

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методические особенности изучения стохастического материала в школе»

Студент

Реш 15.06.2023 Кочкаева Татьяна Николаевна.
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

Глебова 15.06.23 Глебова М.В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева 29.06.23 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 26.06.23 № 14)

Заведующий кафедрой

Паньженский 26.06.23 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 14.07.23 № 11)

Секретарь ГЭК

Журавлева 14.07.23 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2023

Содержание

Введение	3
Глава 1. Теоретические аспекты изучения элементов стохастики в школе	5
1.1 Основные понятия и формулы стохастики в школьном курсе математики.....	5
1.2 Анализ школьных учебников и интернет-ресурсов на наличие стохастического материала	11
1.3 Анализ контрольно-измерительных материалов ОГЭ и ЕГЭ на наличие стохастического материала	25
Глава 2. Методические особенности изучения стохастического материала.....	32
2.1 Факультативный курс по теме «Комбинаторика и теория вероятностей»	32
2.2 Методика изучения элементов комбинаторики, теории вероятностей и статистики	35
2.3 Технологическая карта урока на тему: «Классическое определение вероятности».....	40
2.4 Кластер «Элементы комбинаторики и теории вероятностей»	49
2.5 Внеклассное мероприятие «Путешествие в далекую страну «Комбинаторики».....	51
Заключение.....	57
Список литературы	58
Приложение.....	60

Введение

Элементы комбинаторики, статистики и теория вероятностей играют большую роль как в науке, так и в повседневной жизни, так как имеют прямую связь с реальной жизнью. В настоящее время актуально формирование у учащихся функциональной грамотности. Современные школьники должны уметь воспринимать, анализировать любую информацию, представленную в различных формах. Также важно умение производить простейшие вероятностные расчёты. Поэтому существует необходимость включения стохастической линии в школьный курс математики.

Однако в настоящее время реализация этого материала в школьном курсе столкнулась с рядом проблем. Основная проблема в специфичности этой темы. Данный курс начали вводить в школьную программу совсем недавно, поэтому методической литературы недостаточно. Также проблема усугубляется тем, что у большинства учителей математики, проходивших обучение в педагогических высших учебных заведениях, отсутствовала методика преподавания теории вероятностей и математической статистики.

В настоящее время необходимо особое внимание уделять стохастическому курсу в школе ввиду практической значимости и необходимо разработать методические рекомендации по обучению школьников элементам стохастики. Все вышесказанное определяет актуальность данной темы исследования.

Объект исследования: процесс обучения учащихся стохастике в школе.

Предмет исследования: методические особенности изучения элементов стохастики.

Цель работы: выявить методические особенности обучения и всевозможные подходы к изучению стохастики в школе.

Задачи:

- рассмотреть теоретические основы стохастического курса;
- проанализировать школьные учебники различных авторов, интернет-ресурсы на наличие стохастического курса;
- изучить методические подходы к изучению комбинаторики, теории вероятностей и математической статистике;
- разработать факультативный курс;
- разработать технологическую карту урока на тему «Классическое определение вероятности»;
- разработать внеклассное мероприятие «Путешествие в далекую страну Комбинаторики».

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанные методы могут быть использованы учителями математики при обучении школьников элементам стохастики и подготовки к ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

Глава 1. Теоретические аспекты изучения элементов стохастики в школе

1.1 Основные понятия и формулы стохастики в школьном курсе математики

Современное общество предъявляет к своим членам довольно высокие требования, относящиеся к умению анализировать случайные факторы, оценивать шансы, выдвигать гипотезы, прогнозировать развитие ситуации, принимать решение в ситуациях, имеющих вероятностный характер, в ситуациях неопределенности, проявлять комбинаторное мышление, необходимое в нашем перенасыщенном информацией мире.

Наиболее эффективно эти умения и навыки позволяет формировать курс «Теория вероятностей и математическая статистика», о необходимости изучения которого в российской школе люди науки спорят на протяжении последнего столетия. В разные периоды становления Российского образования подходы к стохастической линии менялись от полного ее исключения из математического образования в средней школе до частичного и полного изучения основных понятий. Одним из основных аспектов модернизации российского школьного математического образования XXI века является включение теоретико-вероятностных знаний во всеобщее обучение. Стохастическая линия (соединение элементов теории вероятностей и математической статистики) призвана сформировать понимание детерминированности и случайности, помочь осознать, что многие законы природы и общества имеют вероятностный характер, реальные явления и процессы описываются вероятностными моделями. В школьном курсе математики встречаются задачи о существовании и подсчете различных комбинаций, которые состояются из элементов заданного конечного множества. Этими задачами занимается комбинаторная

математика. В 1666 году Г. В. Лейбниц в диссертации об искусстве комбинаторики так назвал данный раздел математики [8].

Размещениями называют множества, составленные из n различных элементов, отличающихся составом элементов или их порядком (упорядоченные выборки без повторений)

Число всех размещений находят по формуле $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, читается «размещения m элементов из n ».

Пример 1. На столе лежат 24 книги. Сколькими способами можно расставить их на 3 полках?

Решение. $m = 3, n = 24$

$$A_{24}^3 = \frac{24!}{(24-3)!} = 22 * 23 * 24 = 12144.$$

Ответ: 12144 способов.

Размещения с повторениями – множества, в которых какие-то элементы повторяются. Число таких размещений находят по формуле $A_n^m = n^m$

Пример 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из чисел 1,2,5,6,7?

Решение. $A_5^3 = 5^3 = 125$.

Ответ: 125 чисел.

Перестановками называют множество элементов, которое состоит из одних и тех же различных элементов, но, отличающихся друг от друга только порядком.

$$P_n = n!$$

Пример 3. Сколькими способами можно расставить 10 книг на полке?

Решение. $P_{10} = 10! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 3\,628\,800$

Ответ: 3628800 способов.

Сочетания – множества, которые содержат m элементов из множества n элементов, которые отличаются хотя бы одним своим элементом. Такое число сочетаний из n элементов по m обозначают C_n^m и находят по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Сочетания с повторениями – выборки, при которых существуют предметы n различных предметов, и из них составляются наборы, содержащие k элементы. Число сочетаний с повторениями вычисляют по формуле:

$$C_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$$

Пример 4. В почтовом отделении имеются открытки 15 видов. Сколькими способами можно купить в этом отделении 8 открыток?

$$\text{Решение. } C_{15}^8 = \frac{15!}{8!(15-8)!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 6435.$$

Ответ: 6435 способов.

Сочетаниями без повторений называют размещение, порядок следования элементов при котором не важен. Сочетанием из n элементов по m , называется подмножество X , которое состоит из m элементов. Так, количество вариантов при сочетании будет меньше, чем количество размещений. Количество сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m .

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Пример 5. В 8 классе 5 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них троих для участия в олимпиаде по математике?

$$\text{Решение. } C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_5^3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10.$$

Ответ: 10 способов.

Треугольник Паскаля – бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, представленная в треугольной форме. Особенность этого треугольника в том, что на вершине и по краям стоят единицы, а каждое число между ними равно сумме двух расположенных над ним. Строки же у такого треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Числа, которые образуют треугольник Паскаля, естественным путем появляются в алгебре, математическом анализе, теории чисел, комбинаторике и теории вероятностей.

Например, выпадение орла при бросании одной монеты, выпадение шести очков при подбрасывании игральной кости.

Определение 2. Случайное событие является **достоверным**, если оно обязательно наступит.

Например, выигрыш, проигрыш или ничья в матче двух баскетбольных команд являются достоверными событиями.

Определение 3. Невозможное событие – это событие, которое наступить не может в данном испытании.

Определение 4. Несовместные события – это события, при которых появление одного из них не исключает появления другого.

Определение 5. События называются **равновозможными**, если в их испытании нет преимуществ в каждом из них.

Рассмотрим произвольное событие A , состоящее из m элементов, и назовем вероятностью события A число $P(A) = \frac{m}{n}$.

Это определение называют классическим определением вероятности, число m – число благоприятных исходов, число n – общее число исходов.

Операции над случайными событиями

На множестве случайных событий определены такие операции, как: сумма, произведение и переход к противоположному событию.

Событие $A + B$ называется **суммой** событий A и B , если происходит хотя бы событие A или событие B .

Событие $A \cdot B$ называется **произведением** событий A и B , если происходят оба события одновременно.

Событие $\underline{A}$ называется **противоположным** событию A , то есть событие A не происходит.

В школьных учебниках присутствует материал на отработку этих понятий. Например, в учебнике [14] присутствует задание, отображенное на рисунке 2.

Когда возможны равенства:

а) $A + B = \overline{A}$;

б) $A \cdot B = \overline{A}$;

в) $A + B = AB$.

Рисунок 2 – Операции над событиями

Формула Бернулли

Данная формула позволяет находить вероятность случайного события А при независимых испытаниях. Использование этой формулы позволяет избавиться от объемного числа вычислений, когда происходит сложение и умножение вероятностей при достаточно большом количестве испытаний. Впервые эту формулу вывел математик из Швеции Якоб Бернулли, в честь которого и названа.

Теорема. Если вероятность p наступления события А в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{k,n}$ того, что событие А наступит ровно k раз в n независимых испытаниях, равна: $P_{k,n} = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}$, где $q = 1 - p$.

Пример. Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в три первые мишени и не попадёт в последнюю.

Решение. Используем формулу Бернулли. В данном случае:

$n=4$ – всего выстрелов

$m=3$ – количество попаданий в четырех испытаниях

$p=0,8$ – вероятность попадания при каждом выстреле

$q=1-p=1-0,8=0,2$ – вероятность промаха при каждом выстреле

Тогда, $P_4^3 = C_4^3 \times 0,8^3 \times 0,2^1 = \frac{4!}{1!3!} \times 0,512 \times 0,2 = 0,1024$.

Ответ: вероятность того, что стрелок попадет в три первые мишени и не попадет в последнюю, равна 0,1024.

1.2 Анализ школьных учебников и интернет-ресурсов на наличие стохастического материала

Существующий образовательный стандарт по математике для средней школы включает в себя цели изучения блока «Элементы логики, комбинаторики, статистики и теории вероятностей» и определяет обязательный минимум содержания обучения данной линии и требования к уровню подготовки обучающихся к данному курсу.

Содержание основной образовательной программы:

- Множества и комбинаторика. Решение комбинаторных задач.
- Статистические данные. Представление данных в виде таблиц, графиков и диаграмм. Средние результаты измерений. Статистический вывод на основе выборки.
- Понятие и примеры случайных событий.
- Понятие о вероятности. Частота события. Равновозможные события и подсчет их вероятности. Представление о геометрической вероятности.

На старшей ступени общеобразовательной школы в 10-11 классах на базовом и профильном уровнях также включен курс «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей».

Содержание программы:

- Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных.
- Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества элементов. Формулы перестановок, сочетаний и размещений. Решение комбинаторных задач. Формула бинома Ньютона и свойства его коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Требования к уровню подготовки выпускника таковы, что в результате изучения математики ученик должен:

- знать и понимать вероятностный характер многих закономерностей окружающего мира, примеры статистических закономерностей;
- уметь работать с информацией, представленную в таблицах, на диаграммах и графиках, уметь строить диаграммы и графики;
- научиться решать комбинаторные задачи с помощью систематического перебора всевозможных вариантов, также с использованием правил умножения;
- вычислять средние значения результатов измерений;
- находить частоту события, используя собственные наблюдения и уже готовые статистические данные;
- находить вероятность случайных событий в простейших ситуациях.

Вероятностно-статистическая линия в учебной литературе

При введении какой-либо новой темы или нового вопроса в средний курс школы всегда встает проблема изложения этого вопроса в школьных учебниках.

Таким образом, к реализации нового содержания в современных учебниках авторы подошли по-разному. Так, в одних учебниках элементы комбинаторики и статистики включены отдельными параграфами. В других учебниках элементы стохастики выделены в отдельных дополнительных главах к пособиям.

Рассмотрим школьные учебники различных авторов.

В учебнике 5 класса под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина стохастический курс начинается с комбинаторики.

На конкретных примерах и задачах рассматривается решение комбинаторных задач методом перебора всевозможных вариантов. Все это иллюстрируется с помощью построения дерева возможных вариантов. С помощью простых примеров и задач учащиеся усваивают принцип простого и упорядоченного перебора всевозможных вариантов.

В пункте «Случайные события» вводятся понятия: случайные, достоверные, невозможные и равновероятные события. Также приводятся примеры, которые позволяют ученикам лучше усвоить данные понятия. Далее в последней главе рассматриваются диаграммы и таблицы. Учащиеся учатся

пользоваться ими, извлекать информацию и проводить анализ. В этом классе рассматриваются преимущественно столбчатые диаграммы. Учащиеся учатся составлять таблицы на основе данных опроса, чтобы имелось представление о применении знаний в реальной жизни. Это рассматривается в пункте «Опрос общественного мнения» [10].

В 6 классе ученики повторяют таблицы и диаграммы. К уже изученным ранее столбчатым диаграммам добавляются круговые. Далее учащиеся работают с комбинаторикой. В учебнике этой теме представлены два параграфа: логика перебора и правило умножения. Решают задачи уже ранее изученным методом перебора. Далее рассматривают новый метод решения комбинаторных задач – применение правила умножения. Учебник завершается главой «Вероятность случайных событий». Учащиеся проводят ряд экспериментов и фиксируют полученные результаты в таблицах. На основе полученных результатов вводится такое понятие, как «частота и вероятность случайных событий»

Рассмотрим учебник *7 класса* этого же автора.

В 7 классе рассматриваются основные статистические характеристики: среднее арифметическое, размах и мода. В одном из параграфов также приводятся примеры комбинаторных задач, которые решаются уже известным способом и при помощи рассуждений. Учащиеся знакомятся с перестановками. В заключительной главе продолжают рассматривать элементы теории вероятности и частоту случайных событий [1].

В 8 классе повторяют статистические понятия, изученные в предыдущем году, и вводится новое понятие – медиана. Также рассматривают таблицы частот. И приводится много примеров, которые показывают связь с реальной жизнью. И уже в этом классе вводится классическое определение вероятности (Лаплас) [3].

В 9 классе активно рассматривают статистические исследования, и учащиеся знакомятся с определением статистики. Повторяются предыдущие способы решений статистических задач и вводятся новые понятия, такие как выборка, ранжирование, объем выборки, генеральная совокупность и

репрезентативность. Помимо таблиц и диаграмм, вводится новый способ графического представления результатов – полигоны. Также вводятся понятия среднего квадратичного отклонения и выборочной дисперсии. В данном учебнике предлагаются к рассмотрению три примера статистических исследований, встречающихся на практике. Следующие вопросы: «Куда пойти работать?», «Как исследуют качество знаний школьников?», «Удобно ли расположена школа?». Тем самым учащийся применяет полученные знания на практике.

Изучив комплект учебников данного автора, отметим следующий момент: статистическая линия берет начало уже в 5 классе в то время, как в большинство других учебников эти вопросы рассматривают только с 7 класса.

Рассмотрим учебники авторов *И. И. Зубарева и А.Г. Мордкович*

В 5 классе на данную тему отводится последняя глава «Введение в вероятность», содержащая два параграфа. В одном из них рассматривают события: достоверные, невозможные и случайные, и учащиеся учатся определять характер событий. Во втором параграфе изучаются комбинаторные задачи, которые решаются методом перебора всевозможных вариантов [13].

В 6 классе учащиеся уже знакомятся с понятием вероятности. Учащиеся решают задачи на определение степени вероятности с опорой на интуицию. А в следующем пункте представлено классическое определение вероятности. Учащиеся учатся использовать комбинаторное правило умножения. Прослеживается недостаток в этом способе знакомства с новым материалом: задачи достаточно сложные, и не вводится понятие частоты, так как более логичным было бы введение понятия вероятности на основе частного. В настоящее время существуют дополнительные пособия, которые содержат материал по вероятности и комбинаторике.

Перейдем к рассмотрению учебников таких авторов, как *Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк*.

В 7 классе в первом параграфе «Статистические характеристики» учащиеся знакомятся с простейшими статистическими понятиями: среднее арифметическое, мода, размах и медиана. Задания к параграфу можно разделить на две группы. В первой задания на отыскание рассматриваемых понятий и их практическое применение. Во второй группе задания, для решения которых необходимо применять знания определений изученных статистических понятий и уметь проводить необходимые рассуждения, используя определенный алгоритм [4].

В 8 классе во втором параграфе «Статистические исследования» рассматриваются вопросы организации статистических исследований и используются таблицы частот. Повторяются основные статистические понятия и вводятся новые понятия: сплошное и выборочное исследование, интервальный ряд, выборка, репрезентативность и генеральная совокупность. Учащиеся знакомятся с полигонами и гистограммами – наглядными интерпретациями результатов статистических исследований.

В 9 классе стохастике посвящен наибольший объем, чем в предыдущие годы.

Здесь два параграфа: «Элементы комбинаторики» и «Начальные сведения из теории вероятностей».

«Элементы комбинаторики» - это третий параграф, который содержит четыре пункта:

- Примеры комбинаторных задач. Здесь даются простые примеры комбинаторных задач, которые решаются методом перебора вариантов. С помощью построения дерева наглядно иллюстрируется этот метод. Также рассматривают правило умножения.

- Перестановки. Учащиеся знакомятся с понятием и основной формулой подсчета перестановок.

- Размещения. На конкретном примере вводится данное понятие. Также знакомятся с формулой числа размещений.

- Сочетания. Вводится понятие и формула числа сочетаний.

В четвертом параграфе «Начальные сведения из теории вероятностей» знакомство с материалом начинается с рассмотрения эксперимента. Далее вводят такие понятия, как: случайное событие и его относительная частота, классическое и статистическое определение теории вероятности. В конце параграфа рассматриваются теоремы сложения и умножения теории вероятностей, вводятся понятия несовместных и противоположных событий. Это представлено в пункте «Сложение и умножение вероятностей».

Сравнивая учебники с учебниками Г.В. Дорофеева, можно заметить, что некоторые элементы вводятся так же, кроме комбинаторики. В учебниках Г.В. Дорофеева материал содержит больше теории и практики.

Рассмотрим учебник такого автора, как *М.В. Ткачева*.

В 7 классе в главе 1 «Введение в комбинаторику» представлены исторические комбинаторные задачи в магических и латинских квадратах. Далее рассматриваются сочетания, перестановки и размещения. Учащиеся знакомятся с таблицей подсчета вариантов, приводящей к правилу умножения. Как средство подсчета возможных вариантов рассматриваются графы. В конце главы есть дополнительные параграфы: перестановки, разбиение на группы и выдвижение гипотез.

В 8 классе в главе 2 «Случайные события» рассматриваются виды событий: достоверные, случайные, совместные и несовместные, невозможные и равновозможные. В этом же учебнике сразу вводится классическое определение вероятности, далее рассматриваются вероятностные задачи. Как дополнительный пункт рассматривается геометрическая вероятность и вводится понятие противоположных событий. В конце главы уже понятие относительной частоты и статистическое определение вероятности, также есть дополнительный пункт «Тактика игр».

В 9 классе в главе 3 «Случайные величины» вводится понятие случайной величины: дискретной и непрерывной. В этом учебнике рассматриваются

таблицы распределения значений случайной величины и полигоны (графическое представление). Также вводятся понятия: выборка и генеральная совокупность, медиана, мода и размах. В завершении главы есть дополнительные параграфы, в них рассматриваются среднее квадратичное отклонение и правило трех сигм, отклонения от среднего и дисперсия. Стоит заметить, что в данном учебнике мало внимания уделяется работе со статистическими данными.

В учебнике «События, вероятности, статистическая обработка данных» *А.Г. Мордковича и П.В. Семенова* первые два параграфа посвящены исключительно комбинаторике.

Изложение материала начинается с рассмотрения простых комбинаторных задач, таблицы возможных вариантов, показывающая правило умножения. Далее рассматриваются перестановки и деревья возможных вариантов, выбор нескольких элементов, в том числе сочетания. Выводятся формулы для двух элементов, для трех и общая формула n элементов. В третьем параграфе рассматриваются понятия случайных событий и их вероятность, вводится само определение классической вероятности. В четвертом параграфе рассматривается статистика и представление в виде таблиц. В данном разделе много новых терминов, которые авторы оформили в виде таблицы, где есть определения и их описание. Далее представлена таблица распределения и многоугольник распределений (графическое распределение), нормальное распределение [5]. В следующем пункте рассматриваются экспериментальные данные и вероятности событий, и заметна связь между вероятностью и экспериментальными статистическими данными. Только после этого вводится определение статистической вероятности.

Завершается учебник параграфом, в котором содержится материал по таким темам, как схема Бернулли, закон больших чисел и вычисление вероятности с помощью функций.

Этот учебник похож на материал учебника М.В. Ткачевой. Также мало внимания уделено теории вероятностей: сначала вводится определение

вероятности, позже статистическое определение вероятности, имеющее связь с экспериментальными статистическими данными. Статистические определения вводятся для выборки после рассмотрения значений случайной величины. Однако материал по комбинаторике изложен более подробно.

В данном пособии изначально рассматриваются случайные события и сравниваются их вероятности. Далее вводится понятие частоты, опираясь на экспериментальные данные. После этого следует пункт «Куда стремятся частоты?». Здесь вводится статистическое определение вероятности, а потом только классическое.

Далее следует пункт «Вероятность и комбинаторика». В этом пункте рассматриваются правила умножения, вычитания, сочетания и их количество. Эти формулы в дальнейшем используют для вычисления вероятностей. Также в пункте «Точка тоже бывает случайной» рассматривают геометрическое определение вероятности.

В конце учебника пункт «Сколько изюма в булке и сколько рыб в пруду?». В данном пункте рассматривают вопросы статистического оценивания и его прогнозирования. Именно в этом пункте много интересных задач, которые связаны с реальной жизнью.

Данное пособие предназначается для учащихся *7-9 классов*. В первых двух главах рассматриваются таблицы и диаграммы. Ученики учатся заносить данные в таблицы и работать с ними. Изучаются столбиковые, круговые диаграммы и диаграммы рассеивания. В следующей главе вводятся понятия отклонения и дисперсии. В четвертой главе понятия случайной изменчивости (температура воздуха, вес человека и т.д.). В пятой главе изучаются случайные события и их вероятности. Вводится определение вероятности, после рассматривают частоту и эксперименты с игральной костью и монетой.

После этого рассматривают элементарные события, их равновозможность, противоположные события, диаграммы Эйлера, сложение и умножение вероятностей.

После изучения этих тем, вводится блок комбинаторики. В нем изучают правило умножения, сочетания, перестановки, их формулы и решаются задачи. В отдельной главе изучают испытания Бернулли и геометрические вероятности. В следующих главах рассматривают случайные величины и их числовые характеристики, случайные величины, определение частоты. В приложении рассматриваются формула бинома Ньютона, треугольник Паскаля и имеются самостоятельные и контрольные работы по данному материалу.

Данный учебник отличается от других тем, что содержит отдельные пункты, где рассматриваются более подробно таблицы и диаграммы.

Проведем сравнительный анализ учебников математики для 10-11 классов.

Рассмотрим учебник алгебры *А.Г. Мордковича и П.В. Семенова*. Учебник представлен в двух частях для 10 и 11 классов, базового и профильного уровней подготовки. Остановимся на разделе «Закон больших чисел» приведенный в форме таблицы 1.

Таблица 1 – Раздел «Закон больших чисел» 9 (базовый уровень)

Название тем раздела	Кол-во часов
Треугольник Паскаля и Бином Ньютона	2 ч
Случайные события и их вероятности	2 ч
Математическое ожидание случайных величин	2 ч
Частота и вероятность. Закон больших чисел	2 ч
Контрольная работа	1 ч
Итого	9 ч

При изучении данного раздела выпускник будет уметь: решать задачи методом перебора, использовать формулы для решения простейших комбинаторных задач, вычислять вероятности событий, анализировать числовые данные, представленные в диаграммах и таблицах.

Углубленный курс используют для естественно-научных, технологических и социально-экономических профилей. Разделы данного курса представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Разделы курса математики «Элементы математической статистики и теории вероятностей» (углубленный уровень)

Название тем раздела	Кол-во часов
Вероятность и геометрия	2 ч
Независимые повторения испытаний с двумя переменными	2 ч
Статистические методы обработки информации	2 ч
Гауссова кривая. Закон больших чисел	2 ч
Контрольная работа	1 ч
Итого	9 ч

После изучения этого раздела на углубленном уровне выпускник должен знать определения вероятности: классическое, геометрическое и статистическое, также формулы для вычисления вероятности и уметь обрабатывать данные, понятие Гауссовой кривой и знать закон больших чисел.

В учебнике «Алгебра и начала математического анализа» Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой и Н. Е. Федоровой для 10-11 классов на изучение раздела «Элементы теории вероятностей» выделяется 7 часов в 11 классе. Данный раздел представлен в таблице 3.

Таблица 3 – Раздел курса «Элементы теории вероятностей» (базовый уровень)

Названия тем раздела	Кол-во часов
Вероятность события	2 ч

Продолжение таблицы 3

Сложение вероятностей	2 ч
Вероятность произведения независимых событий	2 ч
Контрольная работа	1 ч
Итого	7 ч

При изучении данного раздела выпускник научится находить вероятности случайных событий, применяя классическое определение вероятности, уметь

находить суммы и произведение двух событий, находить вероятность противоположного события, находить независимые события и одновременное появление нескольких независимых событий.

На изучение раздела «Элементы теории вероятностей» на углубленном уровне по учебнику Ю.М. Колягина выделяется 8 часов в 11 классе. Данный раздел представлен в таблице 4.

Таблица 4 – Раздел курса «Элементы теории вероятностей»

Названия тем раздела	Кол-во часов
Вероятность события	2 ч
Сложение вероятностей	2 ч
Условная вероятность. Независимые события	1 ч
Вероятность произведения независимых событий	1 ч
Формула Бернулли	1 ч
Контрольная работа	1 ч
Итого	8 ч

Таким образом, выпускник, изучив данный раздел на углубленном уровне будет уметь определять вероятности случайных событий, применяя классическое определение вероятности, уметь находить сумму и произведение двух событий, находить вероятность противоположного события, определять независимые события и появление независимых событий одновременно.

В учебнике «Алгебра и начала математического анализа» С.М. Никольского, М.К. Потапова и Н.Н. Решетникова на базовом уровне выделяется 5 часов в 10 классе на изучение курса «Вероятность события». Раздел данного курса представлен в таблице 5.

Таблица 5 – Раздел курса «Вероятность события»

Название тем раздела	Кол-во часов
Понятие вероятности события. Случайные (возможные) события. Единственно возможные события. Равновозможные события	1 ч

Понятие вероятности события. Достоверные и невозможные события. Несовместные события. Использование комбинаторики для подсчёта вероятностей	1 ч
Свойства вероятностей событий. Сумма (объединение) событий. Произведение (пересечение) событий. Противоположные события	1 ч
Свойства вероятностей событий. Независимость событий. Независимые повторения испытаний	1 ч
Контрольная работа	1 ч
Итого	5 ч

При изучении этого раздела на базовом уровне выпускник научится применять в решении задач метод перебора и использовать формулы для простейших комбинаторских задач, находить вероятности событий, подсчитывая исходы.

На изучение этого же раздела на углубленном уровне по учебнику *С.М. Никольского* выделяется 10 часов в 10 классе [17]. Раздел представлен в таблице 6.

Таблица 6 – Раздел школьного курса математики «Вероятность события»

Название тем раздела	Кол-во часов
Понятие вероятности события	1 ч
Свойства вероятностей событий	1 ч
Относительная частота события	1 ч

Продолжение таблицы 6

Условная вероятность. Независимость событий	2 ч
Математическое ожидание	1 ч
Сложный опыт	1 ч
Формула Бернулли. Закон больших чисел	2 ч
Контрольная работа	1 ч
Итого	10 ч

После изучения данного раздела выпускник научится использовать метод перебора, также формулы и треугольник Паскаля для решения простейших комбинаторских задач, находить биномиальные коэффициенты, анализировать данные, представленные в таблицах, графиках и диаграммах, анализировать информацию статистического характера.

Можно сделать вывод, что в 10-11 классе стохастику, независимо от базового или профильного уровня изучают в среднем 8 часов.

Также теоретический материал представлен и на *онлайн-обучающих платформах* таких, как Учи.ру, Образовательный центр «Сириус», в большом, подробном, игровом материале.

Например, на онлайн-платформе *Учи.ру* проводятся олимпиады с наличием задач на комбинаторику [9]. Так же в разделах, где можно выдавать задания учащимся есть темы на вероятность и статистику с 7 по 11 классы.

В 2023 году появился новый раздел: подготовка к ОГЭ и ЕГЭ. В разделе «Подготовка к ОГЭ» отдельный блок заданий отсутствует на данный момент, только в составе вариантов. А вот в разделе «Подготовка к ЕГЭ» есть деление на базовый и профильный уровни, и для каждого уровня задания разделены по темам и блокам (рисунок 3).

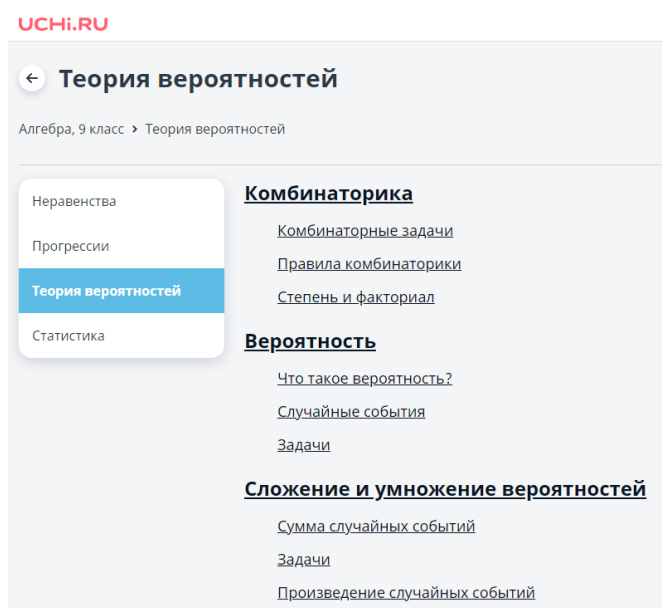


Рисунок 3 – Раздел «Подготовка к ЕГЭ»

К каждой теме представлен подробный теоретический материал, примеры решенных задач и задания для самостоятельного выполнения (рисунок 4)

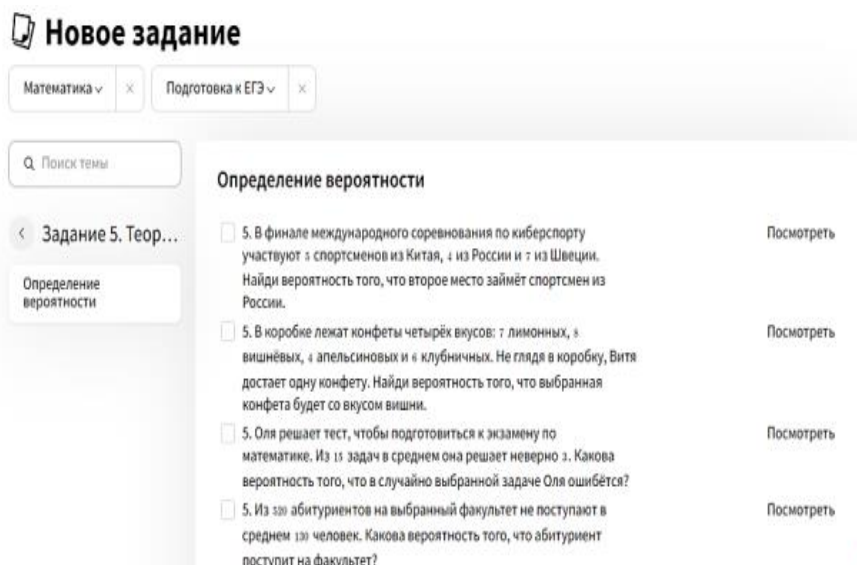


Рисунок 4 – Определение вероятности

На сайте образовательного центра Сириус проводятся курсы по теме «Комбинаторика. 7 класс. Дополнительные главы». В данном курсе участники знакомятся с понятием четности, изучают понятия инварианта и постепенного конструирования, получают базовые представления о графах и перечислительной комбинаторике [15].

Например, есть модули, рассказывающие о кругах Эйлера, правилах сложения и умножения, перестановках (рисунок 5, 6).

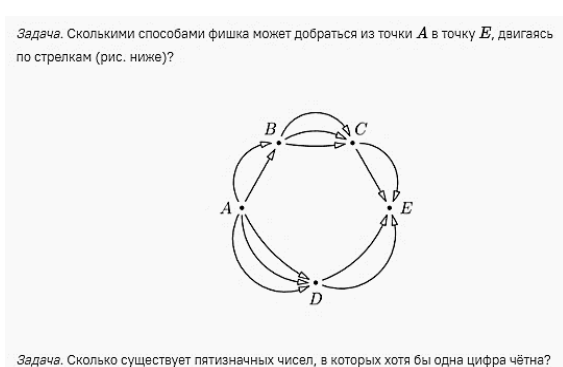
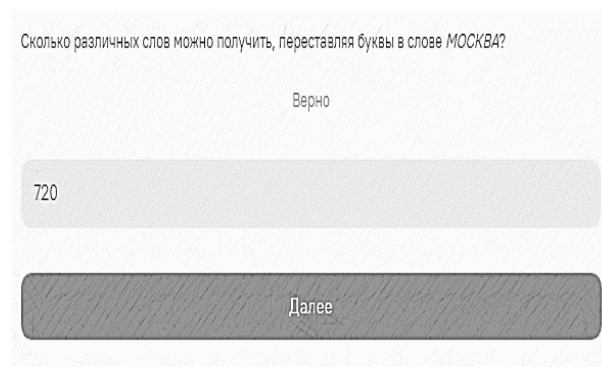


Рисунок 5 – Задание на круги Эйлера Рисунок 6 – Задание на перестановки

Также на курсе много задач на теорию вероятностей (рисунок 7, 8)

Задача. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе - 0,9, в третье - 0,8. Найти вероятность следующих событий:
а) только одно отделение получит газеты вовремя;
б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

Рисунок 7 – Задача на теорию вероятностей

Задача. В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Рисунок 8 – Задача на теорию вероятностей

По окончании курса участник получает сертификат (см. Приложение)

1.3 Анализ контрольно-измерительных материалов ОГЭ и ЕГЭ на наличие стохастического материала

На данный момент сдача экзамена за курс основной школы в формате ОГЭ и за курс средней школы в формате ЕГЭ стала обязательной.

Рассмотрим КИМ Основного государственного экзамена. Тема теории вероятности и статистики встречается в задании 10.

Задачи можно разделить на три типа:

1. Задачи на классическое определение вероятности (рисунок 9) [18];

1 Тип 10 № 149 На экзамене 25 билетов, Сергей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.
Аналоги к заданию № 149: 132742 311501 315137 ... Все
Источник: ГИА по математике 28.05.2013. Основная волна. Вариант 1313
Решение · Помощь

2 Тип 10 № 132728 Коля выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 5.
Аналоги к заданию № 132728: 132750 325460 333020 ... Все
Решение · Помощь

Рисунок 9 – Примеры задач из ОГЭ 2023

2. Задачи на статистическое определение вероятности (рисунок 11);

10 Тип 10 № 132748

В среднем из каждых 80 поступивших в продажу аккумуляторов 76 аккумуляторов заряжены. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор не заряжен.

Аналоги к заданию № 132748: 133465 133467 133469 ... Все

[Решение](#) · [Помощь](#)

11 Тип 10 № 311324

Для экзамена подготовили билеты с номерами от 1 до 50. Какова вероятность того, что наугад взятый учеником билет имеет однозначный номер?

Аналоги к заданию № 311324: 311347 Все

Источник: 9 класс. Математика. Краевая диагностическая работа. Краснодар (вар. 1)

[Решение](#) · [Помощь](#)

Рисунок 10 - Примеры задач из ОГЭ 2023

3. Задачи на применение теорем о вероятностных событиях (рисунок 12).

Тип 10 № 325288

Средний рост жителя города, в котором живет Даша, равен 170 см. Рост Даши 173 см. Какое из следующих утверждений верно?

- 1) Даша — самая высокая девушка в городе.
- 2) Обязательно найдется девушка ниже 170 см.
- 3) Обязательно найдется человек ростом менее 171 см.
- 4) Обязательно найдется человек ростом 167 см.

Аналоги к заданию № 325288: 325867 341530 311734 ... Все

[Решение](#) · [Помощь](#)

Тип 10 № 325454

Известно, что в некотором регионе вероятность того, что родившийся младенец окажется мальчиком, равна 0,512. В 2010 г. в этом регионе на 1000 родившихся младенцев в среднем пришлось 477 девочек. На сколько частота рождения девочек в 2010 г. в этом регионе отличалась от вероятности этого события?

Аналоги к заданию № 325454: 325455 325600 325601 ... Все

[Решение](#) · 1 комментарий · [Помощь](#)

Рисунок 11 – Примеры задач из ОГЭ 2023

Пример. Коля выбирает трехзначное число. Найдите вероятность того, что оно делится на 5.

Решение. Всего трехзначных чисел 900. На пять делится каждое пятое из них, то есть таких чисел $\frac{900}{5} = 180$. Вероятность того, что Коля выбрал трехзначное число, делящееся на 5, определяется отношением количества трехзначных чисел, делящихся на 5, ко всему количеству трехзначных чисел: $\frac{180}{900} = 0,2$

Ответ: 0,2

В КИМах ЕГЭ по математике базового уровня подготовки 5 задание посвящено теории вероятности [11]. Оно представлено задачами на классическое определение вероятности и теоремы вероятностных событий (рисунок 12, 13).

Тип 5 № 1001  ●  

На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадет выученный вопрос.

Аналоги к заданию № 1001: [1002](#) [1003](#) [1004](#) ... [Все](#)

[Решение](#) · [Помощь](#)

Тип 5 № 1006  ●  

Маша включает телевизор. Телевизор включается на случайном канале. В это время по девяти каналам из сорока пяти показывают новости. Найдите вероятность того, что Маша попадет на канал, где новости не идут.

Аналоги к заданию № 1006: [1007](#) [1008](#) [1009](#) ... [Все](#)

[Решение](#) · [Помощь](#)

Рисунок 12 –Задания из ЕГЭ 2023

Тип 5 № 319355  ●  

Если гроссмейстер А. играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Аналоги к заданию № 319355: [319553](#) [319555](#) [Все](#)

[Решение](#) · [Помощь](#)

Тип 5 № 320171  ●  

На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросы, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Рисунок 13 –Задания из ЕГЭ 2023

Пример 1. В фирме такси в данный момент свободно 16 машин: 10 черных, 2 желтые и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

Решение. Вероятность того, что к заказчице приедет именно зеленое такси равна $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ответ: 0,25

Пример 2. Биатлонист 3 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что

биатлонист первые три раза попал в мишени, а последний промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение. Поскольку биатлонист попадает в мишени с вероятностью 0,6, то он промахивается с вероятностью $1 - 0,6 = 0,4$. События: попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы друг от друга, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей. Тем самым, вероятность события «попал, попал, попал, промахнулся, промахнулся» равна $0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,0864 \approx 0,09$

Ответ: 0,09

Рассмотрим КИМ по математике профильного уровня. Заметим, здесь два задания по теории вероятностей: задание 3 и задание 4.

В задании 3 рассматриваются задачи на классическое определение теории вероятностей, как и в базовом уровне (рисунок 14).

1

Тип 3 № 320208

В кармане у Миши было четыре конфеты — «Грильяж», «Белочка», «Коровка» и «Ласточка», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Миша случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Грильяж».

Аналоги к заданию № 320208: 322497 504405 504426 ... Все

Решение · Видеокурс · Помощь

2

Тип 3 № 1001

На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадет выученный вопрос.

Аналоги к заданию № 1001: 1002 1003 1004 ... Все

Решение · 1 комментарий · Видеокурс · Помощь

3

Тип 3 № 283579

В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Аналоги к заданию № 283579: 283581 283585 283587 ... Все

Решение · Видеокурс · Помощь

4

Тип 3 № 282857

Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Рисунок 14 – Примеры заданий профильного ЕГЭ 2023

Пример 1. В среднем из 1200 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение. В среднем из 1200 садовых насосов, поступивших в продажу, $1200 - 7 = 1193$ не подтекают. Значит, вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает, равна $\frac{1193}{1400} = 0,8521$

Ответ: 0,8521

В задании 4 потребуются более расширенные знания по данной теме. Здесь задания на теоремы о вероятностных событиях (рисунок 15).

1

Тип 4 № 320751

Агрофирма закупает куриные яйца только в двух домашних хозяйствах. Известно, что 5% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30% яиц высшей категории. В этой агрофирме 15% яиц высшей категории. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Аналоги к заданию № 320177: 320751 320741 320835 ... Все

Решение · Видеокурс · Помощь

2

Тип 4 № 509352

Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

Аналоги к заданию № 509352: 509454 Все

Решение · 4 комментария · Видеокурс · Помощь

3

Тип 4 № 319355

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выигрывает оба раза.

Рисунок 15 – Примеры заданий профильного ЕГЭ 2023

Пример 2. Агрофирма закупает куриные яйца только в двух домашних хозяйствах. Известно, что 5% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30% яиц высшей категории. В этой агрофирме 15% яиц высшей категории. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события B_1 и B_2 состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события $A|B_1$ и $A|B_2$ — события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, будет куплено яйцо высшей категории, равна:

$$\begin{aligned} P(AB_1) + P(AB_2) &= P(B_1) * P(A|B_1) + P(B_2) * P(A|B_2) \\ &= 0,05 * P(B_1) + 0,3 * (1 - P(B_1)) = -0,25P(B_1) + 0,3 \end{aligned}$$

Так как, по условию, эта вероятность равна 0,15, то вероятность того, что купленное яйцо окажется из первого хозяйства:

$$P(B_1) = \frac{0,3 - 0,15}{0,25} = 0,6$$

Ответ: 0,6.

Пример 3. В одном из ресторанов в г. Тамбов администратор иногда предлагает гостям сыграть в игру «Шеш-беш». Гость должен подбросить одновременно две игральные кости. Если он выпадет комбинация 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплимент от ресторана: бесплатный десерт или чашку любого кофе. Какова вероятность получить такой комплимент у гостя? Результат округлите до сотых.

Решение. Сначала необходимо найти вероятность того, что при двух бросках игровых костей комбинация 5 и 6 очков не выпадет ни разу. Обратим внимание, что вероятность выбросить комбинацию 5 и 6 очков складывается из двух несовместных событий, таких как: на первом кубике выпало 5 очков, а на втором кубике выпало 6 очков или на первом кубике выпало 6 очков, а на втором кубике выпало 5 очков. Тогда вероятность того, что при броске двух игровых костей выпадет комбинация 5 и 6 очков, равна $p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Вероятность противоположного события, состоящего в том, что при одном броске костей комбинация 5 и 6 очков не выпадет, равна $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$.

Каждое бросание костей не зависит от предыдущего. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность того, что при двух бросках игровых костей комбинация 5 и 6 очков не выпадет ни разу, равна $\frac{17}{18} \cdot \frac{17}{18} = \frac{289}{324}$. Следовательно, вероятность противоположного события, состоящего в том, что при двух бросаниях игровых костей комбинация 5 и 6 очков выпадет хотя бы один раз, равна $1 - \frac{289}{324} = \frac{35}{324} = 0,108 \dots$

Округляя до сотых, получаем ответ.

Ответ: 0,11.

Для успешного решения задач на теорию вероятности и комбинаторику, необходимо освоить теорию, владеть навыком решения типовых задач,

определять совместные и несовместные события, находить сумму и произведение событий. Важно уметь представлять данные в таблицах уже на этапе знакомства с заданием, так как вследствие этого решение становится интуитивно понятным. Для того чтобы решать более сложные задачи, надо научиться уверенно решать более простые.

Глава 2. Методические особенности изучения стохастического материала

2.1 Факультативный курс по теме «Комбинаторика и теория вероятностей»

Элементы теории вероятностей, комбинаторики и статистики входят в задания контрольно-измерительных материалов после курса основной и средней школы.

Государственный стандарт образования предусматривает необходимые минимум, в котором изложены обязательные требования к уровню подготовки выпускников.

Например, для основного общего образования по текущей теме установлен следующий минимум:

1. Множества и комбинаторика
2. Статистические данные
3. Вероятность.

Сравнительно недавно произошли дополнительные изменения в профильном варианте Единого Государственного экзамена: добавилось второе задание на тему «Комбинаторика и теория вероятностей». На данный момент, в профильном уровне два задания под номерами 3 и 4. Третье задание представляет собой начала теории вероятностей. Представлены задания на классическое определение вероятности и теоремы о вероятностях событий. В четвертом задании КИМ представлены более сложные вероятностные задачи.

Однако несмотря на то, что в ЕГЭ заданий на вероятность и статистику стало больше, в школьном курсе средней школы изменений не произошло. Происходит так, что на уроках не хватает времени для более углубленного изучения темы.

Решить эту проблему возможно с введением факультативного курса «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» еще в 7 классе.

Данный курс актуален в настоящее время еще и тем, что развивает у обучающихся умение решать жизненные задачи: уметь выбрать наилучший из возможных вариантов, уметь оценить степень риска и так далее. В данных ситуациях прослеживается связь математики с реальной жизнью.

В процессе занятий предлагаются кластеры, которые необходимо заполнять для легкой подготовки к экзамену. В них могут входить основные определения и формулы курса.

Факультативный курс «Комбинаторика и теория вероятностей» рассчитан на 27 часов, занятие проходит 1 раз в неделю.

В результате изучения элементов теории вероятности, статистики и комбинаторики обучающийся должен уметь следующее:

- решать простейшие вероятностные задачи;
- находить среднюю величину;
- правильно применять необходимые формулы при решении задач на комбинаторику;
- освоить навыки самостоятельной исследовательской и проектной работы в рамках реализации кластеров, как итог работы.

Таким образом, цели и задачи данного факультативного курса:

1. Познакомить учащихся с основными понятиями комбинаторики, вероятности;
2. Изучить комбинаторное правило умножения, которое используется в дальнейшем для вывода формул при подсчете числа подстановок, сочетаний и размещений;
3. Изучить начальные сведения из теории вероятностей; познакомиться с понятиями «случайное событие», «вероятность случайного события», «относительная частота», изучить классическое определение вероятности и научиться применять.

Для оценивания результатов можно использовать самостоятельные работы, контрольные работы и проверку знаний в виде зачета. В конце курса провести защиту проектов в виде кластеров. Тематическое планирование представлено в таблице 7.

Таблица 7 – Календарно-тематическое планирование факультативного курса «Комбинаторика и теория вероятностей»

№	Наименование тем	Кол-во часов
Элементы комбинаторики: 15 ч		
1	Комбинаторные задачи. Правила сложения и умножения. Метод перебора	1 ч.
2	Дерево выбора (дерево возможных вариантов). Понятие факториала	1 ч.
3	Перестановки	1 ч.
4	Размещения	1 ч.
5	Сочетания	1 ч.
6	Схема выбора без повторений. Решение задач. Разработка кластеров	1 ч.
7	Контрольная работа	1 ч.
8	Перестановки с повторениями	1 ч.
9	Размещения с повторениями	1 ч.
10	Сочетания с повторениями	1 ч.
11	Схема выбора с повторениями. Решение задач	1 ч.
12	Бином Ньютона. Решение задач. Разработка кластеров	2 ч.
13	Контрольная работа	1 ч.
14	Зачет	1 ч.
Теория вероятностей: 10 часов.		
15	Случайные события. Классификация событий	1 ч.
16	Действия над случайными событиями	1 ч.
17	Классическое определение вероятности	1 ч.
18	Сложение вероятностей. Задача о выборке	1 ч.
19	Независимые события и условные вероятности	1 ч.

20	Теорема умножения вероятностей	1 ч.
21	Решение задач. Разработка кластеров	2 ч.
22	Контрольная работа	1 ч.
23	Зачет	1 ч.
Итого: 23 часа.		
24-25	Защита кластеров	2 ч.

При работе по данному плану можно воспользоваться дополнительной литературой [2].

2.2 Методика изучения элементов комбинаторики, теории вероятностей и статистики

Факультативный курс «Комбинаторика и теория вероятностей» предполагает, прежде всего, то, что дети самостоятельно выбирают: посещать его или нет. И из этого следует, что большая часть детей обладает математическим складом ума и любят математику. Таким образом, при составлении методики обучения по данной теме, в первую очередь необходимо отталкиваться от психолого-педагогических способностей детей. Такие дети по-иному воспринимают математические задачи. При первом взгляде на задачу они сразу же отбирают основные показатели. Таким образом, обучающиеся с таким складом ума отличаются формализованным восприятием материала. И для таких детей характерно именно абстрактно-логическое мышление. Что предполагает: умение упрощать задачи, быстро обобщать материал, легко переключаться от одной умственной операции к следующей.

Таким образом, выше определили цели, содержание и структуру данного курса. При разборе материала используются традиционные формы обучения и самостоятельная работа с материалом.

В проведении факультативного курса предполагаются такие формы работы, как лекция, практическое занятие, творческая и самостоятельная работы.

Основные формы контроля – самостоятельная работа, зачет, контрольная работа и составление кластеров.

Факультативный курс содержит две части: элементы комбинаторики и элементы теории вероятностей.

Перейдем к *методике преподавания элементов комбинаторики*.

На этот раздел отводится 14 занятий. Обучающиеся знакомятся с понятием «комбинаторика», изучают основные элементы, правила, формулы и учатся применять эти знания на практике.

Необходимо отметить, что при проведении занятий особенное внимание отдается доказательствам свойств и выводам формул.

Раздел на тему «Элементы комбинаторики» - основа для вычисления вероятностей событий, которые произошли или могут произойти. Темы насыщены не только теорией, но и практикой.

При изучении данных тем особое внимание нужно отдавать задачам, так как обучающиеся так быстрее и на более высоком уровне запоминают формулы, поэтому их в данном разделе достаточно много. Однако перед тем как выводить формулы на занятиях, необходимо учесть уровень подготовки учеников. Хороший метод введения формулы – обобщение его как результата конкретной задачи [20].

Перейдем ко второму разделу данного курса – *«Теории вероятностей»*. Этот раздел является наиболее интересным для учащихся. Выделим некоторые основные моменты методики изучения вероятности.

В данном разделе занятия проходят с использованием игровых примеров с непредсказуемыми результатами, связанных с повседневной жизнью. Но такие примеры проводят изучение данного курса вероятности намного легче и воспринимаются учащимися лучше.

На первом занятии учащимся необходимо будет рассказать сначала о возникновении теории вероятностей, о первых ученых, занимавшихся данным разделом математики.

Основное понятие данного раздела – понятие «случайный эксперимент», или «случайное событие». Сразу же после определения, необходимо показать обозначения и рассмотреть примеры [7].

Необходимо подчеркнуть, что случайное событие состоит из элементарных случайных событий. Можно показать, что математическая запись $A = \{a, b, c\}$ указывает на то, что событие A состоит из трех элементарных случайных событий. И нужно проговорить, что данные элементарные события называют благоприятствующими наступлению события A . Вероятность случайного события является конкретным числом и обозначается $P(A)$.

Также необходимо четко сформулировать, что вероятность не может быть больше единицы, принимаемой за сто процентов, чтобы в будущем избегать большинства ошибок. И после этого переходим к видам теории вероятностей.

Также на факультативном курсе рассматриваются основные понятия: «противоположные события», «объединение и пересечение событий» и другие операции над событиями.

Рассматривая классическое определение вероятности необходимо показать определение, формулу, рассмотреть слабые стороны.

Рассмотрим пример. Пусть в урне лежит 8 одинаковых шаров, причем 3 из них – красные, 4 – синие и 1 – белый. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? [12]

Далее учитель говорит, что оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события. Таким образом, вероятность – это число, которое характеризует степень возможности появления события.

После введения определения рассматриваем свойства. Можно доказать некоторые свойства или разобрать их устно, часть даются как домашнее задание.

Практически во всех книгах сказано, что решение задач следует начинать с простых заданий, в которой число событий мало. Или же с одним событием можно рассматривать различные исходы и вероятности этих событий. К

примеру, для этого можно показать задание с подбрасыванием игрального кубика. Множество элементарных событий состоит из 6 событий. Для его проведения учащихся лучше разбить на группы по 2-3 человека, один из которых будет фиксировать результаты эксперимента, а остальные проводить его. Каждой группе дается свое задание.

Важный момент при изучении данной темы – теорема умножения вероятностей вводится детям только после того, как они поняли определение вероятности и научились решать простые задачи. Данное понятие проще всего решить, используя пример.

Пример. Из ящика, в котором 3 белых и 3 черных шаров, наугад вынимают последовательно один за другим два шара. Какова вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар? [19]

После того, как они разобрали пример и понятие условной вероятности, учащимся легко сформулировать теорему.

При изучении данного раздела следует учащимся подчеркнуть, что нельзя обойтись без комбинаторики. В этом разделе роль перестановок, размещений и сочетаний в разных вероятностных задачах велика и сделать так, чтобы дети научились по формулировкам задач определять, какой из видов соединений будет использован при решении задачи. Основой для этого служат такие утверждения: если множество исходов составляют всевозможные комбинации из n элементов по k , то в задаче будут фигурировать сочетания; если же всевозможные комбинации из n элементов по n , то в задачах идет речь о перестановках; размещения будут тогда, когда речь идет о порядке элементов в рассматриваемых комбинациях [16].

Можно использовать такие *задачи*:

1. Набирая номер телефона, состоящий из 8 цифр, Андрей забыл 2 последние цифры, но помнит лишь, что это 0 или четное число. Помня лишь это,

он набрал цифры 0 и 1. Какова вероятность того, что Антон набрал верный номер? [6]

2. Шесть билетов в театр на новогоднее представление распределили по жребию между 12 мальчиками и 10 девочками. Какова вероятность того, что билеты достанутся 3 мальчикам и 3 девочкам?

Заметим, что после каждой темы необходимо решать задачи. При решении начинаем решать с легких, а после уже переходить на задачи сложнее. На каждом занятии также решаются нестандартные задачи.

Изучение данного раздела завершается контрольной работой. При составлении контрольной работы следует внести задачи, которых можно решить несколькими способами. Еще одним итоговым мероприятием является устный зачет. Он необходим для проверки понимания теоретического материала данного раздела, а также для того, чтобы учащиеся научились грамотно формулировать свои мысли и аккуратно их излагать.

2.3 Технологическая карта урока на тему: «Классическое определение вероятности»

Класс: 7

Тип урока: урок постановки учебной задачи.		
Задачи: обеспечить усвоение знаний о классическом определении вероятности; формировать умения решать вероятностные задачи.		
Планируемые результаты		
Предметные: Научатся приводить примеры опытов с равновероятными исходами, использования вероятностных свойств окружающих явлений	Метапредметные: <i>Познавательные</i> – выделять и формулировать познавательную цель; предвидеть возможные результаты своих действий. <i>Регулятивные</i> – владеть основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности. <i>Коммуникативные</i> – организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками.	Личностные: Умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи.
Методы и приемы	Проблемное обучение, фронтальная, индивидуальная.	
Межпредметные и внутрипредметные связи	Математика, мат. Анализ.	
Оснащение урока	Презентация, компьютер, проектор, рабочий план	

Организационная структура урока			
Этап урока	Содержание деятельности учителя	Содержание деятельности обучающегося (осуществляемые действия)	Формируемые способы деятельности
I. Организационный момент	<p><i>Приветствие. Проверка готовности обучающихся к уроку. Создание в классе атмосферы психологического комфорта.</i></p> <p>Читаем вместе со слайда: «Чтобы спорилось нужное дело, В экспедицию отправимся смело, А девизом нашего урока буду такие слова: Думать – коллективно! Решать – оперативно! Отвечать – доказательно! И открытия нас ждут обязательно!»</p>	<p>Настраиваются на учебную деятельность. Концентрируют внимание на работе на уроке. Отвечают на вопросы: – Где я? – Зачем я здесь? – Что мне нужно делать?</p>	Формирование навыков самоорганизации

<p>II. Актуализация опорных знаний и жизненного опыта. Постановка учебной задачи</p>	<p><i>Предлагает обучающимся рассказать о своих достижениях в изучении понятия «вероятность».</i> Вопрос запуска постановки учебной задачи: – Достаточно ли у вас знаний о понятии «вероятность»? <i>Формулирует учебную задачу:</i> – Исследовать классическое определение вероятности.</p>	<p>Выступают перед классом или в группах. – О вероятности я знаю... – Я могу объяснить... – Я выполнял задания... – У меня хорошо получается... – Я могу научить одноклассников... Осознают важность решения поставленной учебной задачи.</p>	<p>Развитие навыков целеполагания.</p>
<p>III. Сообщение темы. Постановка цели и задач урока</p>	<p><i>Сообщает тему урока.</i> <i>Организует совместное с учащимися формулирование цели и задач урока.</i> – Внимательно прочитайте тему урока. – Что от вас ожидается на уроке? – Какие цели и задачи вы можете перед собой поставить?</p>	<p>Записывают в тетрадь тему урока. Участвуют в формулировании целей и задач урока: – узнать классическое определение вероятности; – научиться решать вероятностные задачи.</p>	<p>Умение принимать и сохранять учебную задачу.</p>

IV. Мотивирован ие к учебной деятельности	<p><i>Способствует обсуждению мотивационных вопросов.</i></p> <p>– Что меня заинтересовало в теме урока?</p> <p>– Есть ли у меня желание изучать понятие «вероятность»?</p> <p>– Почему мне важно разобраться в теме урока?</p> <p>– Какие я планирую результаты своей работы на уроке?</p>	<p>Отвечают на мотивационные вопросы. Создают условия для успешной учебной деятельности.</p>	<p>Умение выражать свои мысли, демонстрировать само мотивацию.</p>
V. Создание ситуации затруднения. Работа над темой урока	<p><i>Организует обсуждение решения задачи:</i></p> <p>– Пусть в коробке лежат 10 красных шаров. Какова вероятность того, что взятый наугад шар будет красного цвета; желтого цвета?</p> <p><i>Организует исследование понятия «достоверное событие» и «невозможное событие». Стимулирует</i></p>	<p>Принимают участие в обсуждении решения задачи.</p> <p>Приходят к выводу, что при заданных условиях любой взятый наугад шар будет красного цвета.</p> <p>Проводят исследование. Работают с разными источниками информации. Заполняют таблицу.</p>	<p>Умение выражать свои мысли в соответствии с задачами.</p> <p>Умение проводить исследование.</p>

самостоятельную познавательную деятельность обучающихся.

Предлагает обучающимся проанализировать определение понятия «вероятность».

Поясняет, обучающимся:

– если комплекс условий эксперимента таков, что его результаты не являются равновероятными, то классическое определение вероятности к такому эксперименту применять нельзя.

Совместно с учащимися разбирает пример решения задач:

Задача 1. Однородную монету подбрасывают один раз. Какова вероятность выпадения герба?

Найденная информация	Мне непонятно...	Вопросы для дополнительных исследований
Событие, которое при данном комплексе условий обязательно состоится при любом испытании, называют достоверным		Как...?
Вероятность такого события считается равной 1, т.е.: если А – достоверное событие, то $P(A)=1$		Почему...?
Событие, которое при данном комплексе условий не может состояться ни при каком испытании, называют невозможным		Что...?
Вероятность такого события считается равной 0, т.е.: если А – невозможное событие, то $P(A)=0$		Каким образом...?

Слайд 1

Анализируют определение. Задают вопросы учителю.

Определение	Вопрос учителю
Если испытание может закончиться одним из n равновероятных результатов, из которых m приводят к наступлению события А, то вероятностью события А называют отношение $\frac{m}{n}$. $P(A) = \frac{m}{n}$	Почему...?

Умение анализировать информацию

	<p><i>Задача 2.</i> Игральный кубик бросают один раз. Какова вероятность выпадения цифры 4?</p> <p><i>Задание 3.</i> Пусть выпущено 100 000 лотерейных билетов, 20 из которых являются выигрышными. Какова вероятность выигрыша при покупке одного билета?</p> <p><i>Задача 4.</i> Пусть в коробке лежат 15 бильярдных шаров, пронумерованных числами от 1 до 15. Какова вероятность того, что вынутый наугад шар будет иметь номер кратный 3?</p>	<p style="text-align: center;"><i>Слайд 2</i></p> <p>Предлагают свои идеи решения заданий. Сравнивают собственные решения с предложенным решением учителя.</p> <table><tr><th>Решение заданий</th><th>Сравнительный анализ с собственным решением. Допущенные ошибки</th></tr><tr><td>1. Ответ: $\frac{1}{2}$</td><td>Я сделал...</td></tr><tr><td>2. В этом эксперименте можно получить один из шести результатов: выпадет 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Все эти шесть результатов равновозможные. Ответ: $\frac{1}{6}$</td><td>У меня получилось...</td></tr><tr><td>3. Испытание состоит в том, что покупают один билет. В этом эксперименте можно получить один из 100 000 равновозможных результатов. $\frac{20}{100000} = \frac{1}{5000}$ Ответ: $\frac{1}{5000}$</td><td>Я решал...</td></tr><tr><td>4. В этом испытании можно получить один из 15 равновозможных результатов $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$</td><td>Я не догадался...</td></tr></table> <p style="text-align: center;"><i>Слайд 3</i></p>	Решение заданий	Сравнительный анализ с собственным решением. Допущенные ошибки	1. Ответ: $\frac{1}{2}$	Я сделал...	2. В этом эксперименте можно получить один из шести результатов: выпадет 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Все эти шесть результатов равновозможные. Ответ: $\frac{1}{6}$	У меня получилось...	3. Испытание состоит в том, что покупают один билет. В этом эксперименте можно получить один из 100 000 равновозможных результатов. $\frac{20}{100000} = \frac{1}{5000}$ Ответ: $\frac{1}{5000}$	Я решал...	4. В этом испытании можно получить один из 15 равновозможных результатов $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$	Я не догадался...	
Решение заданий	Сравнительный анализ с собственным решением. Допущенные ошибки												
1. Ответ: $\frac{1}{2}$	Я сделал...												
2. В этом эксперименте можно получить один из шести результатов: выпадет 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Все эти шесть результатов равновозможные. Ответ: $\frac{1}{6}$	У меня получилось...												
3. Испытание состоит в том, что покупают один билет. В этом эксперименте можно получить один из 100 000 равновозможных результатов. $\frac{20}{100000} = \frac{1}{5000}$ Ответ: $\frac{1}{5000}$	Я решал...												
4. В этом испытании можно получить один из 15 равновозможных результатов $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$	Я не догадался...												
VI. Закрепление изученного материала	<p><i>Организует самоанализ усвоенных учащимися знаний.</i></p> <p><i>Оказывает помощь ученикам,</i></p>	Отвечают на вопросы. Определяют свой уровень усвоения знаний. Заполняют таблицу.	Умение осуществлять актуализацию полученных на										

	<p>которые не знают ответов на вопросы.</p> <p>Создает условия для дополнительного изучения вопросов, которые вызвали затруднения</p>	<table><tr><th rowspan="2">Вопросы</th><th colspan="2">Варианты ответов</th></tr><tr><th>Знаю ответ на вопрос (+)</th><th>Не знаю ответ на вопрос (+)</th></tr><tr><td>Какое событие называют достоверным?</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Какое событие называют невозможным?</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Чему равна вероятность достоверного события?</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Чему равна вероятность невозможного события?</td><td></td><td></td></tr><tr><td>В чем заключается классическое определение вероятности?</td><td></td><td></td></tr></table> <p>Слайд 4</p> <p>Анализируют ответы на вопросы.</p> <p>Проводят дополнительное изучение нового материала.</p>	Вопросы	Варианты ответов		Знаю ответ на вопрос (+)	Не знаю ответ на вопрос (+)	Какое событие называют достоверным?			Какое событие называют невозможным?			Чему равна вероятность достоверного события?			Чему равна вероятность невозможного события?			В чем заключается классическое определение вероятности?			уроке знаний и умений.
Вопросы	Варианты ответов																						
	Знаю ответ на вопрос (+)	Не знаю ответ на вопрос (+)																					
Какое событие называют достоверным?																							
Какое событие называют невозможным?																							
Чему равна вероятность достоверного события?																							
Чему равна вероятность невозможного события?																							
В чем заключается классическое определение вероятности?																							
VII. Решение заданий	<p>Задания:</p> <p>1. (№ 627) В корзине лежат 10 красных и 15 зеленых яблок. Какова вероятность взять наугад из корзинки грушу; яблоко?</p>	<p>Решения.</p> <p>1. В – «взять грушу»; С – «взять яблоко» $P(B) = 0$, так как груш в корзинке нет. $P(C) = 1$, так как в корзине только яблоки.</p> <p>2.</p>	Умение самостоятельно принимать решения.																				

	<p>2. (№ 628) Наугад выбирают три четные цифры. Какова вероятность того, что число, записанное этими цифрами, будет нечетным?</p> <p>3. (630) Какова вероятность того, что, переставив буквы в слове «алгебра», мы получим слово «геометрия»?</p>	<p>$P(A) = 0$</p> <p>3.</p> <p>$P(A) = 0$</p>	
<p>VIII.</p> <p>Подведение итогов урока.</p> <p>Рефлексия</p>	<p><i>Организует подведение итогов урока.</i></p> <p><i>Способствует размышлению учащихся над вопросами.</i></p> <p>– Можно ли сказать, что я могу объяснить, что такое достоверное событие?</p> <p>– Каких знаний и умений мне не хватает?</p> <p>– Доволен ли я своей работой на уроке?</p>	<p>Подводят итоги своей работы на уроке.</p> <p>Проводят самооценку, рефлексия.</p>	<p>Умение отслеживать цель учебной деятельности.</p>

IX. Домашнее задание	<i>Помогает учащимся выбрать задания из учебника. Обращает внимание на возможности и способности обучающихся.</i>	Выбирают задания, которые будут решать дома. Записывают домашнее задание.	Формирование навыков самоорганизации.

2.4 Кластер «Элементы комбинаторики и теории вероятностей»

Отличительная особенность данного факультативного курса – заполнение учащимися в течение курса двух кластеров: по комбинаторике и теории вероятностей.

Кластер – это схема, максимально упрощенная, суть которой состоит в том, чтобы раскрывать логические взаимосвязи между элементами, которые в свою очередь являются основными смысловыми единицами изучаемой информации.

Оформление и содержание учащиеся продумывают самостоятельно, главное – содержание тем, которые изучались ранее. Ученики могут заранее разделиться на мини-группы, например, по 3-5 человек. Но, также могут и самостоятельно разрабатывать кластер.

В процессе работы над кластерами ученикам предлагаются правила, которые необходимо использовать при оформлении:

- разрабатывать как можно больше связей;
- применять воображение и интуицию;
- не идти по одному сценарию, а каждый раз искать способы усовершенствовать работу;
- работать до тех пор, пока идеи не иссякнут.

Подобные кластеры создаются для более глубокого погружения в темы факультативного курса, в котором учащиеся могут проявить свой творческий потенциал. Еще одно достоинство кластера – собственный кластер ученики могут использовать даже вне факультативного курса. К примеру, в период подготовки к экзамену они могут быстро и легко повторить теорию в краткой форме, а не искать в книгах.

Итак, преимущества в применении метода создания кластеров:

- развивают логику и мышление;
- учат искать, выбирать и анализировать нужную информацию;
- облегчают запоминание информации;

- кластеры способствуют к разнообразию учебной деятельности на уроке и в домашних условиях;

- развивается творческий потенциал.

Перечисленное выше позволяет добиваться больших результатов не только в математике, но также во всем обучении.

На последних занятиях элективного курса проходит защита кластеров. Рекомендуется, проводить защиту в виде деловой игры. Таким образом, ученики могут по своим мини-группам выходить к доске и демонстрировать всему классу свою работу, раскрывать основную суть, при желании можно добавить презентацию.

Членами жюри можно выбрать по одному человеку из каждой группы, которые лучше разбираются в данной теме, по мнению учителя. Эти учащиеся ставят баллы по определенным критериям после выступления каждой группы.

Критерии оценки кластеров:

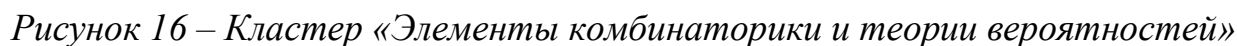
- полнота информации по данной теме;
- наличие или отсутствие ошибок;
- четкость структуры и логических связей;
- использование дополнительных источников информации;
- глубина проработки материала;
- эстетика оформления.

После выступления обучающихся, члены жюри могут задать вопросы или учащиеся могут в группе обсудить представленные кластеры. Учитель так же может принимать участие в обсуждении, и, если есть необходимость, исправлять или что-либо добавлять.

В конце занятия жюри подводит итоги и объявляет баллы. Группы, занявшие призовые места, награждаются грамотами.

На этапе анализа, когда ученики дают комментарии, необходимо обратить внимание учащихся на важные ошибки, которые могли произойти от того, что в какой-то момент ученики неправильно поняли тему урока, или же неправильно

Примеры кластеров представлены на рисунках 16 и 17.



«Путешествие в далекую страну «Комбинаторики»

51

Ребусные. Но на каждой остановке вам надо будет показать свои знания, находчивость и смекалку. За правильные ответы команды будут получать жетоны (разноцветные ромбики), а в конце путешествия мы определим команду победительницу. Маршрут путешествия вы будете выбирать сами. Итак, в путь!

Попасть в страну Комбинаторики, минуя деревню Историческую, нельзя. Поэтому на первой остановке представители команд расскажут нам об истории возникновения комбинаторики.

Деревня «Историческая»

1 ученик. С комбинаторным типом задач люди имели дело еще в глубокой древности, когда, например, они выбирали наилучшее расположение воинов во время охоты, придумывали узоры на одежде или посуде. В дальнейшем появились игры, требовавшие умения планировать, рассчитывать свои действия, продумывать возможные комбинации. Приспособления для таких игр археологи находили в древних захоронениях, например, в пирамиде, египетского фараона Тутанхамона. А также появились нарды, шашки, шахматы.

1 ученик. Долгие-долгие века комбинаторика развивалась в недрах арифметики, алгебры и геометрии. (Так, древнегреческие ученые большое внимание уделяли и комбинаторике чисел, и геометрической комбинаторике – разрезанию фигур и т.п.). Но, именно, как ветвь математики комбинаторика возникла только в 18 веке. А толчком к этому послужили азартные игры, прежде всего игра в кости. Игроки пытались понять, почему одни суммы выпадают чаще, другие – реже. Задача оказалась совсем непростой, особенно в случае трех или даже четырех костей. Этой проблемой в 16 веке занимались известные итальянские математики Джироламо Кардано, Николо Тарталья, в 17 веке – Галилео Галилей, крупнейшие математики Франции Блез Паскаль и Пьер Ферма. Работы последних ознаменовали рождение двух новых ветвей математики – комбинаторики и теории вероятностей.

1 ученик. Но не только азартные игры послужили толчком к исследованиям математиков. Ещё одна причина – тайна переписки. Шифрами пользовались короли, дипломаты и заговорщики, а также сами ученые.

Изобретались все более и более сложные шифры, а для кодирования и расшифровки информации привлекались математики. Так, ещё в конце 16 века, во время войны Франции с Испанией, расшифровкой переписки между противниками французского короля Генриха IV и испанцами занимался Франсуа Вист. Навыки в работе со сложными шрифтами помогали ученым при разгадке письменности древних народов. В дальнейшем полем для приложения комбинаторных методов оказались биология, химия, физика. И, наконец, роль комбинаторики коренным образом изменилась с появлением компьютеров: она превратилась в область, находящуюся на магистральном пути развития науки.

Учитель. Ребята вы познакомились с историей комбинаторики, а теперь пора продолжить путешествие. Наше путешествие к лесу Сказочному.

Лес «Сказочный»

Здесь командам предлагается решить задачу с помощью графа, называемого деревом.

1 задача для мальчиков. Антон, Борис и Василий купили 3 билета на 1-е, 2-е, 3-е места первого ряда на футбольный матч. Сколькими способами они могут занять имеющиеся места? Команды получают жетоны, а команда-победитель выбирает дальнейший маршрут.

2-я задача для девочек (рисунок 18).

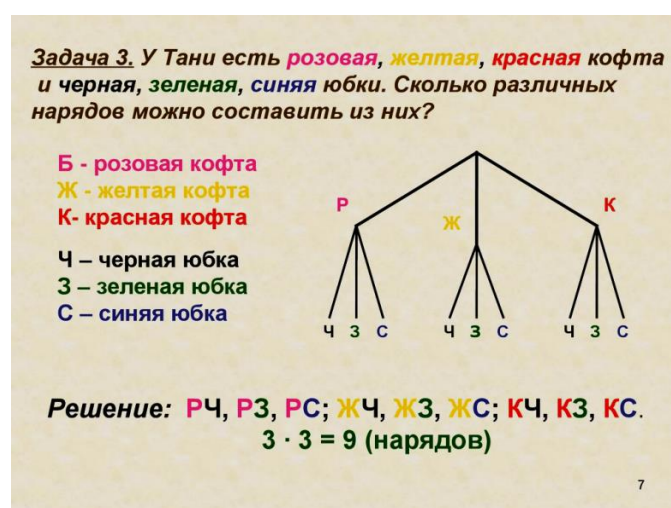


Рисунок 18 – Задача по теме «Графы»

За это задание команды получают жетоны, команда-победитель выбирает дальнейший маршрут.

Поляна «Вероятностных событий»

На данном этапе учащимся предлагается решить задачу на вероятность событий.

Задача. На рисунке изображен лабиринт. Мышка заползает в лабиринт в точке "Вход". Развернуться и ползти назад мышка не может, поэтому на каждом разветвлении мышка выбирает один из путей, по которому еще не ползла. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите:
а) с какой вероятностью мышка придет к выходу D;
б) с какой вероятностью мышка придет к любому из выходов (рисунок 19).

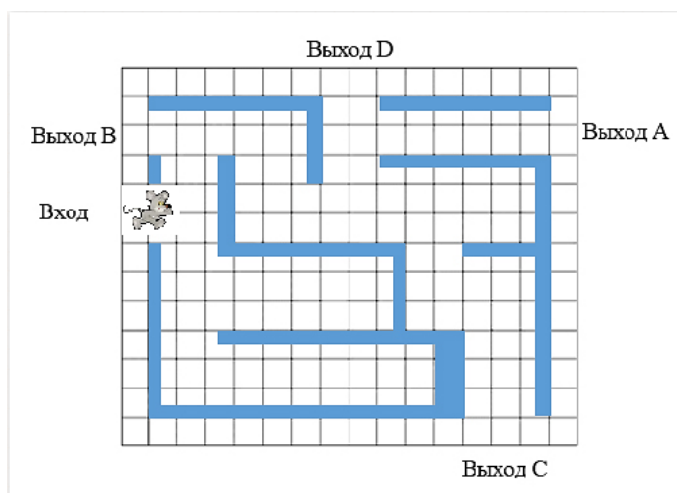


Рисунок 19 – Задача на вероятность событий

Решение

На каждой из четырех отмеченных развилок мышка с вероятностью 0,5 может выбрать или путь, ведущий к выходу D, или другой путь. Это независимые события, вероятность их произведения (события, состоящего в том, что мышка дойдет до выхода D) равна произведению вероятностей этих событий. Поэтому вероятность прийти к выходу D равна $(0,5)^4 = 0,0625$.

Ответ: 0,0625.

Команда победитель выбирает дальнейший маршрут.

Горы «Ребусные»

Учитель. Ребята для того, чтобы нам покорить горы, необходимо отгадать ребусы (рисунок 20-23).

1)



Рисунок 20 – Ребус

2)



Рисунок 21 – Ребус

3)

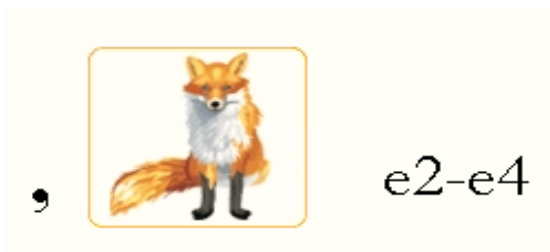


Рисунок 22 – Ребус

4)



Рисунок 23 – Ребус

Ответ к ребусам.

- 1) Событие;
- 2) Сочетания;

3) Исход;

4) Вариант.

Команды получают жетоны.

Члены жюри подводят итоги и называют команду-победителя.

Заключение

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы рассмотрены теоретические и методические аспекты обучения элементам стохастики в средней школе. В ходе проведения работы были реализованы все поставленные задачи:

Проанализировав учебную литературу по математике 5-11 классов с целью прослеживания стохастического курса, можно прийти к выводу, что на данный материал отводится малое количество часов. Но в последние годы, с введением заданий на вероятность и комбинаторику в КИМы ОГЭ и ЕГЭ, намечаются существенные изменения в учебной программе.

Все же существуют такие проблемы, как нехватка методических разработок для преподавания данного материала. Еще совсем недавно темы по теории вероятности и комбинаторике были не обязательными в школьном курсе и были представлены в некоторых учебниках лишь как дополнительный материал.

Поэтому целесообразно проводить дополнительные занятия по данной теме. В связи с этим, был разработан факультативный курс по теме «Комбинаторика и теория вероятностей». Данный курс можно проводить как в 7, так и в старших классах. Как итог факультативного курса – создание кластеров в течение курса и защита их. Разработанный факультативный курс может быть использован учителями школ, а также студентами при подготовке к практическим занятиям по методике преподавания и обучения математики.

Разработана технологическая карта урока «Классическое определение вероятности».

Разработано внеклассное мероприятие «Путешествие в далекую страну Комбинаторики», как заключительный урок по теме «Комбинаторика и теория вероятностей».

В ходе проведения работы была достигнута основная цель исследования – изучены и выявлены особенности и всевозможные подходы к изучению стохастики в средней школе.

Список литературы

1. Алгебра. 7 класс : учеб. / Г. В. Дорофеев [и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева. М. : Дрофа, 2003. 160 с.
2. Алгебра. 7 класс : учеб. / Г. В. Дорофеев [и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева. М. : Дрофа, 2000. 199 с.
3. Алгебра. 8 класс : учеб. / Г. В. Дорофеев [и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева. М. : Дрофа, 2000. 199 с.
4. Алгебра. 9 класс : учеб. / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. 18-е изд. М. : Просвещение, 2000. 166 с.
5. Алгебра. 9 класс : учеб. / А. Г. Мордкович [и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. 12-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2010. 150 с.
6. Афанасьев В. В. Теория вероятностей : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика». М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2007. 149 с.
7. Бунимович Е. А., Булычев В. А. Вероятность и статистика. 5-9 классы: учеб. пособие для общеобразовательных учебных заведений. М. : Дрофа, 2002. 99 с.
8. Бродский Я. С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика : учеб. пособие. М. : Оникс, 2008. 200 с.
9. Дистанционное образование школьников и детей в интерактивной форме | Учи.ру. URL: <https://uchi.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения 15.04.2023).
10. Дорофеев Г. В., Шарыгин И. В. Математика. 5 класс : учеб. М.: Дрофа, 2001. 48 с.
11. ЕГЭ-2023, Математика профильного уровня: задания, ответы, решения. URL: <https://math-ege.sdamgia.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения 02.05.2023).
12. Ерош И. Л. Дискретная математика. Комбинаторика : учеб. пособие. М. : СПбГУАП.СПб., 2001. 37 с.

13. Зубарева И. И., Мордкович А. Г. Математика. 5 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений. 14-е изд. испр. и доп. М. : Мнемозина, 2013. 257 с.
14. Зубарева И. И., Мордкович А. Г. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений. 14-е изд. испр. и доп. М. : Мнемозина, 2014. 118 с.
15. Комбинаторика. 7 класс. Дополнительные главы. URL: <https://sochisiri.us.ru/obuchenie/distant/smena950/4595>. Заглавие с экрана (дата обращения 21.04.2023).
16. Математика. 6 класс : учеб. / Г. В. Дорофеев [и др.]; под ред. Г. В. Дорофеева. М. : Дрофа, 2001. 226 с.
17. Никольский С. М., Потапов М. К. Алгебра и начало математического анализа. 10 класс : учеб. М. : Просвещение, 2009. 338 с.
18. ОГЭ–2023. Математика : задания, ответы, решения. URL: <https://math-oge.sdamgia.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения 10.05.2023).
19. Открытый банк заданий ОГЭ. URL: <https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge>. Заглавие с экрана (дата обращения 02.04.2023).
20. Сапунова Ю. С. Комбинаторика. Ее изучение в школе // Молодой ученый. 2018. № 20. С. 166-200.

Приложение

Сертификат участника курса «Дополнительные главы комбинаторики. 7 класс»



Татьяна Николаевна
Кочекаева



**Дополнительные
главы комбинаторики.
7 класс**

Сертификат с отличием
об окончании курса

Даты проведения курса
Апрель — июль 2023

Номер сертификата
№ 73147

Ссылка для подтверждения подлинности сертификата
edu.sirius.online/certificate_bjly6GXL



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
20 » 09 20 22 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР Кочекаевой Татьяны Николаевны.
(ФИО полностью)

Тема работы «Методические особенности изучения стохастического материала в школе»

Утверждена приказом по Университету от « 28.09 » 20 22 г. № 889/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 15 » 06 20 23 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение учебно-методической литературы по теме исследования.	Октябрь-ноябрь 2022	выполнено
2.	Анализ школьных учебников и интернет-ресурсов на наличие стохастического материала.	Декабрь 2022	выполнено
3.	Анализ ОГЭ и ЕГЭ на наличие стохастического материала.	Январь-февраль 2023	выполнено
4.	Разработка факультативного курса по теме «Комбинаторика и теория вероятностей».	Март-апрель 2023	выполнено
5.	Разработка технологической карты урока «Классическое определение вероятности».	Апрель 2023	выполнено
6.	Разработка внеклассного мероприятия «Путешествие в далекую страну Комбинаторики».	Май 2023	выполнено
7.	Оформление текста работы.	Май-июнь 2023	выполнено
8.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь 2023	выполнено

Дата выдачи задания « 20 » 09 2022 г.

Руководитель М. В. Глебова Глебова М. В.
(подпись) (Ф И О)

Задание принял к исполнению
Т. Н. Кочекаева Кочекаева Татьяна Николаевна
(подпись) (Ф И О)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Кочекаевой Татьяны Николаевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Кочекаева Татьяна Николаевна, студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему *«Методические особенности изучения стохастического материала в школе»*, выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

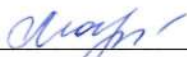
Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


подпись
05.06.23
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 05.06.2023 г.

ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР


подпись

М.В. Глебова

И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Методические особенности изучения стохастического материала в школе»

студентки 5 курса Татьяны Николаевны Кочекаевой

И.О. Фамилия

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»

Руководитель ВКР Мария Владимировна Глебова

И.О. Фамилия



Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Кочекаева Татьяна
Проверяющий: Глебова Мария Владимировна
Организация: Пензенский государственный университет

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://pnzpu-antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 67
Начало загрузки: 05.06.2023 08:11:15
Длительность загрузки: 00:00:12
Имя исходного файла:
VKR_Kochekava.docx
Название документа: VKR_Kochekava2
Размер текста: 69 кБ
Тип документа: Выпускная
квалификационная работа
Символов в тексте: 70894
Слов в тексте: 8906
Число предложений: 911

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 05.06.2023 08:11:28
Длительность проверки: 00:01:38
Комментарии: не указано
Проверенные разделы: титульный лист с. 1, содержание с. 2, основная часть с. 3-72, библиография с. 73-74
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Интернет Плюс*, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация, Медицина, Диссертации НББ, Коллекция НББ, Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ТНУ", СМИ России и СНГ, Шаблонные фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования



СОВПАДЕНИЯ
34.54%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
5.13%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
60.33%

05.06.2023
Д.Д.ММ.ГГГГ

Мария Владимировна Глебова
подпись

И.О. Ф. Глебова
И.О. Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему «Методические особенности изучения стохастического
материала в школе»
студентки Кочекаевой Татьяны Николаевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль «Математика», гр. 183ФПМ51

В выпускной квалификационной работе Кочекаевой Т.Н. рассмотрены методические особенности изучения стохастического материала в средней школе. Актуальность исследования обусловлена тем, что элементы комбинаторики, статистики и теория вероятностей играют большую роль как в науке, так и в повседневной жизни, так как имеют прямую связь с реальной жизнью. Исходя из этого современные школьники должны уметь воспринимать, анализировать любую информацию, владеть вероятностным и статистическим мышлением.

Рассмотрение данной темы также необходимо в связи с тем, что задания, содержащие элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей встречаются в материалах ОГЭ и ЕГЭ.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

В первой главе проанализированы учебная, учебно-методическая литература, интернет-ресурсы, варианты КИМ ОГЭ и ЕГЭ по теме исследования, изложен основной теоретический материал по данной теме.

Во второй главе разработан факультативный курс «Комбинаторика и теория вероятностей», технологическая карта урока по теме «Классическое определение вероятности» и методика обучения. В течение этого курса обучающиеся заполняют два кластера: один по комбинаторике, второй по теории вероятностей. Разработано внеклассное мероприятие на тему «Путешествие в далекую страну Комбинаторики», на котором проходит защита полученных школьниками кластеров.

Разработанный факультативный курс может быть использован учителями математики для подготовки учащихся к ОГЭ и ЕГЭ.

Считаю, что выпускная квалификационная работа Кочекаевой Т.Н. «Методические особенности изучения стохастического материала в школе» удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам, и заслуживает оценки "отлично".

Руководитель, к. ф.-м.н., доцент кафедры
«Математическое образование»



Глебова М. В.