МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методические особенности изучения комбинации окружности и многоугольников в курсе геометрии основного общего образования»

Студент 21.05.25 (подпись, дата) Служеникина Софья Игоревна (ФИО полностью)

Руководитель 21.05.25 (подпись, дата) Сорокина М.В. (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 28.06.25 (подпись, дата) Журавлева Е.Г. (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой (подпись, дата) Паньженский В.И. (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 5 (отл) (протокол заседания ГЭК от 8.07.25 № 1)

Секретарь ГЭК 8.07.25 (подпись, дата) Журавлева Е.Г. (фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **3**

ГЛАВА I ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С КОМБИНАЦИЕЙ ОКРУЖНОСТИ И МНОГОУГОЛЬНИКОВ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ **6**

1.1 Анализ Федеральный рабочих программ основного общего образования 6

1.2 Анализ теоретического материала учебников 10

1.3 Анализ практического материала учебника 20

ГЛАВА II РАЗРАБОТКА САЙТА ПО МАТЕРИАЛАМ ОГЭ **30**

2.1 Комбинации окружности и многоугольника в заданиях ОГЭ 30

2.2 Разработка сайта по темам, связанным с комбинацией окружности и многоугольников по заданиям ОГЭ 35

ЗАКЛЮЧЕНИЕ **40**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ **42**

ПРИЛОЖЕНИЕ **44**

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия - один из самых сложных предметов школьного курса. Но благодаря ее изучению учащиеся развивают логическое мышление, пространственное воображение, приобретают различные навыки и умения. Через решение задач ученики учатся, выстраивать логические цепочки, мыслить последовательно, делать выводы на основе представленных фактов. Что впоследствии находит практическое применение в реальной жизни.

Часто сообщение учителя о том, что на последующих уроках учащиеся будут работать с окружностью, может смутить их. Изначально обучающимся бывает непросто научиться правильно чертить окружность: циркуль часто скользит, либо давление руки вызывает расхождение ножек инструмента. Изучении сочетаний окружности с различными многоугольниками —тема, которая также нередко воспринимается школьниками как трудная и даже пугающая.

Анализ репетиционных и реальных экзаменов по математике подтверждает, что задания, связанные с геометрией, вызывают наибольшие затруднения среди школьников. Вместе с тем выполнение хотя бы двух таких заданий является обязательным условием успешной сдачи экзамена. Среди наиболее сложных заданий выделяются вопросы, касающиеся свойств вписанных и описанных окружностей относительно различных многоугольников.

Изучением таких комбинаций занимаются ученики средней школы, начиная с седьмого класса, где рассматриваются свойства вписанной и описанной окружностей треугольника. В восьмом классе учащиеся переходят к изучению аналогичных вопросов, касающихся четырёхугольников, а в девятых классах углубляются в особенности комбинации окружности и правильных многоугольников. Изучение этих тем знакомит обучающихся с новыми понятиями, свойствами и теоремами, учит решать задачи.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей изучения комбинации окружности и многоугольников в курсе геометрии основного общего образования.

Цель: выявить методические особенности обучения школьников решению задач, посвященных комбинации окружности и многоугольников в курсе геометрии основного общего образования и разработать сайт с системами задач по данным темам, для использования учителем материалов сайта на уроках геометрии.

Объект: процесс обучения школьников геометрии в основной школе.

Предмет: методические особенности обучения решению планиметрических задач, посвященным комбинации окружности и многоугольников.

Задачи:

1. Проанализировать рабочие программы базового и углубленного уровней по данной теме.
2. Проанализировать теоретический и практический материал учебника автора Л.С. Атанасяна по темам комбинации окружностей и многоугольников.
3. Представить анализ задании номер 16 из ОГЭ по математике, в которых встречаются вписанные и описанные многоугольники.
4. Разработать сайт с системами задач, посвященным комбинации окружности и многоугольников.

Практическая значимость данного исследования состоит в том, что при изучении данных тем учитель может использовать задания из ОГЭ для подготовки к сдаче экзаменов. Новизна исследования заключается в том, что существующие интернет-ресурсы для подготовки к ОГЭ предназначены для отработки задач, собранных в общую тему, но нет разделения по вписанным и описанным окружностям многоугольников, а также градации по классам обучения, что требует у учителя больших временных затрат на поиск заданий по

теме, например, «Вписанная окружность трапеции». Использование материалов моего сайта облегчит работу учителя, и он сможет отработать задания ОГЭ на уроках геометрии в 7-9 классах.

ГЛАВА I ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С КОМБИНАЦИЕЙ ОКРУЖНОСТИ И МНОГОУГОЛЬНИКОВ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

1.1 Анализ Федеральный рабочих программ основного общего образования

Перед началом учебного года, каждый учитель математики в первую очередь изучает рабочую программу. Рабочая программа – это незаменимый инструмент любого педагога, с помощью которого он не только планирует и организует образовательный процесс, но и управляет им. Документ конкретизирует порядок, содержание и объем изучения предмета, курса или дисциплины.

В 2023 году в России ввели Федеральные основные общеобразовательные программы, так называемый, «золотой стандарт». До его введения у учителя была возможность выбрать учебник, так как список учебных пособий носил рекомендательный характер несмотря на то, что утверждался Минпросвещением, темы могли трактоваться по усмотрению учителя, самостоятельно определялось количество часов на изучение материала. Эти нововведения сделаны для того, чтобы сократить перечень учебников по разным предметам, сделать образовательный процесс прозрачным. Чтобы детям при переезде в другой город, в другую школу не приходилось перестраиваться на обучение по другим учебникам, перескакивать темы, так как в их школе они могли это еще не пройти, а в новой школе уже данный материал пройден.

Переход на «золотой стандарт» происходит не одномоментно. В 2025 году в школах дети старших классов учатся по старым учебникам, по старым программам, которые были до перехода на ФООП.

Что входит в ФООП

Учебно-методическая документация ФООП включает:

- федеральные учебные планы;
- федеральный план внеурочной деятельности;
- федеральный календарный учебный график;
- федеральный календарный план воспитательной работы;
- федеральную рабочую программу воспитания;
- федеральные рабочие программы учебных предметов;
- программу формирования УУД;
- программа коррекционной работы.

Проведем анализ Федеральной рабочей программы основного общего образования по математике (базовый уровень). А именно, рассмотрим Федеральную рабочую программу учебного курса «Геометрия» в 7-9 классах. [1].

В разделе «Содержание обучения» мы видим, что темы, посвященные комбинации окружности и многоугольников распределяются таким образом: в конце 7 класса изучаются и вписанные и описанные окружности треугольника; в конце 8 класса – вписанные и описанные четырехугольники; а в 9 классе изучаются правильные многоугольники, через которые вводится понятие длины окружности.

В 7 классе раздел «Окружность и круг. Геометрические построения» изучается на протяжении 14 учебных часов. Это время отведено на изучение семи тем. При рассмотрении этих тем, учащиеся узнают что такое окружность, хорда, диаметр и их свойства; какие прямые называются касательными к окружности; окружность, вписанная в угол; что такое геометрическое место точек (ГМТ) и его применение вы задачах; окружность, вписанная и описанная около треугольника, а также решаются простейшие задачи на построение.

На изучение тем, касающихся комбинации окружности и треугольника, отводится по плану всего-навсего 2 часа. За это время учащиеся должны достичь

следующих предметных результатов: владеть понятиями вписанной и описанной окружностей треугольника, уметь находить ее центр, пользоваться фактами о том, что биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, и о том, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

В 8 классе на раздел «Углы в окружности. Вписанные и описанные четырехугольники. Касательные к окружности. Касание окружностей» выделено 13 часов. Комбинация окружности и четырехугольника рассматривается на 3 уроках. Эти часы отведены на овладение таких видов деятельности, как вычисление углов через теорему о вписанном четырехугольнике, исследование вписанных и описанных четырехугольников, выведение их свойство и признаков, а также использование при решении задач свойств и признаком четырехугольника.

В 9 классе изучаются вписанные и описанные правильные многоугольники. На изучение раздела, посвященного правильным многоугольникам отведено 8 часов в тематическом планировании. Что же касается вписанных и описанных правильных многоугольников, то на их изучение приходится 2 часа. После прохождения данного раздела, учащиеся должны формулировать определение правильных многоугольников, уметь определять элементы этих фигур, пользоваться при решении задач понятием длины окружности, которое введено через правильные многоугольники

Общее количество времени, отведенное на изучение вышеперечисленных тем в школьном курсе геометрии базового уровня, составляет 7 часов.

Теперь проведем анализ рабочей программы углубленного уровня. [2]. В отличии от базового уровня, в котором на изучение математики приходиться 6 часов в неделю: 3 часа отведено изучению алгебры, 2 часа – геометрии, и 1 час на изучение вероятности и статистики. Если класс с углубленным изучением математики, тогда на ее изучение приходится 8 учебных часов в неделю: 4 часа посвящено алгебре, 3 часа – геометрии, и 1 час – вероятность и статистика.

Особенность углубленного изучение геометрии заключается в том, что обучающиеся уверенно овладевают определенными понятиями, а не просто знакомятся с ними. Темы программы базового курса геометрии изучаются на более глубоком уровне, учащиеся приобретают умения, которые помогают им уверенно применять свои знания в смежных предметах, таких как физика и информатика, а также использовать свои знания при решении практических задач.

Как и в программе базового уровня, одним из предметных результатов к концу обучения в 7 класса, обучающийся должен владеть понятием описанной около треугольника окружности и уметь находить ее центр.

В 7 классе на раздел: «Окружность. Геометрические места точек. Построение с помощью циркуля и линейки» отводится 18 часов. За это отведенное время необходимо изучить 6 тем, одна из которых – «Описанная окружность треугольника, ее центр». На изучение этой темы выделяется 2 часа. За это время обучающиеся должны овладеть понятием описанной окружности треугольника.

В конце 8 класса изучается раздел «Углы и четырехугольники, связанные с окружностью», на которые отводится 20 часов. Одной из тем данного раздела является тема «Вписанные и описанные четырехугольники. Свойства и признаки вписанного четырехугольника». Одними из немногих планируемых результатов изучения данного раздела являются: владение понятием описанной и вписанной окружности треугольника и четырехугольника; умение применять их свойства при решении задач. Основные виды деятельности – это вычисление углов через теорему о вписанном четырехугольнике, исследование вписанных и описанных четырехугольников, их признаки и свойства, использование полученного материала при решении задач. Для изучения темы «Вписанные и описанные четырехугольники. Свойства и признаки вписанного четырехугольника» отводится 6 часов в календарно-тематическом планировании.

В 9 классе с углубленным изучением математики, так же, как и при базовом изучении математики, одним из предметных результатов становится владение понятиями правильного многоугольника, которое состоит из изучения вписанного и описанного правильного многоугольника. Тема «Правильные многоугольники, вычисление их элементов» находится в разделе учебника под названием «Длина окружности и площадь круга». При прохождении которой, основным видом деятельности обучающихся становится формулировка определения правильных многоугольников, нахождение их элементов. Данная тема изучается на протяжении 2 часов.

Таким образом, на изучении комбинации окружностей и многоугольников в классах с углубленным изучением математики приходиться 10 часов, что на 3 часа больше, чем на уровне базового изучения. Это позволяет немного глубже изучить данную тему и решать задачи повышенной сложности.

1.2 Анализ теоретического материала учебников

Изучив Федеральный перечень учебников, могу отметить следующее. Во-первых, после введения новых Федеральных государственных образовательных стандартов и, так называемого, «золотого стандарта», для изучения геометрии в 7-9 классах в школах могут использоваться только учебник Геометрия 7-9-е классы: базовый уровень авторов Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и другие. Во-вторых, в данном перечне я не обнаружила учебников для углубленного изучения геометрии в 7-9 классов. Но для 10-11 классов такие учебники внесены в Федеральный перечень учебников.

До перехода на «золотой стандарт», а именно в 2020 году, школа могла выбрать учебники следующих авторов: Погорелов А.В.; Смирнова И.М., Смирнов В.А.; Мерзляк А.Г., Поляков В.М., под редакцией Подольского В.Е.; Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., под редакцией Подольского В.Е. и многие другие учебники разных авторских коллективов.

В своей выпускной квалификационной работе мне бы хотелось проанализировать учебники геометрии авторов:

- Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и другие;
- Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., под редакцией Подольского В.Е.;
- Погорелов А.В.

Выбор первого учебника обусловлен тем, что он является, так скажем, основным и единственным учебником, разрешенным при изучении геометрии в 7-9 классов в 2024-2025 учебном году. Учебники следующего автора я решила проанализировать в связи с тем, что только у А.Г. Мерзляка я обнаружила учебники для базового и углубленного уровней. А третий учебник я выбрала из-за того, что при изучении предмета «Методика обучения и воспитания (математика)» мы чаще всего рассматривали учебники Атанасяна Л.С. и Погорелова А.В.

Для начала рассмотрим теоретический материал учебника, затем, перейдем к практическому материалу.

1) Учебник авторов: Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и другие. [8].

Как и в рабочей программе, в учебнике геометрии 7-9 класса авторского коллектива Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и другие, в первую очередь семиклассники изучают комбинацию окружности с треугольником, далее, в 8 классе, окружность и четырехугольник, а в конце 9 класса изучается сочетание окружности и правильного многоугольника

1. Вписанная и описанная окружность треугольника

Данная тема находится в 5 главе учебника, которая называется «Геометрические места точек. Симметричные фигуры». Перед прохождением вписанных и описанных в треугольник окружностей, обучающиеся рассматривают свойства биссектрисы угла, серединного перпендикуляра к

отрезку, диаметров и хорд окружности, а также взаимное расположение окружности и прямой и касательная к окружности.

Понятие вписанной в треугольник окружности начинается с введения с окружности, вписанной в неразвернутый угол, а затем обозначается, что окружность тогда называется вписанной в треугольник, когда все стороны треугольника касаются этой окружности. В этом случае окружность является вписанной, а треугольник – описанным около это окружности. Далее следует теорема, которая говорит о том, что в любой треугольник может быть вписана окружность, приводится доказательство данной теоремы, в котором используются свойства точки пересечения биссектрис и свойство касательной к окружности. И замечается, что окружность в треугольник можно вписать только одну.

После происходит введение понятия описанной около треугольника окружности и доказывается теорема об окружности, описанной около треугольника. Доказательство проходит через свойства точки пресечения серединных перпендикуляров. Замечается, что только одну окружность можно описать около треугольника.

Отдельно отмечу то, что все определения выделены не самым заметным образом. Они не обведены рамкой, не напечатаны полностью жирным шрифтом, а только лишь отдельные слова, такие как «описанная» и «вписанная». А о нахождении центров этих окружностей обучающиеся могут сделать вывод только из доказательств теорем.

2. Вписанная и описанная окружности четырехугольника.

В 8 классе вписанный в окружность четырехугольник рассматривается отдельно от описанного четырехугольника, в то время как отношение окружности и треугольника изучаются совместно в одном пункте учебника.

Первым делом вводится определение, далее делается замечание, что не в каждый четырехугольник можно вписать окружность, так как существует свойство для описанного четырехугольника, которое гласит, что окружность

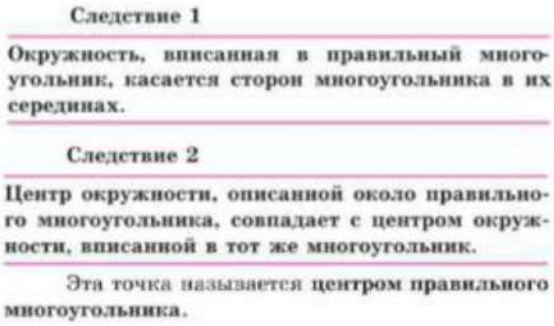
можно вписать лишь в тот четырехугольник, у которого суммы противоположных сторон равны. Обратное утверждение тоже верно: если суммы противоположных сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.

После изучения описанного около окружности четырехугольника следует вписанный четырехугольник. Как и в любой другой теме сначала дается определение, а только после этого рассматриваются свойства. Тема выписанного четырехугольника – не исключение. Автор дает определение и отмечает, что около четырехугольника не всегда получится описать окружность. И вписать, и описать окружность можно в любой треугольник, но не четырехугольник. Определение возможности описания четырехугольника около окружности происходит по свойству углов данного четырехугольника.

3. Окружность, описанная около правильного многоугольника. Окружность, вписанная в правильный многоугольник.

Глава, в которой находятся рассматриваемые темы начинается с пункта «Правильный многоугольник», в котором дается определение и формула для вычисления угла правильного многоугольника. Затем, следует пункт «Окружность, описанная около правильного многоугольника». Здесь автор напоминает, какая окружность называется описанной около многоугольника, и доказывается теорема об окружности, описанной около правильного многоугольника.

В следующем пункте аналогично рассматривается окружность, вписанная в правильный многоугольник. Сначала вспоминается определение окружности, вписанной в многоугольник, потом доказывается теорема об окружности, вписанной в правильный многоугольник. В конце пункта представлены еще два следствия из этой теоремы (Рисунок 1).



Следствие 1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Следствие 2

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Эта точка называется **центром правильного многоугольника.**

Рисунок 1

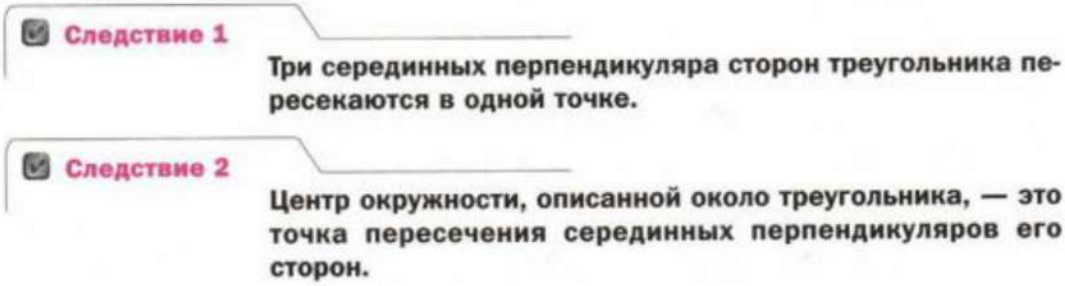
За следствиями идет выведение формулы вычисления площади правильного многоугольника, а также формулы нахождения его стороны и радиуса окружности, вписанной в него.

2) Учебники авторов: Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С., под редакцией Подольского В.Е.

1. Описанная и вписанная окружности треугольника.

Геометрия 7 класс. [9]. В этом учебнике мне больше нравится, как изложен теоретический материал. Сами формулировки не сильно отличаются, но, в отличии от учебника Л.С. Атанасяна, вся теория более структурированная и выделена. В отличии от предыдущего рассмотренного учебника, здесь все определения, теоремы, следствия из теорем выделены цветом жирным шрифтом.

В учебнике дается определение вписанного в окружность треугольника, теорема, такая же как в учебнике Л.С. Атанасяна, с доказательством и два следствия (Рисунок 2).



Следствие 1

Три серединных перпендикуляра сторон треугольника пересекаются в одной точке.

Следствие 2

Центр окружности, описанной около треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.

Рисунок 2

В однотипной же последовательности изложения материала идет рассмотрение окружности, вписанной в треугольник. То есть, дается

определение, теорема с доказательством и два следствия из доказательства (Рисунок 3).

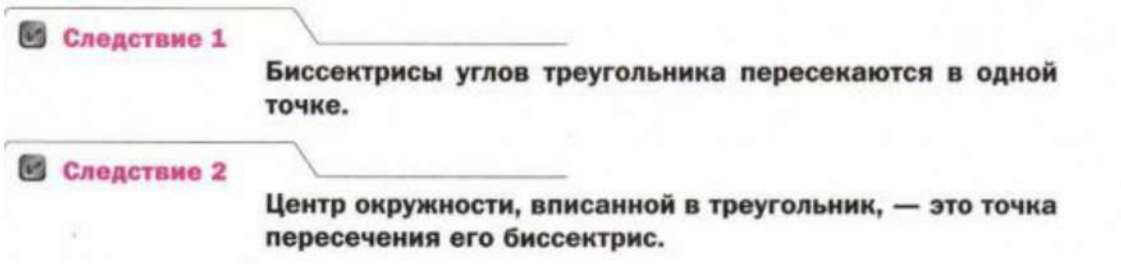


Рисунок 3

В учебнике «Геометрия» 7 класс, авторы: А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков, под редакцией В.Е. Подольского [4] для углубленного изучения вышеизложенная теория представлена в точно таком же виде, но добавляется еще пункт о вневписанной окружности треугольника.

2. Описанная и вписанная в четырехугольник окружность

Геометрия 8 класс. [10]. Тема 8 класса по комбинации окружности и четырехугольника находится в главе «Четырехугольники» и изучается в едином блоке про четырехугольники, а не относится к блоку об окружностях, как это происходит в учебниках других авторов. Материал изложен следующим образом: дается определение, за ним следуют две теоремы 10.1 и 10.2 с доказательствами (Рисунок 4). В учебнике Л.С. Атанасяна эти теоремы обозначены как свойство и обратное утверждение.

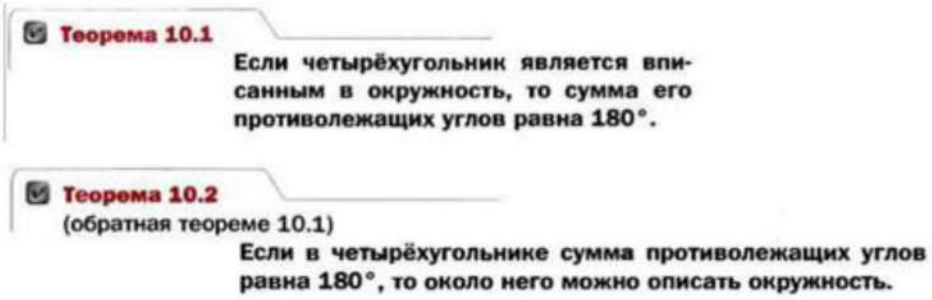


Рисунок 4

В этом же параграфе вводится определение вписанной окружности четырехугольника, теоремы 10.3 и 10.4 с доказательством (Рисунок 5). Которые в предыдущем учебнике обозначены как свойство и обратное к нему утверждение.

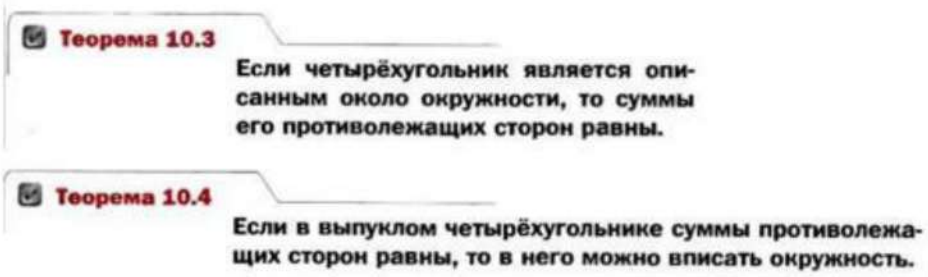


Рисунок 5

В учебнике для углубленного изучения данная тема рассматривается более детально. [5]. Немного иначе дается определение четырехугольника, вписанного в окружность. Следующие за определением теорема и обратная к ней теорема аналогичны теоремам учебника для базового изучения. Но, помимо этого, дается еще одна теорема с доказательством и обратная ей теорема, но без доказательства (Рисунок 6).

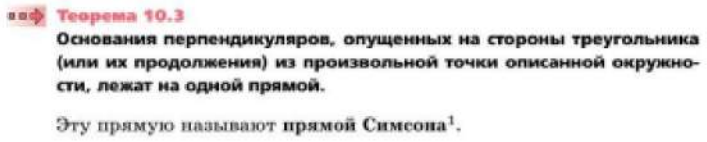


Рисунок 6

Что же касается окружности, вписанной в четырехугольник, то в учебнике А.Г. Мерзляка для углубленного изучения все так же, как и в учебнике для базового изучения. С одним исключением. Теорема вписанной окружности в четырехугольник и обратная к ней дополнительно объединили в одну теорему, которая звучит так: для того, чтобы четырехугольник был описан около окружности, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противолежащих сторон были равны.

3. Вписанная и описанная окружность правильного многоугольника

Геометрия 9 класс. [3]. Данная тема находится в начале учебника в главе 2 «Правильные многоугольники».

В этом учебнике, в отличии от учебника Л.С. Атанасяна, пункт, посвященный теме не выделен отдельно. Тема по комбинации окружности и правильного многоугольника включена в параграф 6, в котором дается

представление о правильных многоугольниках и их свойствах. Только лишь одна теорема с доказательством посвящена данной теме (Рисунок 7).

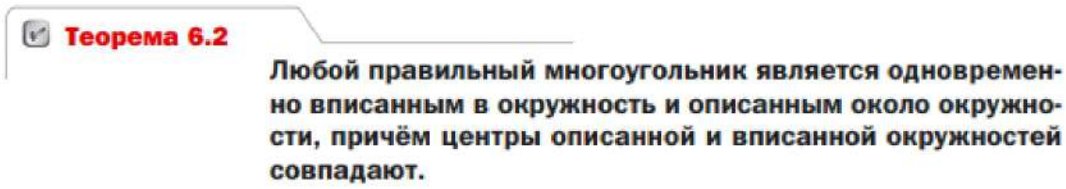


Рисунок 7

После выводятся формулы для нахождения радиусов окружностей.

В учебнике геометрии для углубленного изучения эта тема, идентична по изложению теоретического материала [6].

3) Учебник А.В. Погорелова [12]

1. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник

Перед изучением этой темы автором предусмотрено повторение понятий окружность, радиус, диаметр и хорда.

Ее изучение темы начинается стандартно, то есть с введения понятия окружности, описанной около треугольника. Сама формулировка этого определения совпадает с формулировками в учебниках других авторов. Затем идет теорема 5.1 с доказательством (Рисунок 8).

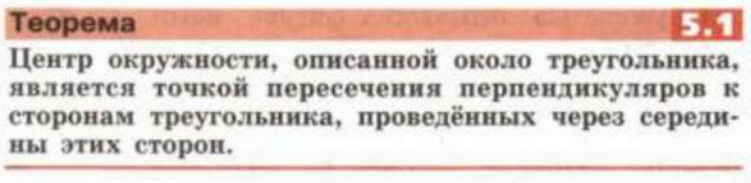
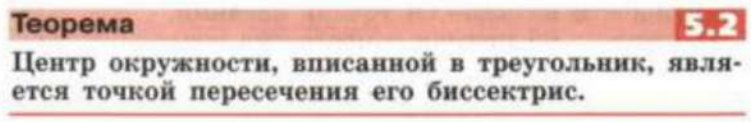


Рисунок 8

После доказательства делается замечание с определением серединного перпендикуляра. Далее рассматривается решение задачи на доказательство пересечения серединных перпендикуляров.

Следующей за этой темой идет тема «Касательная к окружности». Затем изучается окружность, вписанная в треугольник.

Начинается ее изучения с определения, после которого идет теорема 5.2 с доказательством (Рисунок 9). А после нее дается определение вневписанной окружности.


Теорема 5.2

Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.

Рисунок 9

На этом теоретический материал по данным темам заканчивается. В отличии от других учебников, здесь не говорится, что, например, окружность называется вписанной, а треугольник – описанный около окружности. Так же в учебниках Л.С. Атанасяна и А.Г. Мерзляка серединный перпендикуляр и биссектриса рассматриваются как геометрическое место точек. В учебнике А.В. Погорелова этого нет.

2. Вписанные и описанные четырехугольники. Вписанные и описанные правильные многоугольники

В учебнике А.В. Погорелова эта тема осваивается учениками 9 класса, а не 8 класса, как во всех предыдущих учебниках. Комбинация окружности и правильного многоугольника относится к параграфу «Многоугольники». Перед переходом к изучению темы, учащиеся проходят ломаную, узнают такие понятия как выпуклые, правильные многоугольники. Основным моментом изучения вписанных и описанных правильных многоугольников является изучение формул нахождения радиус вписанных и описанных окружностей в общем и частном виде для равностороннего треугольника, квадрата и правильного шестиугольника.

Как и при рассмотрении любой темы в геометрии изучение правильных многоугольников начинается с определений. Формулируются определения вписанного в окружность правильного многоугольника и описанного около окружности правильного многоугольника. Сами формулировки практически идентичные в разных учебниках.

За определениями следует теорема 13.3 с доказательством (Рисунок10). Затем автором учебника поясняется, что центры окружностей, о которых идет речь в теореме, совпадают. А угол, под которым видна сторона правильного многоугольника из его центра, называется центральным углом многоугольника.

Рисунок 10

А вот уже после вписанных и описанных правильных многоугольников предлагается к изучению комбинация окружности и четырехугольников. Здесь рассматривается теорема 13.4 с доказательством, которая выражает свойство и признак вписанного четырехугольника (Рисунок11).

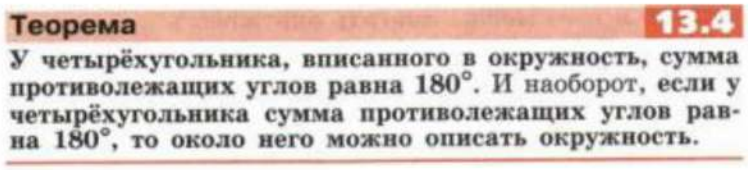


Рисунок 11

Затем, следует теорема 13.5, выражающая свойство и признак описанного четырехугольника (Рисунок 12).

Рисунок 12

Таким образом, по теоретическому материалу рассмотренных учебников можно сделать следующий вывод. Учебники разных авторов по-разному, в разных формулировках преподносят теорию для изучения. В учебнике Л.С. Атанасяна теория изложена подробно и понятно. А в учебнике А.Г. Мерзляка мне понравилось, что все определения выделены жирным шрифтом и своим цветом, в отличии от учебников двух других авторов, где выделены только теоремы.

1.3 Анализ практического материала учебника

Задачи в геометрии – неотъемлемая часть ее изучения. Чаще всего практический материал в учебнике можно разделить на несколько типов: задачи на построение, задачи на доказательство, задачи на нахождение.

В учебнике геометрии Л.С. Атанасяна весь практический материал находится в конце каждого параграфа и сразу по всем пунктам параграфа без разделения, задания, которые можно дать для выполнения в домашней работе никак не выделены, учитель сам определяет какие упражнения задать на дом. В учебнике по рассматриваемым темам достаточно много задач, также есть задачи повышенного уровня сложности для углубленного изучения геометрии.

В учебниках геометрии А.Г. Мерзляка после каждого пункта сразу идут задания, которые разделяются на практические и просто упражнения. Упражнения, в свою очередь, разделяются по уровням сложности: простые, среднего уровня сложности, сложные, задачи для математических кружков и факультативов. Номера упражнений для домашней работы выделены зеленым цветом, что очень удобно для учителя и для обучающихся, так как эти задания похожи на те, которые будут решаться на уроке и у учеников будет опора. Достаточное количество задач и их дифференциация по уровню сложности, поможет учителю подготовить и провести качественный урок по каждой теме.

В учебнике геометрии А.В. Погорелова задания расположены в конце главы, как и в учебнике Л.С. Атанасяна, но в отличии от него, задачи разделены по соответствующим пунктам главы. Но, как мне показалось, практического материала недостаточно для отработки изучаемой темы.

В современной школе наибольшее распространение получил учебник Л.С. Атанасяна и др., а также, только этот учебник по геометрии представлен в Федеральном перечне учебников, допущенных к использованию в образовательном процессе в 2024/2025 учебном году. Поэтому рассмотрим задачи из этого учебника. (Приложение 1).

1. Вписанная и описанная окружности треугольника

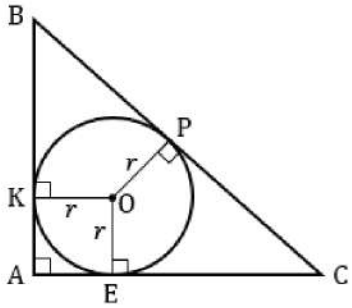
Первые два упражнения (№364, №365) посвящены построению вписанной и описанной окружностей тупоугольного, прямоугольного и остроугольного треугольников и определению расположения центра окружности относительно треугольника. В ходе выполнения построений и с помощью учителя, обучающиеся выяснят, что центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис, а центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров.

В следующем №366 рассматривается частный случай – вписанная и описанная окружности равностороннего треугольника и доказывается, что центры этих окружностей совпадают. Для доказательства этой задачи нужно применить свойства равнобедренного треугольника.

№367 и №368 – это задания, которые направлены на понимание определения вписанных и описанных окружностей. С помощью этих заданий учитель сможет проверить знание и понимание изученной теории.

В следующем номере ученикам предлагается доказать, что центром, описанной около прямоугольного треугольника окружности, является середина гипотенузы. Для доказательства придется вспомнить и применить свойство диаметра, который гласит, что из каждой точки окружности любой диаметр, не проходящий через данную точку виден под прямым углом.

Решим задачу 371 (Приложение 1).



Дано: ΔABC – прямоугольный;

BC – гипотенуза; BC = 26 см

r = 4 см

Найти: $P_{\Delta ABC}$

Решение: BC, AB, AC – касательные к окружности; BP = BK, PC = CE, (по свойству отрезков касательных); AK = AE = r, т.к. AKOE – квадрат

$P_{\Delta ABC}$ = AB + BC + AC = BK + KA + BC + CE + AE = BK + r + BC + CE + r = (BP + PC) + BC + r + r = 26 + 26 + 4 + 4 = 60 см

Ответ: 60 см.

В номере 372 используются те же свойства, что и в предыдущем задании, и через гипотенузу и сумму катетов выражается диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности.

Для того, чтобы решить следующую задачу и доказать, что центры вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника. В доказательстве используется свойство биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, и расположение центров вписанной и описанной окружностей треугольника. Задача легко доказывается, если ученики умеют применять ранее изученное.

Таким образом, в процессе решения задач, обучающиеся выделяют следующие определения и свойства:

1) Центром вписанной окружности треугольника является точка пересечения биссектрис.

2) Центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров.

3) Центры вписанной и описанной около равностороннего треугольника совпадают.

4) Центром описанной около прямоугольного треугольника окружности является середина гипотенузы.

5) Периметр прямоугольного треугольника, описанного около окружности, можно найти по формуле $P = 2c + 2r$, где c – длина гипотенузы, r – радиус вписанной окружности.

6) Чтобы найти диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности, нужно из суммы катетов вычесть гипотенузу.

7) Центры вписанной и описанной около равнобедренного треугольника лежат на серединном перпендикуляре, проведенному к основанию треугольника.

2. Вписанная и описанная окружности четырехугольника

В учебнике 12 заданий, посвященных комбинации окружности и четырехугольника, 7 упражнений на вписанную в четырехугольник окружность, 5 задач на описанную около четырехугольника окружность. (Приложение 2)

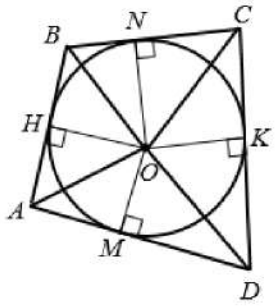
Первая задача этого пункта (№784) направлена на применение свойства описанного четырехугольника.

Следующий номер 785 – это задача на доказательство того, что если в параллелограмм вписана окружность, то этот параллелограмм – ромб.

Решив следующую задачу, обучающиеся докажут, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. В №787 применят полученную формулу для нахождения площади четырехугольника, в который вписана окружность с радиусом 5 см, и сумма противоположных сторон этого четырехугольника равна 12 см. А в №789 с помощью формулы $S = \frac{Pr}{2}$ найдут радиус вписанной в четырехугольник окружности. Для решения двух последний номеров нужно будет использовать свойство описанного около окружности четырехугольника.

В номере 789 учащиеся должны доказать, что в любой ромб можно вписать окружность. Сделать это достаточно легко, зная определение ромба и свойство сторон четырехугольника, описанного около окружности.

Номер 794 нужно доказать, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то ее центр является точкой пересечения биссектрис. Рассмотрим доказательство.



Дано: окружность с центром O вписана в четырехугольник ABCD

Доказать: O – точка пересечения биссектрис

Доказательство: AB и BC – касательные к окружности, H и N – точки касания, OH и ON – радиусы, OH ⊥ AB, ON ⊥ BC (по свойству касательных).

Рас. ∆BOH и ∆BON – прямоугольные:

1) OH = ON (как радиусы) 2) ∠ BHO = ∠ BNO = 90° 3) BH = BN (по свойству отрезков касательных)	⇒△BOH = △BON (по двум сторонам и углу между ними) ⇒ ∠ HBO = ∠ NBO⇒ ⇒ BO - биссектриса

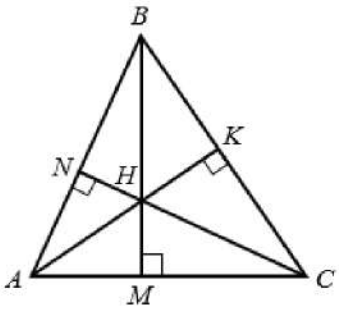
Аналогично доказывается, что △ONC = △OCK; △OKD = △OMD и △MOA = △AOH ⇒ OC, OD, AO – биссектрисы ⇒ O – точка пересечения биссектрис. Что и требовалось доказать.

Все оставшиеся задачи (№ 790 – 794) посвящены описанной около окружности четырехугольника.

Задачи под номерами 790, 791, 792 на доказательство с использованием свойства углов четырехугольника, вписанного в окружность. А именно, нужно доказать, что окружность можно описать около любого прямоугольника, около любой равнобедренной, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм – прямоугольник, а если около трапеции можно описать окружность, то трапеция равнобедренная.

Рассмотрим и докажем номера 793 и 795 (Приложение 2).

793. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK, BM, CN, пересекающиеся в точке H. Докажите, что около каждого из четырехугольника CMHK, AMHN, BNHK можно описать окружность.



Дано: △ ABC – остроугольный

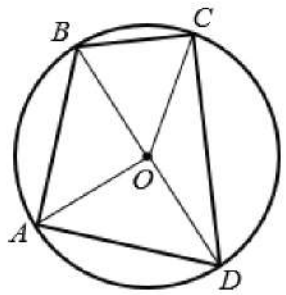
AK, BM, CN – высоты, пересекающиеся в точке H

Доказать: около четырехугольников CMHK, AMHN, BNHK можно описать окружности

Доказательство: рассмотрим четырехугольник CMHK: ∠ CMH = ∠ CKH = 90°, ∠ CMH + ∠ CKH = 180° ⇒ ∠ MHK + ∠ MCK = 180° (по свойству углов четырехугольника) ⇒ около четырехугольника CMHK можно описать окружность (по свойству вписанного в окружность четырехугольника).

Аналогично доказывается, что около четырехугольников AMHN, BNHK можно описать окружности. Что и требовалось доказать.

795. Докажите, что если около четырехугольника можно описать окружность, то ее центр является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого четырехугольника.



Дано: окружность с центром O описана около четырехугольника

Доказать: O – точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам четырехугольника.

Доказательство: OA = OB = OC = OD – радиусы $\Rightarrow$ точка O равноудалена от вершин четырехугольника $\Rightarrow$ O – точка пересечения серединных перпендикуляров (по следствию из теоремы о серединном перпендикуляре как о геометрическом месте точек). Что и требовалось доказать.

Итак, с помощью представленных задач по теме «Вписанная и описанная окружности четырехугольника» обучающиеся отработают свойства вписанных и описанных четырехугольников, а также узнают следующее:

1) Периметр описанного четырехугольника можно найти по формуле:

$P = 2(a+c)$, где $(a+c)$ – сумма противоположных сторон.

2) Если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм – ромб.

3) Площадь описанного многоугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности.

4) В любой ромб можно вписать окружность.

5) Центром вписанной в четырехугольник окружности является точка пересечения биссектрис.

6) Описать окружность можно около любого прямоугольника и около любой равнобедренной трапеции.

7) Если параллелограмм можно вписать в окружность, то этот параллелограмм – прямоугольник.

8) Если около трапеции можно описать окружность, то трапеция равнобедренная.

9) Центром описанной около четырехугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров.

3. Вписанная и описанная окружности четырехугольника

Так как центры вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника совпадают, то в решениях задач используются одновременно свойства вписанной и описанной окружностей. (Приложение 3).

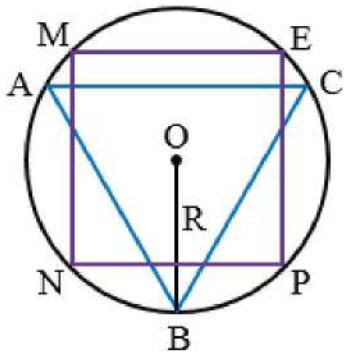
Первая задача этого раздела № 1174 направлена на доказательство того, что серединные перпендикуляра к любым двум сторонам правильного многоугольника либо пересекаются, либо совпадают. Для доказательства необходимо описать окружность около этого правильного многоугольника и использовать определение правильного многоугольника, свойства серединного перпендикуляра и понятие описанной окружности правильного многоугольника.

Следующая задача похожа на предыдущую, но для доказательства в правильный многоугольник вписывают окружность. А для того, чтобы доказать, что прямые, содержащие биссектрисы любых двух углов правильного многоугольника, либо пересекаются, либо совпадают, обучающимся нужно вспомнить понятие вписанной окружности и свойство биссектрисы угла.

Номер 1176 и 1177 направлены на отработку формул для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности. Если известна сторона квадрата, то с помощью формулы: $a_4 = R\sqrt{2}$, где R – радиус описанной окружности, можно найти радиус описанной около квадрата окружности. Из формулы $r = Rcos\ \frac{180^\circ}{n}$, найдем радиус r вписанной в квадрат окружности. Зная сторону квадрата легко найти его периметр и площадь, а если сторона неизвестна, но известен радиус описанной окружности, то по формуле: $a_n = 2Rsin\ \frac{180^\circ}{n}$, помня таблицу синусов обучающийся легко вычислит сторону квадрата или любого правильного многоугольника.

Решим № 1178.

1178. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите сторону квадрата, вписанного в ту же окружность.



Дано: $\triangle ABC$ – правильный, вписан в окружность,

$P_{\triangle ABC} = 18$ см

O – центр окружности

MNEP – квадрат, вписанный к окружность

Найти: a_4

Решение: $a_3 = \frac{P}{3} = \frac{18}{3} = 6$ см (так как треугольник правильный). $a_3 = 2Rsin\ \frac{180^\circ}{3} = 2R \sin 60^\circ = 2R\ \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$

$a_4 = 2Rsin\ \frac{180^\circ}{4} = 2Rsin\ 45^\circ = 2R\ \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}.$

Ответ: $2\sqrt{6}$.

В разобранной выше задачи для ее решения используются значение синуса для углов 45°, 60° и формула для вычисления стороны правильного многоугольника.

В следующем номере 1179 с данной стороной правильного треугольника, через ту же самую формулу находится радиус описанной окружности, а так как диаметр равен двум радиусам, то легко находится диаметр описанной около правильного треугольника окружности.

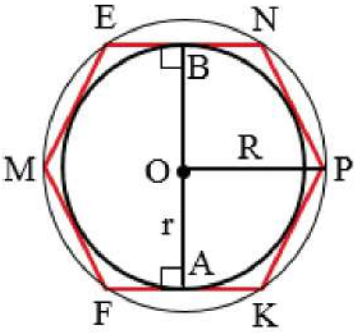
Номер 1180 похож на предыдущий, но вместо правильного треугольника, вписанного в окружность, дан квадрат, описанный около окружности.

В № 1181 около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Нужно найти периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48 см. Чтобы решить эту задачу обучающийся должен понимать какой многоугольник называется правильным, что такое квадрат, периметр многоугольника и знать формулы для вычисления стороны и радиуса вписанной окружности.

Следующий номер 1182 представлен в учебнике для того, чтобы девятиклассник через доказательство задачи вывел для себя формулу: $R = 2r$, где R – радиус описанной около правильного треугольника, а r – радиус вписанной в правильный треугольник окружности.

Номер 1183 направлен на применение и отработку формулы вычисления площади правильного многоугольника.

1184. Расстояние между параллельными гранями шестигранной головки болта, основание которого имеет форму правильного шестиугольника, равно 1,5 см. Найдите площадь основания.



Дано: MENPKF - правильный шестиугольник,

EN || FK,

AB – расстояние между EN и FK, AB = 1,5 см

Найти: S шестиугольника

Решение: т.к. EN || FK и AB – расстояние между EN и FK, то AB ⊥ EN и AB ⊥ FK ⇒ OA = OB = $r = \frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{2} \cdot 1{,}5 = 0{,}75$ см (r – радиус вписанной окружности).

$$r = R\cos\frac{180^\circ}{6} = R\cos 30^\circ = R\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{0{,}75 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 0{,}5\sqrt{3};$$

$$a_6 = 2R\sin\frac{180^\circ}{6} = 2R\sin 30^\circ = 2R\,\frac{1}{2} = R = 0{,}5\sqrt{3} \text{ см} \Rightarrow P = 6a_6 = 6 \cdot 0{,}5\sqrt{3} = = 3\sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot Pr = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 0{,}75 = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{8} \text{ см}^2.$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ см^2.

Следующий номер похож на номер 1184, в нем нужно через равные стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника сначала выразить радиусы описанных окружностей, затем выразить радиусы вписанных окружностей, найти периметры этих фигур, выразить площадь и

найти соотношение площадей правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника. Очень похоже решается и следующая задача.

Так же, как и предыдущие номера, номер 1187 посвящен отработке формул для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности.

Последний номер этой темы № 1188, в котором правильный восьмиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ вписан в окружность радиуса R и нужно доказать, что четырехугольник $A_3A_4A_7A_8$ является прямоугольником и выразить его площадь через R. Доказать, что этот четырехугольник является прямоугольником, достаточно просто, если знать какой угол называется вписанным и его свойство. А для того, чтобы выразить его площадь через R нужно вспомнить формулы площади. Ведь решить задачу с помощью формулы нахождения площади четырехугольника как произведение его смежных сторон не получится. Здесь придется применить другую формулу: $S = \frac{1}{2}d^2 sin\alpha$. А угол между диагоналями α можно найти, если знаешь, какой многоугольник называется правильным и какой угол называется центральным.

Весь практический материал по вписанным и описанным окружностям правильного многоугольника направлен на отработку формул нахождения площади через периметр и радиус, стороны многоугольника, радиуса вписанной окружности, радиуса описанной окружности. Некоторые задачи достаточно сложны не столько в решении, сколько в самом понимании текста и представлении чертежа, ведь не каждый может сразу представить, как выглядит шестигранная головка болта или поперечное сечение деревянного бруска. Но в то же время с помощью таких задач у обучающихся расширяется кругозор и пространственное воображение, кроме этого, просматривается связь геометрии с повседневной жизнью.

ГЛАВА II РАЗРАБОТКА САЙТА ПО МАТЕРИАЛАМ ОГЭ

2.1 Комбинации окружности и многоугольника в заданиях ОГЭ

Основной государственный экзамен начинает волновать и заставлять переживать почти всех обучающихся девятых классов. ОГЭ – это обязательная аттестация для всех девятиклассников, проверка освоения школьниками программы 5-9 классов, проверка готовности перехода на следующую ступень обучения. От результатов экзамена зависят оценки в аттестате, шансы на поступление в колледж или профильный десятый класс.

Одним из обязательных экзаменов является Основной государственный экзамен по математике. Он состоит из 25 заданий, 19 из которых – задания первой части, где нужно внести в бланк только ответ. Остальные 6 заданий – это задания 2 части с развернутым ответом. По уровню сложности разделяют: базовый, повышенный и высокий уровни. Вся первая часть состоит только из заданий базового уровня сложности. А во вторая часть состоит из 4 заданий повышенного уровня и 2 заданий высокого уровня сложности.

Каждое задание первой части оценивается в один балл, а задания второй части – в два балла. Чтобы сдать ОГЭ по математике девятикласснику нужно набрать минимальное количество баллов – 6. Обязательным условием является, то, что из этих 6 баллов, 2 балла должны быть по геометрии. В первой части варианта экзамена геометрии посвящено 5 заданий – это 15, 16, 17, 18, 19 номера.

Если для поступления в Высшие учебные заведения после 11 класса ключевую роль играют только результаты ЕГЭ, то зачисление на программу среднего профессионального образования (СПО) происходит по школьному аттестату. И результаты ОГЭ непосредственно влияют на оценки в аттестате по русскому языку, математике и двум предметам по выбору. Поэтому обучающимся 9-х классов нужно постараться хорошо написать Основной

государственный экзамен, если они собираются получать среднее профессиональное образование.

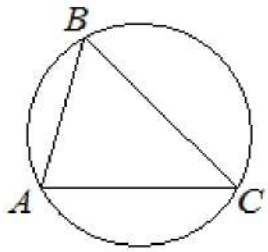
Одно из заданий по геометрии в 1 части экзамена посвящено окружности, кругу и их элементам. Это зданием под номером 16, и чаще всего в нем нужно найти элементы вписанных или описанных многоугольников.

Казалось бы, если не решать это задание, то сильно на результат это не повлияет. Но, основываясь на своем жизненном опыте, могу сказать, что иногда, один балл может стать решающим. Девятикласснику может не хватить одного балла до оценки «3», «4» или «5».

В МБОУ «СОШ №1» города Кирсанова Тамбовской области 6 марта 2025 года проходил репетиционный экзамен по математики. По анализу репетиционного экзамена видно, что одними из самых сложных заданий по геометрии в 1 части являются номера 16 и 19. (Приложение 4). В них больше всего обучающихся допустило ошибки. Если для решения 19 задания необходимо помнить много определений и свойств за весь курс геометрии, то для решения 16 задания, которое по большей части посвящено комбинации окружности и многоугольников, нужно помнить не так много. Учитывая, что некоторые требующиеся на экзамене формулы находятся в справочном материале.

Рассмотрим и решим задания 16 из ОГЭ по математике, в которых присутствуют вписанные и описанные окружности.

1) Демоверсия 2025 года [7]:



В треугольнике ABC угол C равен 45°, AB = $6\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

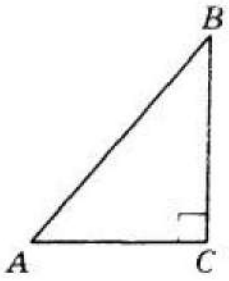
Решение: по теореме синусов, имеем: $\frac{AB}{sin\angle C} = 2R \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{2}}{2 \cdot sin45^\circ} =$

$6\sqrt{2} : \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6$

Ответ: 6.

2) Пробный экзамен 2025 года [13]:

В треугольнике ABC известно, что AC = 7, BC = 24, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около это треугольника окружности.



Решение: $\triangle ABC$ – прямоугольный, тогда AB – диаметр описанной около этого треугольника окружности. По теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 49 + 576$$

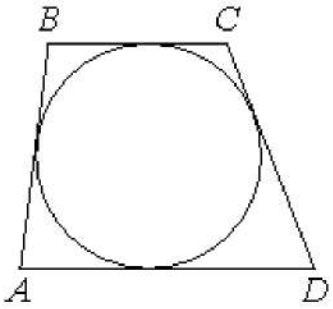
$$AB^2 = 625$$

$$AB = 25$$

Так как радиус окружности равен половину диаметра, тогда R = 12,5.

Ответ: 12,5.

3) Номер 16 из реального варианта ОГЭ 2023 года из Санкт-Петербурга [13]:

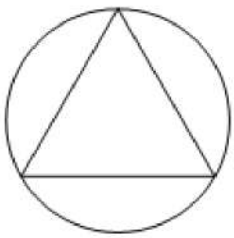


Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, AB = 12, BC = 4, CD = 8. Найти AD.

Решение: так как четырехугольник ABCD описан около окружности, то AB + CD = BC + AD, следовательно AD = AB + CD - BC = 12 + 8 - 4 = 16

Ответ: 16.

4) Номер 16 из реального варианта ОГЭ 2023 года из Москвы [13]:

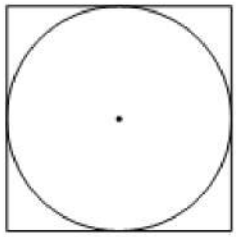


Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $9\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.

Решение: по формуле нахождения стороны равностороннего треугольника, вписанного в окружность, имеем: $a_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow a_3 = 9\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9 \cdot 3 = 27$

Ответ: 27.

5) Реальный вариант ОГЭ 2022 года из Калининграда [13]:

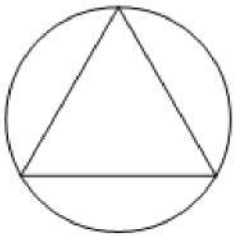


Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности, радиуса 15.

Решение: зная, что сторона квадрата равна двум радиусам, имеем: a = 30, S = 30 · 30 = 900

Ответ: 900.

6) Реальный вариант ОГЭ 2021 года [13]:



Сторона равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

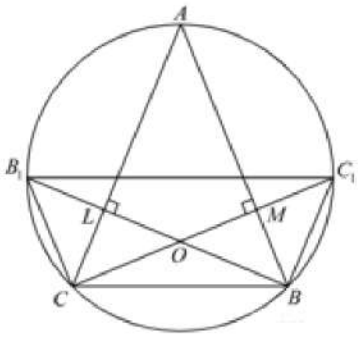
Решение: радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника находится по формуле: $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$

Ответ: 4.

Помимо заданий, связанных со свойствами вписанных и описанных многоугольников, в номере 16 часто встречаются вписанные и центральные углы.

Комбинации окружности и многоугольников встречаются и во второй части ОГЭ по математике, в задании 25. Рассмотрим некоторые из них.

1) Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из точек B и C, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC.

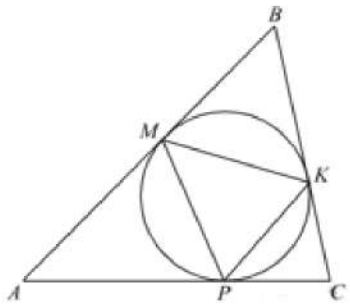


Решение: BL, CM – высоты треугольника ABC. Так как отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности $\Rightarrow B_1C_1$ – диаметр, тогда $\angle BB_1C = \angle BAC = \angle CC_1B$, так как опираются на одну дугу CB. Из прямоугольного треугольника B_1OC: $\angle B_1OC = 90° - \angle BB_1C$. Из прямоугольного треугольника LCO: $\angle LCO = 90° - \angle B_1OC = \angle BB_1C = \angle BAC$. Рассмотрим

прямоугольный треугольник CAM, углы BAC и ACC_1 равны, значит, $\angle BAC = \angle ACC_1 = 90°/2 = 45°$.

Ответ: 45°.

2) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны 49°, 69° и 62°.

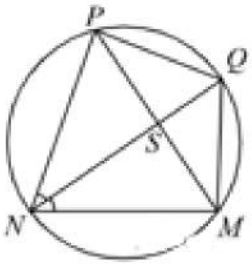


Решение: пусть $\angle BAC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma$; $\angle PKM = 49°$, $\angle MPK = 69°, \angle KMP = 62°$. По свойству касательный AM = AP, BM = BK, CP = CK. Значит треугольники AMP, BMK и CPK равнобедренные, откуда получаем: $\angle AMP = \angle APM = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle BMK = \angle BKM = 90° - \frac{\beta}{2}$, $\angle CPK = \angle CKP = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

Значит, $\angle PKM = 180° - \angle CKP - \angle BKM = \frac{\gamma+\beta}{2} = 49°$. Аналогично получаем, что $\angle MPK = \frac{\alpha+\gamma}{2} = 69°$ и $\angle KMP = \frac{\alpha+\beta}{2} = 62°$, откуда получаем: $\alpha = 82°$, $\beta = 42°$, $\gamma = 56°$.

Ответ: 82°, 42°, 56°.

3) В выпуклом четырехугольнике NPQM диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S. Найдите NS, если известно, что около четырехугольника NPQM можно описать окружность, PQ = 14, SQ = 4.



Решение: так как $\angle QPS = \angle QPM = \angle MNQ = \angle QNP$, то треугольник PQS подобен треугольнику NQP (по двум углам (угол Q – общий)). Тогда $\frac{QS}{PQ} = \frac{PQ}{QN}$.

Пусть NS = x, тогда $\frac{4}{14} = \frac{14}{x+4} \Rightarrow x = 45$.

Ответ: 45.

Рассмотрев задание 16 из реальных вариантов ОГЭ по математике, можно заметить, что некоторые задания могут решить не только девятиклассники, но и обучающиеся 7 и 8 классов.

2.2 Разработка сайта по темам, связанным с комбинацией окружности и многоугольников по заданиям ОГЭ

С 1 сентября 2025 года российские школы перейдут на обновлённую систему преподавания, в которой содержание учебных программ будет напрямую связано с заданиями ЕГЭ и ОГЭ. Об этом сообщил вице-премьер Дмитрий Чернышенко на итоговом заседании коллегии Минпросвещения. По его словам, синхронизация школьных курсов с требованиями государственной итоговой аттестации станет важным шагом к повышению прозрачности, эффективности и результативности образовательного процесса.

Новая модель предполагает, что школьники будут готовиться к экзаменам не только на дополнительных курсах, с репетиторами или с помощью сборников, а уже в рамках стандартных занятий. Учителя, в свою очередь, получат методические рекомендации, помогающие строить уроки так, чтобы школьники не просто проходили темы из учебников, а осваивали материал с прицелом на успешную сдачу экзаменов.

В связи с этими изменениями у учителей математики могут возникнуть трудности с поиском и подбором заданий ОГЭ по темам урока. Ведь все задания систематизированы именно по номерам ОГЭ, а не по темам учебника и без градации по классам.

Из большого множества интернет-ресурсов в школе наиболее распространенными являются следующие: открытый банк заданий ФИПИ[11] и образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ОГЭ» [14].

Для того, чтобы использовать задания ОГЭ на уроках геометрии, при изучении тем: «Вписанная и описанная окружность треугольника», «Вписанная

и описанная окружность четырехугольника» и «Вписанная и описанная окружность правильного многоугольника», первым делом учителю необходимо найти задания по этим темам в ОГЭ по математике. Рассмотрев популярные интернет-ресурсы для подготовки к ОГЭ, я обнаружила, что в открытом банке заданий ФИПИ очень сложно найти задания, подходящие для семиклассников. Это связано с тем, что при использовании фильтров поиска заданий учитель может выбрать тему «Окружность и круг», а затем, из 311 заданий придется искать те, которые он может задать ученикам в 7 классе при изучении темы «Вписанная и описанная окружность треугольника». Найти подходящие задания очень сложно, так как, во-первых, нет градации по классам, а во-вторых, нет классификации по треугольникам, четырехугольникам, правильным многоугольникам, а задания одного типа не упорядочены.

Если учитель решит подобрать задания для урока на сайте «Решу ОГЭ» [14] по рассматриваемым темам, то столкнется с проблемой малого количества заданий, которого не хватит на отработку темы по заданиям из ОГЭ. И также нет разделения заданий по классам.

Изучая и подбирая материалы для написания свой Выпускной квалификационной работы, я сама столкнулась с проблемой подбора задания из материалов ОГЭ для использования на уроках геометрии при изучении тем, посвященным комбинации окружности и многоугольников. В связи с тем, я решила разработать сайт, в котором задания ОГЭ, касающиеся тем вписанных и описанных окружностей будут разделены по классам и по видам фигур. Данный сайт предназначен, в большей части, для использования учителем, который может взять оттуда задания для закрепления и систематизации знаний по вписанным и описанным многоугольникам. Одним из отличительных особенностей моего сайта является то, что вся теория, представленная в нем, взята из учебника Л.С. Атанасяна. И весь дополнительный теоретический материал, который обучающиеся получат при решении задач учебника по темам, также описан на страницах сайта.

Перед созданием я проанализировала и отобрала задания ОГЭ из открытого банка заданий ФИПИ и разделила эти задания по группам: для 7 класса, для 8 класса и для 9 класса. Внутри каждой группы, задания были также разделены на вписанную окружность и описанную около многоугольника окружность. Далее я приступила к разработке самого сайта.

Он состоит из 4 страниц. На первой странице, она же главная, представлена общая информация об ОГЭ, описана важность результатов экзамена для обучающихся 9 классов. (Приложение 5). Для удобства перехода по страницам сайта, в конце главной страницы находятся активные кнопки, при нажатии которым можно перейти в выбранный раздел. (Приложение 6).

Перейдя на страницу «7 класс» вы увидите весь теоретический материал по вписанной окружности треугольника и описанной около треугольника окружности. (Приложение 7). В роли дополнительного материала выступают свойства и понятия, которые будут выведены обучающимися при решении задач учебника. В конце страницы находится активная кнопка «Задания из ОГЭ», которая при нажатии откроет подстраницу с заданиями из открытого банка ФИПИ, по рассматриваемой теме. (Приложение 8).

После перехода по активной кнопке на подстраницу вам будет предложен материал для повторения и актуализации знаний. Для обучающихся 7 классов доступно для решения только задание, связанное с описанной около треугольника окружности. Всего 10 заданий, одно из которых представлено с решением, остальные – подобные ему. (Приложение 9). Для каждой задачи есть ответ, который показывается при нажатии на задачу. Сделано это для того, чтобы у учителя была возможность показать на экране задачу, а после решения ее детьми, показать ответ для самопроверки. Учителю такой способ демонстрации заданий удобен тем, что не придется распечатывать их для использования на уроке.

Следующая страница для 8 класса посвящена четырехугольнику и окружности. Так же, как и на предыдущей страницу, представлен теоретический

материал по вписанной окружности четырехугольника и описанной окружности около четырехугольника, с дополнительными материалами по данным темам. Весь теоретический материал соответствует учебнику геометрии. В конце для удобства перехода к заданиям находится активная кнопка. (Приложение 10).

На подстранице «Задания из ОГЭ» для 8 класса в самом начале представлены свойства и определения, которые необходимо вспомнить. А затем предложены задания из открытого банка ФИПИ, которые разделены по следующим видам комбинации окружности и четырехугольника: вписанный четырехугольник, описанный четырехугольник, вписанная трапеция, описанная трапеция. В первых трех разделах по 10 подобных заданий, к каждому из которых есть ответ, а первая задача представлена с решением. Что касается описанной трапеции, то представлены 4 типа по пять заданий из ОГЭ. В задачах рассматривается равнобедренная трапеция, произвольная трапеция, прямоугольная трапеция. (Приложение 11)

Страница сайта для 9 класса устроена также, как и две предыдущие, с таким же функционалом. Теоретического материала для девятиклассников больше, чем для семиклассников и восьмиклассников. Так как при изучении данной темы большой упор делается на изучение и применение формул, то под отдельным заголовком представлены все необходимые формулы по теме как в общем виде, так и в частном для правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника. (Приложение 13). Данный раздел буден удобен учителю для применения на своих уроках, как справочный материал.

Как и в ранее рассмотренных разделах сайта, для этой темы тоже представлены задания из ОГЭ по математике. (Приложение 14). Предложены к решению задачи, в которых нужно найти:

1) Радиус окружности, описанной около квадрата через его сторону.
2) Сторону квадрата через радиус описанной окружности.
3) Радиус вписанной окружности с данной стороной квадрата.
4) Диагональ квадрата через радиус окружности, вписанной в него.

5) Площадь квадрата, описанного около окружности с данным радиусом.

6) Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник через сторону этого треугольника.

7) Сторону правильного треугольника через радиус вписанной окружности.

8) Радиус окружности, описанной около правильного треугольника с данной стороной.

Ознакомиться с материалами сайта можно по ссылке: https://sites.google.com/view/okruzhnostimnogoygolnik/главная-страница. А также, для перехода на сайт можно отсканировать Qr-код (Рисунок 13)

Рисунок 13

Сайт, который я разработала в процессе написания выпускной квалификационной работы, может послужить отличным инструментом в работе учителя математики. На уроке открытия нового знания можно с помощью проектора или интерактивной доски показать обучающимся теоретический материал, так как он полностью соответствует материалу учебника геометрии автора Л.С. Атанасяна. На уроке закрепления и систематизации знаний практический материал позволит отработать полученные знаний, а также познакомит обучающихся с теми заданиями, которые им могут попасться на экзамене. Кроме этого, учащиеся самостоятельно могут использовать материалы сайта для повторения ранее изученного при подготовке к ОГЭ по математике. Ведь гораздо удобнее становится учителю готовиться к проведению уроков в 7-9 классах, на которых планируется отработка заданий ОГЭ, когда материал разделен по классам и по темам, а не только по номерам вариантов Основного государственного экзамена.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной выявлены методические особенности изучения комбинации окружности и многоугольников в курсе геометрии основного общего образования.

В 7 классе обучающиеся изучают темы: «Вписанная окружность треугольника» и «Описанная окружность треугольника». В 8 классе изучают «Вписанную и описанную окружности четырехугольника». А в 9 классе изучаются «Вписанные и описанные правильные многоугольники».

Проанализировав рабочие программы базового и углубленного уровня, можно сделать вывод, что количество часов, посвященным темам комбинации окружности и многоугольников, крайне ограничено. А в 9 классе при подготовке к экзаменам, мало учащихся может вспомнить данную теорию и решить задание по геометрии из экзамена. А проанализировав практический материал учебника, могу сказать, что задачи из учебника не встречаются в задачах на ОГЭ. Поэтому учителю нужно в свои уроки включать задания из ОГЭ по математике. Такой метод позволит отработать теоретический материал по теме и сразу познакомить обучающихся с видами задач, которые могут им попасться на экзамене в 9 классе.

Изучив и проанализировав задания из реальных вариантов Основного государственного экзамена и открытый банк заданий ФИПИ, я выделила те задачи, которые относятся к темам: «Вписанная и описанная окружность треугольника», «Вписанная и описанная окружность четырехугольника», «Вписанная и описанная окружность правильного многоугольника». И разделила из на следующий группы:

1) Описанная около треугольника окружность
2) Четырехугольник, вписанный в окружность
3) Описанный около окружности четырехугольник
4) Вписанная трапеция в окружность

5) Описанная около окружности трапеция
6) Вписанный в окружность квадрат
7) Описанный около окружности квадрат
8) Окружность, вписанная в равносторонний треугольник
9) Окружность, описанная около равностороннего треугольника

На основании этих заданий, с использованием теоретического материала учебника Л.С. Атанасяна я разработала сайт. Материала которого могут быть использованы любым учителем, без больших затрат времени на поиск и подбор заданий. А также, для одного из однотипных заданий представлено решение, ко всем задачам есть ответ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень). URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФРП_Математика_5-9-классы_база.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 28.10.2024).

2. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (углублённый уровень). URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/14_ФРП_Математика-7-9-классы_угл.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения:30.10.2024).

3. Геометрия : 9 класс : учебник / А. Г. Мерзляк [и др.] ; по ред. В. Е. Подольского. 7-е изд., стер. М. : Просвещение, 2022. 256 с.

4. Геометрия : 7 класс : учебник : углублённый уровень : издание в pdf-формате / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков ; по ред. В. Е. Подольского. 5-е изд., стер. М. : Просвещение, 2022. 208 с.

5. Геометрия : 8 класс : учебник : углублённый уровень : издание в pdf-формате / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков ; по ред. В. Е. Подольского. 4-е изд., стер. М. : Просвещение, 2022. 221 с.

6. Геометрия : 9 класс : учебник : углублённый уровень : издание в pdf-формате / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков ; по ред. В. Е. Подольского. 5-е изд., стер. М. : Просвещение, 2022. 303 с.

7. Демоверсия ОГЭ 2025 по математике. URL: https://4ege.ru/gia-matematika/71277-demoversija-oge-2025-po-matematike.html. Заглавие с экрана (дата обращения: 04.12.2024).

8. Математика. Геометрия : 7–9-е классы : базовый уровень : учебник / Л. С. Атанасян [и др.]. 15-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 416 с.

9. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Геометрия : 7 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М. : Вентана-Граф, 2015. 144 с.

10. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Геометрия : 8 класс : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. М. : Вентана-Граф, 2013. 208 с.

11. Открытый банк заданий ОГЭ. URL: https://oge.fipi.ru/bank/index.php?proj=DE0E276E497AB3784C3FC4CC20248DC0. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.12.2024).

12. Погорелов А. В. Геометрия. 7–9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций. 2-е изд. М. : Просвещение, 2014. 240 с.

13. Реальные варианты ОГЭ по математике. URL: https://yagubov.ru/oge/real. Заглавие с экрана (дата обращения: 11.12.2024).

14. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ОГЭ». URL: https://math-oge.sdamgia.ru/. Заглавие с экрана (дата обращения: 23.12.2024).

364 Начертите три треугольника: тупоугольный, прямоугольный и остроугольный. Для каждого из них постройте описанную окружность. Как расположен центр окружности относительно треугольника в каждом случае?

365 Начертите три треугольника: тупоугольный, прямоугольный и остроугольный. В каждый из них впишите окружность. Как расположен центр окружности относительно треугольника в каждом случае?

366 Докажите, что для равностороннего треугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

367 Укажите, какие из треугольников, изображённых на рисунке 169, являются вписанными.

368 Укажите, какие из треугольников ABC, CED, LMN и CTS, изображённых на рисунке 170, являются описанными около окружности.

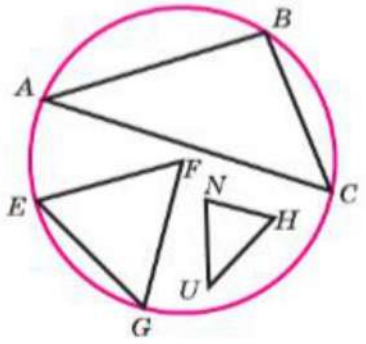


Рис. 169

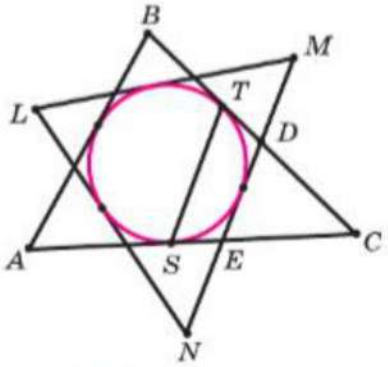


Рис. 170

369 Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

370 Стороны угла BAC, равного 60°, касаются окружности с центром O. Найдите длину отрезка OA, если радиус окружности равен 5 см.

371 Найдите периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 26 см, а радиус вписанной окружности — 4 см.

372 Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если гипотенуза треугольника равна c, а сумма катетов m.

373 В равнобедренный треугольник вписана окружность с центром O, и около него описана окружность с центром E. Докажите, что точки O и E лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

784 Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырёхугольника.

785 Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм — ромб.

786 Докажите, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

787 Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь четырёхугольника.

788 Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 10 см, а его площадь — 12 см^2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырёхугольник.

789 Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.

790 Докажите, что можно описать окружность: а) около любого прямоугольника; б) около любой равнобедренной трапеции.

791 Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм — прямоугольник.

792 Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.

793 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK, BM, CN, пересекающиеся в точке H. Докажите, что около каждого из четырёхугольников $CMHK$, $AMHN$, $BNHK$ можно описать окружность.

794 Докажите, что если в четырёхугольник можно вписать окружность, то её центр является точкой пересечения биссектрис углов этого четырёхугольника.

795 Докажите, что если около четырёхугольника можно описать окружность, то её центр является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого четырёхугольника.

1174 Докажите, что серединные перпендикуляры к любым двум сторонам правильного многоугольника либо пересекаются, либо совпадают.

1175 Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы любых двух углов правильного многоугольника, либо пересекаются, либо совпадают.

1176 На рисунке 347, *а* изображён квадрат, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_4 — сторона квадрата, P — периметр квадрата, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

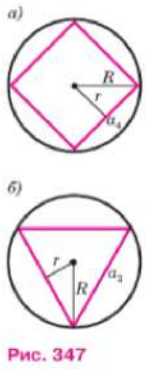


Рис. 347

N	R	r	a_4	P	S
1			6		
2		2			
3	4				
4				28	
5					16

1177 На рисунке 347, *б* изображён правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_3 — сторона треугольника, P — периметр треугольника, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

N	R	r	a_3	P	S
1	3				
2					10
3		2			
4			5		
5				6	

1178 Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите сторону квадрата, вписанного в ту же окружность.

1179 Сечение головки газового вентиля имеет форму правильного треугольника, сторона которого равна 3 см. Каким должен быть минимальный диаметр круглого железного стержня, из которого изготовляют вентиль?

1180 Поперечное сечение деревянного бруска является квадратом со стороной 6 см. Найдите наибольший диаметр круглого стержня, который можно выточить из этого бруска.

1181 Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48 см.

1182 Около правильного треугольника описана окружность радиуса R. Докажите, что $R = 2r$, где r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

1183 Найдите площадь S правильного n-угольника, если: а) $n = 4$, $R = 3\sqrt{2}$ см; б) $n = 3$, $P = 24$ см; в) $n = 6$, $r = 9$ см; г) $n = 8$, $r = 5\sqrt{3}$ см.

1184 Расстояние между параллельными гранями шестигранной головки болта, основание которого имеет форму правильного шестиугольника, равно 1,5 см. Найдите площадь основания.

1185 Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны друг другу. Найдите отношения площадей этих многоугольников.

1186 Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников — вписанного в окружность и описанного около неё.

1187 Выразите сторону, периметр и площадь правильного треугольника: а) через радиус вписанной окружности; б) через радиус описанной окружности.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Анализ репетиционного экзамена

Класс – 9

Предмет – Математика

Дата проведения - 06.03.2025

Количество учащихся по списку	Количество учащихся, писавших работу	Количество учащихся, получивших оценки:				% успеваемости	Качество знаний %	Средний балл
		"5"	"4"	"3"	"2"			
54	48	3	7	16	22	54	20	2,8

Допущенные ошибки:

Часть 1

Название орфограммы, вопроса и т,д.	Количество учащихся, допустивших ошибку	% учащихся, допустивших ошибку от общего количества учащихся, выполнявших работу
Какой цифрой обозначены объекты в тексте задания?	3	6
Простейшие текстовые задачи.	21	44
Прикладная геометрия: площадь, объем	20	42
Прикладная геометрия: расстояния	18	38
Выбор оптимального варианта.	17	35
Действия с обыкновенными дробями.	22	46
Числовые неравенства, координатная прямая	19	40
Преобразование числовых выражений, содержащих квадратные корни.	18	36
Решение уравнений.	15	31
Классическое определение вероятности.	13	27
Установление соответствия между графиками функций и	21	44

формулами, которые их задают		
Расчеты по формулам.	16	33
Неравенства, системы неравенств	14	29
Задачи на прогрессии	16	33
Треугольники, четырёхугольники, многоугольники и их элементы	14	29
Окружность, круг и их элементы	15	31
Задача с излишними данными (элементы геометрических фигур).	13	27
Фигуры на квадратной решётке (площадь)	12	25
Анализ геометрических высказываний.	23	48
Решение более сложных неравенств, уравнений и их систем.	1	2
Решение текстовых задач.	2	4
Построение графиков функций.	2	4
Решение более сложной геометрической задачи на вычисления.	1	1
Геометрическая задача на доказательство		
Геометрическая задача повышенной сложности		

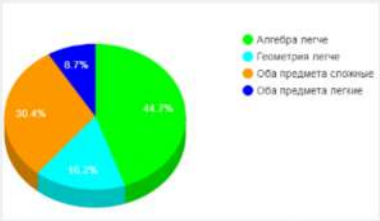
ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Немного про ОГЭ

Каждый ученик школы с начальных классов знает, что в конце 9 класса его ждут экзамены. В Росси все девятиклассники обязательно сдают Основной государственный экзамен по математике и русскому языку.

В течение всего девятого класса обучающиеся готовятся к экзаменам. Из-за этого много волнуются, переживают, что не справятся и не наберут нужные баллы. Но этого можно избежать, если начать подготовку не в 9 классе, а на протяжении всего периода обучения в школе. Для этого учителю необходимо включить задания из ОГЭ по математике на тех темах, которые проверяются на экзамене. Но это не так легко сделать.

В учебниках заданий много, но не тех, которые попадаются конкретно на экзамене. На просторах интернета тоже много упражнений, но они чаще всего не систематизированы по темам. Поэтому было принято решение для создание данного сайта, в котором задания систематизируются по темам учебника, чтобы учителю или ученику было легко найти задания из ОГЭ по конкретной теме.



Алгебра или геометрия?

Чтобы сдать ОГЭ по математике нужно набрать не менее 8 баллов, при чем 2 балла должны быть за задания по геометрии.
Опросив школьник 7-9 классов, можно сказать, что геометрия для обучающихся является более сложным предметом, чем алгебра, потому что нужно знать и помнить много определений, теорем, следствий из теорем и различных свойств.

На ОГЭ по математике из 19 заданий 1 части с кратким ответом лишь 5 заданий по геометрии, а во второй части с развернутым ответом из 6 заданий - 3 задания по геометрии. Это означает, что геометрия для ОГЭ имеет огромное значение, особенно для тех, кто хочет за экзамен получить оценку «5» .

Из заданий ОГЭ первой части лишь в одном номере может попасться вписанная или описанная окружности многоугольника. Также и во второй части - только в одном задании под номером 25 вам может попасться комбинация окружности и многоугольника. При том, что задача 25 относится к задачам высокого уровня сложности. Если ничего не знать или не помнить про вписанные и описанные окружности, то можно лишиться целых трех баллов на экзамене. Может показаться, что это мало, но очень часто случается там, что ученику не хватило 1 или 2 баллов до оценки «4» или «5».

Чтобы такого не произошло, можно отработать эти задания непосредственно при изучении тем, касающихся вписанных и описанных окружностей.

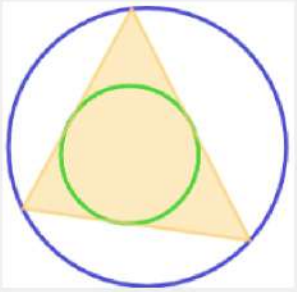
В школьном курсе геометрии всего лишь три темы, посвященные комбинации окружности и многоугольника:

1. Вписанные и описанные треугольники (7 класс).
2. Вписанные и описанные четырехугольники (8 класс).
3. Вписанные и описанные правильные многоугольники (9 класс).

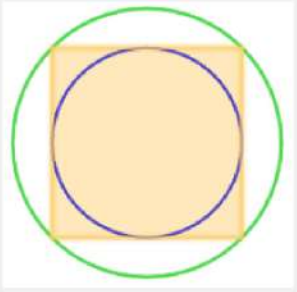
ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Поэтому, чтобы не потерять важные три балла на экзамене решайте задачи из ОГЭ тогда, когда изучаете подходящие темы в 7, 8 или 9 классе. В разделах этого сайта вы найдете задания по темам комбинации окружности и многоугольника из ОГЭ, которые можете использовать на уроках геометрии.

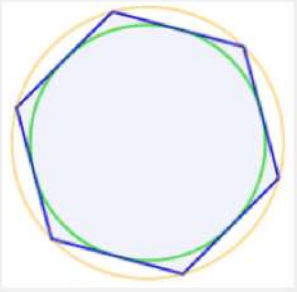
Чтобы найти необходимые задания, переходите к разделам:



7 класс



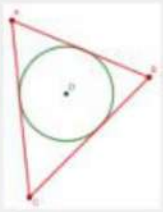
8 класс



9 класс

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Вписанная окружность треугольника

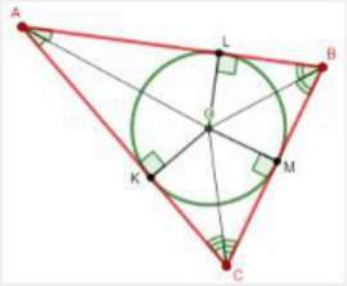


Определение

Если все стороны треугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной**, а треугольник - **описанным** около этой окружности.

Теорема

В любой треугольник можно вписать окружность.



Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведем из точки O перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к сторонам AB, BC и CA. Так как точка O равноудалена от сторон треугольника ABC (по свойству биссектрис треугольника), то OK, = OL = OM. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках K, L, M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL и OM. Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC. **Теорема доказана.**

Следствие 1

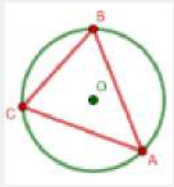
Центр окружности, вписанной в треугольник, - это точка пересечения его биссектрис.

Замечание

В треугольник можно вписать только одну окружность.

Описанная около треугольника окружность

Определение

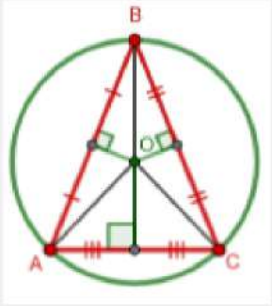


Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной около треугольника**, а треугольник - **вписанным** в эту окружность.

Теорема

Около любого треугольника можно описать окружность.

Доказательство



Следствие 1

Центр окружности, вписанной в треугольник, - это точка пересечения его биссектрис.

Замечание

Центр окружности, описанной около треугольника, - это точка пересечения серединных перпендикуляров.

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Дополнительный теоретический материал

- Центры вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника совпадают.
- Центры вписанной и описанной около равнобедренного треугольника лежат на серединном перпендикуляре, проведенному к основанию треугольника.
- Центром описанной около прямоугольного треугольника является середина гипотенузы.
- Чтобы найти диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности, нужно из суммы катетов вычесть гипотенузу: $d = a + b - c$, где d - диаметр вписанной окружности, a и b - катеты, c - гипотенуза.
- Периметр прямоугольного треугольника, описанного около окружности, можно найти по формуле $P = 2c + 2r$, где c – длина гипотенузы, r – радиус вписанной окружности.

Задания из ОГЭ

ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Задания из ОГЭ

Для семиклассников, изучивших только вписанные и описанные окружности, не так уж и много заданий в ОГЭ по этой теме, но с одним из вариантов 16 задания Основного государственного экзамена может справится и семиклассник.

Представляю вашему вниманию 16 задание ОГЭ, которое можно использовать на уроках геометрии в 7 классе, при изучении темы: «Вписанная и описанная окружности треугольника» .

Прежде чем начать решать задание 16 из ОГЭ с обучающимися 7 класса, нужно вспомнить следующее:

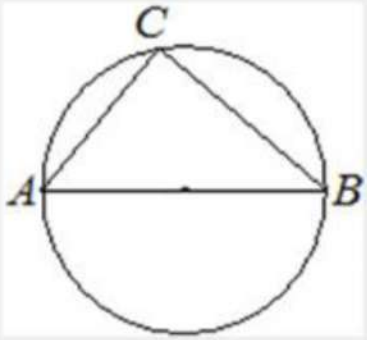
1) Из каждой точки окружности любой диаметр, не проходящий через данную точку, виден под прямым углом.

2) Сумма углов треугольника равна 180°.

3) Отрезок, соединяющий две точки на окружности, проходящий через центр окружности, называется ее диаметром.

---

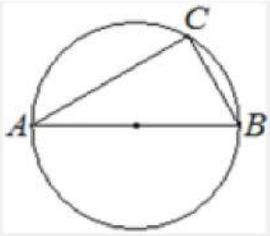
1. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 53°. Ответ дайте в градусах.



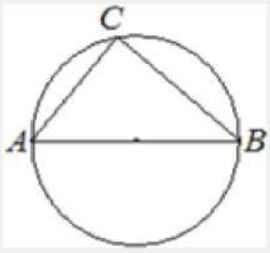
Решение: так как треугольник ABC вписан в окружность и центр окружности лежит на стороне AB, следовательно AB - диаметр окружности, тогда, угол C - прямой, следовательно угол BAC = 180° - 90° - 53° = 37°

Ответ: 37°

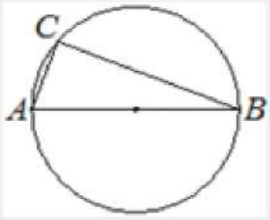
2. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 30°. Ответ дайте в градусах.



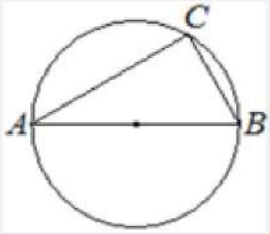
3. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 44°. Ответ дайте в градусах.



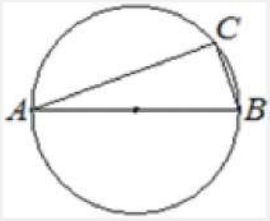
4. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 75°. Ответ дайте в градусах.



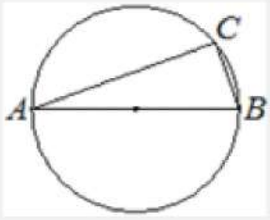
5. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 33°. Ответ дайте в градусах.



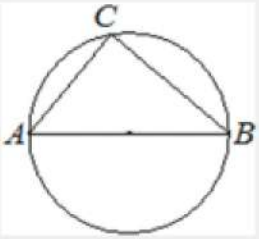
6. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 9°. Ответ дайте в градусах.



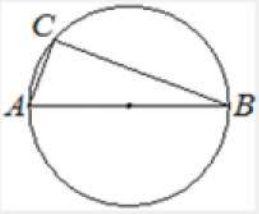
7. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 24°. Ответ дайте в градусах.



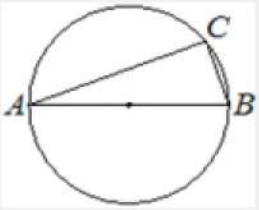
8. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 48°. Ответ дайте в градусах.



9. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 74°. Ответ дайте в градусах.

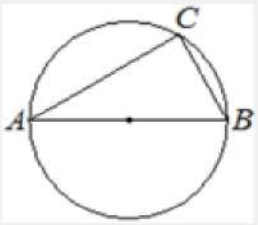


10. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 17°. Ответ дайте в градусах.



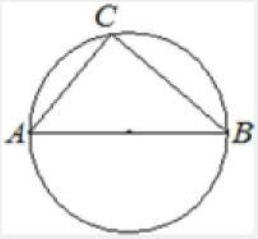
2. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 30°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60°



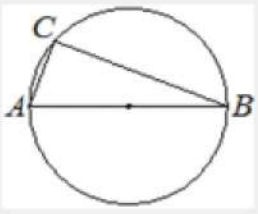
3. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 44°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 46°



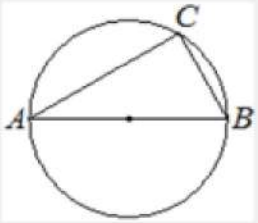
4. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 75°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 15°

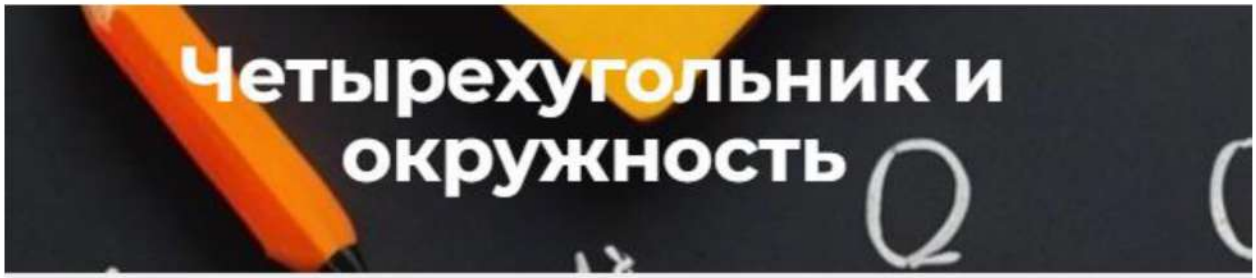


5. Центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на стороне. Найдите угол ABC, если угол BAC равен 33°. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 57°



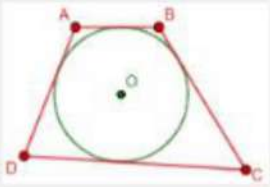
ПРИЛОЖЕНИЕ 10



Вписанная окружность четырехугольника

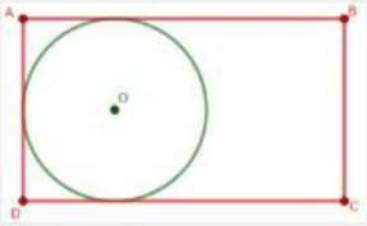
Определение

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а многоугольник - **описанным** около этой окружности.



Замечание

Не во всякий четырехугольник можно вписать окружность.



Свойство

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Обратное утверждение

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

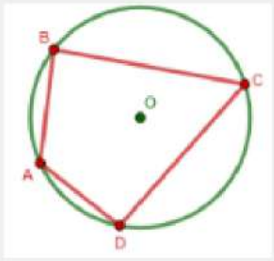
Дополнительный теоретический материал

- Центром вписанной в четырехугольник окружности является точка пересечения биссектрис.
- Периметр описанного четырехугольника можно найти по формуле: $P = 2(a+c)$, где $(a+c)$ – сумма противоположных сторон.
- Если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм – ромб.
- Площадь описанного многоугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности.
- В любой ромб можно вписать окружность.

Описанная около четырехугольника окружность

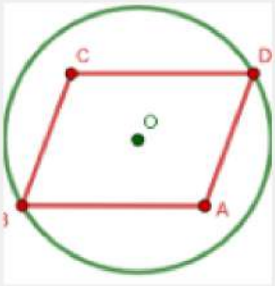
Определение

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника, а многоугольник - **вписанным** в эту окружность.



Замечание

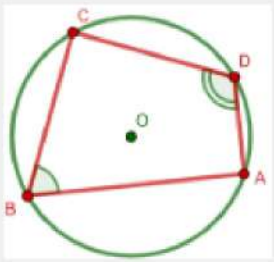
Около любого четырехугольника не всегда можно описать окружность



Свойство

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных сторон равна 180°.

$\angle B + \angle D = 180°$ и $\angle A + \angle C = 180°$



Обратное утверждение

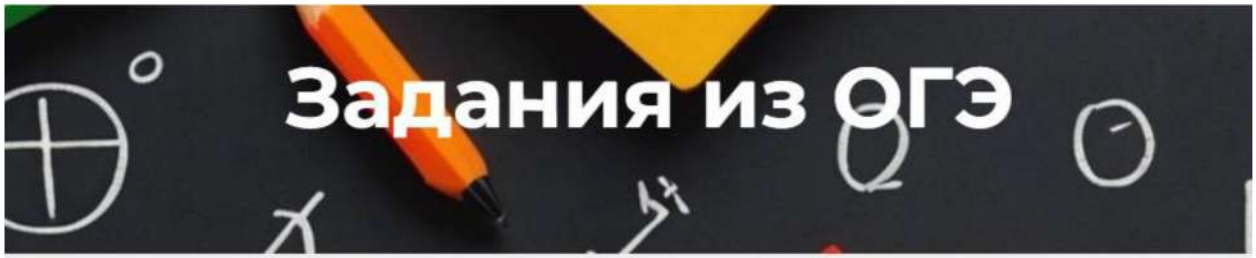
Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность

Дополнительный теоретический материал

- Центром описанной около четырехугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров.
- Описать окружность можно около любого прямоугольника и около любой равнобедренной трапеции.
- Если параллелограмм можно вписать в окружность, то этот параллелограмм – прямоугольник.
- Если около трапеции можно описать окружность, то трапеция равнобедренная.

Задания из ОГЭ

ПРИЛОЖЕНИЕ 11



Для учеников 8 класса больше заданий ОГЭ, которые они могут решить, в отличии от обучающихся 7 класса. Ниже представлены варианты заданий 16 из ОГЭ по математике.

Но, прежде чем перейти к решению задач, нужно вспомнить следующее:

1) Если около трапеции можно описать окружность, то трапеция равнобедренная.

2) Трапецией называют четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

3) Сумма односторонних углов при параллельных прямых и секущей равна 180°.

4) В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных сторон равна 180°.

5) В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Вписанный четырехугольник

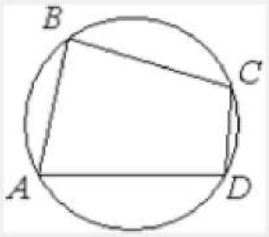
Описанный четырехугольник

Вписанная трапеция

Описанная трапеция

Вписанный четырехугольник

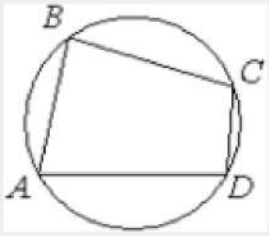
1. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность равен 62°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



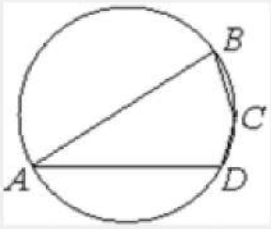
Решение: так как четырехугольник ABCD вписан в окружность, то ∠A + ∠C = 180°, следовательно ∠C = 180° - ∠A = 180° - 62° = 118°

Ответ: 118°

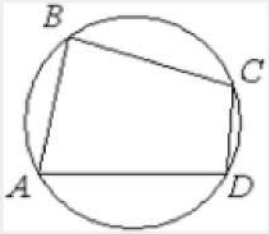
2. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность равен 48°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



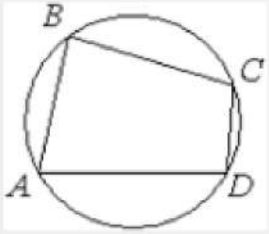
3. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность равен 37°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



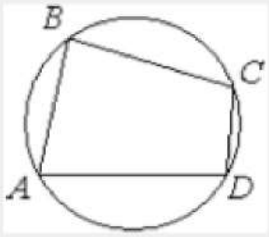
4. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность равен 54°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



5. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность равен 112°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

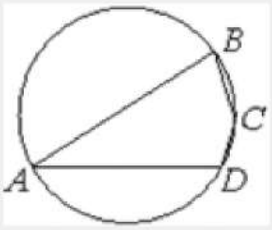


6. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность равен 78°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



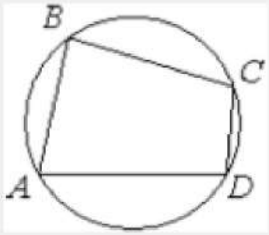
Ответ: 102°

7. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность равен 33°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



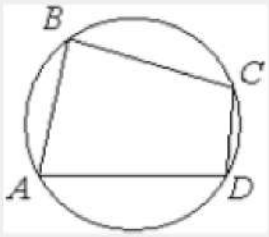
Ответ: 147°

8. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность равен 71°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.

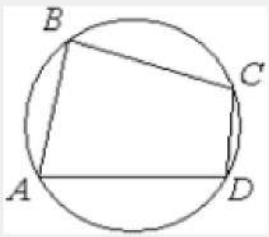


Ответ: 109°

9. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность равен 82°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



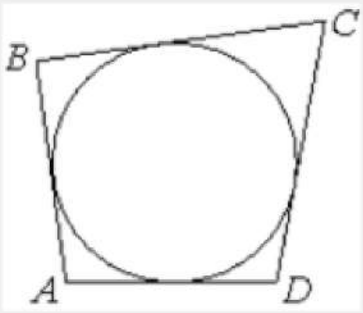
10. Угол A четырехугольника ABCD, вписанного в окружность равен 56°. Найдите угол C этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 124°

Описанный четырехугольник

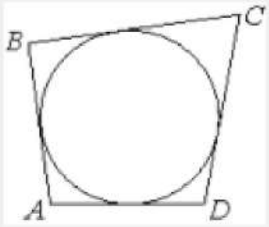
1. Четырехугольник ABCD описан около окружности, AB = 6, BC = 8, CD = 11. Найдите AD.



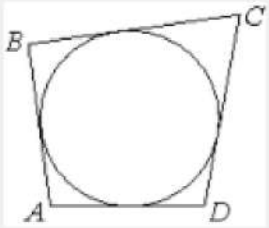
Решение: так как четырехугольник ABCD описан около окружности, то AB + CD = BC + AD, следовательно AD = AB + CD - BC = 6 + 11 - 8 = 9

Ответ: 9

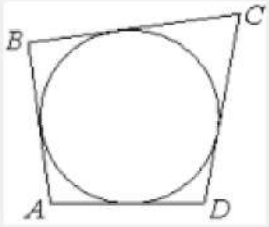
2. Четырехугольник ABCD описан около окружности, AB = 12, BC = 6, CD = 13. Найдите AD.



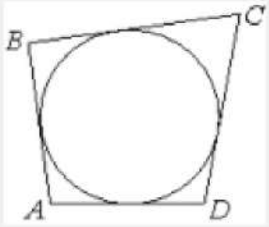
3. Четырехугольник ABCD описан около окружности, AB = 11, BC = 7, CD = 12. Найдите AD.



4. Четырехугольник ABCD описан около окружности, AB = 14, BC = 15, CD = 23. Найдите AD.

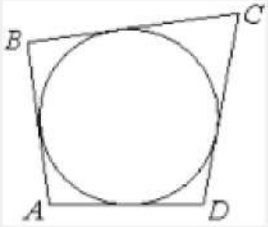


5. Четырехугольник ABCD описан около окружности, AB = 9, BC = 13, CD = 18. Найдите AD.



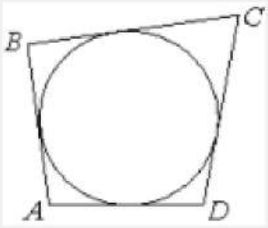
6. Четырехугольник ABCD описан около окружности, AB = 10, BC = 14, CD = 22. Найдите AD.

Ответ: 18



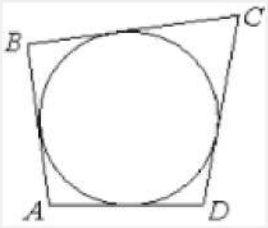
7. Четырехугольник ABCD описан около окружности, AB = 5, BC = 9, CD = 16. Найдите AD.

Ответ: 12



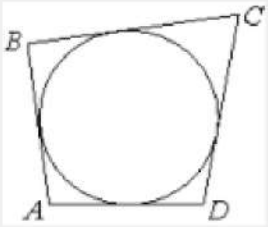
8. Четырехугольник ABCD описан около окружности, AB = 4, BC = 12, CD = 21. Найдите AD.

Ответ: 13



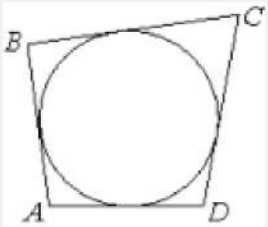
9. Четырехугольник ABCD описан около окружности, AB = 8, BC = 20, CD = 17. Найдите AD.

Ответ: 5



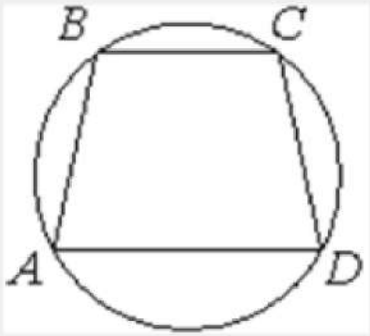
10. Четырехугольник ABCD описан около окружности, AB = 7, BC = 10, CD = 14. Найдите AD.

Ответ: 11



Вписанная трапеция

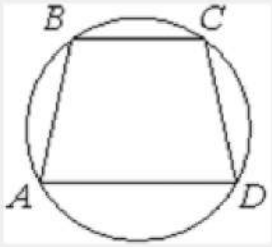
1. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 59°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



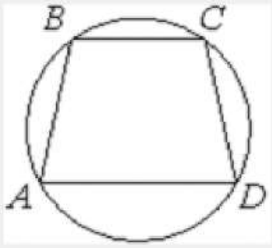
Решение: трапеция ABCD - равнобедренная, так как вписана в окружность. ∠A + ∠B = 180° (как соответственные углы при параллельных и секущей), следовательно ∠B = 180° - ∠A = 180° - 59° = 121°

Ответ: 121°

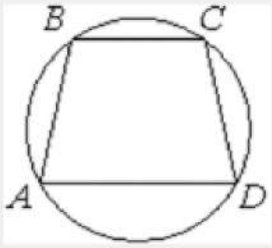
2. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 77°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



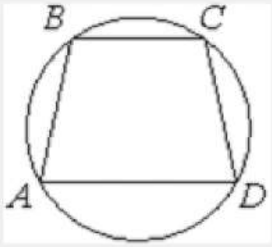
3. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 35°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



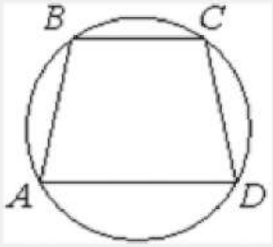
4. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 46°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



5. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 52°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.

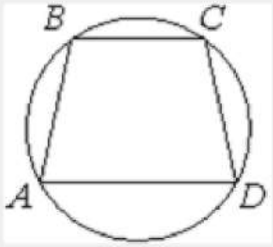


6. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 76°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



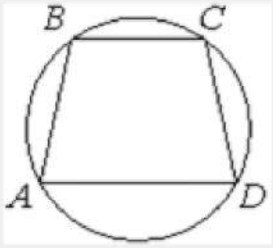
Ответ: 104°

7. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 32°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



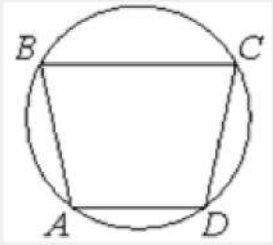
Ответ: 148°

8. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 55°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



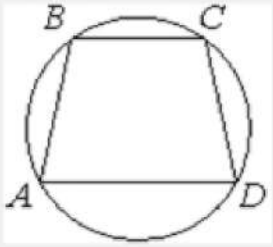
Ответ: 125°

9. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 108°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 72°

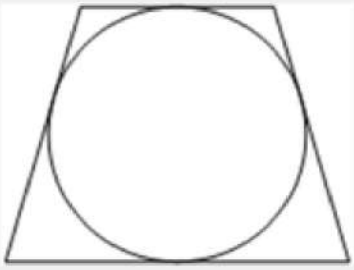
10. Угол A трапеции ABCD с основаниями AD и BC, вписанной в окружность, равен 68°. Найдите угол B этой трапеции. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 112°

Описанная трапеция

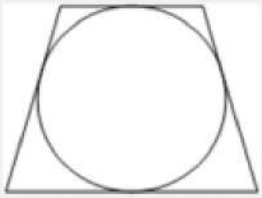
1. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 34. Найдите высоту этой трапеции.



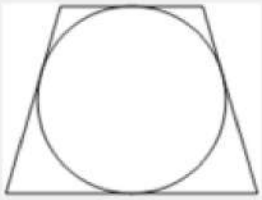
Решение: так как трапеция описана около окружности и стороны трапеции являются касательными к окружности, то высота трапеции равна диаметру окружности, а диаметр равен двум радиусам, следовательно высота трапеции равна 34 * 2 = 68

Ответ: 68

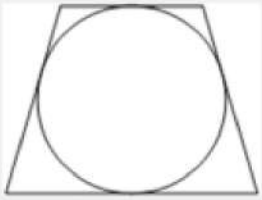
2. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 22. Найдите высоту этой трапеции.



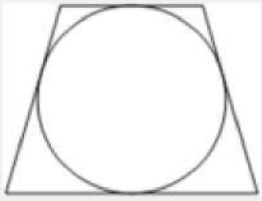
3. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 28. Найдите высоту этой трапеции.



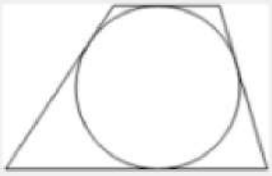
4. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 32. Найдите высоту этой трапеции.



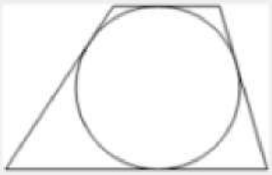
5. Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 20. Найдите высоту этой трапеции.



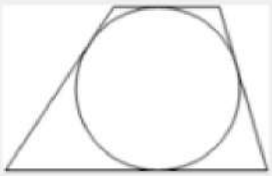
1. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 26. Найдите высоту этой трапеции.



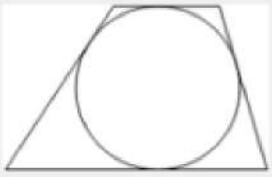
2. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 16. Найдите высоту этой трапеции.



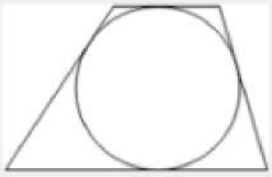
3. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 48. Найдите высоту этой трапеции.



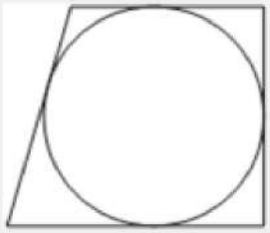
4. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 18. Найдите высоту этой трапеции.



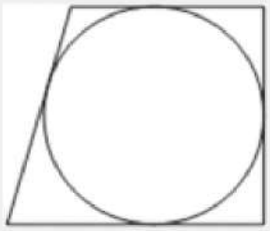
5. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен 24. Найдите высоту этой трапеции.



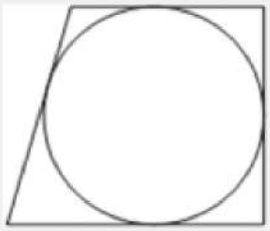
1. Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 10. Найдите высоту этой трапеции.



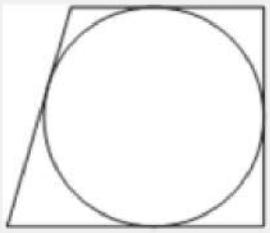
2. Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 30. Найдите высоту этой трапеции.



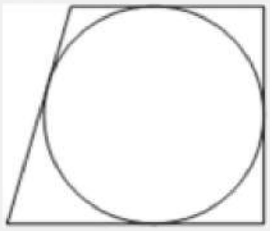
3. Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 36. Найдите высоту этой трапеции.



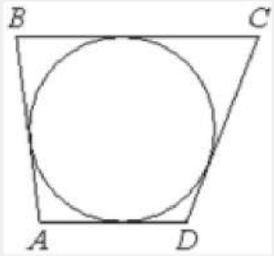
4. Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 32. Найдите высоту этой трапеции.



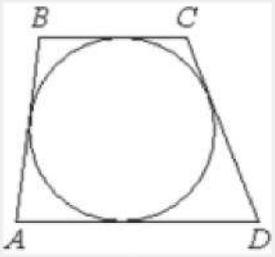
5. Радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, равен 42. Найдите высоту этой трапеции.



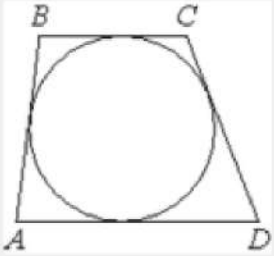
1. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, AB = 7, BC = 5, CD = 17. Найти AD.



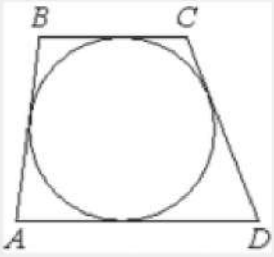
2. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, AB = 13, BC = 4, CD = 11. Найти AD.



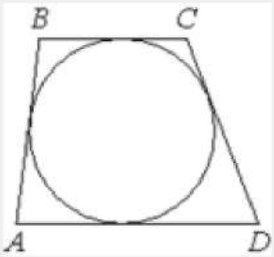
3. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, AB = 11, BC = 6, CD = 9. Найти AD.



4. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, AB = 9, BC = 5, CD = 7. Найти AD.



5. Трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности, AB = 14, BC = 8, CD = 12. Найти AD.

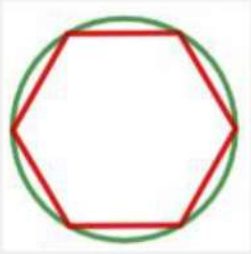


ПРИЛОЖЕНИЕ 12

Окружность, описанная около правильного многоугольника

Определение

Окружность называется описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности



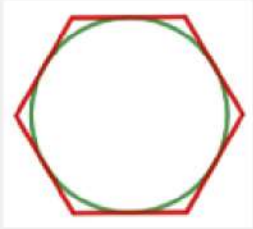
Теорема

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Окружность, вписанная в правильный многоугольник

Определение

Окружность называется **вписанной** в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.



Теорема

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, притом только одну.

Следствие 1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Следствие 2

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник. Эта точка называется центром правильного многоугольника.

ПРИЛОЖЕНИЕ 13

Формулы

Пусть S - площадь правильного n-угольника, a - его сторона, P - периметр, r - радиус вписанной окружности, R - радиус описанной около правильного многоугольника.

Площадь правильного многоугольника: $S - \frac{1}{2}Pr$

Формула для нахождения радиуса вписанной окружности: $r = Rcos\ \frac{180°}{n}$

Формула для нахождения сторон правильного многоугольника: $a_n = 2Rsin\ \frac{180°}{n}$

Выражение для сторон правильного треугольника: $a_3 = R\sqrt{3}$

Формула нахождения стороны правильного треугольника через радиус вписанной окружности: $a = 2\sqrt{3}\,r$

Радиус описанной около квадрата окружности: $R = \frac{a_4}{\sqrt{2}}$

Радиус описанной около правильного треугольника окружности: $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$

Радиус вписанной в правильный треугольник окружности: $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Выражение для сторон квадрата: $a_4 = R\sqrt{2}$

Выражение для сторон правильного шестиугольника: $a_6 = R$

Задания из ОГЭ

ПРИЛОЖЕНИЕ 14

В задании ОГЭ номер 16 из правильных многоугольников встречаются только квадрат и правильный (равносторонний) треугольник. Рассмотрим задания, в которых присутствуют вписанный, описанный квадрат и вписанный, описанный равносторонний треугольник,

Вписанный квадрат

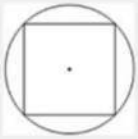
Описанный квадрат

Описанный равносторонний треугольник

Вписанный равносторонний треугольник

Вписанный квадрат

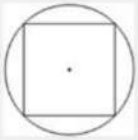
1. Сторона квадрата равна $8\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



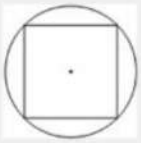
Решение: по формуле нахождения радиуса описанной около квадрата окружности, получим: $R = 8$

Ответ: 8

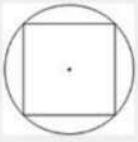
2. Сторона квадрата равна $32\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



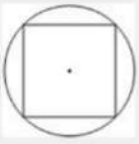
3. Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



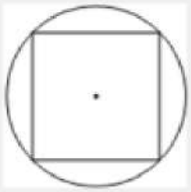
4. Сторона квадрата равна $24\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



5. Сторона квадрата равна $18\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



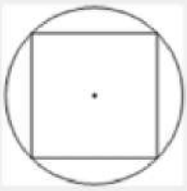
1. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $18\sqrt{2}$ Найдите длину стороны этого квадрата



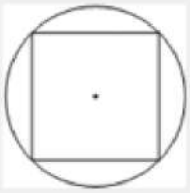
Решение: по формуле нахождения квадрата, вписанного в окружность, получим: $a = 36$

Ответ: 36

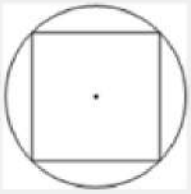
2. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $34\sqrt{2}$ Найдите длину стороны этого квадрата



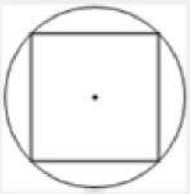
3. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $26\sqrt{2}$ Найдите длину стороны этого квадрата



4. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $32\sqrt{2}$ Найдите длину стороны этого квадрата

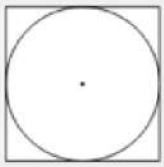


5. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $36\sqrt{2}$ Найдите длину стороны этого квадрата



Описанный квадрат

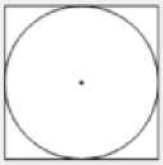
1. Сторона квадрата равна 16. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.



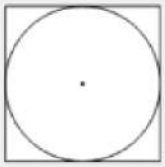
Решение: сторона квадрата, описанного около окружности, равена диаметру окружности, тогда радиус вписанной окружности равен 16*2 = 32

Ответ: 32

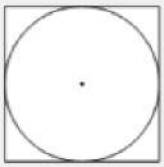
2. Сторона квадрата равна 26. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.



3. Сторона квадрата равна 46. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

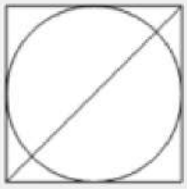


4. Сторона квадрата равна 48. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.



5. Сторона квадрата равна 62. Найдите радиус окружности, вписанной в этот квадрат.

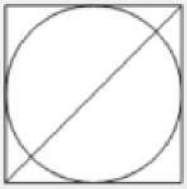
1. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $14\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.



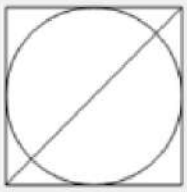
Решение: радиус вписанной в квадрат окружности вдвое меньше ее стороны. Сторона квадрата равна $14\sqrt{2}$ Пусть a — сторона квадрата. Тогда диагональ квадрата равна $d = a\sqrt{2} = 14\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 28$

Ответ: 28

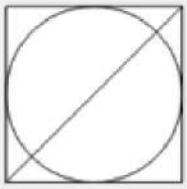
2. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $8\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.



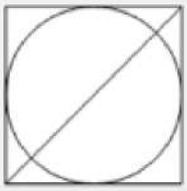
3. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $22\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.



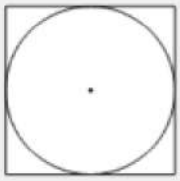
4. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $18\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.



5. Радиус вписанной в квадрат окружности равен $6\sqrt{2}$. Найдите диагональ этого квадрата.



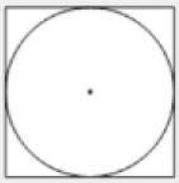
1. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 7.



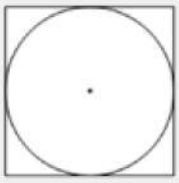
Решение: сторона квадрата, описанного около окружности, в два раза больше радиуса, тогда $a = 14$, а площадь равна $14*14 = 196$

Ответ: 196

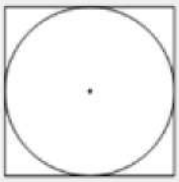
2. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 90.



3. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 14.



4. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 71.



5. Найдите площадь квадрата, описанного около окружности радиуса 37.

Описанный равносторонний треугольник

1. Сторона равностороннего треугольника равна $20\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Решение: по формуле нахождения радиуса вписанной в правильный треугольник окружности получаем: $a = 10$

Ответ: 10

2. Сторона равностороннего треугольника равна $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 4

3. Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 7

4. Сторона равностороннего треугольника равна $16\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 8

5. Сторона равностороннего треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 3

1. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $8\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.

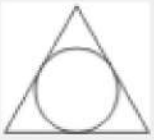
Решение: по формуле нахождения стороны правильного треугольника через радиус вписанной окружности получаем: $a = 48$

Ответ: 48

2. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $11\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.

Ответ: 66

3. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $3\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.

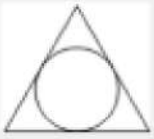


Ответ: 18

4. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $2\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.

Ответ: 12

5. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $7\sqrt{3}$. Найдите длину стороны этого треугольника.



Ответ: 42

Вписанный равносторонний треугольник

1. Сторона равностороннего треугольника равна $8\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение: по формуле нахождения радиуса описанной около правильного треугольника окружности получаем: $r = 8$

Ответ: 8

2. Сторона равностороннего треугольника равна $20\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

3. Сторона равностороннего треугольника равна $18\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

4. Сторона равностороннего треугольника равна $14\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

5. Сторона равностороннего треугольника равна $16\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

6. Сторона равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

7. Сторона равностороннего треугольника равна $6\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

8. Сторона равностороннего треугольника равна $2\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 2

9. Сторона равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 12

10. Сторона равностороннего треугольника равна $10\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: 10

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Служеникиной Софьи Игоревны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методические особенности изучения комбинации окружности и многоугольников в курсе геометрии основного общего образования»

Утверждена приказом по Университету от «25.12» 2024 г. № 1351/0

Срок сдачи студентом законченной работы «21» мая 2025 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ рабочих программ базового и углубленного уровня по математике	Октябрь 2024	Выполнено
2.	Анализ теоретического и практического материала учебников геометрии	Ноябрь 2024	Выполнено
3.	Аанализ заданий 16 ОГЭ по математике по комбинации окружности и многоугольников. Разделение заданий по темам и классам обучения.	Декабрь 2024	Выполнено
4.	Разработка системы задач для подготовки к ОГЭ по изучаемой теме	Январь – февраль 2025	Выполнено
5.	Создание и оформление сайта	Март – апрель 2025	Выполнено
6.	Оформление работы	Май 2025	Выполнено
7.	Подготовка презентации и выступления к защите	Июнь 2025	Выполнено

Дата выдачи задания «28» 10 2024г.

Руководитель _____ Сорокина М.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Служеникина С.И.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Служеникиной Софьи Игоревны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Служеникина Софья Игоревна, студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методические особенности изучения комбинации окружности и многоугольников в курсе геометрии основного общего образования» выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись

29.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 29.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР _____ М. В. Сорокина
подпись И.О.Ф.

Протокол
проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему
«Методические особенности изучения комбинации окружности и многоугольников в курсе геометрии основного общего образования»
студентки 5 курса Служеникиной Софьи Игоревны
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Сорокина Марина Валерьевна

Отчет о проверке

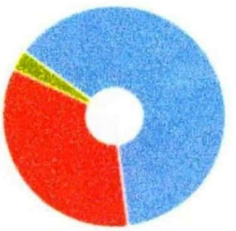
Автор: Служеникина Софья Игоревна

Название документа: VKR_Sluzhenikina_S_I

Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения
34.47%

Оригинальность
62.62%

Цитирования
2.91%

Самоцитирования
0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 92.56% текста документа, исключено из проверки: 7.44% текста документа. Разделы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы, библиография, фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 98

Тип документа: Не указано

Дата проверки: 29.05.2025 17:15:16

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 82

Символов в тексте: 59742

Слов в тексте: 7922

Число предложений: 1423

29.05.25
(дата)

(подпись)

М. В. Сорокина
(ИОФ руководителя ВКР)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические особенности изучения комбинации окружности и многоугольников в курсе геометрии основного общего образования»
студентки Служеникиной Софьи Игоревны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 20ЗФПМ1

Выпускная квалификационная работа Служеникиной С.И. посвящена методике изучения комбинаций окружности и многоугольников в школьном курсе планиметрии.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы, приложений. Во введении представлены цель и задачи исследования, отмечается актуальность темы, выделены предмет и объект исследования. В первой главе излагаются теоретические факты, необходимые для дальнейшей работы. Проведен детальный анализ федеральных рабочих программ основного общего образования по математике профильного и базового уровней. Изучено содержание нескольких школьных учебников по геометрии, в том числе входящих в федеральный перечень. Проведен их сравнительный анализ. Во второй главе рассматриваются задачи ОГЭ, касающиеся комбинаций окружности с треугольниками и четырехугольниками различных видов. Описана разработка и задачное наполнение сайта по изучаемому вопросу, предназначенного для подготовки обучающихся 9 класса к сдаче основного государственного экзамена по математике (задача 16).

Работа Служеникиной С.И. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть использованы в работе учителя математики и при подготовке к ОГЭ.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «отлично».

Руководитель, к. ф.-м. н, доцент кафедры
«Математическое образование» _____ М. В. Сорокина