно выстроенный курс алгебры с уделением должного внимания теме «Тождественные преобразования» способствует развитию учебных навыков учащихся основной школы по предмету у учащихся основной школы и помогает им успешно справляться с математическими задачами

Цель исследования: разработать систему задач по теме «Тождественные преобразования» в школьном курсе математики.

Задачи исследования:

1. Выделить основные типы тождественных преобразований.
2. Изучить содержание и организацию изучения тождественных преобразований в курсе математики школы.
3. Описать методические особенности изучения основных классов тождественных преобразований, изучаемых в курсе школьной математики.
4. Рассмотреть различные методы преобразований тригонометрических выражений.
5. Рассмотреть различные методы преобразований логарифмических и показательных выражений.
6. Проанализировать задачный материал по теме «Тождественные преобразования» в ОГЭ по математике для 9 класса.
7. Проанализировать задачный материал по теме «Тождественные преобразования» в ЕГЭ по математике для 9 класса.

Объект исследования: тождественные преобразования.

Предмет исследования: тождественные преобразования в общеобразова-тельной школе.

В соответствии с целью и задачами исследования мы выбрали следующие методы исследования:

1. Анализ методической, психологической и педагогической литературы по соответствующей теме.
2. Изучение и обобщение уже имеющегося педагогического опыта.
3. Анализ ФГОС, программ по математике, школьных учебников.

Исследование методов выполнения тождественных преобразований в школьном курсе математики имеет как теоретическую, так и практическую значимость.

Теоретическая значимость исследования состоит в обобщении и систематизации уже существующих в математике знаний.

Практическая значимость исследования заключается в том, что материалы исследовательской работы могут быть использованы в работе учителя математики для более эффективного преподавания в школе.

Структура работы: работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы.

Глава 1. Понятие и виды тождественных преобразований

Понятие тождества. Типы тождественных преобразований

Линия тождественных преобразований играет важную роль в школьном курсе математики. Она позволяет учащимся понять основные принципы алгебры, такие как равенство, эквивалентность и преобразование выражений. Изучение этой темы помогает учащимся развить навыки работы с алгебраическими выражениями, решать уравнения и выполнять алгебраические преобразования. Понимание линии тождественных преобразований является ключевым элементом успешного освоения алгебры в курсе школьной математики.

Определение. Под выражением в математике понимают выражение, в запись, которая состоит из чисел, букв (которые обозначают постоянные или переменные величины), а также знаков математических действий. Если рассматривать числовые множества, то речь ведется о числовых выражениях.

В школьном курсе математики выделяют такие классы математических выражений: алгебраические и неалгебраические. Неалгебраические выражения называют трансцендентными.

Определение. Под алгебраическим выражением понимают выражение, состоящие из конечного числа букв и цифр, которые соединены между собой знаками действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень и извлечения корня).

Определение. Неалгебраическими (трансцендентными) выражениями называются аналитические функции, не являющиеся алгебраическими (такие как: тригонометрические, логарифмические и показательные).

Выделяют следующие классы математических выражений:

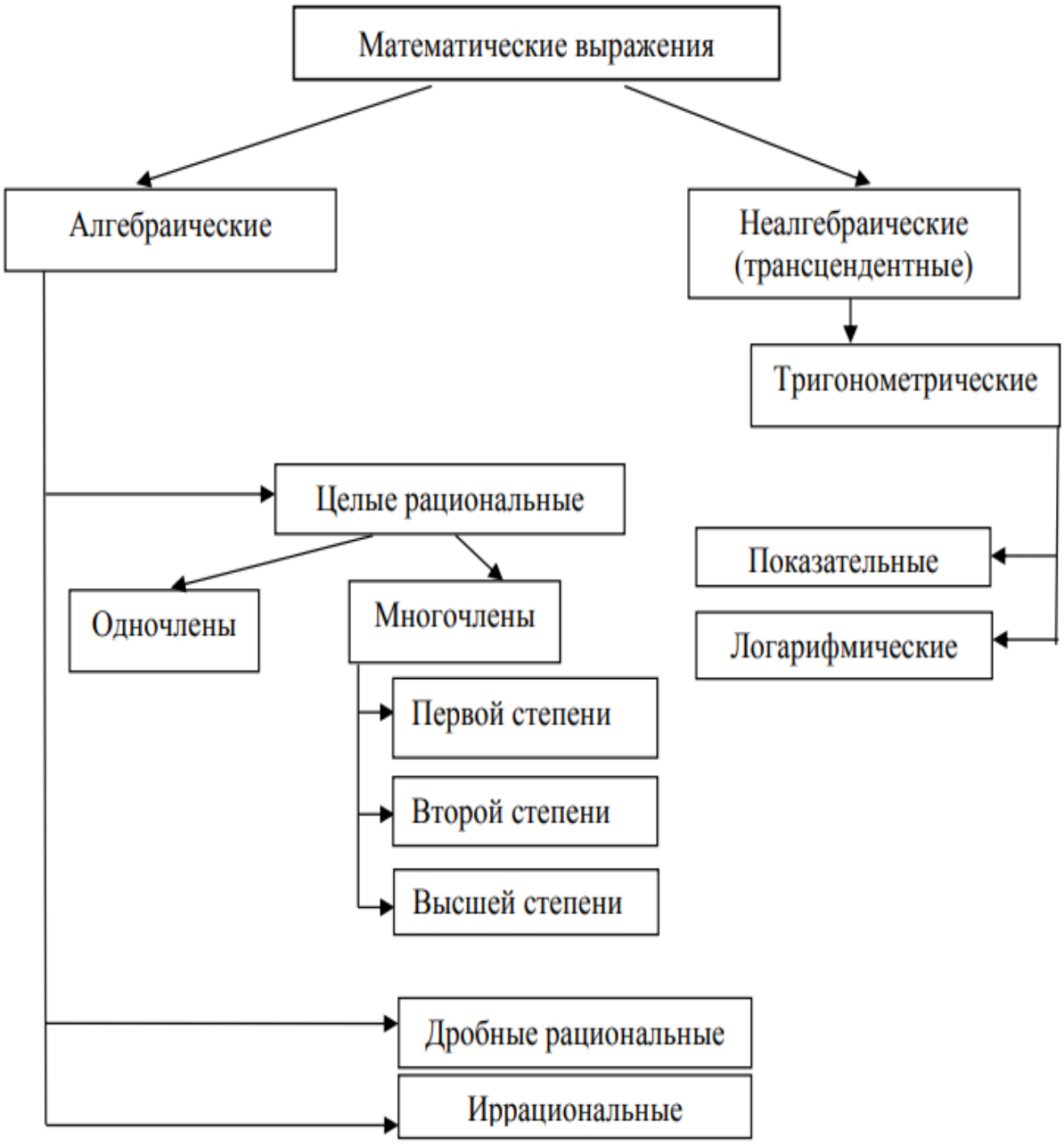

Рисунок 1- Подклассы математических выражений

Основа тождественных преобразований рассматривается еще в начальной школе, когда дети знакомятся с законами и свойствами арифметических действий. В дальнейшем полученные знания углубляются и систематизируются в курсе алгебры, начиная с седьмого класса, где учащиеся изучают более сложные преобразования, алгебраические выражения, уравнения и неравенства. Последовательность изучения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы приведена в Таблице 1.

Таблица 1- Виды выражений

Класс	Виды выражений
7	Целые (одночлены и многочлены)
8	Дробные (дробно – рациональные выражения, арифметические квадратные корни)
9 (10)	Иррациональные (степень с рациональным показателем, корни n – ой степени)
10	Тригонометрические
11	Логарифмические

Впервые с понятием«тождество»обучающиеся встречаются в 7 классе на уроке алгебры. Рассмотрим следующее определение:

Определение. Тождество – это равенство, верное при любых допустимых значениях входящих в его состав переменных.

Например, $a + b = b + a, ab = ba.$

После этого формулируется определение тождественно равных выражений:

Определение. Два выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях переменных, называются тождественно равными.

Далее дается понятие тождественного преобразования выражений:

Определение. Тождественное преобразование выражения – это замена исходного выражения на выражение, тождественно равное ему.

В данном определении слово «тождественное» иногда опускают, и говорят просто «преобразование выражения», при этом следует помнить, что речь идет именно о тождественном преобразовании.

Для пояснение вышесказанного приведем примеры.

Пример 1. Выражение $8y + 12 - 5$ заменим тождественно равным ему выражением $8y + 7$. Такая замена – есть тождественное преобразование выражения исходного выражения. Таким образом, $8y + 12 - 5 = 8y + 7.$

Контрпример: Выражение x не является тождественным преобразовани ем выражения $x-3$, поскольку выражения x и $x-3$ не являются тождественно равными.

Следует отметить, что на практике при выполнении тождественных преобразований используются цепочки равенств для наглядного отображения последовательности шагов преобразований. Например, запись $3x-x+8-3=2x+8-3=2x+5$ означает пошаговое проведение двух тождественных преобразований: первое – первоначальное выражение $3x-x+8-$ 3преобразовали к виду $2x+8-3$, а полученное выражение после первого преобразования, было преобразовано к виду – $2x+5$.

Тождественные преобразования играют важную роль в математике и других областях знаний, где используется математика. Они позволяют упрощать сложные выражения, уравнения и задачи, делая их более доступными для понимания и решения.

Применение тождественных преобразований позволяет переформулировать задачу или выражение таким образом, чтобы она стала более удобной для работы. Это может включать в себя замену сложных выражений на более простые, выделение общих факторов, упрощение уравнений и многое другое.Рассмотрим следующие задания.

1. Упростите выражение: $x^2+a^3-3a^3+1{,}5x^2-2{,}3a^3$.

2. Решите уравнение: $4x+2x+x=14;\ 1+\cos x+\cos 2x=0$.

3. Докажите неравенство: $(c+2)(c+6)<(c+3)(c+5)$.

4.Найдите значение выражения: $3\sqrt{5}a-\sqrt{20}a+4\sqrt{45}a$, при $a=2{,}45$.

5. Докажите, что выражение: $\frac{(2k+1)^4-1}{4k^2+4k+2}$, где $k\subset N$, кратно 8

6. Исследуйте функцию: $f(x)=x^4-\frac{16}{3}x^3+6x^2+9$.

Отметим, что указанные выше упражнение различны по содержанию. Однако, при решении любого из них, необходимым шагом будет являться предварительное выполнение некоторого преобразования.

В пропедевтическом курсе в рамках школьной математики отрабатыва ются следующие навыки тождественных преобразований:

1. Приведение подобных слагаемых;
2. Раскрытие и заключение в скобки;
3. Вынесение за скобки общего множителя.

Все рассмотренные выше простейшие тождественные преобразования находят свое применение и на уроках алгебры основной школы в 7 классе при изучении темы: «Многочлены». Учащиеся, используя законы и свойства арифметических действий, выполняют необходимые преобразования:

1. $a + b = b + a$ – сложение коммутативно;
2. $(a + b) + c = a + (b +$ c) – сложение ассоциативно; -
3. $a \cdot b = b \cdot a$ – умножение коммутативно;
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – умножение ассоциативно;
5. $a + 0 = 0 + a = a$– сложение с нулем;
6. a– $0 = a$; $a - a = 0$ – вычитания с нулем;
7. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ – умножения с нулем;
8. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ – умножения с единицей;
9. $a - (b + c) = a - b - c$ – вычитание суммы из числа;
10. $(a + b) - c = (a - c) + b$ – вычитание числа из суммы;
11. $a \cdot (b + c) = ab + ac$ – умножение дистрибутивно относительно операции сложения;
12. если $a = b$, то $b = a$; если $a = b$ и b = c, то $a = c$ – свойства равенств.

1.2Тождественные преобразования в школьном курсе математики (анализ учебников)

Содержательно – методическая линия тождественных преобразований играет важную роль в курсе алгебры основной школы.

Тождественные преобразования позволяют упрощать выражения и решать математические задачи. В младших классах учат раскрывать скобки,

приводить подобные слагаемые и выносить общий множитель за скобки. Это фундаментальные навыки, которые затем развиваются и применяются в более сложных математических концепциях. В старших классах эти навыки расширяются до применения тождественных преобразований в алгебре, геометрии, тригонометрии и других разделах математики. Такие умения не только помогают в решении конкретных задач, но и способствуют развитию логического мышления и аналитических способностей учащихся.

Продемонстрируем развитие линии тождественных преобразований в курсе математики.

На уроках математики в 5 – 6 классах обучающие начинают осваивать основные навыки математики, такие как приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок, вынесение общего множителя за скобки и другие преобразования без использования терминов "тождество" и "тождественные преобразования". Эти навыки являются важным фундаментом для понимания более сложных математических преобразований в дальнейшем.

Понятия тождественных преобразований вводятся позже, в курсе алгебры 7 класса, когда ученики уже обладают достаточным опытом и знаниями для понимания этих концепций. Это помогает им лучше понять связь между различными математическими преобразованиями и использовать их более осознанно при решении задач.

В учебнике Ю. Н. Макарычева «Алгебра» для 7 класса в самом начале рассматривается понятие тождественно равных выражений: «Два выражения, значения которых равны при любых значениях переменных, называются тождественно равными». Далее вводится определение тождества: «Равенство, верное при любых значениях переменных, называется тождеством».

Приводятся примеры:

1) 6(a+ b) и 6a+ 6b – тождественно равные выражения;

2) 2a+ b и 2ab – не тождественно равные выражения;

3) 6(a+b) = 6a+ 6b – тождество;

4) a + b = b + a; (a + b) + c = a + (b + c); ab = ba; (ab)c = a(bc) – верныебуквенныеравенства;

5) a + 0 = a; a + (–a) = 0; a –b = a + (–b); a ·1 = a; a ·(–b) =–ab; (–a)·(–b) = ab .

В 8 классе происходит изучение рациональных дробей и квадратных корней. В силу этого автор учебника обобщает и дополняет понятие тождества: «Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях, входящих в него переменных».

Рассмотрим учебник А. Г. Мерзляка «Алгебра» для 7 класса.

Автор первоначально рассматривает понятие тождественно равных выражений: «Выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях, входящих в них переменных, называются тождественно равными». Далее вводится определение тождества: «Равенство, верное при любых значениях, входящих в него переменных, называется тождеством».

Приводятся примеры:

1) 2(x – 1) – 1 и 2x – 3 – тождественно равные выражения;

2)$x^5 - x$ и $5x^3 - 5x$– не тождественно равные выражения;

3) a + b = b + a; (a + b) + c = a + (b + c); ab = ba; (ab)c = a(bc); a(b + c) = ab + ac – тождества.

В учебнике А.Г. Мерзляка «Алгебра» для 7 класса дается несколько способов доказательства тождеств:

1. Тождественно преобразуют одну из частей данного равенства, получая другую
2. Тождественно преобразуют каждую из частей данного равенства, получая одно и то же выражение.
3. Доказывают, что разность левой и правой частей данного равенства тождественно равна нулю.

В 8 классе вследствие изучения рациональных дробей и квадратных корней в учебнике этого автора понятие тождества дополняется: «Равенство,

которое выполняется при любых допустимых значениях, входящих в него переменных, называется тождеством».

Рассмотрим учебник С. М. Никольского «Алгебра» для 7 класса. Понятие тождество автор впервые упоминает после изучения одночленов и многочленов. Автор учебника дает следующее определение: «Равенство между буквенными выражениями называют тождеством, если оно превращается в верное числовое равенство при подстановке в него вместо букв любых чисел». Для доказательства тождеств используются ранее изученные свойства одночленов, многочленов и правила действий над ними.

Процесс изучения тождеств в 7 классе по С.М. Никольскому на этом не заканчивается. В рамках изучения алгебраических дробей рассматривается тождественное равенство рациональных выражений. Автор дает следующее определение: «Равенство двух рациональных выражений называют тождеством или тождественным равенством, если оно превращается в верное числовое равенство для всех числовых значение букв, для которых оба эти выражения определены».

В 8 классе С.М. Никольский отдельно эту тему не рассматривает.

Отметим, что понятие тождественного преобразования в школе рассматривается не в полном объеме, а только в применении к кокнретным выражениям.

Изучение тождественных преобразований включает в себя разнообразные операции, начиная от формул сокращенного умножения и заканчивая более сложными функциями, такими как показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Понимание характерных особенностей этих функций играет важную роль в формировании математических навыков учащихся.

В рамках дипломной работы нами был проанализирована программа по ФГОС базового и углубленного уровня.

Содержание обучения по ФГОС в рамках базового уровня представлено в Таблице 2.

Таблица 2-Содержание обучения по ФГОС базовый уровень

Содержание обучения по ФГОС в рамках базового уровня по теме «Тождественные преобразования»	
Класс	Содержание обучения
5	Переместительное и сочетательное свойства (законы) сложения и умножения, распределительное свойство (закон) умножения. Использование при вычислениях переместительного и сочетательного свойств (законов) сложения и умножения, распределительного свойства умножения.
6	Арифметические действия с многозначными натуральными числами. Числовые выражения, порядок действий, использование скобок. Использование при вычислениях переместительного и сочетательного свойств сложения и умножения, распределительного свойства умножения. Использовать буквы для обозначения чисел при записи математических выражений, составлять буквенные выражения и формулы, находить значения буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.
7	Арифметические действия с рациональными числами. Степень с натуральным показателем: определение, преобразование выражений на основе определения. Преобразование буквенных выражений, тождественно равные выражения, правила преобразования сумм и произведений, правила раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых. Свойства степени с натуральным показателем. Сложение, вычитание, умножение многочленов. Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности. Формула разности квадратов. Разложение многочленов на множители.

8	Свойства арифметических квадратных корней и их применение к преобразованию числовых выражений и вычислениям. Степень с целым показателем и её свойства. Квадратный трёхчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители. Основное свойство алгебраической дроби. Рациональные выражения и их преобразование

Содержание обучения по ФГОС в рамках углубленного уровня представлено в Таблице 3.

Таблица 3- Содержание обучения по ФГОС углубленный уровень

Содержание обучения по ФГОС в рамках углубленного уровня по теме «Тождественные преобразования»	
Класс	Содержание обучения
5	Аналогично базовому уровню изучения.
6	Аналогично базовому уровню изучения.
7	Степень с натуральным показателем и её свойства. Тождество. Тождественные преобразования алгебраических выражений. Доказательство тождеств. Сложение, вычитание, умножение и деление многочленов. Формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности двух выражений, куб суммы и куб разности двух выражений, разность квадратов двух выражений, произведение разности и суммы двух выражений, сумма и разность кубов двух выражений. Разложение многочлена на множители. Вынесение общего множителя за скобки. Метод группировки.
8	Арифметический квадратный корень и его свойства. Свойства действий с иррациональными числами. Основное свойство алгебраической дроби. Рациональные выражения. Тождественные преобразования

	рациональных выражений. Тождественные преобразования выражений, содержащих арифметические квадратные корни. Степень с целым показателем и её свойства. Преобразование выражений, содержащих степени

1.3Тождественные преобразования алгебраических выражений

На протяжении изучения всего школьного курса математики применяется система приемов и правил преобразования, которая изучается на первом этапе изучения алгебры. В ходе последовательного изучения линии тождественных преобразований к ранее изученным правилам присоединяются новые свойства операций и функций, а также дополнительные формулы. Для каждого нового материала базов являются знания, полученные из предыдущего этапа изучения.

Постепенное расширение базы знаний и навыков, начиная с формул сокращенного умножения и двигаясь к более сложным функциям, создает основу для более глубокого понимания математик изучаемого материала. Это также помогает учащимся развивать навыки анализа, применения и решения различных задач. Изучение тождественных преобразований и их применение к различным классам элементарных функций играют важную роль в формировании математических навыков учащихся. Понимание характеристик каждой элементарной функции, таких как показательные, логарифмические и тригонометрические функции, позволяет ученикам лучше понять их свойства и использовать для решения разнообразных задач.

В ходе усвоения и накопления знаний становится возможным углублять и совершенствовать понятие «Тождественное преобразование».

Все преобразования можно разделить на две группы: тождественные преобразования (преобразования выражений) и равносильные преобразования (преобразования с помощью формул).

Для того, чтобы сформировать гибкую и мощную систему преобразований следует уделять внимание каждому этапу изучения. Это становится возможным при должной отработке навыков и умений учащихся.

Тождественные преобразования алгебраических выражений, которые изучаются в курсе алгебры основной школы, можно разделить на следующие группы:

1. Рациональные целые выражения;
2. Рациональные дробные выражения;
3. Иррациональные выражения.

Рассмотрим каждую группу более подробно. Методические приемы вычислений тождественных преобразований приведены в Таблице 4.

Таблица 4- Методические приемы вычислений тождественных преобразований

Раздел	Методические приёмы вычислений
Рациональные целые выражения	1. Приведение одночленов и многочленов к стандартному виду, выполнение стандартных действий с целыми рациональными выражениями, а именно: раскрытие скобок, заключение в скобки, выполнение арифметических действий. 2. Различные приёмы разложения многочлена на множители (вынесение общего множителя за скобки, способ группировки). 3. Способы доказательства тождества (ФСУ). 4. Выделение полного квадрата в трехчлене. 5. Приведение подобных слагаемых. 6. Разложение на множители двучлена вида

	$x^n - a^n$. 7. Возведение двучлена в натуральную степень (бином Ньютона).
Дробные рациональные выражения	1. Приёмы записи преобразований дробных рациональных выражений. 2. Сокращение рациональных дробей. 3. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю. 4. Сложение, вычитание, умножение и деление рациональных дробей. 5. Возведение рациональных дробей в целую степень. 6. Способы доказательства тождества (ФСУ). 7. Приведение подобных слагаемых. 8. Прибавление и вычитание одного и того же числа.
Иррациональные выражения	1. Специальные приемы преобразований арифметических корней (свойства корня). 2. Применение свойств степени с рациональным показателем. 3. Прием доказательства неравенств. 4. Приведение подобных слагаемых. 5. Домножение на сопряженное выражение. 6. вынесение общего множителя за скобки. 7. Приемы доказательства тождества.

В данном пункте хотелось бы выделить иррациональные выражения. Такие выражения в рамках школьного курса алгебры изучаются в 8-9 классах. Приведем основные определения и свойства.

Определение. Квадратным корней из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число

обозначают $\sqrt{a}$, число a при этом называют подкоренным числом (выражением).

Исходя из указанного выше определения:

1. $\sqrt{a} \geq 0$
2. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
3. Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только при a≥0.

Операцию нахождения квадратного корня из неотрицательного числа называют извлечением квадратного корня. Такая операция является обратной для возведения выражения в квадрат.

Следует отметить, что при рассмотрении корня нечетной степени всегда существуют решения.

Рассмотрим основные свойства действий с арифметическим корнем:

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
3. Для любого числа a справедливо равенство $\sqrt{a^2} = |a|$

Определение. Арифметическим корней n-ой степени из числа a называют число,n-ая степень которого равна a.

Если n – четно, a < 0, то корень n-ой степени нельзя определить.

Если n – четно, a ≥ 0, то неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называется арифметическим корнем n – ой степени из a и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Если n – нечетно, то уравнение $x^n = a$ имеет единственное решение при любом a.

Свойства арифметического корня n – ой степени.

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, при a ≥ 0, b ≥ 0.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, при a ≥ 0, b > 0.
3. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, при a ≥ 0
4. $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$

Часто в вычислениях используется переход от арифметического корня n – ой степени к степени с рациональным показателем и наоборот.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

В курсе математики старшей школы целостная система знаний о тождественных преобразованиях, по большей части уже сформировавшаяся, продолжает совершенствоваться. Продолжение изучения тождественных преобразований помогает учащимся лучше понять их прикладные аспекты, а также развивает способность применять и комбинировать различные методы для решения сложных математических задач. Систематическое отработка навыков и формирование умений на каждом этапе изучения тождественных преобразований играет важную роль в формировании математической грамотности и подготовке к более сложным математическим задачам, которые будут изучаться в дальнейшем образовании

1.4Тождественные преобразования тригонометрических выражений

Тригонометрический материал школьного курса математики можно разделить на три этапа. Поэтапный подход позволяет учащимся постепенно углублять свои знания и навыки в области тригонометрии, начиная с основных тригонометрических зависимостей в прямоугольных треугольниках и заканчивая изучением тригонометрических функций и их свойств. Впервые тригонометрия встречается в курсе планиметрии 8 класса.Здесь тригонометрические зависимости рассматриваются в прямоугольном треугольнике, доказывается основное тригонометрическое тождество, а также выводятся значения основных тригонометрических углов 30°, 45°, 60°, рассматриваются задачи на построение угла по значению тригонометрической функции.

В 9 классе происходит обобщение и углубление тригонометрического материала. Впервые ученики доказывают и применяют теоремы синусов и

косинусов, вводятся формулы для поиска координат точки через длину радиус – вектора точки и угол между лучом и положительной полуосью Ох. Тригонометрические отношения в 9 классе определяются уже с помощью единичной окружности; происходит изучение формул приведения.

В 10 – 11 классах тригонометрия рассматривается в новом смысле. Обучающиеся знакомятся с тригонометрическими преобразованиями на уроках алгебры и начал анализа. В старшей школе под тригонометрическими отношениями уже понимаются функции углов, при этом углы являются произвольными, а их измерение производится в радианах. На этом этапе смысл задач изменяется, что ведет за собой формулирование новых способов их решения и, как следствие, появляются новые формулы. В старшей школе рассматриваются уже тригонометрические функции и их свойствах, применяемые при упрощении выражений, а, в дальнейшем, при решении уравнений и неравенств.

При выполнении тождественных преобразованиях тригонометрических выражений важно помнитьизученные ранее алгебраические приемы. Они играют важную роль при выполнении тождественных преобразований тригонометрических выражений. Эти приемы помогают упростить выражения, выделить общие факторы и привести выражения к более удобному виду для дальнейших вычислений.

Добавление и вычитание одинаковых слагаемых, вынесение общего множителя за скобки, умножение и деление структурных элементов на одну и ту же величину, использование изученных формул на сокращенное умножение, выделение полного квадрата и разложение квадратного трехчлена на множители — все эти методы позволяют упростить тригонометрические выражения и упростить дальнейшие вычисления. Добавление новых переменных также может быть полезным при упрощении выражений, особенно при использовании тригонометрических подстановок или замене сложных выражений более простыми.

Мы выделили основные типы заданий, в ходе решения которых используются преобразования тригонометрических выражений.

1. При упрощении выражений, содержащих много разнообразных тригонометрических функций, основные тригонометрические формулы часто используются для приведения выражений к более простому виду, содержащему минимальное количество различных функций

Основные тригонометрические формулы:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$

$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x};$

$\mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x};$

$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$

$1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$

2. При упрощении выражений с функциями разных аргументов, можно воспользоваться формулами для суммы углов, разности углов или удвоения углов, чтобы привести функции к общему аргументу.

3. Формулы приведения могут быть полезны при преобразовании выражений, если необходимо получить кофункции.

4. Для выражений, содержащих функции высоких степеней, можно использовать тригонометрические формулы понижения степеней, такие как формулы двойного угла или половинного угла.

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$

5. В процессе преобразования некоторых выражений встречаются случаи, когда основных формул недостаточно. В этом случае можно применить дополнительные формулы:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$

6. В ходе упрощения тригонометрических выражения, содержащих произведение двух функций, нередко используются формулы перехода к сумме или разности:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y));$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y));$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)).$$

7. Переход к половинным углам производится следующим образом:

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что тождественные преобразования – это такие преобразования, которые выполняются путем упрощения исходного выражения с применением основных тригонометрических формул, дополнительных тригонометрических формул, формул приведения и т.д. Также следует отметить, что при выполнении тригонометрических преобразований можно, и даже нужно, использоваться ранее изученные алгебраические преобразования, поскольку они значительно упрощают процесс решения задачи.

1.5 Тождественные преобразования показательных и логарифмических выражений

В рамках школьного курса математика учащиеся встречаются с показательными числовыми выражения еще в 5 классе, однако более углубленное изучение таких выражений начинается в 7 классе на уроках алгебры. На этом этапе происходит формулирование понятия степени, а также изучения основных свойств степеней с натуральным показателем. Далее в 8 классе учащиеся обобщают ранее изученный материал в рамках

этой темы, а также формулируют определения и свойства для степени с отрицательным показателем. В 9 классе понятие степени расширяется, учащиеся на данном этапе знакомятся со степенью с рациональным показателем. Следует отметить, что при изучении алгебры в старших классах происходит углубление и систематизация знаний по тождественным преобразованиям, что позволяет более эффективно работать с показательным и выражениями. Эти навыки не только полезны сами по себе, но и могут быть применены при решении уравнений и неравенств, что делает изучение тождественных преобразований важным этапом в освоении математики.

Рассмотрим определение понятия степени.

Определение. Степенью называется выражение вида a^n. Число a – основание степени, число n – показатель степени.

Степенью числа a с натуральным показателем n (n>1) называется произведение n множителем, каждый из которых равен a.

Рассмотрим основные свойства действий со степенями:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Знакомство с логарифмическими выражениями происходит в старшей школе в рамках изучения алгебры и начал анализа. Ранее в курсе школьной математики такие выражения не встречались. Поэтому именно в старшей школе происходит постановка задачи и формулировка новых определений и способов решения, что приводит к появлению новых формул. Успешное освоение свойств логарифмических выражений, которые используются при упрощении выражений, в дальнейшем применяются при решении соответствующий уравнений и неравенств.

Определение. Логарифмом числа $b > 0$ по основанию a ($a > 0, a \neq 1$) называются показатель степени c, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b. Записывают в следующем виде:
$\log_a b = c$, что равносильно $b = a^c$.

Формулу $a^{\log_a b} = b$ называют основным логарифмическим тождеством.

Под преобразованием логарифмических выражений понимают упрощение, выполняемое с помощью свойств логарифмов.

Основные свойства, которые применяются в ходе упрощения логарифмических выражений представлены ниже (при любом $a > 0, a \neq 1$ и любых положительных x и y):

1. $\log_a 1 = 0$;
2. $\log_a a = 1$;
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
5. $\log_a x^p = p\log_a x$, p – действительное число.
6. $\log_{a^r} b = \frac{1}{r}\log_a b$;
7. $\log_a b = \log_{a^r} b^r$;
8. $\log_{a^r} x^p = \frac{p}{r}\log_a b$;
9. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;
10. $\log_{ab} c = \frac{\log_{|a|} c}{1+\log_{|a|}|b|}, (ab > 0)$;
11. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}, (a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1)$;
12. $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$.

Следует отметить, что указанные выше формулы могут применяться как слева направо, так и справа налево.

Таким образом, под тождественным преобразованием логарифмических выражений понимают упрощение выражение, выполненное с помощью основных логарифмических свойств.

Глава 2. Методические особенности изучения тождественных преобразований

2.1 Методические особенности изучения тождественных преобразований алгебраических выражений

С понятием тождественных преобразований без употребления термина «тождественные преобразования» обучающиеся знакомятся, как указывалось ранее, еще в 5 классе. Выполняется ряд заданий, где присутствуют простейшие преобразования числовых выражений и тех выражений, которые содержат переменные; арифметические действия, которые выполняются с использованием свойств. На данном этапе обучающиеся знакомятся с первыми основными тождествами $(a + b) + c = a + (b +$ с$)$, $a \cdot (b + c) = ab + ac$ и др., чтобы в последующем использовать их в ходе решения различных упражнений.

Пример 1. Виленкин Н.Я. Упражнение 2.10. Найдите сумму наиболее удобным способом: (397 + 614) + 486

Пример 2. Виленкин Н.Я. Упражнение 2.11. Найдите сумму:
437 + 333 + 63 + 67.

Пример 3. Виленкин Н.Я. Упражнение 2.81. Вычислите наиболее удобным способом:

1) 4279 – (1279 + 1360);
2) 2125 + (2775 – 3970).

Пример 4. Виленкин Н.Я. Упражнение 3.18. Применив сочетательное свойство умножения, найдите произведение: $50 \cdot (2 \cdot 898)$.

Пример 5. Виленкин Н.Я. Упражнение 5.334. Сократите дробь: $\frac{33}{99}$.

Выполняя подобного рода задания учащиеся подготавливаются к введению понятия «тождественное преобразование», а также к пониманию зачем и для чего такие преобразования нужны.

Введение понятия коэффициента и работа с одночленами в 6 классе является важным шагом в изучении алгебры. Разбиение выражений на слагаемые с одинаковыми буквенными множителями помогает ученикам понять, как можно работать с подобными частями выражения. Это также подготавливает основу для дальнейшего изучения многочленов и алгебраических выражений. Распределительное свойство применяется к сумме произведений с одинаковыми буквенными множители. Это свойство позволяет ученикам лучше понять структуру алгебраических выражений и упрощать их. Такой навык будет полезен при решении уравнений.

Пример 6. Виленкин Н.Я. Упражнение 5.60. Найдите сумму подобных слагаемых:

1) $-8x + 6x – 4x + 3x = (-8 + 6 – 4 + 3)x = -3x$

Пример 7. Виленкин Н.Я. Упражнение 5.61. Приведите подобные слагаемые:

1) $20x + y – 20y – x = (20 – 1)x + (1 – 20)y = 19x -19y.$

Рассмотрим последовательность обучения тождественным преобразованиям алгебраических выражений, с помощью которой можно выявить методические рекомендации для усвоения тождественных преобразований в курсе алгебры основной школы (Таблица 5)

Таблица 5- Методические рекомендации

Изучаемый раздел		Основные действия	Замечания	Виды преобразований
Целые рациональные выражения	Одночлен: Необходимо усвоить определение одночлена; понятие степени и его	Сложение, вычитание, умножение, деление одночленов, возведение в степень	В ходе деления одночленов должны выполняться следующие условия:	

	свойства; стандартный вид одночлена.	одночленов.	показатель степени переменной делимого должен быть больше, чем у делителя; делитель не должен содержать переменных, которых нет в делимом.	
	Многочлен: Необходимо усвоить определение многочлена; стандартный вид многочлена; понятие степени и свойства степени.	Сложение, вычитание, умножение, деление многочленов, возведение в степень многочленов, разложение на множители многочленов.	В ходе деления многочленов должны выполняться следующие условия: показатель степени переменной делимого должен быть больше, чем у делителя; деление может быть с остатком или	Деление выполняется с помощью разложения многочлена на множители; необходимо приводить подобные слагаемые, если они есть; выполнять раскрытие скобок, а также вынесение общего множителя за

			без остатка.	скобки; применять ФСУ; приводить многочлен к стандартному виду.
Дробно – рациональные выражения	Необходимо знать определение дробно – рационального выражения; основное свойство дробно – рационального выражения и следствия из него; правила действий с дробями.	Сложение, вычитание, умножение, деление дробно – рациональных выражений, возведение в степень дробно – рациональных выражений.	Выявление области определения заданного дробно – рационального выражения.	Сокращение дробей, приведение дробей к общему знаменателю.

В учебнике Макарычева Ю.Н. рассмотрено следующее определение целых рациональных выражений:

Определение. Целыми рациональными выражениями называются алгебраические выражения, которые не содержат деление на переменные.

Примеры: $\frac{4}{9}$; $75x$; $5a^2$; $\frac{y-7x}{15}$.

В параграфе 1.2 было рассмотрено определение тождества, поэтому необходимо рассмотреть такие понятия, как область определение алгебраического выражения и допустимые значения переменных.

Определение. Допустимым значением переменных называют такие значения переменных, при которых алгебраического выражение имеет смысл.

Определение. Областью определения алгебраического выражения называют множество всех допустимых значений переменных.

Целое рациональное выражением имеет смысл при любых значениях переменных.

Говоря о целых рациональных выражениях, рассматриваются понятие одночленов и многочленов, а также действий над ними. В учебнике Ю.Н. Макарычева для 7 класса приводятся следующие определения:

Определение. Одночленов называют такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения и не содержит никаких других действий над числами и переменными.

Примеры: $3a^2b \cdot (3{,}5a^3)$, $(-21x^3y^2) \cdot (3x^2y) \cdot 25xy^4 \cdot (-2{,}5z^2)$.

Определение. Многочленом называют сумму одночленов.

Примеры: $\frac{1}{2}a^2bb^3 + 4ab^2$, $3{,}6t^2 \cdot 2x^4t^3 - 2x^2t$.

Рассмотрим методические приемы вычислений целых рациональных выражений.

1. Привести одночлен $2b^3(-3)bc^2$ к стандартному виду.

При выполнении такого рода заданий можно использовать переместительное и сочетательное свойство умножения.

$2b^3(-3)bc^2 = 2(-3)b^3bc^2 = -6b^4c^2$.

2. Привести многочлен $5a^2b + 2 + 4ab^2 - 3a^2b - 7к$ стандартному виду.

При приведении многочлена к стандартному виду нужно вспомнить понятие подобных слагаемых и приведение подобных слагаемых.

$5a^2b + 2 + 4ab^2 - 3a^2b - 7 = (5a^2b - 3a^2b) + 4ab^2 + (2 - 7) = 2a^2b + 4ab^2 - 5.$

3. Найти произведение одночленов $-5a^2bc$ и $4a^2b^4$.

Составим произведение этих одночленов. Перемножим их числовые множители и степени с одинаковыми основаниями.

$-5a^2bc \cdot 4a^2b^4 = (-5 \cdot 4)(a^2a^2)(bb^4)c = -20a^4b^5c.$

4. Возвести одночлен в третью степень $-2a^2b$.

Воспользуемся правилами возведения в степень произведения и степени

$(-2a^2b)^3 = (-2)^3(a^2)^3b^3 = -8a^6b^3.$

5. Выполнить сложение многочленов $5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6$ и $-3x^2 - 6xy + 8$.

Составим сумму многочленов, затем раскроем скобки и приведем в полученном многочлене подобные слагаемые.

$(5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6) + (-3x^2 - 6xy + 8) = 5x^2 + 7xy - 9y^2 - 6 - 3x^2 - 6xy + 8 = 2x^2 + xy - 9y^2 + 2.$

6. Умножить одночлен $9n^3$ на многочлен $7n^2 - 3n + 4$.

Составим произведение и преобразуем его, используя распределительное свойство умножения. Умножая одночлен на каждый член многочлена и складывая результаты, получим

$9n^3(7n^2 - 3n + 4) = 9n^3 \cdot 7n^2 - 9n^3 \cdot 3n + 9n^3 \cdot 4 = 63n^5 - 27n^4 + 36n^3.$

7. Умножить многочлен $4x^2 + 2xy - y^2$ на многочлен $2x - y$.

Составим произведение многочленов. Для того, чтобы выполнить умножение многочлена на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

$(4x^2 + 2xy - y^2)(2x - y) = 8x^3 + 4x^2y - 2xy^2 - 4x^2y - 2xy^2 + y^3 = 8x^3 - 4xy^2 + y^3.$

8. Разложить многочлен на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки $6a^2b + 15b^2$.

Можно заметить, что каждый член представленного выше многочлена можно представить в виде произведения двух множителей, один из которых равен 3b.

$6a^2b + 15b^2 = 3b \cdot 2a^2 + 3b \cdot 5b.$

Полученное выражение на основе распределительного свойства умножения можно представить в виде произведения двух множителей: один из них – общий множитель 3b, а другой сумма $2a^2$ и 5b.

Таким образом, $6a^2b + 15b^2 = 3b \cdot 2a^2 + 3b \cdot 5b = 3b(2a^2 + 5b)$.

9. Разложить многочлен на множители с помощью способа группировки $ab - 2b + 3a - 6$.

Сгруппируем члены многочлена так, чтобы слагаемые в каждой группе имели общий множитель.

$ab - 2b + 3a - 6 = (ab - 2b) + (3a - 6)$.

Далее в первой группе вынесем за скобки общий множитель b, а во второй – множитель 3. Получим:

$(ab - 2b) + (3a - 6) = b(a - 2) + 3(a - 2)$.

Каждое слагаемое полученного выражения имеет общий множитель (a – 2). Вынесем этот общий множитель за скобки:

$b(a - 2) + 3(a - 2) = (a - 2)(b + 3)$.

Таким образом, $ab - 2b + 3a - 6 = (a - 2)(b + 3)$.

10. Разложение на множители с помощью ФСУ.

10.1 Разложение на множители с помощью формулы квадрата суммы

Представим трехчлен $9x^2 + 30x + 25$ в виде квадрата двучлена.

Первое слагаемое представляет собой квадрат выражения 3x, третье – квадрат числа 5, а второе слагаемое равное удвоенному произведению 3x и 5, поэтому этот трехчлен можно представить в виде квадрата суммы 3x и 5:

$9x^2 + 30x + 25 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = (3x + 5)^2$.

10.2Разложение на множители с помощью формулы квадрата разности

Разложить на множители трехчлен $a^2 - 20ab^2 + 100b^4$.

Рассуждения проводят аналогично 10.1. Получим:

$a^2 - 20ab^2 + 100b^4 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 10b^2 + (10b^2)^2 = (a - 10b^2)(a - 10b^2)$.

10.3 Разложение разности квадратов на множители

Разложить на множители выражение $36 - a^2$.

$36 - a^2 = 6^2 - a^2 = (6 - a)(6 + a)$.

Когда необходимо описать некоторую систему упражнений и заданий в методике математики используется термин «цикл упражнений». Под понятие «цикл упражнений» следует понимать логично выстроенную последовательность упражнений, которые должны быть связаны между собой некоторыми аспектами и расположением материала.

Рассмотрим применение указанного выше понятия к линии тождественных преобразований. Цикл упражнений необходимо связать с конкретным тождеством, на базе которого формулируются последующие. В цикл можно включить задания, направление на распознавание применимости конкретного тождества.

В каждом цикле упражнения можно разбить на две группы.

1) Первая группа. Эта группа состоит из заданий, которые можно применить на первых урока при знакомстве с каким – либо тождеством. Такие задания используются на протяжении нескольких занятий подряд, которые объединены общей темой.

2) Вторая группа. Данная группа состоит из упражнений, которые должны показать связь нового материала с ранее изученным. Такие задания в учебниках и дидактических материала разбиты по различным темам.

На основе описанных выше групп, мы разработали методическую систему упражнений для усвоения тождества – разность квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, с опорой на учебник Макарычева Ю.Н (Таблица 5 и 6).

Таблица 5- Методическая система упражнений

Задание	Методические указания
1 группа	
1. Разложите на множители многочлен (7 класс, упражнение 899) 1) $x^2 - y^2$; 2) $m^2 - 1$; 3) $100 - x^2$	Такие задания направлены на понимание учащимися словесной формулировке свойства (тождества).
2. Представьте виде многочлена (7 класс, упражнение 875) $(2ab + 6a^2)(2ab - 6a^2)$	Задание направлено на отработку умения раскрытия скобок и применение тождества.
3. Найдите значение выражения (7 класс, упражнение 904) 1) $26^2 - 23^2$ 2) $25 \cdot 121$	Упражнения развивают навыки применения тождества, углубляют представления об операции подстановки.
4. Разложите на множители (7 класс упражнение 905) 1) $x^4 - 9$ Разложите на множители (7 класс упражнение 911) 2) $9y^2 - (1 + 2y)^2$	Применение изучаемого тождества.
5. Упростить выражение (7 класс, упражнение 886) $(0,8x + 15)(0,8x - 15) + 0,36x^2$	Переосмысление изучаемого тождества в терминах отношений компонентов арифметических действий.

Таблица 6-Методическая система упражнений

Задание	Методические указания
2 группа	
1. Преобразуйте выражение (8 класс, упражнение 419) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$	В таких упражнениях идет привлечение новой операции – извлечение корня. Данные задания предполагают, что навыки применения тождества разности квадратов изучено в полном объеме. Целью такие задания является углубление понимания тождества, рассмотрение его применения в различных ситуациях, сочетание ранее изученного материала с новым.
2. Разложите на множители (8 класс, упражнение 420) x^2-7	
3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе (8 класс, упражнение 424) $\frac{x}{\sqrt{5}}$	

Большая часть тождеств, изучаемых в курсе школьной математики, доказываются. В ходе доказательства необходимо опираться на определения изучаемых понятий, а также на свойства арифметических операций.

Можно выделить следующие виды доказательств:

1) Доказательства, основанные на неполной индукции;
2) Доказательства с опорой на свойства арифметических действий;
3) Доказательства с использованием условия разрешимости уравнения f(x)=a, где f(x) – элементарная функция.

К первому виду доказательств можно отнести вывод свойств степени с натуральным показателем.

Например,

$a^2a^3 = (aa)(aaa) = a^5$;

$a^9a^5 = (aaaaaaaaa)(aaaaa) = a^{14}$;

$a^{232}a^{250} = (aaaa \dots a)(aaa \dots a) = a^{482}$.

В указанных рассуждения роль переменных играют показатели степени. Используя образец, можно подставлять любые значения показателей и повторять рассуждения.

Ко второму виду можно отнести вывод формул сокращенного умножения

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^2$.

Третий тип доказательств является наиболее сложным для понимания в силу того, что применяются достаточно сложные логические приемы. Такой тип доказательств применяются при выводе свойств степени с рациональным показателем и логарифмической функции.

Основная мысль третьего типа доказательств состоит в сопоставлении двух взаимно – обратных функций. Поэтому, идея доказательства может быть в полной мере усвоена лишь в том случае, когда учащиеся уже знакомы с понятиями «обратная функция», «функция, обратная данной», «взаимно – обратные функции». В общеобразовательных классах применение такого типа доказательств не предусматривается.

2.1.1 Обучающие самостоятельные работы по теме «Тождественные преобразования» для 7 – 9 классов

Включение самостоятельных работ в ход урока способствует гармоничному развитию каждого ученика в классе. Задания, которые даются на самостоятельное выполнения могут быть различны. На первых уроках обучающимся можно предложить карточки на воспроизведение действий по образцу, а также работы на распознание изучаемых объектов путем сравнения с исходным образцом.

В рамках работы нами были разработаны различные самостоятельные работы по теме «Тождественные преобразования алгебраических

выражений» для 7 – 9 классов. При составлении заданий мы подбирали задания таким образом, чтобы с ними мог справиться любой ученик.

Самостоятельная работа по теме «Тождества» для 7 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Выберите тождественно равные выражение для выражения $-4x + 6y - 3x - 7y$: 1) -7x + y 2) 7x – y 3) -7x – y 4) 7x + y	1.Выберите тождественно равные выражение для выражения $-4y - 5x - 2y + 6x$: 1) -9y + 4x 2) 6y – x 3) -6y + x 4) -6y – x
2.Докажите тождество: $x - (4x - 11) + (9 - 2x) = 20 - 5x$	2. Докажите тождество: $2x - (8 - x) + (3x - 2) = 6x - 10$
3.Докажите, что выражение не является тождеством: $(x - 1)^2 = x^2 - 1$	3.Докажите, что выражения не является тождеством: $(y + 2)^2 = a^3 + 8$

Самостоятельная работа по теме «Степень с натуральным показателем. Свойства степени с натуральным показателем» для 7 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Найдите значение выражения: 1) 2^6 2)$(-3)^3$ 3) $(0{,}6)^2$ 4) $(-\frac{1}{5})^2$	1.Найдите значение выражения: 1) 6^2 2)$(-4)^4$ 3) $(0{,}3)^2$ 4) $(-\frac{1}{2})^5$
2. Вычислите: 1) $4^3 + 3^5$ 2) $(-8)^2 - (-1)^{10}$	2. Вычислите: 1) $(-2)^4 + 3^3$ 2) $(-9)^2 - (-1)^7$

3) $7(-\frac{3}{7})^2$ 4) $(-0,6)^3-(-0,5)^3$	3) $5(-\frac{2}{5})^3$ 4) $(-0,4)^3+(-0,2)^3$
3.Представьте выражение в виде степени и найдите его значение: 1) $5^9\cdot 5^3:5^{10}$ 2) $\frac{7^{15}:7^{12}}{7^2}$ 3) $3^2\cdot 81$ 4)$256:2^5\cdot 2^2$ 5) $2^{18}:(2^7)^2$ 6) $(7^8)^2:(7^3)^5$ 7) $\frac{6^{12}(6^3)^5}{(6^5)^4 6^4}$	3.Представьте выражение в виде степени и найдите его значение: 1) $7^5\cdot 7^{12}:7^{14}$ 2) $\frac{5^{12}\cdot 5^4}{5^{13}}$ 3) $2^3\cdot 128$ 4)$81:3^3\cdot 3^4$ 5) $2^{20}:(2^8)^2$ 6) $(11^3)^4:(11^5)^2$ 7) $\frac{10^7(10^2)^3}{(10^3)^4 10^9}$
4.Найдите значение выражения: 1) $\frac{2^9\cdot 3^9}{6^7}$ 2) $\frac{18^7}{2^6\cdot 9^6}$ 3) $\frac{45^4}{75^3}$	4.Найдите значение выражения: 1) $\frac{3^7\cdot 11^7}{33^6}$ 2) $\frac{28^6}{7^5\cdot 4^5}$ 3) $\frac{18^4}{12^5}$

Самостоятельная работа по теме «Одночлены» для 7 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Привести одночлен к стандартному виду: 1) $(5a)(-3b)$ 2)$8c\cdot c^3\cdot c$ 3)$3x(-2xy)$	1.Привести одночлен к стандартному виду: 1) $(3y)(-5x)$ 2)$3a\cdot a^6\cdot a$ 3)$b(-6bc)$
2. Найдите значение одночлена 1) $-3a^2$, если $a=-4$ 2) $0,3x^3y^0$, если $x=-2, y=2$.	2. Найдите значение одночлена 1) $-5y^2$, если $y=-3$ 2)$-0,2xy^3z^0$, если $x=-1, y=2, z=-5$

3.Возведите одночлен в степень: 1) $(6b^2)^2$ 2) $(-2a^3b)^3$	3.Возведите одночлен в степень: 1) $(7x^3)^2$ 2) $(-3x^3y)^3$
4.Представьте одночлен в виде квадрата одночлена: 1) $49x^2y^6$ 2)$0{,}09a^4$ 3) $25z^4$	4.Представьте одночлен в виде квадрата одночлена: 1) $81a^2c^8$ 2)$0{,}25a^8$ 3) $64z^2$
5.Выполните умножение одночленов: 1) $4c^4(-5c^2b)$ 2)$3ab(-a^3b^6)^2$ 3)$3\frac{1}{4}x^5y(\frac{2}{13}xy^4)^3$	5.Выполните умножение одночленов: 1) $8x^7(-5x^5y)$ 2)$5bc(-b^4c^6)^4$ 3)$2\frac{1}{4}z^8y(\frac{2}{3}zy^8)^3$

Самостоятельная работа по теме «Многочлены» для 7 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Приведите многочлен к стандартно му виду и укажите его степень: 1) $2x^3y-5xy^3-7x^3y+xy^3$ 2) $2a^2-a-7+a^2+3a+12$ 3)$7b^4+12b^3c+3b^2c^2-7bc^3+$ $5a^4-9b^3c-3b^2c^2-ab^3$	1.Приведите многочлен к стандартно му виду и укажите его степень: 1) $4x^2y-3xy^2-x^2y+2xy^2$ 2) $a^2+4a-5+a^2-3a+2$ 3)$2b^4-8b^3c-2b^2c^2-4bc^3-3a^4+$ $9b^3c-6b^2c^2+ab^3$
2.Упростите выражение: 1)$(6y^2-7y+4)-(4y^2-4y+18)$ 2)$(2a+9)-(-a^2-15a-40)$ 3)$(14ac^2-18ac+6a^2c)+(12ac-$ $14a^2c)$	2.Упростите выражение: 1)$(5x^2+8x+14)-(9x^2+41x+8)$ 2)$(2+17a)-(-7a^2-19a-13)$ 3)$(18xy^2-19xy+9x^2y)+(13xy-$ $4x^2y)$
3.Выполните умножение многочлена на одночлен:	3.Выполните умножение многочлена на одночлен:

1) $3y(y^2-3y+5)$ 2) $(3a^3-8a^2+5)(-2{,}5a^3)$ 3)$1\frac{1}{3}xy(\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{4}xy^2-\frac{4}{9}y^3)$	1) $(8x^2-x+3)(5x)$ 2) $(-1{,}5c^3)(8c^3-9c^2+15)$ 3)$2\frac{1}{4}xy(\frac{2}{3}y^4-\frac{5}{6}xy^3-\frac{4}{9}y^2)$
4.Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида: 1)$(x-5)(y+8)$ 2)$(2a+3)(3a-2)$ 3) $(4n^3+6)(4n+6)$	4.Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида: 1)$(5-x)(z+7)$ 2)$(4x+13)(2x-1)$ 3) $(8c^3+7)(8c+3)$
5.Упростите выражение: 1) $(x-5)(x-11)-3x(4+2x)$ 2) $(c+7)(c-4)+(c-3)(c+5)$ 3) $(a^2+3b)(a^3-7b)-5a^3(a^2-2a)$	5.Упростите выражение: 1) $(y-6)(y-10)-2y(5+y)$ 2) $(a+8)(a-3)+(a-1)(2a+5)$ 3) $(x^2+y)(x^3-2y)-4x^3(x^2-x)$

Самостоятельная работа по теме «Разложение многочлена на множители» для 7 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Разложите многочлен на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки: 1) $7x-14x$ 2)$4xy+6xz$ 3) x^5+x^3 4)$12a^2b-3ab$ 5)$24x^2y-35xy^2$	1.Разложите многочлен на множители с помощью вынесения общего множителя за скобки: 1) $15y-20y$ 2)$7ab+14bc$ 3) a^7-a^4 4)$15x^2y-5xy$ 5)$28a^2b-42ab^2$
2.Разложите многочлен на множители, используя способ группировки: 1) $xy+xz+wz+wy$	2.Разложите многочлен на множители, используя способ группировки:

2) $5x + 5y - zx - zy$ 3) $x^6 + x^4 - 3x^3 - 3$ 4) $10bc - 2b + 5c^2 - c$ 5)$4y^3 - 6y^2z - 8y - 12z$	1) $ab + bc + db + dc$ 2) $7a - ac + 7b - bc$ 3) $y^8 + y^6 - 4y^5 - 4$ 4) $-5bc + b - 2{,}5c^2 + c$ 5)$3x^3 - 6x - 6y^2z - 18z$
3.Решите уравнения: 1) $x^2 - 5x = 0$ 2) $8x^2 + 6x = 0$	3.Решите уравнения: 1) $x^2 + 7x = 0$ 2) $9x^2 - 15x = 0$
4.Докажите тождество: $(3x - 5y)(x^2 + 2xy - 4y^2) - (3x - 5y)(x^2 +$ $2xy - 7y^2) = 3y^2(3x - 5y).$	4.Докажите тождество: $(2c - 1)(6d^2 + 3d - 8) +$ $(1 - 2c)(6d^2 + 3d -$ $10) = 4c - 2.$

Самостоятельная работа по теме «ФСУ» для 7 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Разложите на множители: 1) $a^2 - 9$ 2) $36x^2 - y^2$ 3)$9x^4 - 25x^6$ 4)$1 - 9x^2$ 5)$(3a - 5)^2 - 36$	1.Разложите на множители: 1) $x^2 - 25$ 2) $x^2 - 49y^2$ 3)$16x^6 - 4x^8$ 4)$64x^2 - 1$ 5)$(6 - 3y)^2 - 9$
2.Решите уравнение: 1) $x^2 - 36 = 0$ 2)$9x^2 - 45 = 0$	2.Решите уравнение: 1) $x^2 - 16 = 0$ 2)$16x^2 - 64 = 0$
3.Представьте выражение в виде многочлена: 1) $(a + 3)^2$ 2) $(7a + 6b)^2$	3.Представьте выражение в виде многочлена: 1) $(8 + x)^2$ 2) $(8c - 7d)^2$ 3) $(a^3 - 5)^2$

3) $(x^2-3)^2$ 4) $(0{,}5-3x)^2$ 5) $(10ab^2-a^2b)^2$	4) $(0{,}4a-6)^2$ 5) $(12x^2z-5x^2z)^2$
4.Упростите выражение: 1) $(x-5)^2+7$ 2)$(3a-7b)^2-3a(b-5a)^2$ 3) $(x+3)^2-(x+2)(x-2)$	4.Упростите выражение: 1)18+ $(y-6)^2$ 2)$(2x+7y)^2-14x(y+8x)^2$ 3) $(a-5)^2-(a+6)(a-3)$
5.Решите уравнение: 1)$(x+5)^2-(x-1)^2=48$ 2) $(x-1)(x+1)=2(x-5)^2-x(x-3)$	5.Решите уравнение: 1)$(x-3)^2-(x+1)^2=12$ 2) $(2x-1)(2x+1)=2(x-3)^2+x(2x-3)$

Описанные выше самостоятельные работы можно использовать и на уроках алгебры в 8 классе в рамках повторения курса алгебры 7 класса.

Самостоятельная работа по теме «Основное свойство рациональной дроби» для 8 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Сократите дробь: 1) $\frac{4a}{12b}$ 2) $\frac{8ac}{2bc}$ 3)$\frac{10x^2}{15x^3}$ 4) $\frac{3x^2yz}{18xyz^3}$ 5) $\frac{36a^3b^4}{48a^2b^6}$	1.Сократите дробь: 1) $\frac{6a}{18b}$ 2) $\frac{10ac}{5bc}$ 3)$\frac{25x^4}{50x^5}$ 4) $\frac{7m^2nk}{14mnk^3}$ 5) $\frac{26x^3y^4}{13x^2y^6}$
2.Сократите дробь: 1) $\frac{4x+8y}{4x}$ 2)$\frac{x^2-16}{2x-8}$	2.Сократите дробь: 1) $\frac{6x+12y}{6x}$ 2)$\frac{y^2-25}{3y-15}$

3)$\frac{a^5-a^3}{a^3-a^4}$	3)$\frac{a^6-a^4}{a^2-a^3}$
3.Найдите значение выражения: $\frac{x^8y^3+x^6y^5}{x^6y^3}$, если x = 0,3, y = - 0,4.	3.Найдите значение выражения: $\frac{a^7b^4+a^5b^6}{a^5b^4}$, если a = 0,6, b = - 0,8.

Самостоятельная работа по теме «Тождественные преобразования рациональных выражений» для 8 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Упростите выражение: 1) $\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}\right):\frac{12x^2}{4-x^2}$ 2) $\left(\frac{8a}{a-2}+2a\right):\frac{4a+8}{8a-14}$ 3) $\frac{5y}{y+3}+\frac{y-6}{3y+9}\cdot\frac{135}{6y-y^2}$	1.Упростите выражение: 1) $\left(\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}\right):\frac{3x^2+27}{9-x^2}$ 2) $\left(5a-\frac{10a}{a\mp1}\right):\frac{15a-15}{5a+5}$ 3) $\frac{3y}{y-4}-\frac{y+2}{5y-20}\cdot\frac{240}{y^2+2y}$
2.Докажите тождество: $\frac{a+2}{a^2-2a+1}:\frac{a^2-4}{3a-3}-\frac{3}{a-2}=\frac{3}{1-a}$	2. Докажите тождество: $\frac{x+4}{x^2-5x+9}:\frac{x^2-16}{2x-6}-\frac{2}{x-4}=\frac{2}{3-x}$

Самостоятельная работа по теме «Степень с целым показателем. Свойства степени с целым показателем» для 8 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Найдите значение выражения: 1) 2^{-6} 2)$(-3)^{-3}$ 3) $(0,6)^{-2}$ 4) $(-\frac{1}{5})^{-1}$	1.Найдите значение выражения: 1) 6^{-2} 2)$(-4)^{-3}$ 3) $(0,3)^{-2}$ 4) $(-\frac{1}{2})^{-1}$
2. Вычислите: 1) $10^{-1}+5^{-2}$ 2) $(\frac{3}{4})^{-2}\cdot2^{-3}$	2. Вычислите: 1) $5^{-3}+10^{-2}$ 2) $(\frac{2}{3})^{-3}\cdot9^{-2}$

3) $(\frac{2}{3})^{-1} + (-1{,}7)^0 - 2^{-3}$	3) $(\frac{3}{8})^{-1} + (-3)^{-2} - (-2{,}6)^0$
3.Представьте выражение в виде степени и найдите его значение: 1) $7^9 \cdot 7^{-7} : 7^{-2}$ 2) $\frac{3^{-14}3^{-19}}{3^{-32}}$ 3) $3^{-2} \cdot 81$ 4)$256 : 2^{-5} \cdot 2^{12}$ 5) $2^{-18} : (2^{-7})^2$ 6) $(7^{-8})^2 : (7^{-3})^5$ 7) $\frac{6^{12}(6^{-3})^5}{(6^{-5})^4 6^4}$	3.Представьте выражение в виде степени и найдите его значение: 1) $7^5 \cdot 7^{-12} : 7^{-4}$ 2) $\frac{5^{-12} \bullet 5^4}{5^{-10}}$ 3) $2^{-3} \cdot 128$ 4)$81 : 3^{-3} \cdot 3^6$ 5) $2^{-20} : (2^{-8})^2$ 6) $(11^{-3})^4 : (11^{-5})^2$ 7) $\frac{10^7(10^{-2})^3}{(10^{-3})^4 10^9}$

Самостоятельная работа по теме «Арифметический квадратный корень. Свойства арифметического квадратного корня» для 8 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Имеет ли смысл выражение: 1) $\sqrt{5}$ 2) $-\sqrt{5}$ 3) $\sqrt{-5}$ 4) $\sqrt{(-5)^2}$	1.Имеет ли смысл выражение: 1) $\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{-7}$ 3) $-\sqrt{7}$ 4) $\sqrt{(-7)^2}$
2.Найдите значение выражения 1) $0{,}1\sqrt{900} - \frac{1}{4}\sqrt{64}$ 2)$\sqrt{24}\sqrt{0{,}04} + \sqrt{3^3 + 22}$ 3)$\left(\sqrt{7}\right)^2 - \sqrt{1{,}21}$	2.Найдите значение выражения 1) $0{,}2\sqrt{400} - \frac{1}{3}\sqrt{81}$ 2)$\sqrt{49}\sqrt{0{,}09} + \sqrt{2^3 + 1}$ 3)$\left(\sqrt{6}\right)^2 - \sqrt{1{,}69}$
3.Решите уравнение: 1) $\sqrt{x} = 5$ 2)$\sqrt{x} - 6 = 5$	3.Решите уравнение: 1) $\sqrt{x} = 4$ 2)$\sqrt{x} - 3 = 7$

3)$\sqrt{2x-6}=5$ 4) $x^2=9$ 5) $x^2=10$ 6) $x^2=-25$	3)$\sqrt{3x+2}=8$ 4) $x^2=25$ 5)$x^2=26$ 6) $x^2=-16$
4.Найдите значение выражения: 1) $\sqrt{16,7^2}$ 2)$\sqrt{(-2,22)^2}$ 3)$\sqrt{64\cdot 25}$ 4)$\sqrt{0,01\cdot 81}$ 5)$\sqrt{18\cdot 128}$ 6)$\sqrt{45}\sqrt{5}$ 7) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$ 8) $\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot\frac{49}{169}}$	4.Найдите значение выражения: 1) $\sqrt{71,6^2}$ 2)$\sqrt{(-3,31)^2}$ 3) $\sqrt{36\cdot 49}$ 4)$\sqrt{0,09\cdot 36}$ 5)$\sqrt{162\cdot 50}$ 6)$\sqrt{18}\sqrt{2}$ 7) $\frac{\sqrt{162}}{\sqrt{2}}$ 8) $\sqrt{30\frac{1}{4}\cdot\frac{49}{36}}$

Самостоятельная работа по теме «Тождественные преобразования выражений, содержащих арифметические квадратные корни» для 8 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt{72}$ 2) $\sqrt{0,98}$ 3)$\frac{1}{3}\sqrt{99}$ 4) $-10\sqrt{0,08}$	1.Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt{56}$ 2) $\sqrt{0,96}$ 3)$\frac{1}{3}\sqrt{45}$ 4) $-10\sqrt{0,12}$
2.Внесите множитель под знак корня: 1) $2\sqrt{5}$	2.Внесите множитель под знак корня: 1) $3\sqrt{7}$

2) $0{,}3\sqrt{7}$ 3) $-3\sqrt{3}$ 4)$\frac{1}{4}\sqrt{6}$	2) $0{,}5\sqrt{6}$ 3) $-4\sqrt{5}$ 4)$\frac{1}{5}\sqrt{2}$
3.Упростите выражение: 1)$\sqrt{25x}+\sqrt{36x}-\sqrt{64x}$ 2)$\sqrt{20}-\sqrt{125}+\sqrt{405}$ 3)$2\sqrt{27a}-6\sqrt{48a}+\frac{1}{2}\sqrt{192a}$	3.Упростите выражение: 1)$\sqrt{25y}+\sqrt{36y}-\sqrt{49y}$ 2)$\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{30}$ 3)$4\sqrt{32b}-4\sqrt{98b}+\frac{1}{3}\sqrt{288b}$
4.Выполните умножение: 1) $\sqrt{7}(\sqrt{63}-\sqrt{28})$ 2)$(7\sqrt{3}+\sqrt{48}-\sqrt{75})\sqrt{3}$ 3)$(6-\sqrt{5})(2+7\sqrt{5})$	4.Выполните умножение: 1) $\sqrt{11}(\sqrt{99}-\sqrt{44})$ 2) $(4\sqrt{6}+\sqrt{54}-\sqrt{24})\sqrt{6}$ 3) $(12-\sqrt{7})(3+2\sqrt{7})$

Самостоятельная работа по теме «Разложение квадратного трехчлена на множители» для 8 класса

Вариант 1	Вариант 2
1.Разложите на множители квадратных трехчлен: 1) $x^2-13x+22$ 2) $-a^2+2a+24$ 3) $100x^2-50x+6$ 4) $-\frac{1}{6}c^2-\frac{3}{2}c+6$ 5) $12b^2-60b+75$	1.Разложите на множители квадратных трехчлен: 1) $x^2-18x+17$ 2) $-a^2-4a+21$ 3) $60x^2-20x+5$ 4) $-\frac{1}{8}c^2-\frac{3}{4}c+5$ 5) $45b^2-150b+125$
2.Сократите дробь: 1)$\frac{a^2+2a-4}{a+4}$ 2)$\frac{3b-9}{b^2+4b-21}$ 3)$\frac{4a^2+12a+9}{2a^2+a-3}$	2.Сократите дробь: 1)$\frac{a^2-a-6}{a+3}$ 2)$\frac{2b+10}{b^2+b-20}$ 3)$\frac{36a^2-12a+1}{6a^2+11a-2}$

Обучающиеся 9 класса по итогам учебного года сдают экзамен по математике в форме ОГЭ. В экзамене по математике для 9 класса встречаются задания по рассматриваемой нами темы в задании 6, задании 8, задании 9, задание 20, задание 22. В рамках дипломной работы мы разработали карточки по теме «Тождественные преобразования», которые способны помочь учителям и ученикам в ходе подготовки к экзамену.

Карточки по теме «Тождественные преобразования»

Карточка 1. 1)Найдите значение выражения: $0{,}007 \cdot 7 \cdot 700.$ 2)Найдите значение выражения: $a^8 \cdot a^{17} : a^{20}$ при a = 2. 3)Решите уравнение: $\frac{9}{x-2} = \frac{9}{2}$. 4)Сократите дробь: $\frac{x^3-3x^2-4x+12}{(x-3)(x+2)}$. 5)Постройте график функции: $y = \frac{(0{,}5x^2-x)\lvert x\rvert}{x-2}$.	Карточка 2. 1)Найдите значение выражения: $(6{,}7 \cdot 10^{-3})(5 \cdot 10^{-3)}$. 2)Найдите значение выражения: $\frac{a}{4c} - \frac{a^2+16c^2}{4ac} + \frac{4c-a}{a}$ при a = 34, c = 83. 3)Решите уравнение: $-9(8-9x) = 4x + 5.$ 4)Упростите выражение: $\frac{12^{n+4}}{2^{2n+5}3^{n+2}}$. 5) Постройте график функции: $y = \frac{(x^2+1)(x-2)}{(2-x)}$.
Карточка 3. 1)Найдите значение выражения: $\frac{\frac{1}{28}-\frac{1}{35}}{\frac{1}{91}}$. 2) Найдите значение выражения: $10ab - (a+5b)^2$ при $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{14}$. 3)Решите уравнение: $3x^2 + 18x = 0.$ 4)Решите уравнение:	Карточка 4. 1)Найдите значение выражения: $\frac{3^8 3^5}{3^9}$. 2) Найдите значение выражения: $\frac{a^{10}a^{12}}{a^{19}}$ при a = 2. 3)Решите уравнение: $(x-4)^2 + (x-1)^2 = 2x^2.$ 4)Решите уравнение: $(x^2-16)^2 + (x^2+3x-28)^2 = 0.$

$x^3 + 8x^2 = x + 8.$ 5) Постройте график функции $y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}$.	5) Постройте график функции $y = \frac{4x-5}{4x^2-5x}$.
Карточка 5. 1)Найдите значение выражения: $4\left(\frac{9}{16} + 2\frac{3}{8}\right)$. 2) Найдите значение выражения: $(2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2$. 3)Решите уравнение: $3 - 4(3x - 5) = 12 - 7x.$ 4) Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{7-x} = \sqrt{7-x} + 48.$ 5) Постройте график функции: $y = \frac{(x^2+7x+12)(x^2-x-2)}{x^2+5x+4}$.	Карточка 6. 1)Найдите значение выражения: $\frac{3,7 \cdot 7,5}{7,4}$. 2) Упростите выражение $\frac{a^2+4a}{a^2+8a+16}$ и найдите его значение при a = - 2. 3)Решите уравнение: $-5 + \frac{x}{3} = \frac{x+8}{6}$. 4)Решите уравнение: $(x-3)(x^2+14x+49) = 11(x+7).$ 5) Постройте график функции: $y = \frac{x^4-10x^2+9}{(x-3)(x+1)}$.

2.2 Методические особенности изучения тождественных преобразований тригонометрических выражений

Тригонометрический материал очень богат специфическими формулами, которые используются в ходе упрощения выражений.

Преобразования тригонометрических выражений выполняются по правилам, которые присущи всем алгебраическим выражениям. Но следует отметить, что при работе с тригонометрическими выражениями важно помнить о наличии специфических правил, опирающихся на правила работы с углами.

Мы выделили несколько методов и прием, которые можно применить к преобразованиям тригонометрических выражений, а также дали соответствующие методические указания.

Метод группировки.

При работе с таким методом необходимо:

1. В выражении выбрать такие значения тригонометрических функций, которые в сумме или разности дают угол, кратный 90°. Далее можно сгруппировать такие слагаемые и, с помощью формул приведения, упростить выражение;

2. Выделить и сгруппировать слагаемые таким образом, чтобы стало возможным использовать основные тригонометрические формулы;

3. При необходимости можно использовать прием «выравнивания коэффициентом» с помощью добавления и вычитания одинаковых слагаемых.

Пример. Вычислите: $\text{ctg}9° - \text{ctg}27° + \text{ctg}81° - \text{ctg}63°$.

Используем указанные выше рекомендации при решении задания.

$$\text{ctg}9° - \text{ctg}27° + \text{ctg}81° - \text{ctg}63° = (\text{ctg}9° + \text{ctg}81°) - (\text{ctg}27° + \text{ctg}63°) = \left(\frac{\cos 9°}{\sin 9°} + \frac{\cos 81°}{\sin 81°}\right) - \left(\frac{\cos 27°}{\sin 27°} + \frac{\cos 63°}{\sin 63°}\right) = \frac{\cos 9°\sin 81° + \cos 81°\sin 9°}{\sin 9°\sin 81°} - \frac{\cos 27°\sin 63° + \cos 63°\sin 27°}{\sin 27°\sin 63°} = \frac{\sin 90°}{\sin 9°\sin 81°} - \frac{\sin 90°}{\sin 27\sin 63°} = \frac{1}{\sin 9°\sin(90° - 9°)} - \frac{1}{\sin 27°\sin(90° - 27°)} = \frac{1}{\sin 9°\cos 9°} - \frac{1}{\sin 27°\cos 27°} = \frac{2}{\sin 18°} - \frac{2}{\sin 54°} = 2\frac{\sin 54° - \sin 18°}{\sin 18°\sin 54°} = 4\frac{\sin 18°\cos 36°}{\sin 18°\sin(90° - 36°)} = 4\frac{\cos 36°}{\cos 36°} = 4.$$

Метод домножения.

Такой метод используется в случае, когда исходное выражение можно преобразовать путем умножения и деления некоторых членов на подходящую тригонометрическую функцию.

Пример. Найти сумму $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$.

Используем указанные выше рекомендации для решения задачи, умножим и поделим исходное выражение на $2\sin\frac{\pi}{7}$.

Получим:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{7}(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7})}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$\frac{\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

Метод универсальной подстановки.

При использовании такого метода делается подстановка $t = tg\frac{x}{2}$.

При это получаем следующие формулы:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$tgx = \frac{2t}{1-t^2}$$

Пример. Выразить через тангенс выражение sin2x + tgx.

Используем универсальную подстановку, получим:

$$\sin 2x + tgx = \frac{2tgx}{1+tg^2x} + tgx.$$

Метод введение вспомогательного угла.

Рассмотрим равенство $a\sin x + b\cos x = c, a^2 + b^2 \neq 0.$

Разделим обе части равенства на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Поскольку $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существует угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда исходное равенство примет следующий вид:

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пример. Докажите, что $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)$.

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{(1+\sin 2\alpha)(1-\sin 2\alpha)}{\cos 2\alpha(1-\sin 2\alpha)}=\frac{1-\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha(1-\sin 2\alpha)}=\frac{\cos^2 2\alpha}{\cos 2\alpha(1-\sin 2\alpha)}=\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=$$

$$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha}=$$

$$\frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

Тригонометрические преобразования могут быть полезны при решении уравнений, содержащих тригонометрические функции. Одним из основных методов является использование тригонометрических тождеств для упрощения уравнения или перевода его в более удобную форму.

В рамках работы мы проанализировали ЕГЭ по математике базового и профильного уровней. В ЕГЭ по математике базового уровня в задании 16 (вычисления и преобразования) встречаются задачи на тождественные преобразования тригонометрических выражений. В ЕГЭ по математике профильного уровня – задание 6 (простейшие уравнения), задание 7 (вычисления и преобразования), задание 13 (уравнения).

Рассмотрим примеры реальных задач ЕГЭ по математике.

Пример 1. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$ и $\alpha\in(\frac{3\pi}{2};2\pi)$.

Проанализировав промежуток, в котором лежит угол α, можно сделать вывод что рассматривается четвертая четверть. В этой четверти $\operatorname{tg}\alpha$ принимает отрицательные значения.

Воспользуемся формулой $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Выполним некоторые преобразования и выразим $\operatorname{tg}\alpha$.

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}.$$

Подставим заданное значение $\cos\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=-\sqrt{10-1}=-3.$$

Пример 2. Найти $3\cos\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha\in(\frac{3\pi}{2};2\pi)$.

Проанализировав промежуток, в котором лежит угол α, можно сделать вывод что рассматривается четвертая четверть. В этой четверти cosα принимает положительные значения.

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$.

Выразим $cos\alpha$ из указанной выше формулы. Получим:

$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha \Rightarrow cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$.

Таким образом, $3cos\alpha = 3\sqrt{1 - sin^2\alpha} = 3\sqrt{1 - \frac{8}{9}} = 1$.

Пример 3. Найдите $24cos2\alpha$, если $sin\alpha = -0{,}2$.

Воспользуемся формулой двойного угла для косинуса: $cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$.

Подставим заданное значение $sin\alpha$. Получим:

$24cos2\alpha = 24(1 - 2 \cdot 0{,}04) = 24 \cdot 0{,}92 = 22{,}08$.

Пример 4. Найдите $\frac{10sin6\alpha}{3cos3\alpha}$, если sin3α = 0,6.

Воспользуемся формулой двойного угла для синуса $sin2\alpha = 2sin\alpha cos\alpha$ и преобразуем числитель дроби:

$\frac{10sin6\alpha}{3cos3\alpha} = \frac{10 \cdot 2sin3\alpha cos3\alpha}{3cos3\alpha} = \frac{10 \cdot 2sin3\alpha}{3}$.

Подставим заданное значение синуса:

$\frac{10 \cdot 2sin3\alpha}{3} = \frac{20 \cdot 0{,}6}{3} = 4$.

Пример 5. Найдите значение выражения $\frac{32cos26^\circ}{sin64^\circ}$.

Можно заметить, что что в выражении значения углов тригонометрических функций в сумме дают 90°. Поэтому можно применить формулы приведения.

$\frac{32cos26^\circ}{sin64^\circ} = \frac{32cos(90^\circ - 64^\circ)}{sin64^\circ} = \frac{32sin64^\circ}{sin64^\circ} = 32$.

Пример 6. Найдите значение выражения $26\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$, если $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ и $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}; 2\pi)$.

Применим формулы приведения для заданного выражения, получим:

$26\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=26\sin\alpha.$

Проанализировав промежуток, в котором лежит угол α, можно сделать вывод что рассматривается четвертая четверть. В этой четверти sinα принимает отрицательные значения.

Поскольку нам известно значение cosα, а требуется найти sinα, нужно воспользоваться основным тригонометрическим тождеством для выражения одной функции через другую.

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$

Окончательно получим:

$$26\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=26\sin\alpha=-26\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-26\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-10.$$

Пример 7. Найдите $tg^2\alpha$, если $5sin^2\alpha+13cos^2\alpha=6.$

Применим основное тригонометрическое тождество к правой части заданного выражения. Получим:

$6=6(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=6\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha.$

Соберем слагаемые, содержащие sinα, в левой части, слагаемые, содержащие cosα, в правой части:

$5\sin^2\alpha+13\cos^2\alpha=6\sin^2\alpha+6\cos^2\alpha\Rightarrow\sin^2\alpha=7\cos^2\alpha.$

Разделим выражение на$\cos^2\alpha\neq0$. Получим:

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=7.$

$\mathrm{tg}^2\alpha=7.$

Пример 8. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}.$

$cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\Rightarrow x-7=\pm1+6k\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x=8+6k; \\ x=6+6k, k\in Z \end{array}\right.$$

В случаях, когда k ≥ 0, будем получать положительные корни.

При k = - 1, x = 2 и x = 0.

При k = - 2, x = - 4 и x = - 6.

При k ≤ 3 будем получать меньшие значения корней.

Поэтому, наибольший отрицательный корень уравнения x = -4.

Пример 9. Решите уравнение $cos2x = sin(x + \frac{\pi}{2})$.

Преобразуем правую часть уравнения, используя формулы приведения $sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cosx.$

Преобразуем левую часть уравнения, используя формулу двойного угла для косинуса. Отметим, что в результате первого преобразования в правой части уравнения получилось выражения, содержащее косинус, поэтому будетлогично использовать следующую формулу двойного угла для косинуса: $cos2\text{x} = 2cos^2\text{x} - 1.$

Получаем:

$2cos^2\text{x} - 1 = cosx.$

Перенесем все слагаемые в левую часть:

$2cos^2\text{x} - cosx - 1 = 0.$

Можно заметить, что уравнение по своей структуре напоминает квадратное уравнение. Поэтому рационально использовать следующую замену: cosx = t, $t \in [-1; 1]$. Получим:

$$t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{2}. \end{bmatrix}$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{bmatrix} cosx = 1 \\ cosx = -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 2\pi k \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{bmatrix} k \in Z.$$

Пример 10. Решите уравнение $cos2x + sin^2x = 0{,}75.$

Преобразуем уравнение, используя формулу двойного угла для косинуса. Отметим, что в левой части уравнение присутствует выражение, содержащее синус, поэтому будетлогично использовать следующую формулу двойного угла для косинуса: $cos2\text{x} = 1 - 2sin^2\text{x}.$

$1 - 2sin^2\text{x} + sin^2x = 0{,}75.$

Перенесем все в одну часть и приведем подобные слагаемые:

$1 - 2sin^2\text{x} + sin^2x - 0{,}75 = 0.$

$sin^2x - 0{,}25 = 0.$

Сделаем замену sinx = t, $t \in [-1; 1]$.

$$t^2 - 0{,}25 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1 = 0{,}5 \\ t_2 = -0{,}5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Выполним обратную замену:

$$\begin{bmatrix} sinx = \frac{1}{2} \\ sinx = -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{bmatrix} k \in Z.$$

Пример 11. Решите уравнение $cos2x - \sqrt{2}\,cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0.$

Используем формулу приведения $cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = sinx.$

Далее можно использовать формулу двойного угла для косинуса. Отметим, что в левой части уравнение присутствует выражение, содержащее синус, поэтому будетлогично использовать следующую формулу двойного угла для косинуса: $cos2\text{x} = 1 - 2sin^2\text{x}.$

Получим:

$1 - 2sin^2\text{x} - \sqrt{2}sinx - 1 = 0.$

$-2sin^2\text{x} - \sqrt{2}sinx = 0.$

$2sin^2\text{x} + \sqrt{2}sinx = 0.$

Вынесем общим множитель за скобки:

$$sinx\left(sinx + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} sinx = 0 \\ sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \pi k \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{bmatrix} k \in Z.$$

Пример 12. Решите уравнение $\sqrt{3}sin2x + 3cos2x = 0.$

Предположим, что cos2x = 0, тогда, исходя из уравнения, следует, что sin2x = 0, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. В силу этого, cos2x ≠ 0 и на него можно поделить обе части уравнения:

$$\sqrt{3}tg2x + 3 = 0 \Rightarrow tg2x = -\sqrt{3} \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Пример 13. Решите уравнение $\frac{2sin^2x - sinx}{2cosx - \sqrt{3}} = 0.$

На рассматриваемое уравнение необходимо наложить ограничения. Уравнение будем иметь смысл, если знаменатель не будет равен нулю:$2cosx - \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow cosx \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x \neq \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

Числитель дроби должен быть равен нулю:

$$2sin^2x - sinx = 0 \Rightarrow sinx(2sinx - 1) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} sinx = 0 \\ sinx = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{bmatrix} k \in Z.$$

Серию корней $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$ необходимо отбросить, в силу того, что при таких значениях знаменатель данной дроби будет обращаться в ноль.

Таким образом, окончательный ответ $x = \pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

Пример 14. Решите уравнение $sinx(2sinx - 3ctgx) = 3.$

Заданное уравнение содержит выражение ctgx, $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$, поэтому необходимо наложить ограничение$sinx \neq 0 \Rightarrow x \neq \pi k.$

Перейдем к решению уравнения:

$$sinx(2sinx - 3ctgx) = 3 \Rightarrow sinx\left(2sinx - \frac{3cosx}{sinx}\right) = 3 \Rightarrow 2sin^2x - 3cosx = 3$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством для того, чтобы в уравнении содержалась только одна функция cosx.

$$2(1 - cos^2x) - 3cosx = 3 \Rightarrow 2 - 2cos^2x - 3cos - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2cos^2x + cosx + 1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} cosx = -\frac{1}{2} \\ cosx = -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \pi + 2\pi k \end{bmatrix} k \in Z.$$

В силу наложенного выше ограничение, окончательный ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Пример 15. Решите уравнение $cos9x - cos7x = \sqrt{2}sinx.$

Воспользуемся формулой разность косинусов$cos9x - cos7x = -2sin\frac{9x+7x}{2}sin\frac{9x-7x}{2} = -2sin8xsinx.$

Получим:

$$-2sin8xsinx = \sqrt{2}sinx \Rightarrow 2sin8xsinx + \sqrt{2}sinx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sinx\left(2sin8x + \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} sinx = 0 \\ sin8x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = \pi k \\ 8x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 8x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{bmatrix} k \in Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x = \pi k \\ x = -\frac{\pi}{32} + \frac{\pi k}{4} \\ x = -\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{4} \end{bmatrix} k \in Z.$$

2.3 Методические особенности изучения тождественных преобразований логарифмических выражений

Преобразование выражений, содержащих логарифмы, осуществляется с помощью свойств логарифмов. Все свойства логарифмов нами были описаны в параграфе 1.5.

Список свойств логарифмов достаточно велик, поэтому, очевидно, что в нем нужно хорошо ориентироваться, чтобы прийти к нужному результату. Чаще всего выбор нужно свойства осуществляется с помощью сравнения исходного выражения с левыми и правыми частями формул, которые отражают свойства. В случае, когда одна из частей свойства логарифма похоже на исходное выражение, то можно выполнить преобразование с помощью подходящей формулы.

Важно овладеть навыками упрощения логарифмических выражений, поскольку в дальнейшим их можно использоваться при решении соответствующих уравнений и неравенств.

Рассмотрим примеры на упрощение показательных и логарифмических выражений.

Пример 1. Найти значение выражения $5^{\log_3 90}\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 10}$.

$5^{\log_3 90}\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 10} = 5^{\log_3 90}(5^{-1})^{\log_3 10} = 5^{\log_3 90-\log_3 10} = 5^{\log_3 9} = 5^2 = 25.$

Пример 2. Упростите выражение $\sqrt{343^{\frac{2}{3\log_{27}7}}}$.

Выпишем отдельно показатель степени выражения, находящегося под корнем и упростим его:

$$\frac{2}{3\log_{27}7} = \frac{2}{3\log_{3^3}7} = \frac{2}{3\cdot\frac{1}{3}\log_3 7} = 2\cdot\frac{1}{\log_3 7} = 2\log_7 3.$$

$$\sqrt{343^{\frac{2}{3\log_{27}7}}} = \sqrt{(7^3)^{2\log_7 3}} = \sqrt{(7^{\log_7 3})^6} = \sqrt{3^6} = 3^3 = 27.$$

Пример 3. Упростить выражение $\log_{\frac{1}{25}}\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(9+2\sqrt{14})(\sqrt{7}-\sqrt{2})}$.

В первую очередь упростим подлогарифмическое выражение.

Заметим, что $9 + 2\sqrt{14} = 7 + 2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2} + 2 = (\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$.

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(9+2\sqrt{14})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{1}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \frac{1}{7-2} = \frac{1}{5}.$$

Получим:$\log_{\frac{1}{25}}\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{(9+2\sqrt{14})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} = \log_{\frac{1}{25}}\frac{1}{5} = \log_{5^{-2}}5^{-1} = -\frac{1}{2}\cdot(-1)\log_5 5 = \frac{1}{2}.$

Пример 4. Найти значение выражения $\frac{\log_6 18+\log_3 18}{\log_6 18\cdot\log_3 18}$.

Выполним почленное деление числители на знаменатель:

$$\frac{\log_6 18+\log_3 18}{\log_6 18\cdot\log_3 18} = \frac{1}{\log_3 18} + \frac{1}{\log_6 18} = \log_{18}3 + \log_{18}6 = \log_{18}(3\cdot 6) =$$

$\log_{18}18 = 1.$

Пример 5. Вычислить $\frac{\log_4 28}{\log_{112}4} - \frac{\log_4 7}{\log_{448}4}$.

Приведем все логарифмы к основанию 4:

$\frac{\log_4 28}{\log_{112} 4} - \frac{\log_4 7}{\log_{448} 4} = \log_4 28 \cdot \log_4 112 - \log_4 7 \cdot \log_4 448.$

Затем разложим на множители слагаемые таким образом, чтобы в каждом из них был множитель вида 4^n.

$\log_4(4 \cdot 7) \cdot \log_4(4^2 \cdot 7) - \log_4 7 \cdot \log_4(4^3 \cdot 7) = (\log_4 4 + \log_4 7)(\log_4 4^2 + \log_4 7) - \log_4 7(\log_4 4^3 + \log_4 7) = (1 + \log_4 7)(2 + \log_4 7) - \log_4 7(3 + \log_4 7) = 2 + 2\log_4 7 + \log_4 7 + \log_4^2 7 - 3\log_4 7 - \log_4^2 7 = 2.$

Пример 6. Вычислить $\left(2 - \log_3 \frac{9}{7}\right)\left(1 + \log_7 \frac{9}{7}\right)$.

Представим числа 2 и 1 в следующем виде:

$2 = \log_3 9; 1 = \log_7 7.$

Преобразуем исходное выражение:

$\left(\log_3 9 - \log_3 \frac{9}{7}\right)\left(\log_7 7 + \log_7 \frac{9}{7}\right) = \log_3 \left(9 : \frac{9}{7}\right) \log_7 \left(7 \cdot \frac{9}{7}\right) = \log_3 7 \cdot \log_7 9 = 2\log_3 7 \cdot \log_7 3 = 2.$

Пример 7. Найти значение выражения $log_{175} 56$, если

$log_{14} 7 = a;\ log_{14} 5 = b.$

Рационально будет преобразовать исходные выражения к логарифмам по основанию 7, поскольку в каждом логарифме присутствует множитель 7.

1) $log_{175} 56 = \frac{log_7 56}{log_7 175} = \frac{log_7(7 \cdot 2^3)}{log_7(7 \cdot 5^2)} = \frac{1+3log_7 2}{1+2\log_7 5}$.

2) $\log_{14} 7 = \frac{1}{\log_7 14} = \frac{1}{1+\log_7 2} = a$, поэтому $\log_7 2 = \frac{1-a}{a}$.

3) $\log_{14} 5 = \frac{\log_7 5}{\log_7 14} = \frac{\log_7 5}{\frac{1}{a}} = a\log_7 5 = b$, поэтому $\log_7 5 = \frac{b}{a}$.

Подставим значения 2) и 3) в 1), получим:

$\frac{1+3\log_7 2}{1+2\log_7 5} = \frac{1+\frac{3(1-a)}{a}}{1+\frac{2b}{a}} = \frac{3-2a}{a+2b}$.

Пример 6. Известно, что $\log_{bc} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}}$ лежит между числами 8 и 13, а $\log_{bc} b$ принимает только целые значения. Найти количество этих значений.

Приведем исходные логарифмы к основанию b:

$\log_{bc}\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}} = \frac{1}{3}\log_{bc} b = \frac{1}{2}\log_{bc} c = \frac{1}{3}\frac{1}{\log_b bc} - \frac{1}{2}\frac{\log_b c}{\log_b bc} = \frac{1}{3(1+\log_b c)} - \frac{\log_b c}{2(1+\log_b c)} = \frac{2-3\log_b c}{6(1+\log_b c)}$.

Решая методом интервалов неравенство $8 \le \frac{2-3\log_b c}{6(1+\log_b c)} \le 13$,получим $-\frac{76}{81} \le \log_{bc} b \le -\frac{46}{51}$.

Прибавим 1 ко всем частям неравенства, получим: $\frac{5}{81} \le 1 + \log_{bc} b \le \frac{5}{51}$.

В силу того, что $\log_{bc} b = \frac{1}{\log_b bc} = \frac{1}{1+\log_b c}$, значения выражения задаются неравенством:

$\frac{51}{5} \le \log_{bc} b \le \frac{81}{5}$ или $10\frac{1}{5} \le \log_{bc} b \le 16\frac{1}{5}$.

Поэтому, $\log_{bc} b$ может принимать 6 целых значений – от 11 до 16.

Логарифмические и показательные преобразования могут быть полезны при решении уравнений, содержащих соответствующие функции. Одним из основных методов является использование свойств логарифмических и показательных функций для упрощения уравнения или перевода его в более удобную форму.

В рамках работы мы проанализировали ЕГЭ по математике базового и профильного уровней. В ЕГЭ по математике базового уровня в задании 16 (вычисления и преобразования), задание 18 (неравенства) встречаются задачи на тождественные преобразования тригонометрических выражений. В ЕГЭ по математике профильного уровня – задание 6 (простейшие уравнения), задание 7 (вычисления и преобразования), задание 15 (неравенства).

Пример 1. Вычислите $2^{0,36} \cdot 4^{0,32}$.

Можно заметить, что $4^{0,32}$ можно представить в виде степени по основанию 2.Воспользуемся свойством возведения степени в степень $(a^n)^m = a^{nm}$:

$4^{0,32} = (2^2)^{0,32} = 2^{0,64}$.

Воспользуемся свойством умножения степеней с одинаковыми основаниям $a^n a^m = a^{n+m}$:

$2^{0,36} \cdot 2^{0,64} = 2^1 = 2.$

Пример 2. Найдите значение выражения $\left(\frac{25^{\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{25}}\right)^2$.

Выполним преобразование выражения, стоящего в знаменателе, используя формулу $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$:

$\sqrt[12]{25} = 25^{\frac{1}{12}}.$

Рассмотрим выражение, стоящее в скобках. К нему необходимо применить следующие свойства показательных выражений:

$a^n a^m = a^{n+m}, \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$

$\frac{25^{\frac{1}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{4}}}{25^{\frac{1}{12}}} = 25^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}} = 25^{\frac{3}{2}} = 125.$

Пример 3. Найдите значение выражение $\frac{log_7 13}{log_{49} 13}$.

Выполним преобразование в знаменателе:

$log_{7^2} 13 = \frac{1}{2} log_7 13.$

Подставим полученное выражение в заданное:

$\frac{log_7 13}{log_{49} 13} = \frac{log_7 13}{\frac{1}{2} log_7 13} = 2.$

Пример 4. Найдите значение выражения $\log_5 9 \cdot \log_3 25.$

Рассмотрим каждый множитель заданного выражения отдельно и выполним преобразования.

$\log_5 9 = \log_5 3^2 = 2\log_5 3.$

$\log_3 25 = \log_3 5^2 = 2\log_3 5.$

Получим:

$\log_5 9 \cdot \log_3 25 = 2\log_5 3 \cdot 2\log_3 5 = 4\log_5 3 \cdot \log_3 5.$

Заметим, что мы получили взаимно обратные логарифмы, поэтому следует применить следующую формулу $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ для одного из множителей:

$$4\log_5 3 \cdot \frac{1}{\log_5 3} = 4.$$

Пример 5. Найдите значение выражения $\frac{\log_3 18}{2+\log_3 2}$.

Преобразуем числитель выражения. Представим его в виде логарифма произведения:

$$\log_3 18 = \log_3(2 \cdot 9) = \log_3 2 + \log_3 9 = \log_3 2 + 2 = 2 + \log_3 2.$$

Вернемся к первоначальному выражению, получим:

$$\frac{\log_3 18}{2+\log_3 2} = \frac{2+\log_3 2}{2+\log_3 2} = 1.$$

Пример 6. Решить уравнение $\log_2(4 - x) = 7$.

Подлогарифмическое выражение может принимать только положительные значения, поэтому необходимо наложить ограничение: $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$.

Представим правую часть в виде логарифма, используя соответствующее свойство:

$$7 = \log_2 2^7.$$

Получим:

$$\log_2(4 - x) = \log_2 2^7.$$

В левой и правой части имеем логарифмы с одинаковым основанием, поэтому их можно отбросить:

$$4 - x = 2^7.$$

$$4 - x = 128.$$

$$x = -124.$$

Пример 7. Решите уравнение $log_{x-5}49 = 2$.

Основание может принимать только положительные значения и не должно быть равно 1, поэтому необходимо наложить ограничение: $x - 5 > 0$ и $x - 5 \neq 1 \Rightarrow x > 5$ и $x \neq 6$.

Представим правую часть в виде логарифма, используя соответствующее свойство:

$2 = \log_{x-5}(x-5)^2$.

Получим:

$\log_{x-5}49 = \log_{x-5}(x-5)^2$.

В левой и правой части имеем логарифмы с одинаковым основанием, поэтому их можно отбросить:

$(x-5)^2 = 49 \Rightarrow x-5 = \pm 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

В силу наложенных выше ограничением, имеем один корень x = 12.

Пример 8. Решить уравнение $16^{x-9} = \frac{1}{2}$.

При решении показательных уравнений необходимо представить обе части уравнение в виде выражения с одинаковым основанием. Преобразуем левую часть уравнения:

$16^{x-9} = (2^4)^{x-9} = 2^{4x-36} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{4x-36} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x+36}$.

Получим:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4x+36} = \frac{1}{2}$.

В левой и правой части имеем степени с одинаковым основанием, поэтому их можно отбросить:

$-4x + 36 = 1$.

$x = -8{,}75$.

Пример 9. Решите неравенство $6^x + (\frac{1}{6})^x > 2$.

В силу того, что $6^x > 0$, на него можно домножить обе части неравенства, получим:

$6^x + (\frac{1}{6})^x > 2 \Rightarrow 6^{2x} + 1 > 2 \cdot 6^x$.

Перенесем все слагаемые в левую часть:

$6^{2x} - 2 \cdot 6^x + 1 > 0$.

Можно заметить, что в левой части неравенства мы получили формулу сокращенного умножения (разность квадратов). Воспользуемся ей и упростим выражение:

$6^{2x} - 2 \cdot 6^{x} + 1 > 0 \Rightarrow (6^{x} - 1)^{2} > 0.$

Решением полученного неравенства является уравнение $6^{x} \neq 1$.

Таким образом, получаем: $x \in (-\infty; 0) U (0; +\infty)$.

Пример 10. Решите неравенство $\log_2^2 x + 6 > 5\log_2 x$.

Неравенство имеет смысл, если подлогарифмическое выражение принимает положительные значения: $x > 0$.

Перенесем все слагаемые в левую часть:

$\log_2^2 x + 6 > 5\log_2 x \Rightarrow \log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 > 0.$

При решении такого неравенства рационально использовать замену $\log_2 x = t$.

$t^2 - 5t + 6 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t < 2 \\ t > 3 \end{array}\right.$.

Сделаем обратную замену:

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x < 2 \\ \log_2 x > 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 4 \\ x > 8 \end{array}\right.$.

Таким образом, $x \in (0; 4) U (8; +\infty)$.

Заключение

Сформулируем основные выводы и полученные результаты исследования.

1. Выделены основные типы тождественных преобразований.

Рассмотрены следующие преобразования неравенств: алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

2. Проведен анализ содержания материалов темы «Тождественные преобразования» в учебниках по алгебре для 7-9 классов, а также в учебниках по алгебре и началу математического анализа для 10-11 классов.

3. Описаны методические особенности изучения основных типов тождественных преобразований школьного курса математики,включая необходимость научить учащихся рациональным способам упрощения выражений и практическому применению знаний.

4. Разработаны системы задач, которые направлены на отработку применения различных тождественных преобразования к решению задач в рамках школьного курса математики.

5. Исследованы различные методы преобразования тригонометрических выражений, такие как метод группировки, метод домножения, метод универсальной подстановки и метод введения вспомогательного угла.

6. Нами были рассмотрены тождественные преобразования логарифмических и показательных выражений.

7. В рамках работы мы проанализировали задачный материал в ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Эти выводы и результаты представляют собой значительное исследование, охватывающее различные аспекты изучения тождественных преобразований в школьной математике, а также предлагающее методические подходы к их изучению

Список используемой литературы.

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. Для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень). Ю. М.Колягин [и др.].М.: Мнемозина, 2009 336 с.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С. М. Никольский, [и др.]. 8-е изд. М.: Просвещение, 2009. 430 с.
3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. Для учащихся общеобразоват. учреждений (профильный уровень). Ю. М.Колягин [и др.].М.: Мнемозина, 2010. 264 с.
4. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / С. М. Никольский [и др.]. 8-е изд. М.: Просвещение, 2009. 464 с.
5. Алгебра. Методические рекомендации. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций.Ю. М. Колягин [и др.]. М.: Просвещение, 2017. 128 с.
6. Алгебра. 7 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень/ Ю. Н. Макарычев [и др.]. М.: Просвещение, 2023. 304 с.
7. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразоват. учеб. Заведений/ А. Г.Мерзляк [и др.]. М: Вентана-Граф. 2014. 256 с.
8. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С. М. Никольский [и др.]. М.: Просвещение, 2013. 287 с.
9. Алгебра. 8 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень/ Ю. Н. Макарычев [и др.]. М.: Просвещение, 2023. 351 с.
10. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразоват. учеб. Заведений/ А. Г.Мерзляк [и др.]. М: Вентана-Граф. 2014. 252 с.
11. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С. М. Никольский [и др.]. М.: Просвещение, 2014. 301 с.

12. Алгебра. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень/ Ю. Н. Макарычев [и др.]. М.: Просвещение, 2023. 447 с.

13. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразоват. учеб. Заведений/ А. Г.Мерзляк [и др.]. М: Вентана-Граф. 2017. 304 с.

14. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / С. М. Никольский [и др.]. М.: Просвещение, 2014. 335 с.

15. Алгебра. 11 класс: учебник для общеобразоват. учеб. заведений: академ. уровень, профил. уровень / А. Г. Мерзляк [и др.]. М: Вентана-Граф. 2011. 431 с.

16. Григорьев Д.М. Методика преподавания тождественных преобразований в школьном курсе математики // Педагогика и психология образования, 2016, № 1, с. 56-63.

17. Гусев В.А. Методические основы дифференцированного обучения математики в средней школе. М.: 1990. 39 с.

18. Иванов А.П. Особенности преподавания тождественных преобразований в школьном курсе математики // Вестник образования, 2019, № 2, с. 45-52.

19. Кузнецова, Е. В. Тождественные преобразования в курсе алгебры средней школы // Математика в школе, 2018, № 5, с. 24-30.

20. Математика. 5 класс: учебник для общеобразоват. учеб. Заведений/ Мерзляк А. Г. [и др.]. М: Вентана-Граф. 2014. 311 с.

21. Математика. 6 класс: учебник для общеобразоват. учеб. Заведений/ Мерзляк А. Г. [и др.]. М: Вентана-Граф. 2014. 307 с.

22. Миндюк Н.Г. Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований алгебраических выражений классов// Математика в школе. 1985. №5. С 31 – 33.

23. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учеб.пособие для студ.мат. спец.пед.вузов и ун-тов. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

24. Тождественные преобразования выражений. Математика/ М.В. Шабанова[и др.]. М.: Дрофа. 2010. 77 с.

25. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования. / М-во образования и науки РФ. М.: Просвещение, 2023. 50 с.

26. Черкасов Р.С., Столяр А.А. Методика преподавания математики в средней школе. М.: Просвещение, 2010. 336 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«21» 09 2023 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студентки Бушовой Екатерины Витальевны

(ФИО полностью)

Тема работы: «Методические особенности изучения содержательной линии «Вычисления и тождественные преобразования» в школьном курсе математики».

Утверждена приказом по Университету от «26.09.» 2023 г. № 0972 а/о

Срок сдачи студентом законченной работы «06» 06 2024 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов:	Сроки выполнения этапов	Примечания
1.	Изучение научно-методической литературы по теме исследования	Октябрь 2023	выполнено
2.	Изучение основных типов тождественных преобразований	Ноябрь 2023	выполнено
3.	Анализ содержания рабочих программ и школьных учебников	Декабрь 2023	выполнено
4.	Оформление текста первой главы выпускной квалификационной работы	Январь 2024	выполнено
5.	Рассмотрение методических особенностей изучения алгебраических выражений	Февраль 2024	выполнено
6.	Рассмотрение методических особенностей изучения тригонометрических выражений	Март 2024	выполнено
7.	Рассмотрение методических особенностей изучения показательных и логарифмических выражений	Апрель 2024	выполнено
8.	Оформление текста работы	Май 2024	выполнено
9.	Подготовка доклада и презентации.	Июнь 2024	выполнено

Дата выдачи задания «18» 09 2023г.

Руководитель _____ Сорокина М.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
_____ Бушова Е.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 5 курса ФФМЕН заочной
формы обучения
Е.В. Бушовой

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Бушова Екатерина Витальевна,
Ф.И.О. студента
студентка 5 курса заочной формы обучения, направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методические особенности изучения содержательной линии «Вычисления и тождественные преобразования» в школьном курсе математики»,
выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись

06.06.2024
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 6.06.2024
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР _____ М.В. Сорокина
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему:
«Методические особенности изучения содержательной линии «Вычисления и тождественные преобразования» в школьном курсе математики»
студентки 5 курса Бушовой Екатерины Витальевны
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР *Сорокина М.В.*

Отчет о проверке

Автор: Бушова Екатерина Витальевна
Название документа: Бушова ев

Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна
Организация: Пензенский государственный университет

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ

Совпадения: 41,04%
Оригинальность: 55,8%
Цитирования: 3,16%
Самоцитирования: 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» – это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 89
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Дата проверки: 06.06.2024 17:20:15
Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 60
Символов в тексте: 77058
Слов в тексте: 9242
Число предложений: 428

Комментарий: не указано

06.06.2024 _____ Сорокина М.В.

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические особенности изучения содержательной линии «Вычисления и тождественные преобразования» в школьном курсе математики»
студентки Бушовой Екатерины Витальевны
факультета физико-математических и естественных наук направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль подготовки «Математика», гр. 193ФПМ1

Линия тождественных преобразований играет важную роль в школьном курсе математики, на ее основе формируются представления об аналитических методах решения задач. Базируясь на знаниях об арифметических действиях, полученных еще в начальной школе, тождественные преобразования буквенных выражений являются одним из самых важных навыков, приобретаемых школьниками.

Выпускная квалификационная работа Бушовой Е.В. посвящена изучению вычислений и различных видов тождественных преобразований в школьном курсе математики. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Первая глава работы носит теоретический характер. В ней рассмотрены понятие тождества и основные виды тождественных преобразований. Проведен детальный анализ содержания обучения по изучаемой теме для базового и профильного уровней. Проведен анализ школьных учебников.

Во второй главе приведены методические разработки по изучению тождественных преобразований алгебраических, тригонометрических, показательных, логарифмических выражений.

Работа Бушовой Е.В. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть частично использованы в работе учителя математики.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «хорошо».

Научный руководитель,
доцент кафедры «МО»,
к.ф.м.н., доцент М.В. Сорокина