

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи



Мартынова Валерия Юрьевна

**Численные методы решения задач дифракции и распространения
электромагнитных волн в нелинейном слое**

Специальность 05.13.18

Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Смирнов Юрий Геннадьевич

Пенза 2020

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. Математические модели дифракции и распространения электромагнитных волн в нелинейном слое	16
1.1. Математическая модель дифракции электромагнитных ТЕ-волн на нелинейном слое	16
1.1.1. Постановка нелинейной задачи дифракции	16
1.1.2. Нелинейность с насыщением	21
1.1.3. Керровская нелинейность	25
1.2. Математическая модель распространения электромагнитных связанных ТЕ-ТЕ-волн в нелинейном слое	40
1.2.1. Постановка задачи на собственные значения	40
1.2.2. Интегральные уравнения и дисперсионные уравнения	46
1.2.3. Анализ системы дисперсионных уравнений	53
1.3. Математическая модель распространения электромагнитных симметричных гибридных волн в нелинейном слое	57
1.3.1. Постановка задачи на собственные значения	57
1.3.2. Вывод системы нелинейных интегральных уравнений	63
1.3.3. Единственность решения операторного уравнения	67
1.3.4. Система дисперсионных уравнений	69
ГЛАВА 2. Численные методы решения задач дифракции и распространения электромагнитных волн в нелинейном слое	72
2.1. Численный метод решения задачи дифракции поляризованных электромагнитных ТЕ-волн на нелинейном слое	72
2.1.1. Итерационный метод решения интегрального уравнения	72
2.1.2. Оценка скорости сходимости итерационного метода решения интегрального уравнения	73

2.2.	Численный метод решения задачи распространения электромагнитных связанных ТЕ-ТЕ-волн в нелинейном слое	73
2.2.1.	Итерационный метод решения системы интегральных уравнений	73
2.2.2.	Оценка скорости сходимости итерационного метода решения интегрального уравнения	75
2.2.3.	Теоремы о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным	75
2.3.	Численный метод решения задачи распространения электромагнитных симметричных гибридных волн в нелинейном слое	79
2.3.1.	Итерационный метод решения системы интегральных уравнений	79
2.3.2.	Оценка скорости сходимости итерационного метода решения интегрального уравнения	81
2.3.3.	Теорема о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным	81

ГЛАВА 3. Комплекс программ для численного решения задач дифракции и распространения электромагнитных волн в нелинейном слое и результаты расчетов 86

3.1.	Комплекс программ для численного решения задач дифракции и распространения поляризованных электромагнитных ТЕ-волн на нелинейном слое	86
3.1.1.	Алгоритм приближенного решения задачи P_{1s}	87
3.1.2.	Алгоритм приближенного решения задачи P_2	91
3.1.3.	Алгоритм приближенного решения задачи P_3	93
3.2.	Результаты расчетов для задачи дифракции поляризованных электромагнитных ТЕ-волн на нелинейном слое	102
3.3.	Результаты расчетов для задачи распространения электромагнитных связанных ТЕ-ТЕ-волн в нелинейном слое	107

3.4. Результаты расчетов для задачи распространения электромагнитных симметричных гибридных волн в нелинейном слое	119
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	125
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	126
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Программный код	136
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ	176
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Результаты внедрения исследовательской работы	180

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Теория распространения электромагнитных волн в линейных диэлектрических волноводах различного поперечного сечения нашла широкое применение в технике СВЧ и при расчете и конструировании оптических устройств [1, 5, 9, 16, 19, 20, 64]. Математическая теория распространения собственных волн линейных волноведущих структур развита достаточно полно (см., например, [5, 16, 19]) и имеет многочисленные приложения (см., например, [1, 5]).

После создания лазеров и экспериментов с ними были обнаружены нелинейные эффекты в твердых телах, жидкостях и газах [2, 4]. Это привлекло внимание исследователей к изучению задач о распространении электромагнитных волн в нелинейных средах [3, 10–12, 26]. К таким задачам относятся: распространение и дифракция электромагнитных волн в средах с самовоздействием (самофокусировка, дефокусировка), генерация высших гармоник (в первую очередь второй и третьей), рамановское рассеяние и т.д. [2, 4, 11, 15, 23, 24].

Задачи дифракции и распространения электромагнитных волн в нелинейных средах остаются актуальными и в настоящее время. Это связано с несколькими обстоятельствами. Прежде всего, такие задачи описывают различные физические явления в электродинамике. Нелинейные эффекты, возникающие при дифракции и распространении электромагнитных волн в веществе, находят частое применение, например, в физике плазмы, нелинейной оптике, лазерной технике и микроэлектронике [48, 67, 72]. Несмотря на многочисленные исследования в этой области на протяжении последних двух десятилетий остаются неизученными свойства симметричных гибридных и связанных нелинейных волн, а также свойства решений задач дифракции электромагнитной волны на нелинейном слое. Особый интерес представляет исследование нелинейных свойств новых материалов [30, 44, 46]. Таким образом, изучение перечисленных

выше задач является актуальным.

С другой стороны, задачи дифракции и распространения электромагнитных волн в нелинейных средах представляют интерес с математической точки зрения. Задачи распространения электромагнитных волн в нелинейных средах приводят к нелинейным задачам на собственные значения, причем как к однопараметрическим (распространение поляризованной ТЕ-волны), так и к многопараметрическим (распространение связанных ТЕ-ТЕ волн). Кроме того, задача о распространении нелинейных симметричных гибридных волн сводится к новому типу двухпараметрических задач, в котором только один из параметров является спектральным, а второй выбирается таким образом, чтобы существовало нетривиальное решение задачи. Общая теория решения нелинейных задач не развита. В связи с этим возникает необходимость в развитии аналитических и численных методов решения подобных задач.

Методы решения указанных задач могут быть использованы для обнаружения новых нелинейных физических эффектов в линзах и других оптических устройствах [3]. Комплексы программ, основанные на развитой теории, могут быть применены для расчета физических характеристик и учета нелинейных эффектов в оптических устройствах.

Остановимся кратко на полученных ранее результатах различных авторов, касающихся исследования нелинейных волн и задач дифракции. Наиболее полные результаты удалось получить в задачах о распространении поляризованных монохроматических электромагнитных волн в плоскостойких волноводах и цилиндрических диэлектрических волноводах с круглым сечением, заполненных средой, диэлектрическая проницаемость которой зависит от квадрата модуля интенсивности электрического поля. Первые строгие постановки таких задач были предложены в работах Елеонского П.Н., Оганесянца Л.Г. и Сирина В.П. [34, 35]. Задачи о распространении ТЕ- и ТМ-поляризованных

электромагнитных волн в плоских нелинейных волноводах изучались в работах Boardman A.D. [31, 32], Schürmann H.W., Серова В.С., Шестопалова Ю.В. [50–52], Mihalache D. и соавт. [45], Joseph R.I. [36], Chen Qin [33], Смирнова Ю.Г., Валовика Д.В. [6–8, 57, 60, 69]. Изучение процессов распространения ТЕ- и ТМ-волн привело к появлению новых постановок задач о распространении волн и, как следствие, открытию новых режимов распространения электромагнитных волн в нелинейных средах [53, 54, 61, 68, 70]. Еще одной новой задачей является задача о распространении так называемой нелинейной гибридной волны, которая не является связанной ТЕ-ТМ-волной в смысле указанных выше работ. Теория таких задач в настоящее время только начинает развиваться. По-видимому, первый теоретический результат о существовании азимутально-симметричных гибридных электромагнитных волн был доказан в следующей работе [63]. Нелинейные задачи дифракции ТЕ- и ТМ-поляризованных электромагнитных волн изучались в работах Frantzeskakis D.J. и соавт. [29], Просвирнина С.Л. и соавт. [43], Schürmann H.W. и Schmoldt R.Z. [49], Lederer F. и соавт. [66]. Таким образом, изучение связанных и симметричных гибридных нелинейных волн, а также задач дифракции электромагнитной волны на нелинейном слое является актуальным.

Настоящая работа посвящена изучению задач о распространении нелинейной симметричной гибридной и связанной электромагнитной волн в нелинейных слоях, заполненных средой с нелинейностью с эффектом насыщения, а также задаче дифракции электромагнитных ТЕ-волн на нелинейных слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и с нелинейностью с эффектом насыщения.

В данной работе рассматривается два вида нелинейностей: нелинейность Керра и нелинейность с насыщением. Оба вида нелинейности зависят от квадрата модуля интенсивности электрического поля. Во всех реальных средах при

достаточно высоких значениях интенсивности наблюдается явление насыщения [3]. Нелинейность Керра более распространена, но при увеличении интенсивности электрического поля она неограниченно возрастает, в то время как нелинейность с эффектом насыщения остается ограниченной, поэтому более адекватно описывает нелинейные явления.

В настоящее время для решения задач о распространении ТЕ- и ТМ-поляризованных и связанных электромагнитных волн используются два метода: метод интегральных дисперсионных уравнений [57, 60, 71] и различные модификации метода возмущений. Впервые метод возмущений использовался для изучения нелинейных задач на собственные значения, возникающих в теории волноводов в [21, 50, 58]. Затем этот метод был применен для анализа распространения связанной электромагнитной волны в волноводах, заполненных средой с нелинейностью Керра [53, 54, 61]. Обобщение применения метода возмущений к n -мерной задаче на собственные значения выполнено в [27, 28, 59].

Метод интегральных дисперсионных уравнений позволяет полностью исследовать задачи для ТЕ- и ТМ-поляризованных волн в плоских волноводах, но не может быть применен к исследованию задач о связанных волнах. Метод возмущений более универсальный, может быть применен к исследованию и ТЕ- и ТМ-поляризованных волн, связанных волн и симметричных гибридных волн. Основным ограничением метода возмущений является то, что этот метод позволяет доказывать существование решений (нелинейной) задачи, близких к решению соответствующей линейной задачи. В то время как метод интегральных дисперсионных уравнений позволяет получать результаты при любых значениях коэффициента нелинейности.

Следует отметить, что непосредственное применение перечисленных выше методов к решению рассматриваемых в данной работе задач встречает серьезные трудности. Поэтому требуется разработка новых методов и подходов к

исследованию этого круга задач.

Таким образом, разработка аналитических и численных методов решения рассматриваемых в диссертации является актуальной.

Цель и задачи исследования. Целью данной работы является исследование математических моделей дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением, распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

1. Разработка аналитических методов исследования математических моделей дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением, распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.
2. Разработка и обоснование численных методов и вычислительных алгоритмов приближенного решения задачи дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.

3. Разработка на языке C/C++ и тестирование программно-вычислительного комплекса для численного решения задач дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, а также получение и анализ численных результатов решения указанных задач.

Объектом исследования являются математические модели дифракции и распространения электромагнитных волн в нелинейном слое.

Предметом исследования является численная реализация разработанных итерационных методов решения задач дифракции и распространения электромагнитных волн в нелинейном слое.

Методы исследования. Основные теоретические результаты диссертационной работы получены с использованием методов математического моделирования, разделов классической электродинамики, теории дифференциальных и интегральных уравнений, теории краевых задач для уравнений Максвелла.

Для разработки алгоритмов применялись численные методы и методы информационных технологий.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Получены результаты о разрешимости задач дифракции электромагнитных монохроматических поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных немагнитной средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с эффектом насыщения. В случае нелинейности с насыщением найдены условия на коэффициенты нелинейности, при которых задача имеет единственное решение. В случае нелинейности Керра доказано существование

бесконечного числа волн даже при малых значениях нелинейности. Для задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, найдены условия существования и единственности волны. Исследован новый тип двухпараметрических задач, в которых только один из параметров спектральный, а второй подбирается таким образом, чтобы существовало нетривиальное решение задачи и доказано существование симметричной гибридной электромагнитной волны в слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.

2. Для задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения, разработан и обоснован численный (итерационный) метод приближенного нахождения касательной компоненты электрического поля и амплитуд отраженной и прошедшей волн для заданной амплитуды падающей волны. Для задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, разработан и обоснован численный метод нахождения приближенных связанных собственных значений и собственных функций. Для задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, разработан и обоснован численный метод нахождения приближенных собственных значений и собственных функций.
3. Разработан комплекс программ, позволяющий находить приближенные решения задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском слое, заполненном средой с

нелинейностью с насыщением.

Научно-практическая значимость результатов, полученных в диссертации заключается в разработанных новых аналитических и численных методах и возможности их использования для обнаружения новых нелинейных эффектов в линзах и других оптических устройствах. Предложенные в работе методы могут быть применены для решения задач возникающих в теории оптических волноводов.

Достоверность и обоснованность результатов, сформулированных в диссертации, обеспечены корректным использованием математических методов и сопоставлением теоретических утверждений с результатами численных расчетов.

Соответствие паспорту специальности. Работа выполнена в соответствии с требованиями специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Области исследования:

1 – Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

2 – Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

3 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Результаты выносимые на защиту:

1. Результаты о разрешимости задачи дифракции электромагнитных ТЕ-волн на нелинейных слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и с нелинейностью с насыщением, условие единственности решения нелинейной задачи дифракции в случае нелинейности с насыщением; результаты о разрешимости задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое,

заполненном средой с нелинейностью с насыщением, условие единственности решения задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением; условие единственности решения для задачи распространения симметричной гибридной электромагнитной волны в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением.

2. Численный (итерационный) метод приближенного нахождения касательной компоненты электрического поля и амплитуды отраженной волны для заданной амплитуды падающей волны для задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения, оценка скорости сходимости итерационного метода; численный (итерационный) метод приближенного нахождения связанных собственных значений и собственных функций для задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, теоремы о существовании и сходимости приближенных связанных собственных значений к точным; численный (итерационный) метод приближенного нахождения собственных значений и собственных функций для задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, теоремы о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным.
3. Комплекс программ, позволяющий находить приближенные решения задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском слое, заполненном средой с нелиней-

ностью с насыщением; анализ результатов расчетов.

Реализация работы и внедрение результатов. Результаты исследования использованы в образовательном процессе кафедры «Математика и суперкомпьютерное моделирование», что подтверждено актом о внедрении (см. приложение В), и при выполнении следующих проектов, где соискатель являлся руководителем или исполнителем: руководитель гранта РФФИ №18-31-00109; исполнитель по грантам РФФИ №14-01-31234, №15-01-00206, Госзаданию Минобрнауки РФ (проектная часть) №1.894.2017/4.6, грантам РНФ №14-11-00344, №18-71-10015.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались на международных и всероссийских научных конференциях, в их числе доклады и статьи для международных научных конференций «Days on Diffraction» (г. Санкт-Петербург, 2018, 2019), «Progress in Electromagnetics Research Symposium» (г. Санкт-Петербург, 2017), «Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения» (г. Пенза, 2019).

Публикации. Основные научные результаты диссертации отражены в 14 научных работах, из них в изданиях, входящих в базы WOS/Scopus, – 9 [37–41, 47, 55, 56, 62], в изданиях, рекомендованных ВАК, – 10 [14, 37–41, 47, 55, 56, 62], в изданиях, входящих в базу РИНЦ, – 14 [13, 14, 17, 18, 22, 37–41, 47, 55, 56, 62].

Зарегистрировано четыре программы для ЭВМ №2018665405 и №2018660595 от 4 декабря 2018 г., №2019616693 от 29 мая 2019 г. №2019667550 от 25 декабря 2019 г. (см. приложение Б).

Личный вклад автора. Все изложенные в диссертации основные результаты получены автором лично. Программная реализация численных методов и расчеты также выполнены автором самостоятельно. Автор принимал активное участие в обсуждении и интерпретации полученных результатов. Вклад соискателя в опубликованные работы, вошедшие в диссертацию, является ре-

шающим.

Структура и объем диссертации. Работа содержит 180 страниц и состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений.

ГЛАВА 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИФРАКЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ

1.1. Математическая модель дифракции электромагнитных ТЕ-волн на нелинейном слое

1.1.1. Постановка нелинейной задачи дифракции

Пусть $\Sigma_1 = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ – слой в $\mathbb{R}^3$, где $h > 0$. Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$, где

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x > h \\ \varepsilon_2 + \tilde{\alpha}f(|\mathbf{E}|^2), & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_3, & x < 0, \end{cases}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \tilde{\alpha} > 0$ – вещественные постоянные, $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mathbf{E}$ – электрическая составляющая электромагнитного поля, функция $f \in C^1(-\infty, +\infty)$ будет определена в пунктах 1.1.2., 1.1.3. Считаем, что $\varepsilon_2 > \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$ и $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} \geq \varepsilon_0$.

В качестве источника поля рассмотрим следующую функцию $\tilde{\mathbf{j}}^{\text{ст}} = \mathbf{j}^{\text{ст}}e^{-i\omega t}$, где ω – круговая частота, $\mathbf{j}^{\text{ст}} = \mathbf{e}_y i A e^{i\gamma z} \delta(x - x_0)$, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, A – известная вещественная амплитуда источника, $x_0 > h$ – известная вещественная постоянная, характеризующая положение источника.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$ на слое Σ_1 . Поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ удовлетворяет уравнениям Максвелла в полупространстве

$x > h$ вида

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_1\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{сг}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \end{cases} \quad (1.1)$$

в слое Σ_1 и в полупространстве $x < 0$ вида

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Комплексные амплитуды [34] монохроматической ТЕ-волны $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ имеют вид

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^\top, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^\top. \quad (1.3)$$

Решение ищем в виде бегущей волны вдоль координаты z [5]

$$E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}, \quad (1.4)$$

где $\gamma \in (\sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}}, \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_2})$ – известная (вещественная) постоянная распространения волны, E_y, H_x, H_z – неизвестные функции.

Пусть $[v]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} v(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} v(x)$.

Задача дифракции: *требуется найти нетривиальное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ вида (1.3), (1.4), удовлетворяющее уравнениям Максвелла (1.1) в полупространстве $x > h$, (1.2) в слое Σ_1 и в полупространстве $x < 0$, условиям непрерывности касательных компонент*

$$[E_y]|_{x=0} = 0, \quad [H_z]|_{x=0} = 0, \quad [E_y]|_{x=h} = 0, \quad [H_z]|_{x=h} = 0$$

и экспоненциально затухающее при $|x| \rightarrow \infty$ в полупространствах $x < 0$ и $x > h$.

Подставляя комплексные амплитуды (1.3) с компонентами (1.4) в уравне-

ния Максвелла (1.1), получаем

$$\begin{cases} i\gamma H_x - H'_z = -i\omega\varepsilon_1\varepsilon_0 E_y + iA\delta(x - x_0), \\ i\gamma E_y = -i\omega\mu_0 H_x, \\ E'_y = i\omega\mu_0 H_z, \end{cases} \quad (1.5)$$

где $(\cdot)' \equiv \frac{d}{dx}$. Из системы (1.5), находим

$$H_x = -\frac{\gamma}{\omega\mu_0} E_y, \quad H_z = -\frac{i}{\omega\mu_0} E'_y. \quad (1.6)$$

Используя (1.6), получаем

$$E''_y + (k_0^2\varepsilon_1 - \gamma^2)E_y = A\omega\mu_0\delta(x - x_0), \quad x \geq h, \quad (1.7)$$

где $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$.

Учитывая условия на бесконечности, получим решение уравнения (1.7) в виде

$$E_y(x) = F_R e^{-\kappa_1(x-h)} - \frac{A\omega\mu_0 e^{-\kappa_1|x-x_0|}}{2\kappa_1}, \quad x \geq h,$$

где $\kappa_1 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2\varepsilon_1}$. Таким образом, касательная составляющая электрического поля и её производная в точке $x = h$ будут иметь вид

$$E_y(h) = F_R - F_I, \quad E'_y(h) = -\kappa_1(F_R + F_I), \quad (1.8)$$

где F_R – амплитуда отраженного поля, а $F_I = A\omega\mu_0(2\kappa_1)^{-1}e^{-\kappa_1(x_0-h)}$ – амплитуда падающего поля в точке $x = h$. Заметим, что F_I является известной величиной, поскольку все параметры входящие в определение F_I известны.

Подставляя комплексные амплитуды с компонентами (1.4) уравнения Макс-

велла (1.2), получаем

$$\begin{cases} i\gamma H_x - H'_z = -i\omega\varepsilon E_y, \\ i\gamma E_y = -i\omega\mu_0 H_x, \\ E'_y = i\omega\mu_0 H_z. \end{cases} \quad (1.9)$$

Из системы (1.9) получаем выражения для H_x и H_z вида (1.6).

Используя (1.6), находим

$$E''_y - \gamma^2 E_y = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon E_y. \quad (1.10)$$

В полупространстве $x \leq 0$ уравнение (1.10) примет вид

$$E''_y = \kappa_3^2 E_y, \quad (1.11)$$

где $\kappa_3 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_3}$.

Учитывая условия на бесконечности, получим решение уравнения (1.11)

в виде

$$E_y(x) = F_T e^{\kappa_3 x}.$$

Таким образом, касательная составляющая электрического поля и её производная в точке $x = 0$ будут иметь вид

$$E_y(0) = F_T, \quad E'_y(0) = \kappa_3 F_T, \quad (1.12)$$

где F_T – амплитуда прошедшего поля.

Сформулируем задачу дифракции для вещественной функции $u := E_y$. В слое Σ_1 уравнение (1.10) можно представить в виде

$$u'' + \kappa_2^2 u = -\alpha f(u^2)u, \quad (1.13)$$

где $\kappa_2 = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 - \gamma^2}$, $\alpha = k_0^2 \tilde{\alpha}$.

Так как касательные компоненты E_y , H_y непрерывны на границах $x = 0$, $x = h$, функция $u(x)$ удовлетворяет условиям сопряжения

$$[u]|_{x=0} = 0, [u']|_{x=0} = 0, [u]|_{x=h} = 0, [u']|_{x=h} = 0. \quad (1.14)$$

Следовательно для функции $u(x)$ справедливы следующие граничные условия

$$u(0) = F_T, \quad u'(0) = \kappa_3 F_T, \quad (1.15)$$

$$u(h) = F_R - F_I, \quad u'(h) = -\kappa_1(F_R + F_I). \quad (1.16)$$

Задача P_1 : найти (вещественную) нетривиальную функцию

$$u(x) \in C^1(-\infty, +\infty) \cap C^2(-\infty, 0) \cap C^2(0, h) \cap C^2(h, +\infty),$$

которая в полупространстве $x < 0$ определяется формулой

$$u(x) = F_T e^{\kappa_3 x}, \quad (1.17)$$

в полупространстве $x > h$ – формулой

$$u(x) = F_R e^{-\kappa_1(x-h)} - F_I e^{-\kappa_1(|x-x_0|+(h-x_0))}, \quad (1.18)$$

а в слое $0 < x < h$ является решением уравнения (1.13).

Замечание 1. Определенная таким образом функция $u(x)$ удовлетворяет условиям сопряжения (1.14). F_I – известная вещественная величина, F_T и F_R – неизвестные вещественные величины.

После нахождения функции $u(x)$, можно определить амплитуды отраженного F_R и прошедшего F_T полей при заданном значении амплитуды падающего поля F_I из (1.17), (1.18).

Вопрос о единственности (или неединственности) решения задачи P_1 будет

рассмотрен в пунктах 1.1.2., 1.1.3..

Утверждение 1. *Функция $u(x)$ является решением задачи P_1 тогда и только тогда, когда E_y удовлетворяет условиям исходной задачи дифракции.*

Доказательство. Легко проверить, что если функция $u(x)$ – решение задачи P_1 , то E_y , а также H_x , H_z в соответствии с (1.6), в полупространстве $x > h$ являются решением системы (1.1), а в слое Σ_1 и в полупространстве $x < 0$ являются решением системы (1.2). Обратное следует из вывода формул (1.13), (1.17), (1.18). $\square$

Таким образом, задача дифракции эквивалентно сводится к задаче P_1 .

Замечание 2. Если функция u является решением задачи P_1 , то функция $-u$ так же является решением этой задачи. Поэтому для определенности (единственности решения) будем считать, что $F_T > 0$.

1.1.2. Нелинейность с насыщением

Рассмотрим случай нелинейности с насыщением [3], когда $f(u^2) = \frac{u^2}{1+\beta u^2}$, где $\beta > 0$ – вещественная постоянная. Задачу P_1 с такой нелинейностью будем обозначать через P_s . Докажем, что в случае нелинейности с насыщением при некотором дополнительном условии задача P_{1s} (а в силу утверждения 1 и исходная задача дифракции) имеет единственное решение.

Перепишем уравнение (1.13) в форме

$$Lu = -\frac{\alpha u^3}{1 + \beta u^2},$$

где

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2^2.$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} LG = -\delta(x-s), \\ G'|_{x=0} = G'|_{x=h} = 0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Функция Грина этой задачи имеет вид

$$G_1(x, s) = \begin{cases} -\frac{\cos(\kappa_2 x) \cos(\kappa_2(s-h))}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\cos(\kappa_2(x-h)) \cos(\kappa_2 s)}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & s < x \leq h. \end{cases} \quad (1.20)$$

Используя вторую формулу Грина, получаем

$$\int_0^h (G_1 Lu - u LG_1) dx = (u'(x)G_1(x, s) - u(x)G_1'(x, s)) \Big|_0^h.$$

Отсюда, а также из (1.8), (1.12) и (1.19), находим

$$u(s) = \alpha \int_0^h G_1(x, s) \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx - \kappa_1(F_R + F_I)G_1(h, s) - \kappa_3 F_T G_1(0, s). \quad (1.21)$$

Исключим F_R и F_T из представления (1.21) функции u .

Пусть $s = h$, тогда из формулы (1.21) получаем

$$F_R = \frac{D_I F_I}{D_R} - \frac{\kappa_3 G_1(0, h) F_T}{D_R} + \alpha \int_0^h \frac{G_1(x, h)}{D_R} \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx, \quad (1.22)$$

где

$$D_R = 1 + \kappa_1 G_1(h, h), \quad D_I = 1 - \kappa_1 G_1(h, h). \quad (1.23)$$

Пусть $s = 0$, тогда из формулы (1.21) получаем

$$F_T = -\frac{\kappa_1 G_1(h, 0)(F_R + F_I)}{D_T} + \alpha \int_0^h \frac{G_1(x, 0)}{D_T} \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx, \quad (1.24)$$

где

$$D_T = 1 + \kappa_3 G_1(0, 0). \quad (1.25)$$

Используя формулы (1.22) и (1.24), получим следующие выражения

$$F_T = -\frac{2\kappa_1 G_1(0, h) F_I}{D_T D_{TR} D_R} + \alpha \int_0^h \frac{D_R G_1(x, 0) - \kappa_1 G_1(0, h) G_1(x, h)}{D_T D_{TR} D_R} \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx, \quad (1.26)$$

$$F_R = \frac{(D_I D_T + \kappa_1 \kappa_3 G_1^2(0, h)) F_I}{D_T D_{TR} D_R} + \alpha \int_0^h \frac{D_T G_1(x, h) - \kappa_3 G_1(0, h) G_1(x, 0)}{D_T D_{TR} D_R} \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx, \quad (1.27)$$

где

$$D_{TR} = 1 - \frac{\kappa_1 \kappa_3 G_1^2(0, h)}{D_T D_R}. \quad (1.28)$$

Подставляя (1.26), (1.27) в уравнение (1.21), получаем

$$u(s) = \alpha \int_0^h Q_1(x, s) \frac{u^3(x)}{1 + \beta u^2(x)} dx + q_2(s), \quad (1.29)$$

где

$$Q_1(x, s) = G_1(x, s) - \frac{\kappa_1 G_1(h, s) G_1(x, h)}{D_{TR} D_R} - \frac{\kappa_3 G_1(0, s) G_1(x, 0)}{D_T D_{TR}} + \frac{\kappa_1 \kappa_3 G_1(0, h) (G_1(h, s) G_1(x, 0) + G_1(0, s) G_1(x, h))}{D_T D_{TR} D_R}, \quad (1.30)$$

$$q_2(s) = \frac{2\kappa_1 \kappa_3 G_1(0, h) G_1(0, s) F_I}{D_T D_{TR} D_R} - \frac{\kappa_1 G_1(h, s) (D_I D_T + \kappa_1 \kappa_3 G_1^2(0, h) + D_T D_{TR} D_R) F_I}{D_T D_{TR} D_R}. \quad (1.31)$$

В (1.29) функция u уже не зависит явно от F_R и F_T .

Утверждение 2. Пусть заданы $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $h > 0$, F_I . Функция $u(x)$ является решением уравнения (1.29) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям задачи P_{1s} .

Доказательство. Выше было показано, что если функция $u(x)$ удовлетворяет условиям задачи P_{1s} , то она является решением уравнения (1.29). Обратно, прямой проверкой нетрудно убедиться в том, что функция $u(s)$, определенная по формуле (1.29), удовлетворяет всем условиям задачи P_{1s} . $\square$

Пусть

$$q_1 = \frac{3\alpha}{2\beta}M, \quad (1.32)$$

где

$$M = \max_{0 \leq s \leq h} \int_0^h |Q_1(x, s)| dx. \quad (1.33)$$

Для уравнения (1.29) справедливо следующее

Утверждение 3. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_1 < 1$. Тогда уравнение (1.29) имеет единственное решение $u = u^* \in C[0, h]$.

Доказательство. Легко проверить следующую оценку

$$\left| \frac{u_1^3}{1 + \beta u_1^2} - \frac{u_2^3}{1 + \beta u_2^2} \right| \leq \frac{3}{2\beta} |u_1 - u_2|. \quad (1.34)$$

Перепишем уравнение (1.29) в операторной форме

$$u = \alpha Q_1 u + q_2; \quad Q_1 : C[0, h] \rightarrow C[0, h]. \quad (1.35)$$

В соответствии с (1.34) получаем

$$|\alpha Q_1 u_1 - \alpha Q_1 u_2| \leq \frac{3\alpha}{2\beta} \max_{0 \leq s \leq h} |u_1 - u_2| \int_0^h |Q_1(x, s)| dx$$

и, следовательно,

$$\|\alpha Q_1 u_1 - \alpha Q_1 u_2\| \leq \frac{3\alpha}{2\beta} M \|u_1 - u_2\|,$$

где M определяется формулой (1.33) и $\|u\| = \max_{0 \leq s \leq h} |u|$. Тогда для $q_1 < 1$ отображение Q_1 является сжатием. Выберем значение $r > 0$ из условия $\|q_2\| \leq (1 - q_1)r$. В соответствии со следствием 2 (см. [25, с. 382]) сжатие Q_1 действует из шара $B_r(0)$ в тот же шар в $C[0, h]$, где $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| < r\}$. Таким образом, уравнение (1.35) имеет единственное решение $u^* \in B_r(0) \subset C[0, h]$. Так как r может быть выбрано сколь угодно большим, утверждение выполняется. $\square$

Из утверждений 1, 2, 3 получаем следующую

Теорема 1 (о единственности). *Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_1 < 1$. Тогда задача P_{1s} (а, следовательно, и задача дифракции в случае нелинейности с насыщением) имеет единственное решение.*

1.1.3. Керровская нелинейность

Рассмотрим случай нелинейности Керра, когда $f(u^2) = u^2$. Задачу P_1 с такой нелинейностью будем обозначать через P_{1k} . Докажем, что в случае нелинейности Керра при некотором дополнительном условии задача P_{1s} (а в силу утверждения 1 и исходная задача дифракции) имеет бесконечное число решений.

Для анализа задачи дифракции будем использовать метод интегральных дисперсионных уравнений [71].

Первый интеграл уравнения (1.13) имеет вид

$$u'^2 = -\kappa_2^2 u^2 - \frac{1}{2} \alpha u^4 + C. \quad (1.36)$$

Используя граничные условия (1.15), (1.16), получим систему

$$\begin{cases} C = (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)F_T^2 + \frac{1}{2}\alpha F_T^4, \\ C = \kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + \kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \frac{1}{2}\alpha(F_R - F_I)^4. \end{cases} \quad (1.37)$$

Из системы (1.37) можно выразить F_T^2 через F_R и F_I :

$$F_T^2 = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + 2\alpha C}}{\alpha},$$

где

$$C = \kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + \kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \frac{1}{2}\alpha(F_R - F_I)^4 > 0. \quad (1.38)$$

Учитывая замечание 2, получаем

$$F_T = \sqrt{\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \sqrt{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + 2\alpha C}}{\alpha}}, \quad (1.39)$$

где C определяется формулой (1.38).

Введем новые переменные

$$\tau(x) := u^2(x), \quad \eta(x) := \frac{u'(x)}{u(x)}. \quad (1.40)$$

Уравнение (1.13) может быть записано следующим образом

$$\begin{cases} \tau' = 2\tau\eta, \\ \eta' = -(\eta^2 + \kappa_2^2 + \alpha\tau). \end{cases} \quad (1.41)$$

Первый интеграл (1.36) принимает вид

$$\frac{1}{2}\alpha\tau^2 + (\eta^2 + \kappa_2^2)\tau = C. \quad (1.42)$$

Разрешая (1.42) относительно τ , учитывая, что $\tau \geq 0$, и подставляя ре-

зультат во второе уравнение системы (1.41), получим

$$\eta' = -\sqrt{(\eta^2 + \kappa_2^2)^2 + 2\alpha C}, \quad (1.43)$$

где подкоренное выражение, очевидно, положительно для всех вещественных η и γ , $\alpha C > 0$.

Используя условия сопряжения на границах $x = 0$, $x = h$, получим

$$\eta(0) = \kappa_3 > 0, \quad \eta(h) = -\kappa_1 \frac{F_R + F_I}{F_R - F_I}. \quad (1.44)$$

Так как $\eta' < 0$, функция η монотонно убывает при $x \in [0, h]$. Однако нельзя исключить из рассмотрения случай, когда η имеет разрывы. В общем случае, функция $u(x)$ имеет нули при $x \in (0, h)$. Это означает, как видно из (1.40), что η имеет разрывы. Допустим, что имеется n точек разрыва $x_1, \dots, x_n \in (0, h)$. Если $n = 0$, то функция η непрерывна на отрезке $x \in [0, h]$, а функция $u(x)$ не обращается в 0 на этом же отрезке. Очевидно, что $u'(x_i) \neq 0$ для всех $i = \overline{1, n}$. Отсюда, принимая во внимание формулу (1.43), получаем, что

$$\eta(x_i - 0) = -\infty, \quad \eta(x_i + 0) = +\infty, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.45)$$

Введем обозначение

$$w := \frac{1}{\sqrt{(s^2 + \kappa_2^2)^2 + 2\alpha C}}, \quad (1.46)$$

где $w \equiv w(s; C)$.

Будем разыскивать решения уравнения (1.43) на каждом из множеств

$[0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n_1}, h]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\eta(x)}^{\eta(x_1-0)} wds = x + c_0, \quad 0 \leq x < x_1; \\ - \int_{\eta(x)}^{\eta(x_i+0)} wds = x + c_i, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}; \\ - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(x)} wds = x + c_n, \quad x_n < x \leq h. \end{array} \right. \quad (1.47)$$

Подставляя $x = 0$, $x = x_{i+1} - 0$, $x = h$ в уравнения (1.47) (в первое, второе и третье соответственно), найдем постоянные $c_0, c_1, \dots, c_n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} wds; \\ c_i = - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} wds - x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ c_n = - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} wds - h. \end{array} \right. \quad (1.48)$$

С учетом (1.48) уравнения (1.47) примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\eta(x)}^{\eta(x_1-0)} wds = x + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} wds, \quad 0 \leq x < x_1; \\ - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x)} wds = x - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} wds - x_{i+1}, \quad x_i < x < x_{i+1}; \\ - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(x)} wds = x - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} wds - h, \quad x_n < x \leq h. \end{array} \right. \quad (1.49)$$

Подставляя $x = x_1 - 0$, $x = x_i + 0$, $x = x_n + 0$ в уравнения (1.49) (в первое,

второе и третье соответственно), получаем

$$\begin{cases} 0 = x_1 + \int_{\eta(0)}^{\eta(x_1-0)} wds, \\ 0 = x_i - \int_{\eta(x_i+0)}^{\eta(x_{i+1}-0)} wds - x_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ 0 = x_n - \int_{\eta(x_n+0)}^{\eta(h)} wds - h. \end{cases} \quad (1.50)$$

Учитывая формулы (1.44) и (1.45), из формул (1.50) получаем

$$\begin{cases} 0 < x_1 = - \int_{\eta(0)}^{-\infty} wds, \\ 0 < x_{i+1} - x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} wds, \quad i = \overline{1, n-1}; \\ 0 < h - x_n = \int_{\eta(h)}^{+\infty} wds. \end{cases} \quad (1.51)$$

Формулы (1.51) дают явные выражения для расстояний между нулями функции u . Кроме того, из этих формул следует сходимость рассматриваемых несобственных интегралов.

Далее, складывая все выражения в (1.51), получаем

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1} + h - x_n = \\ = \int_{-\infty}^{\eta(0)} wds + (n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} wds + \int_{\eta(h)}^{+\infty} wds. \end{aligned}$$

Из последней формулы находим

$$\int_{-\kappa_1 \frac{F_R + F_I}{F_R - F_I}}^{\kappa_3} wds + n \int_{-\infty}^{+\infty} wds = h, \quad (1.52)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Замечание 3. Если $\eta(h) \geq \eta(0)$, то $n = 1, 2, 3 \dots$

В дальнейшем нам понадобится (см. [42])

Утверждение 4. *Задача Коши для уравнения (1.13) с начальными условиями (1.15), где $F_T > 0$ и $\kappa_3 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_3} > 0$ – постоянные, имеет единственное решение $u \equiv u(x; \gamma)$ определенное глобально на $[0, h]$. Это решение непрерывно зависит от γ при всех $\gamma^2 > k_0^2 \varepsilon_3$.*

Имеет место следующее

Утверждение 5. *Пусть $\alpha > 0$, $h > 0$ и F_I известны. Пара F_I, F_R удовлетворяет уравнению (1.52) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям задачи P_{1k} .*

Доказательство. Выше было доказано, что если пара F_I, F_R удовлетворяет условиям задачи P_{1k} , то она удовлетворяют уравнению (1.52) для некоторого γ . Теперь докажем обратное.

Пусть для заданных значений параметров пара $F_I, F_R := \tilde{F}_R$ удовлетворяет уравнению (1.52).

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.13) с начальными условиями

$$u(0) = \tilde{F}_T, \quad u'(0) = \kappa_3 \tilde{F}_T,$$

где $\tilde{F}_T$ определяется в соответствии с формулами (1.39), (1.38). Решение такой задачи $u(x)$, определенное при $x \in [0, h]$, существует и единственно (см. утверждение 4). На этом этапе требовать выполнения условия $\frac{u'(h)}{u(h)} = -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}$ мы не можем. Используя найденное решение u , построим по формулам (1.40) функции τ и η . Ясно, что $\tau(0) = \tilde{F}_T^2$, $\eta(0) = \kappa_3$.

Пусть $\eta(h) = p < -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}$. Используя построенные τ и η , получаем

соотношение

$$\int_p^{\kappa_3} w ds + n \int_{-\infty}^{+\infty} w ds = h,$$

аналогичное уравнению (1.52).

Последнее соотношение перепишем в виде

$$\int_p^{-\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}} w ds + \int_{-\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}}^{\kappa_3} w ds + n \int_{-\infty}^{+\infty} w ds = h. \quad (1.53)$$

В уравнении (1.52) и в соотношении (1.53) подынтегральные выражения совпадают. Вычтем из (1.53) уравнение (1.52) при $F_R = \tilde{F}_R$, получим

$$\int_p^{-\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}} w ds = 0. \quad (1.54)$$

В силу очевидной оценки (см. (1.46))

$$\int_p^{-\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}} w ds > 0$$

получаем, что (1.54) выполняется только если $p = -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}$.

Отсюда получаем, что условие $\eta(h) = p < -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}$ неверно. Аналогично можно показать, что неверно и условие $\eta(h) = p > -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}$. По этой причине остается единственная возможность

$$p = -\kappa_1 \frac{\tilde{F}_R + F_I}{\tilde{F}_R - F_I}.$$

Следовательно пара $F_I, \tilde{F}_R$ удовлетворяет условиям задачи P_{1k} . $\square$

Утверждение 6. Пусть $\alpha > 0$ и F_I известны. Если $h \leq h_{\min}$, где

$$h_{\min} = \begin{cases} \frac{\pi}{\tilde{\theta}}, & \gamma^2 < \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2, \\ -\frac{1}{\tilde{\theta}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C_0}}{(|\kappa_2| + \tilde{\theta})^2} + \frac{2}{\tilde{\theta}_1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{|\kappa_2|}{\tilde{\theta}_1} \right), & \gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon, \quad \sqrt{2\alpha C_0} > \tilde{\kappa}_2^2, \\ -\frac{1}{\tilde{\theta}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C_0}}{(|\kappa_2| + \tilde{\theta})^2} - \frac{1}{\tilde{\theta}_2} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C_0}}{(|\kappa_2| + \tilde{\theta}_2)^2}, & \gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon, \quad \sqrt{2\alpha C_0} \leq \tilde{\kappa}_2^2, \end{cases}$$

где $\tilde{\theta} = \sqrt{|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C_0}}$, $\tilde{\theta}_1 = \sqrt{-|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C_0}}$, $\tilde{\theta}_2 = \sqrt{|\kappa_2^2| - \sqrt{2\alpha C_0}}$, $C_0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \frac{1}{2}\alpha F_I^4$, $\tilde{\kappa}_2 = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2}$, то для любого целого $n \geq 0$ найдется $F_R^{(n)}$ такое, что пара $F_R^{(n)}$ и F_I удовлетворяют уравнению (1.52).

Доказательство. Имеем следующие оценки

$$nT \leq \int_{-\kappa_1 \frac{F_R + F_I}{F_R - F_I}}^{\kappa_3} w ds + n \int_{-\infty}^{+\infty} w ds \leq (n+1)T,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ и $T = \int_{-\infty}^{+\infty} w ds$. Теперь необходимо оценить T . Элементарные неравенства

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{a+b},$$

($a \geq 0, b > 0$) дают

$$T^* \leq T \leq \sqrt{2}T^*,$$

где $T^* = \int_{-\infty}^{+\infty} (|s^2 + \kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C})^{-1} ds$. Интеграл T^* ниже вычисляется явно.

При $\gamma^2 < \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2$ величина $s^2 + \kappa_2^2 > 0$ и, следовательно, имеем

$$T^* = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ds}{|s^2 + \kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha C}} = \frac{\pi}{\sqrt{|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}}.$$

Теперь пусть $\gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2$. Обозначим $\sqrt{\gamma^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2}$ через $\tilde{\kappa}_2$, тогда

$$\begin{aligned} T^* &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{ds}{|s^2 + \kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}} = \\ &= 2 \int_0^{\tilde{\kappa}_2} \frac{ds}{-s^2 - \kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha C}} + 2 \int_{\tilde{\kappa}_2}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha C}} = \\ &= 2 \int_0^{\tilde{\kappa}_2} \frac{ds}{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha C} - s^2} + 2 \int_{\tilde{\kappa}_2}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \sqrt{2\alpha C} - \tilde{\kappa}_2^2} \equiv 2I_1 + 2I_2. \end{aligned}$$

Очевидно, что в I_1 знаменатель всегда положителен. Действительно, максимальное значение $s = \tilde{\kappa}_2$. Подстановка этого значения в знаменатель дает $\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha C} - \tilde{\kappa}_2^2 = \sqrt{2\alpha C} > 0$.

Вычисляя I_1 , получаем

$$I_1 = \int_0^{\tilde{\kappa}_2} \frac{ds}{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha C} - s^2} = -\frac{1}{\sqrt{|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{\left(|\kappa_2| + \sqrt{|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}\right)^2}.$$

В знаменателе интеграла I_2 возможны два случая. В первом случае имеем $\sqrt{2\alpha C} - \tilde{\kappa}_2^2 \leq 0$, то есть $\sqrt{2\alpha C} \leq \tilde{\kappa}_2^2$, тогда

$$I_2 = \int_{\tilde{\kappa}_2}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - (\tilde{\kappa}_2 - \sqrt{2\alpha C})} = -\frac{1}{\sqrt{|\kappa_2^2| - \sqrt{2\alpha C}}} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{\left(|\kappa_2| + \sqrt{|\kappa_2^2| - \sqrt{2\alpha C}}\right)^2}.$$

Во втором случае имеем $\sqrt{2\alpha C} - \tilde{\kappa}_2^2 > 0$, откуда получаем, что $\sqrt{2\alpha C} > \tilde{\kappa}_2^2$. Тогда

$$I_2 = \int_{\tilde{\kappa}_2}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + \sqrt{2\alpha C} - \tilde{\kappa}_2^2} = \frac{2}{\sqrt{-|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{|\kappa_2|}{\sqrt{-|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}} \right).$$

Объединяя результаты, окончательно получаем

$$T^* = \begin{cases} \frac{\pi}{\theta}, & \gamma^2 < \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2, \\ -\frac{1}{\theta} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|\kappa_2| + \theta)^2} + \frac{2}{\theta_1} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{|\kappa_2|}{\theta_1} \right), & \gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon, \quad \sqrt{2\alpha C} > \tilde{\kappa}_2^2, \\ -\frac{1}{\theta} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|\kappa_2| + \theta)^2} - \frac{1}{\theta_2} \ln \frac{\sqrt{2\alpha C}}{(|\kappa_2| + \theta_2)^2}, & \gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon, \quad \sqrt{2\alpha C} \leq \tilde{\kappa}_2^2, \end{cases}$$

где

$$\theta = \sqrt{|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}, \quad \theta_1 = \sqrt{-|\kappa_2^2| + \sqrt{2\alpha C}}, \quad \theta_2 = \sqrt{|\kappa_2^2| - \sqrt{2\alpha C}}.$$

Величина интеграла T^* зависит от значения C , которое определено системой (1.37). Введем следующую замену

$$2\alpha C = 2\alpha\kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + 2\alpha\kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \alpha^2(F_R - F_I)^4.$$

В дальнейшем нам понадобятся разложения

$$(1+x)^q = 1 + qx + O(x^2), \quad \ln(1+x) = x + O(x^2), \quad \arctg(x) = x + O(x^3),$$

которые справедливы при $|x| \rightarrow 0$, где q – любое вещественное число.

Если $\gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon$, $\sqrt{2\alpha C} > \tilde{\kappa}_2^2$, то

$$\begin{aligned}
T^* &= \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha\kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + 2\alpha\kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \alpha^2(F_R - F_I)^4}}} \times \\
&\times \ln \frac{\sqrt{2\alpha\kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + 2\alpha\kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \alpha^2(F_R - F_I)^4}}{\left(\tilde{\kappa}_2 + \sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha\kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + 2\alpha\kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \alpha^2(F_R - F_I)^4}}\right)^2} + \\
&+ \frac{2}{\sqrt{\sqrt{2\alpha\kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + 2\alpha\kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \alpha^2(F_R - F_I)^4} - \tilde{\kappa}_2^2}} \times \\
&\times \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\tilde{\kappa}_2}{\sqrt{\sqrt{2\alpha\kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + 2\alpha\kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \alpha^2(F_R - F_I)^4} - \tilde{\kappa}_2^2}} \right) = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \alpha F_R^2(1 + O(F_R^{-1}))}} \ln \frac{\alpha F_R^2(1 + O(F_R^{-1}))}{\left(\tilde{\kappa}_2 + \sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \alpha F_R^2(1 + O(F_R^{-1}))}\right)^2} + \\
&+ \frac{2}{\sqrt{\alpha F_R^2(1 + O(F_R^{-1}))} - \tilde{\kappa}_2^2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\tilde{\kappa}_2}{\sqrt{\alpha F_R^2(1 + O(F_R^{-1}))} - \tilde{\kappa}_2^2} \right) = \\
&= - \frac{\ln(\alpha F_R^2(1 + O(F_R^{-1}))) - 2 \ln\left(\tilde{\kappa}_2 + \sqrt{\alpha} F_R(1 + O(F_R^{-1}))\right)}{\sqrt{\alpha} F_R(1 + O(F_R^{-1}))^{-1}} + \\
&+ \frac{2(1 + O(F_R^{-1}))}{\sqrt{\alpha} F_R} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\tilde{\kappa}_2(1 + O(F_R^{-1}))}{\sqrt{\alpha} F_R} \right) = \\
&= - \frac{\ln(\alpha F_R^2) + O(F_R^{-1}) - 2 \ln(\sqrt{\alpha} F_R) - 2 \ln\left(1 + \frac{\tilde{\kappa}_2}{\sqrt{\alpha} F_R} + O(F_R^{-1})\right)}{\sqrt{\alpha} F_R(1 + O(F_R^{-1}))^{-1}} + \\
&+ \frac{2(1 + O(F_R^{-1}))}{\sqrt{\alpha} F_R} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\tilde{\kappa}_2(1 + O(F_R^{-1}))}{\sqrt{\alpha} F_R} + O(F_R^{-3}) \right) = \\
&= - \frac{\pi + O(F_R^{-1}) + O(F_R^{-2})}{\sqrt{\alpha} F_R(1 + O(F_R^{-1}))^{-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha} F_R} + O(F_R^{-2}).
\end{aligned}$$

При $\gamma^2 < \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2$ получаем

$$\begin{aligned}
T^* &= \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha\kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + 2\alpha\kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \alpha^2(F_R - F_I)^4}}} = \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha\kappa_1^2 F_R^2 \left(1 + \frac{F_I}{F_R}\right)^2 + 2\alpha\kappa_2^2 F_R^2 \left(1 - \frac{F_I}{F_R}\right)^2 + \alpha^2 F_R^4 \left(1 - \frac{F_I}{F_R}\right)^4}}} = \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) F_R^2 (1 + O(F_R^{-1})) + \alpha^2 F_R^4 (1 + O(F_R^{-1}))}}} = \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) F_R^2 (1 + O(F_R^{-1})) + \alpha^2 F_R^4 (1 + O(F_R^{-1}))}}} = \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2^2 + \alpha F_R^2 \sqrt{1 + 2\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\alpha F_R^2} + O(F_R^{-1})}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2^2 + \alpha F_R^2 \sqrt{1 + O(F_R^{-1})}}} = \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2^2 + \alpha F_R^2 (1 + O(F_R^{-1}) + O(F_R^{-2}))}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha} F_R \sqrt{1 + \frac{\kappa_2^2}{\alpha F_R^2} + O(F_R^{-1})}} = \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha} F_R \sqrt{1 + O(F_R^{-1}) + O(F_R^{-2})}} = \frac{\pi(1 + O(F_R^{-1}))}{\sqrt{\alpha} F_R} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha} F_R} + O(F_R^{-2}).
\end{aligned}$$

Следовательно, в общем случае имеем

$$T^* = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha} F_R} + O(F_R^{-2}).$$

Из последней формулы ясно, что $\lim_{F_R \rightarrow \infty} T^* = 0$. Это означает, что для любого целого $n \geq 0$ и для $h \leq T^*|_{F_R=0}$ уравнение (1.52) будет иметь по крайней мере одно решение F_R^n (см. рис. 1).

Далее, удобно исключить C из уравнения (1.46). Это можно сделать, используя уравнение (1.38). Исключая C , получаем

$$w = \frac{1}{\sqrt{(s^2 + \kappa_2^2)^2 + 2\alpha(\kappa_1^2(F_R + F_I)^2 + \kappa_2^2(F_R - F_I)^2 + \frac{1}{2}\alpha(F_R - F_I)^4)}},$$

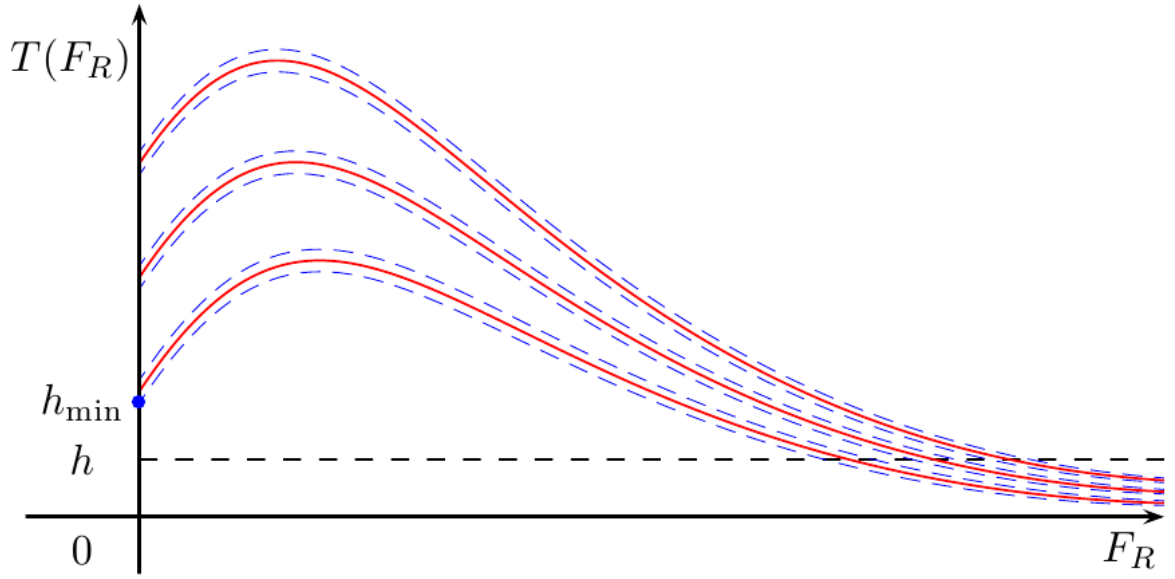


Рисунок 1. Геометрический смысл теоремы 6. Непрерывные кривые соответствуют левой части уравнения (1.52) ($n = 0, 1, 2$). Пунктирные кривые соответствуют оценкам для левой части уравнения (1.52). Горизонтальная линия соответствует правой части уравнения (1.52).

где $n = 0, 1, 2, \dots$

Найдем значение T^* при $F_R = 0$. При $\gamma^2 < \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2$ получаем

$$T^* = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4}}}.$$

Если $\gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon$, $\sqrt{2\alpha C} > \tilde{\kappa}_2^2$, то

$$T^* = \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4}}} \times \\ \times \ln \frac{\sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4}}{\left(\tilde{\kappa}_2 + \sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4}}\right)^2} + \\ + \frac{2}{\sqrt{\sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4} - \tilde{\kappa}_2^2}} \times \\ \times \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\tilde{\kappa}_2}{\sqrt{\sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4} - \tilde{\kappa}_2^2}} \right).$$

Если $\gamma^2 \geq \omega^2 \mu_0 \varepsilon$, $\sqrt{2\alpha C} \leq \tilde{\kappa}_2^2$, то

$$T^* = \frac{-1}{\sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4}}} \times \\ \times \ln \frac{\sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4}}{\left(\tilde{\kappa}_2 + \sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 + \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4}}\right)^2} - \\ - \frac{1}{\sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 - \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4}}} \times \\ \times \ln \frac{\sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4}}{\left(\tilde{\kappa}_2 + \sqrt{\tilde{\kappa}_2^2 - \sqrt{2\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)F_I^2 + \alpha^2 F_I^4}}\right)^2}.$$

□

Сформулируем основные результаты этого пункта.

Утверждение 7. Пусть $\alpha > 0$, h и F_I известны и выполняется условие $h \leq h_{\min}$. Тогда задача P_{1k} имеет бесконечное число решений.

Доказательство. Для некоторого целого $n \geq 0$ найдется значение $F_R^{(n)}$ такое, что оно удовлетворяет уравнению (1.52).

Каждая пара $F_R^{(n)}$ и F_I определяет значение $F_T^{(n)}$ в соответствии с формулами (1.39), (1.38). Из Утверждения 4 [42] следует, что задача Коши для дифференциального уравнения (1.13) с начальными условиями

$$u(0) = F_T^{(n)}, \quad u'(0) = \kappa_3 F_T^{(n)},$$

имеет единственное решение.

Докажем, что $F_R^{(n)} \neq F_R^{(m)}$ при $n \neq m$. Предположим противное, пусть $F_R^{(n)} = F_R^{(m)}$ при $n \neq m$. Рассмотрим следующую разность

$$\int_{-\kappa_1 \frac{F_R^{(n)} + F_I}{F_R^{(n)} - F_I}}^{\kappa_3} w ds + n \int_{-\infty}^{+\infty} w ds - \int_{-\kappa_1 \frac{F_R^{(n)} + F_I}{F_R^{(n)} - F_I}}^{\kappa_3} w ds - m \int_{-\infty}^{+\infty} w ds = 0.$$

Из последнего получаем равенство

$$(n - m) \int_{-\infty}^{+\infty} w ds = 0.$$

Так как $w > 0$, то $n = m$. □

Из утверждений 1, 5, 7 получаем, что справедлива

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$, h и F_I известны и выполняется условие $h \leq h_{\min}$. Тогда задача дифракции имеет бесконечное число решений в случае нелинейности Керра.

Замечание 4. Если $h > h_{\min}$, то найдется такое n^* , что задача дифракции (и, соответственно, задача P_{1k}) имеет бесконечное число решений для всех $n \geq n^*$.

1.2. Математическая модель распространения электромагнитных связанных ТЕ-ТЕ-волн в нелинейном слое

1.2.1. Постановка задачи на собственные значения

Пусть $\Sigma_2 = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ – слой в $\mathbb{R}^3$ (см. рис. 2), где $h > 0$. Диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$, где

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & x > h \\ \varepsilon_2 + \frac{\alpha|\mathbf{E}|^2}{1+\beta|\mathbf{E}|^2}, & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_3, & x < 0, \end{cases}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \tilde{\alpha} > 0$ – вещественные постоянные, $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\mathbf{E}$ – электрическая составляющая электромагнитного поля. Считаем, что $\varepsilon_2 > \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$ и $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} \geq \varepsilon_0$.

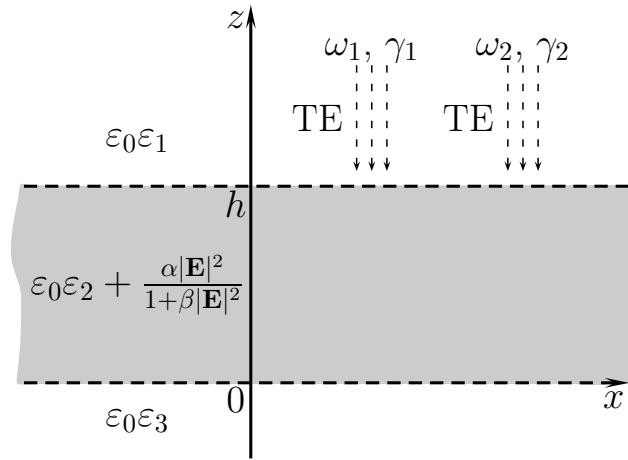


Рисунок 2. Геометрия задачи.

Уравнения Максвелла имеют вид [65]

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t \tilde{\mathbf{D}}, \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t \tilde{\mathbf{B}}, \quad (1.55)$$

где $\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mu_0 \tilde{\mathbf{H}}$, $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума, $\partial_t \equiv \partial/\partial t$; $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}})$ – общее поле.

Из системы (1.55) получаем

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t(\mu_0 \tilde{\mathbf{H}}), \quad \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t(\varepsilon \tilde{\mathbf{E}}). \quad (1.56)$$

Считаем, что поля $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ представляют собой сумму полей, гармонически зависящих от времени, и существуют в пространстве на двух частотах ω_1, ω_2

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}_1^+(x, y, z) \cos \omega_1 t + \mathbf{E}_1^-(x, y, z) \sin \omega_1 t + \\ &\quad + \mathbf{E}_2^+(x, y, z) \cos \omega_2 t + \mathbf{E}_2^-(x, y, z) \sin \omega_2 t, \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}_1^+(x, y, z) \cos \omega_1 t + \mathbf{H}_1^-(x, y, z) \sin \omega_1 t + \\ &\quad + \mathbf{H}_2^+(x, y, z) \cos \omega_2 t + \mathbf{H}_2^-(x, y, z) \sin \omega_2 t, \end{aligned}$$

где ω_1, ω_2 – круговые частоты и $\mathbf{E}_1^\pm, \mathbf{E}_2^\pm, \mathbf{H}_1^\pm, \mathbf{H}_2^\pm$ – вещественные функции. Комплексные амплитуды [34] $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_1^+ + i\mathbf{E}_1^-, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_1^+ + i\mathbf{H}_1^-, \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_2^+ + i\mathbf{E}_2^-, \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2^+ + i\mathbf{H}_2^-. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\tilde{\mathbf{E}} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t} \}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \operatorname{Re} \{ \mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t} \},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (0, E_{1y}, 0)^\top, \quad \mathbf{H}_1 = (H_{1x}, 0, H_{1z})^\top, \\ \mathbf{E}_2 &= (0, 0, E_{2z})^\top, \quad \mathbf{H}_2 = (H_{2x}, H_{2y}, 0)^\top, \end{aligned}$$

$(\cdot)^\top$ – операция транспонирования, компоненты поля E_{1y}, H_{1x}, H_{1z} не зависят от y , а компоненты поля E_{2z}, H_{2x}, H_{2y} не зависят от z . Можно записать

уравнения Максвелла (1.56) для комплексных амплитуд $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ в виде

$$\begin{cases} \operatorname{rot} (\mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}) = -i\omega_1 \varepsilon \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} - i\omega_2 \varepsilon \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}, \\ \operatorname{rot} (\mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}) = i\omega_1 \mu_0 \mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + i\omega_2 \mu_0 \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}. \end{cases} \quad (1.57)$$

Таким образом, комплексные амплитуды $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяют системе (1.57) и условиям излучения на бесконечности, где электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в полупространствах $x > h$ и $x < 0$; кроме того, $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяют условиям непрерывности для касательных компонент поля на границах $x = 0$ и $x = h$.

Волны, распространяющиеся вдоль границы z , гармонически зависят от z . Другими словами, зависимость от z для компонент поля имеет вид $e^{i\gamma z}$, где γ – неизвестный вещественный спектральный параметр (постоянная распространения). Очевидно, что $|\hat{\mathbf{E}} e^{i\gamma z}| = |\hat{\mathbf{E}}|$ не зависят от z , если $\operatorname{Im} \gamma = 0$. Такой же вывод можно сделать для волн, распространяющихся вдоль границы y . С другой стороны, продолжая эту линию рассуждений, видно, что для каждой псевдополяризации могут быть выбраны разные спектральные параметры. Точнее, можно выбрать γ_1 для ТЕ-волн с индексом 1 и γ_2 для ТЕ-волн с индексом 2 (см. рис. 2). Таким образом, компоненты $E_{1y}, H_{1x}, H_{1z}, E_{2z}, H_{2x}, H_{2y}$ имеют вид

$$\begin{aligned} E_{1y} &= E_{1y}(x) e^{i\gamma_1 z}, & H_{1x} &= H_{1x}(x) e^{i\gamma_1 z}, & H_{1z} &= H_{1z}(x) e^{i\gamma_1 z}, \\ E_{2z} &= E_{2z}(x) e^{i\gamma_2 y}, & H_{2x} &= H_{2x}(x) e^{i\gamma_2 y}, & H_{2y} &= H_{2y}(x) e^{i\gamma_2 y}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

где γ_1, γ_2 – неизвестные вещественные постоянные, $E_{1y}, H_{1x}, H_{1z}, E_{2z}, H_{2x}, H_{2y}$ –

неизвестные функции. Поля $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= \text{Re} \left\{ (0, E_{1y}(x)e^{i(\gamma_1 z - \omega_1 t)}, E_{2z}(x)e^{i(\gamma_2 z - \omega_2 t)})^\top \right\}, \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \text{Re} \left\{ (H_{1x}(x)e^{i(\gamma_1 z - \omega_1 t)} + \right. \\ &\quad \left. + H_{2x}(x)e^{i(\gamma_2 z - \omega_2 t)}, H_{2y}(x)e^{i(\gamma_2 z - \omega_2 t)}, H_{1z}(x)e^{i(\gamma_1 z - \omega_1 t)})^\top \right\}.\end{aligned}$$

Подставляя комплексные амплитуды с компонентами (1.58) в уравнения Максвелла (1.57), получаем

$$\begin{cases} i\gamma_1 H_{1x} - H'_{1z} = -i\omega_1 \varepsilon E_{1y}, \\ i\gamma_1 E_{1y} = -i\omega_1 \mu_0 H_{1x}, \\ E'_{1y} = i\omega_1 \mu_0 H_{1z}, \end{cases} \quad \begin{cases} H'_{2y} - i\gamma_2 H_{2x} = -i\omega_2 \varepsilon E_{2z}, \\ i\gamma_2 E_{2z} = i\omega_2 \mu_0 H_{2x}, \\ -E'_{2z} = i\omega_2 \mu_0 H_{2y}. \end{cases} \quad (1.59)$$

Из системы (1.59) получаем

$$\begin{aligned}H_{1x} &= -\frac{\gamma_1}{\omega_1 \mu_0} E_{1y}, \quad H_{1z} = -\frac{i}{\omega_1 \mu_0} E'_{1y}, \\ H_{2x} &= \frac{\gamma_2}{\omega_2 \mu_0} E_{2z}, \quad H_{2y} = \frac{i}{\omega_2 \mu_0} E'_{2z}.\end{aligned} \quad (1.60)$$

Используя (1.60), находим

$$\begin{cases} E''_{1y} - \gamma_1^2 E_{1y} = -\omega_1^2 \mu_0 \varepsilon E_{1y}, \\ E''_{2z} - \gamma_2^2 E_{2z} = -\omega_2^2 \mu_0 \varepsilon E_{2z} \end{cases} \quad (1.61)$$

В полупространстве $x \geq h$ уравнения (1.61) имеют вид

$$\begin{cases} E''_{1y} + (k_1^2 \varepsilon_1 - \gamma_1^2) E_{1y} = 0, \\ E''_{2z} + (k_2^2 \varepsilon_1 - \gamma_2^2) E_{2z} = 0. \end{cases} \quad (1.62)$$

где $k_1^2 = \omega_1^2 \mu_0 \varepsilon_0$, $k_2^2 = \omega_2^2 \mu_0 \varepsilon_0$.

Учитывая условия на бесконечности, получим решение уравнений (1.62)

в виде

$$\begin{cases} E_{1y} = A_1 e^{-\kappa_{11}(x-h)}, \\ E_{2z} = A_2 e^{-\kappa_{21}(x-h)}, \end{cases}$$

где $\kappa_{11} = \sqrt{\gamma_1^2 - k_1^2 \varepsilon_1}$, $\kappa_{21} = \sqrt{\gamma_2^2 - k_2^2 \varepsilon_1}$, A_1 , A_2 – известные вещественные постоянные. Таким образом, касательные составляющие электрического поля и их производные в точке $x = h$ имеют вид

$$\begin{aligned} E_{1y}(h) &= A_1, & E'_{1y}(h) &= -\kappa_{11} A_1, \\ E_{2z}(h) &= A_2, & E'_{2z}(h) &= -\kappa_{21} A_2. \end{aligned} \tag{1.63}$$

В полупространстве $x \leq 0$ уравнения (1.61) имеют вид

$$\begin{cases} E''_{1y} = \kappa_{13}^2 E_{1y}, \\ E''_{2z} = \kappa_{23}^2 E_{2z}, \end{cases} \tag{1.64}$$

где $\kappa_{13} = \sqrt{\gamma_1^2 - k_1^2 \varepsilon_3}$, $\kappa_{23} = \sqrt{\gamma_2^2 - k_2^2 \varepsilon_3}$.

Учитывая условия на бесконечности, получим решение уравнений (1.64)

в виде

$$\begin{cases} E_{1y} = B_1 e^{-\kappa_{13}x}, \\ E_{2z} = B_2 e^{-\kappa_{23}x}, \end{cases}$$

где $1, 2$ – неизвестные вещественные постоянные. Таким образом, касательные составляющие электрического поля и их производные в точке $x = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} E_{1y}(0) &= B_1, & E'_{1y}(0) &= \kappa_{13} B_1, \\ E_{2z}(0) &= B_2, & E'_{2z}(0) &= \kappa_{23} B_2. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Сформулируем задачу для вещественных функций $u := E_{1y}$, $v := E_{2z}$. В

слое Σ_2 систему (1.61) можно представить в виде

$$\begin{cases} u'' + \kappa_1^2 u = -\alpha_1 f(u, v)u, \\ v'' + \kappa_2^2 v = -\alpha_2 f(u, v)v, \end{cases} \quad (1.66)$$

где $\kappa_1 = \sqrt{k_1^2 \varepsilon_2 - \gamma_1^2}$, $\kappa_2 = \sqrt{k_2^2 \varepsilon_2 - \gamma_2^2}$, $\alpha_1 = k_1^2 \alpha$, $\alpha_2 = k_2^2 \alpha$,

$$f(u, v) = \frac{(u^2 + v^2)}{1 + \beta(u^2 + v^2)}.$$

Так как касательные компоненты E_{1y} , E_{2z} , H_{1z} , H_{2y} непрерывны на границах $x = 0$, $x = h$, то функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют условиям сопряжения

$$\begin{aligned} [u]|_{x=0} &= 0, \quad [u']|_{x=0} = 0, \quad [u]|_{x=h} = 0, \quad [u']|_{x=h} = 0, \\ [v]|_{x=0} &= 0, \quad [v']|_{x=0} = 0, \quad [v]|_{x=h} = 0, \quad [v']|_{x=h} = 0, \end{aligned}$$

где $[w]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} w(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} w(x)$. Следовательно для функций $u(x)$, $v(x)$ справедливы следующие граничные условия

$$u(0) = B_1, \quad u'(0) = \kappa_{13} B_1, \quad (1.67)$$

$$u(h) = A_1, \quad u'(h) = -\kappa_{11} A_1. \quad (1.68)$$

$$v(0) = B_2, \quad v'(0) = \kappa_{23} B_2, \quad (1.69)$$

$$v(h) = A_2, \quad v'(h) = -\kappa_{21} A_2. \quad (1.70)$$

Определение 1. Задача P_2 заключается в нахождении вещественной пары (γ_1, γ_2) такой, что для заданных значений A_1 , A_2 существуют нетривиальные функции u , v , такие что для $0 \leq x \leq h$ функции u , v являются решениями системы (1.66) и удовлетворяют граничным условиям (1.67) – (1.70).

Определение 2. Пара (γ_1, γ_2) , которая является решением задачи P_2 , называется парой связанных собственных значений, и соответствующие функции

u, v называются собственными функциями задачи P_2 .

1.2.2. Интегральные уравнения и дисперсионные уравнения

Перепишем уравнения из системы (1.66) в форме

$$L_1 u = -\alpha_1 f(u, v)u, \quad L_2 v = -\alpha_2 f(u, v)v,$$

где

$$L_1 = \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_1^2, \quad L_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2^2.$$

Рассмотрим краевые задачи

$$\begin{cases} L_1 G_{21} = -\delta(x-s), \\ G'_{21}|_{x=0} = G'_{21}|_{x=h} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_2 G_{22} = -\delta(x-s), \\ G'_{22}|_{x=0} = G'_{22}|_{x=h} = 0. \end{cases} \quad (1.71)$$

Функции Грина таких задач имеют вид

$$G_{21}(x, s) = \begin{cases} -\frac{\cos(\kappa_1 x) \cos(\kappa_1(s-h))}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h)}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\cos(\kappa_1(x-h)) \cos(\kappa_1 s)}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h)}, & s < x \leq h, \end{cases} \quad (1.72)$$

$$G_{22}(x, s) = \begin{cases} -\frac{\cos(\kappa_2 x) \cos(\kappa_2(s-h))}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\cos(\kappa_2(x-h)) \cos(\kappa_2 s)}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & s < x \leq h. \end{cases} \quad (1.73)$$

Используя вторую формулу Грина, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^h (G_{21} L_1 u - u L_1 G_{21}) dx &= (u'(x) G_{21}(x, s) - u(x) G'_{21}(x, s)) \Big|_0^h, \\ \int_0^h (G_{22} L_2 v - v L_2 G_{22}) dx &= (v'(x) G_{22}(x, s) - v(x) G'_{22}(x, s)) \Big|_0^h. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из (1.63), (1.65) и (1.71), находим

$$\begin{aligned} u(s) &= \alpha_1 \int_0^h G_{21}(x, s) f(u, v) u dx - \kappa_{11} A_1 G_{21}(h, s) - \kappa_{13} B_1 G_{21}(0, s), \\ v(s) &= \alpha_2 \int_0^h G_{22}(x, s) f(u, v) v dx - \kappa_{21} A_2 G_{22}(h, s) - \kappa_{23} B_2 G_{22}(0, s). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Пусть $s = h$, тогда из формул (1.74) получаем

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 \int_0^h G_{21}(x, h) f(u, v) u dx + A_1 \frac{\kappa_{11} \cos(\kappa_1 h)}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h)} + B_1 \frac{\kappa_{13}}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h)}, \\ A_2 &= \alpha_2 \int_0^h G_{22}(x, h) f(u, v) v dx + A_2 \frac{\kappa_{11} \cos(\kappa_2 h)}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)} + B_2 \frac{\kappa_{23}}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Пусть $s = 0$, тогда из формул (1.74), получаем

$$\begin{aligned} B_1 &= \alpha_1 \int_0^h G_{21}(x, 0) f(u, v) u dx + A_1 \frac{\kappa_{11}}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h)} + B_1 \frac{\kappa_{13} \cos(\kappa_1 h)}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h)}, \\ B_2 &= \alpha_2 \int_0^h G_{22}(x, 0) f(u, v) v dx + A_2 \frac{\kappa_{21}}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)} + B_2 \frac{\kappa_{23} \cos(\kappa_2 h)}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Используя формулы (1.76), получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h) - \kappa_{13} \cos(\kappa_1 h)}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h)} B_1 &= \alpha_1 \int_0^h G_{21}(x, 0) f(u, v) u dx + \\ &+ \frac{\kappa_{11}}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h)} A_1, \\ \frac{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h) - \kappa_{23} \cos(\kappa_2 h)}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)} B_2 &= \alpha_2 \int_0^h G_{22}(x, 0) f(u, v) v dx + \\ &+ \frac{\kappa_{21}}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)} A_2. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Подставляя (1.77) в (1.75), получаем

$$\begin{aligned}
A_1((\kappa_1^2 - \kappa_{11}\kappa_{13}) \sin(\kappa_1 h) - \kappa_1(\kappa_{11} + \kappa_{13}) \cos(\kappa_1 h)) = \\
= \alpha_1 \kappa_1 (\kappa_1 \sin(\kappa_1 h) - \kappa_{13} \cos(\kappa_1 h)) \int_0^h G_{21}(x, h) f(u, v) u dx + \\
+ \alpha_1 \kappa_1 \kappa_{13} \int_0^h G_{21}(x, 0) f(u, v) u dx \quad (1.78)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
A_2((\kappa_2^2 - \kappa_{21}\kappa_{23}) \sin(\kappa_2 h) - \kappa_2(\kappa_{21} + \kappa_{23}) \cos(\kappa_2 h)) = \\
= \alpha_2 \kappa_2 (\kappa_2 \sin(\kappa_2 h) - \kappa_{23} \cos(\kappa_2 h)) \int_0^h G_{22}(x, h) f(u, v) v dx + \\
+ \alpha_2 \kappa_2 \kappa_{23} \int_0^h G_{22}(x, 0) f(u, v) v dx. \quad (1.79)
\end{aligned}$$

Вычисляя функции Грина (1.72), (1.73) в точках $s = 0, h$, из (1.78) получаем систему дисперсионных уравнений

$$\begin{cases} A_1 g_1(\gamma_1) = \alpha_1 \frac{Q_1(\gamma_1, \gamma_2)}{\sin(\kappa_1 h)}, \\ A_2 g_2(\gamma_2) = \alpha_2 \frac{Q_2(\gamma_1, \gamma_2)}{\sin(\kappa_2 h)}, \end{cases} \quad (1.80)$$

где

$$g_1(\gamma_1) = (\kappa_1^2 - \kappa_{11}\kappa_{13}) \sin(\kappa_1 h) - \kappa_1(\kappa_{11} + \kappa_{13}) \cos(\kappa_1 h), \quad (1.81)$$

$$g_2(\gamma_2) = (\kappa_2^2 - \kappa_{21}\kappa_{23}) \sin(\kappa_2 h) - \kappa_2(\kappa_{21} + \kappa_{23}) \cos(\kappa_2 h), \quad (1.82)$$

$$\begin{aligned}
Q_1(\gamma_1, \gamma_2) = & \left(\kappa_{13} \cos(\kappa_1 h) - \kappa_1 \sin(\kappa_1 h) \right) \int_0^h \cos(\kappa_1 x) f(u, v) u dx - \\
& - \kappa_{13} \int_0^h \cos(\kappa_1(x - h)) f(u, v) u dx, \quad (1.83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2(\gamma_1, \gamma_2) = & \left(\kappa_{23} \cos(\kappa_2 h) - \kappa_2 \sin(\kappa_2 h) \right) \int_0^h \cos(\kappa_2 x) f(u, v) v dx - \\
& - \kappa_{23} \int_0^h \cos(\kappa_2(x - h)) f(u, v) v dx. \quad (1.84)
\end{aligned}$$

Введем интегральные операторы

$$\begin{aligned}
Q_1 q \equiv & \left(\kappa_{13} \cos(\kappa_1 h) - \kappa_1 \sin(\kappa_1 h) \right) \int_0^h \cos(\kappa_1 x) q(x) dx - \\
& - \kappa_{13} \int_0^h \cos(\kappa_1(x - h)) q(x) dx, \\
Q_2 q \equiv & \left(\kappa_{23} \cos(\kappa_2 h) - \kappa_2 \sin(\kappa_2 h) \right) \int_0^h \cos(\kappa_2 x) q(x) dx - \\
& - \kappa_{23} \int_0^h \cos(\kappa_2(x - h)) q(x) dx.
\end{aligned}$$

Дисперсионные уравнения (1.80) являются уравнениями относительно связанных собственных значений (постоянных распространения).

Подставляя (1.76) в (1.74), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} u(s) = \alpha_1 \int_0^h G_{21}(x, s) f(u, v) u dx + \\ \quad + \frac{\alpha_1 \kappa_{13} \cos(\kappa_1(s-h))}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h) - \kappa_{13} \cos(\kappa_1 h)} \int_0^h G_{21}(x, 0) f(u, v) u dx + \\ \quad + A_1 \left(\cos(\kappa_1 s) + \frac{\kappa_{13} \cos(\kappa_1(s-h))}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h) - \kappa_{13} \cos(\kappa_1 h)} \right) \frac{\kappa_{11}}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h)}, \\ v(s) = \alpha_2 \int_0^h G_{22}(x, s) f(u, v) v dx + \\ \quad + \frac{\alpha_2 \kappa_{23} \cos(\kappa_2(s-h))}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h) - \kappa_{23} \cos(\kappa_2 h)} \int_0^h G_{22}(x, 0) f(u, v) v dx + \\ \quad + A_2 \left(\cos(\kappa_2 s) + \frac{\kappa_{23} \cos(\kappa_2(s-h))}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h) - \kappa_{23} \cos(\kappa_2 h)} \right) \frac{\kappa_{21}}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}. \end{array} \right. \quad (1.85)$$

Перепишем систему (1.85) в операторной форме.

Далее используем следующие обозначения

$$K_1(x, s) = \{K_{nm}^{(1)}(x, s)\}_{n,m=1}^2 = \begin{pmatrix} k_1^2 G_{21}(x, s) & 0 \\ 0 & k_2^2 G_{22}(x, s) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} K_2(x, s) &= \{K_{nm}^{(2)}(x, s)\}_{n,m=1}^2 = \\ &= \begin{pmatrix} k_1^2 p_1 \cos(\kappa_1(s-h)) G_{21}(x, 0) & 0 \\ 0 & k_2^2 p_2 \cos(\kappa_2(s-h)) G_{22}(x, 0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$p_1 = \frac{\kappa_{13}}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h) - \kappa_{13} \cos(\kappa_1 h)}, \quad p_2 = \frac{\kappa_{23}}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h) - \kappa_{23} \cos(\kappa_2 h)}, \quad (1.86)$$

$$\mathbf{C}[0, h] = C[0, h] \times C[0, h].$$

Введем матричные интегральные операторы

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{q} = \int_0^h K_1(x, s) \mathbf{q}(x) dx, \quad \mathbf{K}_2 \mathbf{q} = \int_0^h K_2(x, s) \mathbf{q}(x) dx,$$

где $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^\top$. Пусть также $\mathbf{h} = (h_1, h_2)^\top$, где

$$h_1 = A_1 \frac{\kappa_{11} (\cos(\kappa_1 s) + p_1 \cos(\kappa_1(s-h)))}{\kappa_1 \sin(\kappa_1 h)},$$

$$h_2 = A_2 \frac{\kappa_{21} (\cos(\kappa_2 s) + p_2 \cos(\kappa_2(s-h)))}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}.$$

Кроме этого, рассмотрим линейный оператор

$$\mathbf{N} := \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2.$$

Пусть $\mathbf{w} = (u, v)^\top$, $|\mathbf{w}|^2 = u^2 + v^2$. Учитывая введенные обозначения, из системы (1.85) окончательно получаем

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{N} \left(\frac{|\mathbf{w}|^2 \mathbf{w}}{1 + \beta |\mathbf{w}|^2} \right) + \mathbf{h}. \quad (1.87)$$

Пусть

$$q_2 = \frac{13\alpha}{4\beta} \|\mathbf{N}\|. \quad (1.88)$$

Для уравнения (1.87) справедливо следующее

Утверждение 8. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_2 < 1$. Тогда уравнение (1.87) имеет единственное решение $\mathbf{w} = \mathbf{w}^* \in \mathbf{C}[0, h]$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{w}_1 = (u_1, v_1)^\top$, $\mathbf{w}_2 = (u_2, v_2)^\top$. Проведем следующую

оценку

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{|\mathbf{w}_1|^2 \mathbf{w}_1}{1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2} - \frac{|\mathbf{w}_2|^2 \mathbf{w}_2}{1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2} \right| = \\
& = \left| \frac{|\mathbf{w}_1|^2 \mathbf{w}_1 - |\mathbf{w}_2|^2 \mathbf{w}_2 + \beta (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2) |\mathbf{w}_1|^2 |\mathbf{w}_2|^2}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)} \right| \leq \\
& \leq \frac{||\mathbf{w}_1|^2 \mathbf{w}_1 - |\mathbf{w}_2|^2 \mathbf{w}_2| + \beta |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| |\mathbf{w}_1|^2 |\mathbf{w}_2|^2}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)} = \\
& = \frac{||\mathbf{w}_1|^2 \mathbf{w}_1 - |\mathbf{w}_1|^2 \mathbf{w}_2 + |\mathbf{w}_1|^2 \mathbf{w}_2 - |\mathbf{w}_2|^2 \mathbf{w}_2| + \beta |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| |\mathbf{w}_1|^2 |\mathbf{w}_2|^2}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)} \leq \\
& \leq \frac{||\mathbf{w}_1|^2 \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| + ||\mathbf{w}_1|^2 - |\mathbf{w}_2|^2| |\mathbf{w}_2| + \beta |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| |\mathbf{w}_1|^2 |\mathbf{w}_2|^2}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)}.
\end{aligned}$$

Оценим слагаемые

$$\begin{aligned}
& \frac{|\mathbf{w}_1|^2 |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)} \leq \frac{1}{\beta} |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|, \\
& \frac{\beta |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2| |\mathbf{w}_1|^2 |\mathbf{w}_2|^2}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)} \leq \frac{1}{\beta} |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|, \\
& \frac{||\mathbf{w}_1|^2 - |\mathbf{w}_2|^2| |\mathbf{w}_2|}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)} \leq \frac{||\mathbf{w}_1| - |\mathbf{w}_2|| |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| |\mathbf{w}_2|}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$||\mathbf{w}_1| - |\mathbf{w}_2|| \leq |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|,$$

получаем

$$\frac{||\mathbf{w}_1| - |\mathbf{w}_2|| |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2| |\mathbf{w}_2|}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)} \leq \frac{|\mathbf{w}_1| |\mathbf{w}_2| + |\mathbf{w}_2|^2}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)} |\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|$$

Преобразуем следующее выражение

$$\frac{|\mathbf{w}_1| |\mathbf{w}_2|}{(1 + \beta |\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta |\mathbf{w}_2|^2)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{|\mathbf{w}_1|} + \beta |\mathbf{w}_1|\right) \left(\frac{1}{|\mathbf{w}_2|} + \beta |\mathbf{w}_2|\right)}$$

Заметим, что функция $F(t) = \frac{1}{t} + \beta t$ достигает минимум в точке $|t| = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{|\mathbf{w}_1|} + \beta|\mathbf{w}_1|\right)\left(\frac{1}{|\mathbf{w}_2|} + \beta|\mathbf{w}_2|\right)} \leq \frac{1}{4\beta}.$$

Учитывая, что

$$\frac{|\mathbf{w}_2|^2|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|}{(1 + \beta|\mathbf{w}_1|^2)(1 + \beta|\mathbf{w}_2|^2)} \leq \frac{1}{\beta}|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|,$$

окончательно получаем

$$\left| \frac{|\mathbf{w}_1|^2\mathbf{w}_1}{1 + \beta|\mathbf{w}_1|^2} - \frac{|\mathbf{w}_2|^2\mathbf{w}_2}{1 + \beta|\mathbf{w}_2|^2} \right| \leq \frac{13}{4\beta}|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2|. \quad (1.89)$$

В соответствии с (1.89) получаем

$$\left| \alpha \mathbf{N} \left(\frac{|\mathbf{w}_1|^2\mathbf{w}_1}{1 + \beta|\mathbf{w}_1|^2} \right) - \alpha \mathbf{N} \left(\frac{|\mathbf{w}_2|^2\mathbf{w}_2}{1 + \beta|\mathbf{w}_2|^2} \right) \right| \leq \frac{13\alpha}{4\beta} \|\mathbf{N}\| \|\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2\|.$$

Тогда для $q_2 < 1$ отображение $\mathbf{N}$ является сжатием. Выберем значение $r > 0$ из условия $\|\mathbf{h}\| \leq (1 - q_2)r$. В соответствии со следствием 2 (см. [25, с. 382]) сжатие $\mathbf{N}$ действует из шара $\mathbf{B}_r(0) = B_r(0) \times B_r(0)$ в тот же шар в $\mathbf{C}[0, h]$, где $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| < r\}$. Таким образом, уравнение (1.87) имеет единственное решение $\mathbf{w}^* \in \mathbf{B}_r(0) \subset \mathbf{C}[0, h]$. Так как r может быть выбрано сколь угодно большим, утверждение выполняется. $\square$

1.2.3. Анализ системы дисперсионных уравнений

Подставляя значение $\alpha = 0$ в систему (1.80) и преобразуя, получаем известные дисперсионные уравнения для линейного случая

$$g_1(\gamma_1) = 0, \quad (1.90)$$

$$g_2(\gamma_2) = 0. \quad (1.91)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\lambda'_{s,m} &:= k_1^2 \varepsilon_2 - \frac{j_{s,m}^2}{h^2}, & \lambda'_{c,m} &:= k_2^2 \varepsilon_2 - \frac{j_{c,m}^2}{h^2}, \\ \lambda''_{s,m} &:= k_1^2 \varepsilon_2 - \frac{j_{s,m}^2}{h^2}, & \lambda''_{c,m} &:= k_2^2 \varepsilon_2 - \frac{j_{c,m}^2}{h^2},\end{aligned}$$

где $j_{s,m} = \pi m$ – это m -ый неотрицательный корень уравнения $\sin x = 0$ и $j_{c,m} = \frac{\pi(2m+1)}{2}$ – это m -ый положительный корень уравнения $\cos x = 0$; $m = 1, 2, \dots$

Известно, что

$$j_{s,0} < j_{c,0} < j_{s,1} < j_{c,1} < j_{s,2} < j_{c,2} < \dots$$

Тогда

$$\lambda_{s,0} > \lambda_{c,0} > \lambda_{s,1} > \lambda_{c,1} > \lambda_{s,2} > \lambda_{c,2} > \dots$$

Можно доказать, что справедливы следующие утверждения.

Утверждение 9. Пусть уравнение (1.90) имеет l_1 корней $\tilde{\gamma}_1^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}_1^{(l_1)}$. Тогда значение l_1 можно представить в виде $l_1 = m_1 + n_1$, где $\tilde{\gamma}_1^{(i+1)} \in \left(\sqrt{\lambda'_{s,i}}, \sqrt{\lambda'_{c,i}}\right)$ при $i = \overline{0, m_1 - 1}$ и $\tilde{\gamma}_1^{(i+1)} \in \left(\sqrt{\lambda'_{c,i}}, \sqrt{\lambda'_{s,i+1}}\right)$ при $i = \overline{m_1, l_1 - 1}$.

Утверждение 10. Пусть уравнение (1.91) имеет l_2 корней $\tilde{\gamma}_2^{(1)}, \dots, \tilde{\gamma}_2^{(l_2)}$. Тогда значение l_2 можно представить в виде $l_2 = m_2 + n_2$, где $\tilde{\gamma}_2^{(i+1)} \in \left(\sqrt{\lambda''_{s,i}}, \sqrt{\lambda''_{c,i}}\right)$ при $i = \overline{0, m_2 - 1}$ и $\tilde{\gamma}_2^{(i+1)} \in \left(\sqrt{\lambda''_{c,i}}, \sqrt{\lambda''_{s,i+1}}\right)$ при $i = \overline{m_2, l_2 - 1}$.

Числа m_1, m_2 могут быть определены также как в [53].

Можно выбрать толщину волновода h так, чтобы уравнение (1.90) имело l_1 решений в интервале $(k_1 \sqrt{\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}}, k_1 \sqrt{\varepsilon_2})$, а уравнение (1.91) имело l_2 решений в интервале $(k_2 \sqrt{\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}}, k_2 \sqrt{\varepsilon_2})$.

Заметим, что точки $\sqrt{\lambda'_{s,i}}, \sqrt{\lambda''_{s,j}}$ – полюса функций Грина (1.72), (1.73). Пусть $\delta'_i > 0, \delta''_j > 0$, где $i = \overline{0, l_1}, j = \overline{0, l_2}$, – достаточно малые величины

такие, что

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_1^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda'_{s,i}} + \delta'_i, \sqrt{\lambda'_{c,i}} \right), \quad i = \overline{0, m_1 - 1}; \\ \tilde{\gamma}_1^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda'_{,i}}, \sqrt{\lambda'_{s,i+1}} - \delta'_i \right), \quad i = \overline{m_1, l_1 - 1}; \\ \tilde{\gamma}_2^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda''_{s,i}} + \delta''_i, \sqrt{\lambda''_{c,i}} \right), \quad i = \overline{0, m_2 - 1}; \\ \tilde{\gamma}_2^{(i+1)} &\in \left(\sqrt{\lambda''_{,i}}, \sqrt{\lambda''_{s,i+1}} - \delta''_i \right), \quad i = \overline{m_2, l_2 - 1}.\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}\Gamma'_{i+1} &\in \left[\sqrt{\lambda'_{s,i}} + \delta'_i, \sqrt{\lambda'_{c,i}} \right], \quad i = \overline{0, m_1 - 1}; \\ \Gamma'_{i+1} &\in \left[\sqrt{\lambda'_{,i}}, \sqrt{\lambda'_{s,i+1}} - \delta'_i \right], \quad i = \overline{m_1, l_1 - 1};\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\Gamma''_{i+1} &\in \left[\sqrt{\lambda''_{s,i}} + \delta''_i, \sqrt{\lambda''_{c,i}} \right], \quad i = \overline{0, m_2 - 1}; \\ \Gamma''_{i+1} &\in \left[\sqrt{\lambda''_{,i}}, \sqrt{\lambda''_{s,i+1}} - \delta''_i \right], \quad i = \overline{m_2, l_2 - 1}.\end{aligned}$$

При этих предположениях функция $g_1(\gamma_1)$ имеет разные знаки на концах интервала Γ'_i и обращается в ноль при $\tilde{\gamma}_1^{(i)}$, $i = \overline{1, l_1}$. Тот же вывод имеет место для функции $g_2(\gamma_2)$, то есть функция $g_2(\gamma_2)$ имеет разные знаки на концах интервала Γ''_i и обращается в ноль при $\tilde{\gamma}_2^{(i)}$, $i = \overline{1, l_2}$. Введем обозначения $\Gamma' = \bigcup_{i=1}^{l_1} \Gamma'_i$,

$\Gamma'' = \bigcup_{i=1}^{l_2} \Gamma''_i$ и $\Gamma = \Gamma' \times \Gamma''$. Для функций $Q_1(\gamma_1, \gamma_2)$, $Q_2(\gamma_1, \gamma_2)$ справедливы следующие оценки

$$|Q_1(\gamma_1, \gamma_2)| \leq \frac{C_1 h |u|}{\beta}, \quad |Q_2(\gamma_1, \gamma_2)| \leq \frac{C_2 h |v|}{\beta},$$

где

$$C_1 = 2\kappa_{13} + \kappa_1, \quad C_2 = 2\kappa_{23} + \kappa_2.$$

Следовательно

$$\|Q_1\| \leq \frac{C_1 h}{\beta}, \quad \|Q_2\| \leq \frac{C_2 h}{\beta}.$$

Пусть $C_{\max} = \max\{C_1, C_2\}$, $C_{\min} = \min\{A_1, A_2\}$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} M'_1 &= \min_{0 \leq p \leq l_1} \left| g_1 \left(\sqrt{\lambda'_{s,p}} + \delta'_p \right) \right|, & M'_2 &= \min_{0 \leq p \leq l_1} \left| g_1 \left(\sqrt{\lambda'_{c,p}} \right) \right|, \\ M''_1 &= \min_{0 \leq q \leq l_2} \left| g_2 \left(\sqrt{\lambda''_{s,q}} + \delta'_q \right) \right|, & M''_2 &= \min_{0 \leq q \leq l_2} \left| g_2 \left(\sqrt{\lambda''_{c,q}} \right) \right|. \end{aligned}$$

Тогда значение $M_{\min} = \min \{ M'_1, M'_2, M''_1, M''_2 \}$ не зависит от α .

Основным результатом данного раздела является следующая

Теорема 3. Пусть $\varepsilon_2 > \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} > 0$, $0 < \alpha \leq \frac{\beta C_{\min} M_{\min}}{C_{\max} h}$. Тогда система (1.80) имеет по крайней мере $l_1 l_2$ собственных значений $(\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}) \in \Gamma$, $i = \overline{1, l_1 l_2}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} g_1(\gamma_1) = 0, \\ g_2(\gamma_2) = 0. \end{cases} \quad (1.92)$$

Значение $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1^{(i)}$ при $i = \overline{1, l_1}$ удовлетворяет первому уравнению системы (1.92), а значение $\gamma_2 = \tilde{\gamma}_2^{(j)}$ при $j = \overline{1, l_2}$ – второму, следовательно, система (1.92) имеет решение в точке $(\tilde{\gamma}_1^{(i)}, \tilde{\gamma}_2^{(j)}) \in \Gamma$.

Далее перейдем к рассмотрению системы дисперсионных уравнений (1.80) при $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$. В силу выбора чисел δ'_i, δ''_j функции Грина (1.72), (1.73) существуют для всех $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$.

Согласно утверждению 8 существует и единственно решение $\mathbf{w}$ уравнения (1.87), которое непрерывно зависит от $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$.

Если $\alpha \leq \frac{\beta C_{\min} M_{\min}}{C_{\max} h}$, то

$$\begin{aligned} & \left(A_1 g_1 \left(\sqrt{\lambda'_{s,p}} + \delta'_p \right) - \alpha_1 \frac{Q_1(\sqrt{\lambda'_{s,p}} + \delta'_p, \gamma_2)}{\sin(\kappa_1 h)} \right) \times \\ & \times \left(A_1 g_1 \left(\sqrt{\lambda'_{c,p}} \right) - \alpha_1 \frac{Q_1(\sqrt{\lambda'_{c,p}}, \gamma_2)}{\sin(\kappa_1 h)} \right) < 0, \quad \gamma_2 \in \Gamma'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(A_2 g_2 \left(\sqrt{\lambda''_{s,q}} + \delta''_q \right) - \alpha_2 \frac{Q_2(\gamma_1, \sqrt{\lambda''_{s,q}} + \delta''_q)}{\sin(\kappa_2 h)} \right) \times \\ & \times \left(A_2 g_2 \left(\sqrt{\lambda''_{c,q}} \right) - \alpha_2 \frac{Q_2(\gamma_1, \sqrt{\lambda''_{c,q}})}{\sin(\kappa_2 h)} \right) < 0, \quad \gamma_1 \in \Gamma'. \end{aligned}$$

Из непрерывности функций

$$A_1 g_1(\gamma_1) - \alpha_1 \frac{Q_1(\gamma_1, \gamma_2)}{\sin(\kappa_1 h)}, \quad A_2 g_2(\gamma_2) - \alpha_2 \frac{Q_2(\gamma_1, \gamma_2)}{\sin(\kappa_2 h)}$$

следует, что уравнения

$$A_1 g_1(\gamma_1) - \alpha_1 \frac{Q_1(\gamma_1, \gamma_2)}{\sin(\kappa_1 h)} = 0, \quad A_2 g_2(\gamma_2) - \alpha_2 \frac{Q_2(\gamma_1, \gamma_2)}{\sin(\kappa_2 h)} = 0$$

имеют корни $(\gamma_1^*, \gamma_2^*) \in \Gamma$.

□

1.3. Математическая модель распространения электромагнитных симметричных гибридных волн в нелинейном слое

1.3.1. Постановка задачи на собственные значения

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в плоском диэлектрическом волноводе $\Sigma_3 := \{(x, y, z) : 0 < x < h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

Волновод Σ_3 расположен в декартовой системе координат $Oxyz$. На границе $x = 0$ волновода Σ_3 расположен бесконечно тонкий абсолютно проводящий экран. Слой заполнен изотропной немагнитной средой. Полупространство $x > h$ заполнено изотропной немагнитной средой с постоянной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 > 0$ – магнитная проницаемость вакуума.

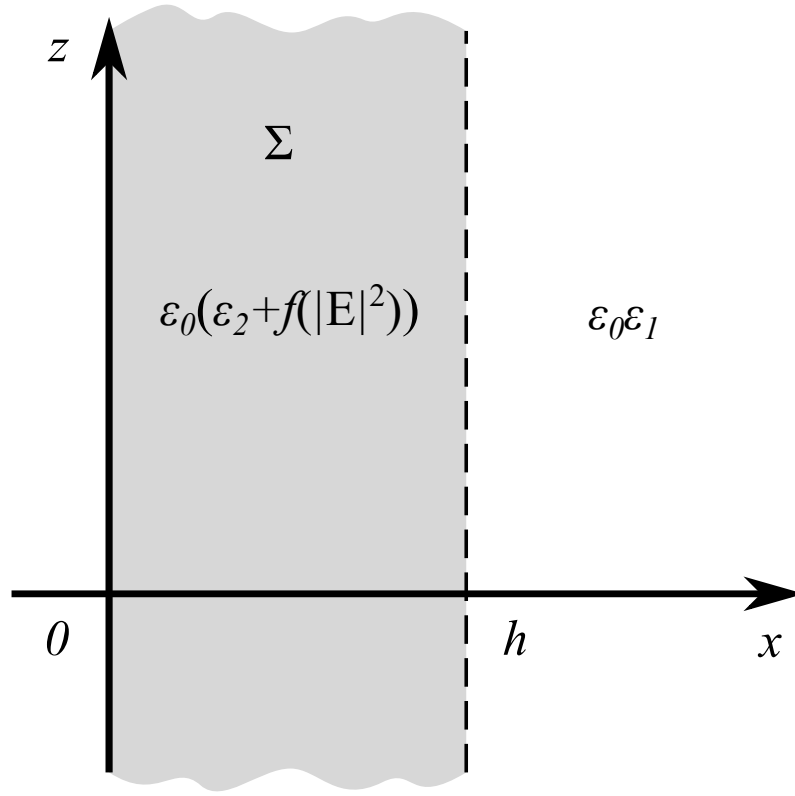


Рисунок 3. Геометрия задачи.

Уравнения Максвелла имеют вид [65]

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t \tilde{\mathbf{D}}, \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t \tilde{\mathbf{B}}, \quad (1.93)$$

где $\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mu_0 \tilde{\mathbf{H}}$ и $\partial_t \equiv \partial/\partial t$. Из системы (1.93) получаем

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t(\mu_0 \tilde{\mathbf{H}}), \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t(\varepsilon \tilde{\mathbf{E}}). \quad (1.94)$$

Считаем, что поля $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$ гармонически зависят от времени [34]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}^+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}^-(x, y, z) \sin \omega t, \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}^+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}^-(x, y, z) \sin \omega t, \end{aligned}$$

где ω – круговая частота, $\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{E}^\pm, \tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{H}^\pm$ – действительные функции.

Очевидно, что $\tilde{\mathbf{E}} = \text{Re} \{ \mathbf{E} e^{-i\omega t} \}$, $\tilde{\mathbf{H}} = \text{Re} \{ \mathbf{H} e^{-i\omega t} \}$, где $\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ +$

$i\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^+ + i\mathbf{H}^-$ – комплексные амплитуды [34] и

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^\top, \quad \mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)^\top,$$

где $(\cdot)^\top$ – операция транспонирования. Предполагаем, что компоненты поля не зависят от y .

Диэлектрическая проницаемость внутри волновода Σ_3 имеет вид

$$\varepsilon_0\varepsilon_2 + \frac{\varepsilon_0\alpha |\mathbf{E}|^2}{1 + \beta |\mathbf{E}|^2},$$

где $\varepsilon_2, \alpha, \beta > 0$ – действительные постоянные. Очевидно, что $|\mathbf{E}e^{-i\omega t}| = |\mathbf{E}|$. Это позволяет записать (1.94) для комплексных амплитуд $\mathbf{E}, \mathbf{H}$:

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}. \quad (1.95)$$

Итак, поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяет (1.95), условиям непрерывности касательных компонент поля на границе $x = h$; касательные компоненты $\mathbf{E}$ обращаются в нуль на границе $x = 0$; условиям излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально убывает при $x \rightarrow \infty$ в полупространстве $x > h$.

Будем искать волны, гармонически зависящие от z с неизвестным действительным коэффициентом γ . Таким образом, компоненты $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ имеют вид

$$\begin{aligned} E_x &\equiv E_x(x)e^{i\gamma z}, & E_y &\equiv E_y(x)e^{i\gamma z}, & E_z &\equiv E_z(x)e^{i\gamma z}, \\ H_x &\equiv H_x(x)e^{i\gamma z}, & H_y &\equiv H_y(x)e^{i\gamma z}, & H_z &\equiv H_z(x)e^{i\gamma z}, \end{aligned}$$

где γ – неизвестный действительный спектральный параметр (постоянная рас-

пространения электромагнитной волны). Поля $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}} &= \text{Re} \left\{ \left(E_x(x)e^{i(\gamma z - \omega t)}, E_y(x)e^{i(\gamma z - \omega t)}, E_z(x)e^{i(\gamma z - \omega t)} \right)^\top \right\}, \\ \tilde{\mathbf{H}} &= \text{Re} \left\{ \left(H_x(x)e^{i(\gamma z - \omega t)}, H_y(x)e^{i(\gamma z - \omega t)}, H_z(x)e^{i(\gamma z - \omega t)} \right)^\top \right\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что $|\mathbf{E}e^{i\gamma z}| = |\mathbf{E}|$.

Подставляя поля $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ в уравнения Максвелла (1.95), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} i\gamma E_y = -i\omega\mu_0 H_x, \\ E'_y = i\omega\mu_0 H_z, \\ -i\omega\varepsilon E_y = i\gamma H_x - H'_z, \\ i\gamma H_y = i\omega\varepsilon E_x, \\ H'_y = -i\omega\varepsilon E_z, \\ i\omega\mu_0 H_y = i\gamma E_x - E'_z, \end{array} \right. \quad (1.96)$$

где $(\cdot)' \equiv \frac{d}{dx}$.

Преобразуя (1.96), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^2 E_x + \gamma(iE_z)' = \omega^2\mu_0\varepsilon E_x, \\ \gamma^2 E_y - E''_y = \omega^2\mu_0\varepsilon E_y, \\ -\gamma E'_x - (iE_z)'' = \omega^2\mu_0\varepsilon(iE_z), \end{array} \right. \quad (1.97)$$

где $H_x = -\gamma(\omega\mu_0)^{-1}E_y$, $H_y = (i\omega\mu_0)^{-1}(i\gamma E_x - E'_z)$, $H_z = (i\omega\mu_0)^{-1}E'_y$.

Введем следующие обозначения $u_1(x) := E_x(x)$, $u_2(x) := E_y(x)$, $u_3(x) := iE_z(x)$.

Во всем пространстве $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}\varepsilon_0$, где

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_2 + \frac{\alpha(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}{1 + \beta(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)}, & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_1, & x > h. \end{cases}$$

Из системы (1.97) получаем

$$\begin{cases} \gamma^2 u_1 + \gamma u'_3 = k_0^2 \tilde{\varepsilon} u_1, \\ u_2'' - \gamma^2 u_2 = -k_0^2 \tilde{\varepsilon} u_2, \\ \gamma u'_1 + u_3'' = -k_0^2 \tilde{\varepsilon} u_3, \end{cases} \quad (1.98)$$

где $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 > 0$.

В полупространстве $x > h$ имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$. Из (1.98) получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \gamma^2 u_1 + \gamma u'_3 = k_0^2 \varepsilon_1 u_1, \\ u_2'' - \gamma^2 u_2 = -k_0^2 \varepsilon_1 u_2, \\ \gamma u'_1 + u_3'' = -k_0^2 \varepsilon_1 u_3. \end{cases}$$

Учитывая условия на бесконечности, получаем решение последней системы

$$\begin{cases} u_1(x; \gamma) = \gamma \kappa_1^{-1} C_1 e^{-\kappa_1(x-h)}, \\ u_2(x; \gamma) = C_2 e^{-\kappa_1(x-h)}, \\ u_3(x; \gamma) = C_1 e^{-\kappa_1(x-h)}, \end{cases} \quad (1.99)$$

где $\kappa_1 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_1}$ и C_1, C_2 – вещественные постоянные.

Внутри волновода $0 \leq x \leq h$ имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_2 + \alpha |\mathbf{u}|^2(x)$, где $|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$. Из (1.98) получаем систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \gamma^2 u_1 + \gamma u'_3 = k_0^2 \varepsilon_2 u_1 + k_0^2 \alpha f(|\mathbf{u}|^2) u_1, \\ u_2'' - \gamma^2 u_2 = -k_0^2 \varepsilon_2 u_2 - k_0^2 \alpha f(|\mathbf{u}|^2) u_2, \\ \gamma u'_1 + u_3'' = -k_0^2 \varepsilon_2 u_3 - k_0^2 \alpha f(|\mathbf{u}|^2) u_3, \end{cases} \quad (1.100)$$

где

$$f(|\mathbf{u}|^2) = \frac{|\mathbf{u}|^2}{1 + \beta |\mathbf{u}|^2}.$$

Касательные компоненты электромагнитного поля непрерывны на грани-

це раздела сред, а касательные компоненты электрического поля обращаются в нуль на идеально проводящей стенке. В данном случае касательными компонентами будут E_y , E_z , H_y , H_z . Из непрерывности компоненты H_y следует непрерывность $\tilde{\varepsilon}E_x$. Таким образом, получаем условия сопряжения для u_1 , u_2 и u_3

$$u_2|_{x=0} = 0, \quad u_3|_{x=0} = 0, \quad [\tilde{\varepsilon}u_1]|_{x=h} = 0, \quad [u_2]|_{x=h} = 0, \quad [u_2']|_{x=h} = 0, \quad [u_3]|_{x=h} = 0, \quad (1.101)$$

где $[v]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} v(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} v(x)$.

Из формул (1.99) видно, что в полупространстве $x > h$ волна представляет собой суперпозицию ТЕ- и ТМ-волн, где постоянные C_1 и C_2 могут быть выбраны независимо. Нелинейная симметричная гибридная волна существует только при наличии определенной связи между постоянными C_1 и C_2 (сравни с [57]). Считаем, что

$$u_2(h) = C \cos \theta, \quad u_3(h) = C \sin \theta, \quad (1.102)$$

где постоянная $C > 0$ предполагается известной, а параметр $\theta \in [0, 2\pi]$ определяется из граничных условий (1.101). Таким образом, получаем

$$u_2^2(h) + u_3^2(h) = C^2 \cos^2 \theta + C^2 \sin^2 \theta = C^2 \quad (1.103)$$

или, используя решения (1.99), находим

$$C_1^2 + C_2^2 = C^2.$$

Из (1.99) и (1.102) следует, что

$$C_1 = C \sin \theta \text{ и } C_2 = C \cos \theta.$$

Определение 3. Задача P_3 – найти вещественные значения γ , для которых при заданном значении $C > 0$, существуют значение θ и функции u_1 , u_2 и u_3 такие, что:

- (i) $|\mathbf{u}|^2 \neq 0$;
- (ii) при $x > h$ функции u_1 , u_2 и u_3 определяются формулами (1.99);
- (iii) при $0 \leq x \leq h$ u_1 , u_2 и u_3 являются решением системы (1.100);
- (iv) функции u_1 , u_2 и u_3 удовлетворяют условиям сопряжения (1.101).

Определение 4. Значения γ , которые являются решением задачи P_3 , называются собственными значениями, а соответствующие решения u_1 , u_2 и u_3 – собственными функциями.

1.3.2. Вывод системы нелинейных интегральных уравнений

Перепишем систему (1.100) в следующем виде

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha k_0^2 \kappa_2^{-2} f(|\mathbf{u}|^2) u_1 + \gamma \kappa_2^{-2} u_3', \\ u_2'' + \kappa_2^2 u_2 = -\alpha k_0^2 f(|\mathbf{u}|^2) u_2, \\ u_3'' + \kappa_2^2 u_3 = \alpha \varepsilon_2^{-1} \left(\gamma (f(|\mathbf{u}|^2) u_1)' - \kappa_2^2 f(|\mathbf{u}|^2) u_3 \right), \end{cases} \quad (1.104)$$

где $\kappa_2^2 = k_0^2 \varepsilon_2 - \gamma^2$.

Пусть $L := \frac{d^2}{dx^2} + \kappa_2^2$. Тогда второе и третье уравнения в (1.104) могут быть записаны как

$$\begin{aligned} Lu_2 &= -\alpha k_0^2 f(|\mathbf{u}|^2) u_2, \\ Lu_3 &= \alpha \varepsilon_2^{-1} \left(\gamma (f(|\mathbf{u}|^2) u_1)' - \kappa_2^2 f(|\mathbf{u}|^2) u_3 \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим краевую задачу

$$LG = -\delta(x - s), \quad G_3|_{x=0} = G_3|_{x=h} = 0, \quad 0 < s < h.$$

Функция Грина указанной краевой задачи имеет вид

$$G_3(x, s) = \begin{cases} -\frac{\sin(\kappa_2 x) \sin(\kappa_2(s-h))}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & x < s \leq h, \\ -\frac{\sin(\kappa_2(x-h)) \sin(\kappa_2 s)}{\kappa_2 \sin(\kappa_2 h)}, & s < x \leq h. \end{cases} \quad (1.105)$$

Используя вторую формулу Грина, получаем

$$\int_0^h (vLu - uLv) dx = (u'v - uv') \Big|_0^h,$$

предполагая при этом, что $v = G$, $u = u_2$ или $u = u_3$, находим

$$u_2(s) = \alpha k_0^2 \int_0^h G_3(x, s) u_2 |\mathbf{u}|^2 dx - u_2(h) \partial_x G_3(x, s) \Big|_{x=h},$$

$$u_3(s) = -\alpha \varepsilon_2^{-1} \int_0^h G_3(x, s) (\gamma (|\mathbf{u}|^2 u_1)' - \kappa_2^2 |\mathbf{u}|^2 u_3) dx - u_3(h) \partial_x G_3(x, s) \Big|_{x=h},$$

где $0 \leq x, s \leq h$.

Используя первое уравнение системы (1.104), получим

$$\begin{aligned} u_1(s) = & -\alpha \gamma \varepsilon_2^{-1} \kappa_2^{-2} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^h G_3(x, s) (\gamma (|\mathbf{u}|^2 u_1)' - \kappa_2^2 |\mathbf{u}|^2 u_3) dx - \\ & - \gamma \kappa_2^{-2} u_3(h) \partial_{xs} G_3(x, s) \Big|_{x=h} - \alpha k_0^2 \kappa_2^{-2} u_1(s) |\mathbf{u}|^2(s). \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_0^h G_3(x, s) (\gamma (|\mathbf{u}|^2 u_1)' - \kappa_2^2 |\mathbf{u}|^2 u_3) dx = & -\gamma \int_0^h \partial_x G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_1 dx - \\ & - \kappa_2^2 \int_0^h G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_3 dx. \end{aligned}$$

Позже нам понадобится следующее выражение, где учитывается скачок $\partial_x G_3(x, s)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^h G_3(x, s) (\gamma (|\mathbf{u}|^2 u_1)' - \kappa_2^2 |\mathbf{u}|^2 u_3) dx = \\ = -\gamma \int_0^h \partial_{xs}^2 G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_1 dx - \gamma |\mathbf{u}|^2 u_1 - \kappa_2^2 \int_0^h \partial_s G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_3 dx. \end{aligned}$$

Используя последние формулы, получаем

$$\begin{aligned} u_1(s) = \alpha \gamma^2 \varepsilon_2^{-1} \kappa_2^{-2} \int_0^h \partial_{xs}^2 G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_1 dx + \alpha \gamma^2 \varepsilon_2^{-1} \kappa_2^{-2} |\mathbf{u}|^2 u_1 + \\ + \alpha \gamma \varepsilon_2^{-1} \int_0^h \partial_s G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_3 dx - \gamma \kappa_2^{-2} u_3(h) \partial_{xs} G_3(x, s)|_{x=h} - \\ - \alpha k_0^2 \kappa_2^{-2} |\mathbf{u}|^2(s) u_1(s) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u_3(s) = \alpha \gamma \varepsilon_2^{-1} \int_0^h \partial_x G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_1 dx + \alpha \varepsilon_2^{-1} \kappa_2^2 \int_0^h G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_3 dx - \\ - u_3(h) \partial_x G_3(x, s)|_{x=h}. \end{aligned}$$

Собирая все уравнения вместе, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(s) = \alpha\gamma^2\varepsilon_2^{-1}\kappa_2^{-2} \int_0^h \partial_{xs}^2 G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_1 dx + \alpha\gamma\varepsilon_2^{-1} \int_0^h \partial_s G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_3 dx - \\ \quad - \alpha\varepsilon_2^{-1} |\mathbf{u}|^2(s) u_1(s) - \gamma\kappa_2^{-2} u_3(h) \partial_{xs} G_3(x, s)|_{x=h}, \\ u_2(s) = \alpha k_0^2 \int_0^h G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_2 dx - u_2(h) \partial_x G_3(h, s), \\ u_3(s) = \alpha\gamma\varepsilon_2^{-1} \int_0^h \partial_x G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_1 dx + \alpha\varepsilon_2^{-1} \kappa_2^2 \int_0^h G_3(x, s) |\mathbf{u}|^2 u_3 dx - \\ \quad - u_3(h) \partial_x G_3(x, s)|_{x=h}. \end{array} \right.$$

Значения $\partial_x G_3(x, s)|_{x=h}$, $\partial_{xs}^2 G_3(x, s)|_{x=h}$ можно записать как

$$\partial_x G_3(x, s)|_{x=h} = -\frac{\sin(\kappa_2 s)}{\sin(\kappa_2 h)}, \quad \partial_{xs}^2 G_3(x, s)|_{x=h} = -\kappa_2 \frac{\cos(\kappa_2 s)}{\sin(\kappa_2 h)}.$$

Таким образом, получена следующая система интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(s) = \frac{\alpha\gamma^2}{\varepsilon_2\kappa_2^2} \int_0^h \partial_{xs}^2 G_3(x, s) f(|\mathbf{u}|^2) u_1 dx + \\ \quad + \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon_2} \int_0^h \partial_s G_3(x, s) f(|\mathbf{u}|^2) u_3 dx - \alpha\varepsilon_2^{-1} f(|\mathbf{u}|^2) u_1(s) + u_3(h) h_1(s), \\ u_2(s) = \alpha k_0^2 \int_0^h G_3(x, s) f(|\mathbf{u}|^2) u_2 dx + u_2(h) h_2(s), \\ u_3(s) = \alpha\gamma\varepsilon_2^{-1} \int_0^h \partial_x G_3(x, s) f(|\mathbf{u}|^2) u_1 dx + \\ \quad + \alpha\varepsilon_2^{-1} \kappa_2^2 \int_0^h G_3(x, s) f(|\mathbf{u}|^2) u_3 dx + u_3(h) h_2(s), \end{array} \right. \quad (1.106)$$

где

$$h_1(s) = \gamma\kappa_2^{-1} \frac{\cos(\kappa_2 s)}{\sin(\kappa_2 h)}, \quad h_2(s) = \frac{\sin(\kappa_2 s)}{\sin(\kappa_2 h)}.$$

1.3.3. Единственность решения операторного уравнения

Перепишем систему (1.106) в операторной форме. Введем обозначения

$$\mathbf{K}(x, s) = \{K_{nm}(x, s)\} = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}\partial_{xs}^2 G_3 & 0 & q_{13}\partial_s G_3 \\ 0 & q_{22}G_3 & 0 \\ q_{31}\partial_x G_3 & 0 & q_{33}G_3 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & q_{13} \\ 0 & q_{22} & 0 \\ q_{31} & 0 & q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^2 \varepsilon_2^{-1} \kappa_2^{-2} & 0 & \gamma \varepsilon_2^{-1} \\ 0 & k_0^2 & 0 \\ \gamma \varepsilon_2^{-1} & 0 & \varepsilon_2^{-1} \kappa_2^2 \end{pmatrix}.$$

Определим матричный интегральный оператор:

$$\mathbf{K}\mathbf{g} = \int_0^h \mathbf{K}(x, s)\mathbf{g}(x)dx,$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^\top$. Пусть

$$\mathbf{J} = -\varepsilon_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} h_1 \sin \theta \\ h_2 \cos \theta \\ h_2 \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\mathbf{K}$ и $\mathbf{J}$ – линейные операторы.

Определим линейный оператор

$$\mathbf{N}_1 := \mathbf{K} + \mathbf{J}.$$

Тогда система (1.106) имеет вид

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{N}_1(f(|\mathbf{u}|^2)\mathbf{u}) + C\mathbf{h}_1. \quad (1.107)$$

Исследуем уравнение (1.107) в $\mathbf{C}[0, h] = C[0, h] \times C[0, h] \times C[0, h]$ с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}}^2 = \|u_1\|_C^2 + \|u_2\|_C^2 + \|u_3\|_C^2,$$

где $\|u\|_C = \max_{x \in [0, h]} |u(x)|$.

Пусть

$$q_3 = \frac{13\alpha}{4\beta} \|\mathbf{N}_1\|. \quad (1.108)$$

Для уравнения (1.107) справедливо следующее

Утверждение 11. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_3 < 1$. Тогда уравнение (1.107) имеет единственное решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \in \mathbf{C}[0, h]$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13})^\top$ и $\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23})^\top$. Повторяя рассуждения из доказательства оценки (1.89), получаем

$$\left| \frac{|\mathbf{v}_1|^2 \mathbf{v}_1}{1 + \beta |\mathbf{v}_1|^2} - \frac{|\mathbf{v}_2|^2 \mathbf{v}_2}{1 + \beta |\mathbf{v}_2|^2} \right| \leq \frac{13}{4\beta} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|. \quad (1.109)$$

В соответствии с (1.109) получаем

$$\|\alpha \mathbf{N}_1(f(|\mathbf{v}_1|^2) \mathbf{v}_1) - \alpha \mathbf{N}_1(f(|\mathbf{v}_2|^2) \mathbf{v}_2)\| \leq \frac{13\alpha}{4\beta} \|\mathbf{N}_1\| \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|.$$

Тогда для $q_3 < 1$ отображение $\mathbf{N}_1$ является сжатием. Выберем значение $r > 0$ из условия $\|C\mathbf{h}_1\| \leq (1 - q_3)r$. В соответствии со следствием 2 (см. [25, с. 382]) сжатие $\mathbf{N}_1$ действует из шара $\mathbf{B}_r(0) = B_r(0) \times B_r(0) \times B_r(0)$ в тот же шар в $\mathbf{C}[0, h]$, где $B_r(0) = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| < r\}$. Таким образом, уравнение (1.107) имеет единственное решение $\mathbf{u}^* \in \mathbf{B}_r(0) \subset \mathbf{C}[0, h]$. Так как r может быть выбрано сколь угодно большим, утверждение выполняется.

□

1.3.4. Система дисперсионных уравнений

Используя условия сопряжения (1.101) и принимая во внимание решение (1.99), получаем из (1.106) первое дисперсионное уравнение:

$$C \cos \theta g_E(\gamma) = \alpha Q_E(\gamma, \theta),$$

где

$$g_E(\gamma) = \kappa_2 \cos(\kappa_2 h) + \kappa_1 \sin(\kappa_2 h) \quad (1.110)$$

и

$$Q_E(\gamma, \theta) = k_0^2 \int_0^h \sin(\kappa_2 x) f(|\mathbf{u}|^2) u_2(x) dx. \quad (1.111)$$

Отметим, что Q_E зависит от θ , так как $\mathbf{u}$ зависит от θ .

Чтобы получить второе дисперсионное уравнение, необходимо вычислить

$$\varepsilon_2 u_1 + \alpha f(|\mathbf{u}|^2) u_1.$$

Используя (1.106), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 u_1(s) + \alpha f(|\mathbf{u}|^2) u_1(s) &= \frac{\alpha \gamma^2}{\kappa_2^2} \int_0^h \partial_{xs}^2 G(x, s) f(|\mathbf{u}|^2) u_1 dx + \\ &+ \alpha \gamma \int_0^h \partial_s G(x, s) f(|\mathbf{u}|^2) u_3 dx + C \sin \theta \varepsilon_2 h_1(s). \end{aligned}$$

Из последней формулы в точке $s = h$ находим

$$C \sin \theta g_M(\gamma) = \alpha Q_M(\gamma, \theta),$$

где

$$g_M(\gamma) = \varepsilon_1 \kappa_2 \sin(\kappa_2 h) - \varepsilon_2 \kappa_1 \cos(\kappa_2 h), \quad (1.112)$$

и

$$Q_M(\gamma, \theta) = \gamma\kappa_1 \int_0^h \cos(\kappa_2 x) f(|\mathbf{u}|^2) u_1 dx + \kappa_1\kappa_2 \int_0^h \sin(\kappa_2 x) f(|\mathbf{u}|^2) u_3 dx. \quad (1.113)$$

Отметим, что Q_M зависит от θ , так как $\mathbf{u}$ зависит от θ .

Введем интегральные операторы

$$Q_E q_1 \equiv k_0^2 \int_0^h \sin(\kappa_2 x) q_1 dx,$$

$$Q_M q_2 \equiv \gamma\kappa_1 \int_0^h \cos(\kappa_2 x) q_2 dx + \kappa_1\kappa_2 \int_0^h \sin(\kappa_2 x) q_2 dx.$$

Таким образом, получили систему дисперсионных уравнений

$$\begin{cases} C \sin \theta = \alpha \frac{Q_M(\gamma, \theta)}{g_M(\gamma)}, \\ C \cos \theta = \alpha \frac{Q_E(\gamma, \theta)}{g_E(\gamma)}, \end{cases} \quad (1.114)$$

при условии (1.103).

Результаты и выводы по главе 1

1. Разработаны аналитические методы исследования математических моделей дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением. В случае нелинейности с насыщением найдены условия на коэффициенты нелинейности, при которых задача имеет единственное решение. В случае нелинейности Керра доказано существование бесконечного числа решений даже при любых значениях нелинейности.
2. Разработан аналитический метод исследования математической модели распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нели-

нейной средой с эффектом насыщения. Найдены условия существования и единственности решения.

3. Разработан аналитический метод исследования математической модели распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения. Задача о распространении симметричных гибридных электромагнитных волн сведена к новому типу двухпараметрических задач, в которых только один из параметров спектральный, а второй подбирается таким образом, чтобы существовало нетривиальное решение задачи. Найдены условия на коэффициенты нелинейности при которых задача имеет единственное решение.

ГЛАВА 2

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ

2.1. Численный метод решения задачи дифракции поляризованных электромагнитных ТЕ-волн на нелинейном слое

2.1.1. Итерационный метод решения интегрального уравнения

Приближенные решения $u^{(n)}(s)$, $s \in [0, h]$ интегрального уравнения (1.29) могут быть вычислены с помощью итерационного процесса

$$u^{(n+1)}(s) = \alpha \int_0^h Q_1(x, s) \frac{(u^{(n)}(x))^3}{1 + \beta(u^{(n)}(x))^2} dx + q_2(s). \quad (2.1)$$

Докажем, что последовательность $u^{(n)}(s)$ равномерно сходится к решению уравнения (1.29) вследствие того, что правая часть уравнения (1.29) определяет сжимающий оператор.

Утверждение 12. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_1 < 1$, где q_1 определяется формулой (1.32). Тогда существует и единственно решение $u \in C[0, h]$ уравнения (1.29), и последовательность приближенных решений $u^{(n)} \in C[0, h]$ уравнения (1.29), определяемых посредством итерационного алгоритма (2.1) сходится в норме пространства $C[0, h]$ к (единственному) точному решению $u \in C[0, h]$ уравнения (1.29) при любом начальном приближении $u^{(0)} \in C[0, h]$ со скоростью геометрической прогрессии с показателем q_1 .

При доказательстве утверждения 3 было показано, что отображение Q_1 является сжатием в $C[0, h]$. Тогда доказательство утверждения 12 следует из

принципа сжимающих отображений [25].

Приближенные решения $u^{(n)}$ интегрального уравнения (1.29) могут быть определены с помощью итерационного процесса (2.1).

2.1.2. Оценка скорости сходимости итерационного метода решения интегрального уравнения

Как показано в утверждении 12, последовательность $u^{(n)}(s)$ равномерно сходится к решению $u(s)$ уравнения (1.29). Известна также оценка для скорости сходимости итерационного алгоритма [25]. В частности, если выбрать в качестве начального приближения $u^{(0)}(s) = 0$, то получаем следующую оценку скорости сходимости итерационного процесса.

Утверждение 13. Пусть $u^{(0)}(s) = 0$. Последовательность приближенных решений $u^{(n)}(s)$ уравнения (1.29), определяемых посредством итерационного алгоритма (2.1), существует и сходится в норме пространства $C[0, h]$ к (единственному) точному решению u уравнения (1.29) и верна оценка скорости сходимости:

$$\|u - u^{(n)}\| \leq \frac{q_1^n}{1 - q_1} \|\mathbf{h}\|, \quad n \rightarrow \infty,$$

где q_1 – коэффициент сжатия отображения.

2.2. Численный метод решения задачи распространения электромагнитных связанных ТЕ-ТЕ-волн в нелинейном слое

2.2.1. Итерационный метод решения системы интегральных уравнений

Приближенные решения $\mathbf{w}^{(n)}(s) = (u^{(n)}(s), v^{(n)}(s))^T$, $s \in [0, h]$ системы интегральных уравнений (1.85) могут быть вычислены с помощью итерацион-

ного процесса

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(n+1)}(s) = \alpha k_1^2 \int_0^h G_{21}(x, s) f(u^{(n)}, v^{(n)}) u^{(n)} dx + \\ \quad + \alpha k_1^2 p_1 \cos(\kappa_1(s-h)) \int_0^h G_{21}(x, 0) f(u^{(n)}, v^{(n)}) u^{(n)} dx + h_1, \\ v^{(n+1)}(s) = \alpha k_2^2 \int_0^h G_{22}(x, s) f(u^{(n)}, v^{(n)}) v^{(n)} dx + \\ \quad + \alpha k_2^2 p_2 \cos(\kappa_2(s-h)) \int_0^h G_{22}(x, 0) f(u^{(n)}, v^{(n)}) v^{(n)} dx + h_2. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Докажем, что последовательность $\mathbf{w}^{(n)}(s) = (u^{(n)}(s), v^{(n)}(s))^T$ равномерно сходится к решению системы уравнений (1.85) вследствие того, что правая часть системы уравнений (1.85) определяет сжимающий оператор.

Утверждение 14. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_2 < 1$, где q_2 определяется формулой (1.88). Тогда существует и единственно решение $\mathbf{w} \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (1.87) (или системы (1.74)), и последовательность приближенных решений $\mathbf{w}^{(n)} \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (1.87) (или системы (1.74)), определяемых посредством итерационного алгоритма

$$\mathbf{w}^{n+1} = \alpha \mathbf{N} \left(\frac{|\mathbf{w}^{(n)}|^2 \mathbf{w}^{(n)}}{1 + \beta |\mathbf{w}^{(n)}|^2} \right) + \mathbf{h}, \quad (2.3)$$

сходится в норме пространства $\mathbf{C}[0, h]$ к (единственному) точному решению $\mathbf{w} \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (1.87) (или системы (1.74)) при любом начальном приближении $\mathbf{w}^{(0)} \in \mathbf{C}[0, h]$ со скоростью геометрической прогрессии с показателем q_2 .

При доказательстве утверждения 8 было показано, что отображение $\mathbf{N}$ является сжатием в $\mathbf{C}[0, h]$. Тогда доказательство утверждения 14 следует из принципа сжимающих отображений [25].

Приближенные решения $\mathbf{w}^{(n)} = (u^{(n)}, v^{(n)})^T$ системы интегральных уравнений (1.85) могут быть определены с помощью итерационного процесса (2.3).

2.2.2. Оценка скорости сходимости итерационного метода решения интегрального уравнения

Как показано в утверждении 14, последовательность $\mathbf{w}^{(n)}(s)$ равномерно сходится к решению $\mathbf{w}(s) = (u(s), v(s))^T$ уравнения (1.87). Известна также оценка для скорости сходимости итерационного алгоритма [25]. В частности, если выбрать в качестве начального приближения $\mathbf{w}^{(0)}(s) = (0, 0)^T$, то получаем следующую оценку скорости сходимости итерационного процесса.

Утверждение 15. Пусть $\mathbf{w}^{(0)}(s) = (0, 0)^T$. Последовательность приближенных решений $\mathbf{w}^{(n)}(s) = (u^{(n)}(s), v^{(n)}(s))^T$ системы уравнений (1.85), определяемых посредством итерационного алгоритма (2.3), существует и сходится в норме пространства $\mathbf{C}[0, h]$ к (единственному) точному решению $\mathbf{w}$ системы уравнений (1.85) и верна оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}^{(n)}\| \leq \frac{q_2^n}{1 - q_2} \|\mathbf{h}\|, \quad n \rightarrow \infty,$$

где q_2 – коэффициент сжатия отображения.

Замечание 5. Заметим, что в утверждениях 14 и 15 величины γ_1 и γ_2 фиксированы.

2.2.3. Теоремы о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным

Далее будет сформулирован итерационный метод нахождения приближенных собственных значений задачи P_2 и доказаны теоремы о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным.

Теорема 4. Пусть $\varepsilon_2 > \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} > 0$, $0 < \alpha \leq \frac{\beta C_{\min} M_{\min}}{C_{\max} h}$. Тогда для всех

$n \geq 0$ система (1.80) при

$$\begin{aligned}
 Q_1(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)}) = \\
 = (\kappa_{13} \cos(\kappa_1 h) - \kappa_1 \sin(\kappa_1 h)) \int_0^h \cos(\kappa_1 x) f(u^{(n)}, v^{(n)}) u^{(n)} dx - \\
 - \kappa_{13} \int_0^h \cos(\kappa_1(x-h)) f(u^{(n)}, v^{(n)}) u^{(n)} dx, \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)}) = \\
 = (\kappa_{23} \cos(\kappa_2 h) - \kappa_2 \sin(\kappa_2 h)) \int_0^h \cos(\kappa_2 x) f(u^{(n)}, v^{(n)}) v^{(n)} dx - \\
 - \kappa_{23} \int_0^h \cos(\kappa_2(x-h)) f(u^{(n)}, v^{(n)}) v^{(n)} dx \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

имеет по крайней мере $l_1 l_2$ собственных значений $(\gamma_1^{(i,n)}, \gamma_2^{(i,n)}) \in \Gamma$, $i = \overline{1, l_1 l_2}$.

Доказательство. Для каждого $n \geq 0$ функции $\mathbf{w}^{(n)}$ непрерывны согласно (2.3). Таким образом, для доказательства достаточно повторить доказательство теоремы 3, если заменить $\mathbf{w}$ на $\mathbf{w}^{(n)}$.

Согласно утверждениям 14 и 15 существует и единственно решение $\mathbf{w}^{(n)}$ уравнения (2.3), которое непрерывно зависит от $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma$.

Если $\alpha \leq \frac{\beta C_{\min} M_{\min}}{C_{\max} h}$, то

$$\begin{aligned}
 & \left(A_1 g_1(\sqrt{\lambda'_{s,p}} + \delta'_p) - \alpha_1 \frac{Q_1(\sqrt{\lambda'_{s,p}} + \delta'_p, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)})}{\sin(\kappa_1 h)} \right) \times \\
 & \times \left(A_1 g_1(\sqrt{\lambda'_{c,p}}) - \alpha_1 \frac{Q_1(\sqrt{\lambda'_{c,p}}, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)})}{\sin(\kappa_1 h)} \right) < 0, \quad \gamma_2 \in \Gamma'',
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(A_2 g_2 \left(\sqrt{\lambda''_{s,q}} + \delta''_q \right) - \alpha_2 \frac{Q_2(\gamma_1, \sqrt{\lambda''_{s,q}} + \delta''_q; \mathbf{w}^{(n)})}{\sin(\kappa_2 h)} \right) \times \\ & \times \left(A_2 g_2 \left(\sqrt{\lambda''_{c,q}} \right) - \alpha_2 \frac{Q_2(\gamma_1, \sqrt{\lambda''_{c,q}}; \mathbf{w}^{(n)})}{\sin(\kappa_2 h)} \right) < 0, \quad \gamma_1 \in \Gamma'. \end{aligned}$$

Из непрерывности функций

$$\begin{aligned} A_1 g_1(\gamma_1) - \alpha_1 \frac{Q_1(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)})}{\sin(\kappa_1 h)}, \\ A_2 g_2(\gamma_2) - \alpha_2 \frac{Q_2(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)})}{\sin(\kappa_2 h)} \end{aligned}$$

следует, что уравнения

$$\begin{aligned} A_1 g_1(\gamma_1) - \alpha_1 \frac{Q_1(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)})}{\sin(\kappa_1 h)} &= 0, \\ A_2 g_2(\gamma_2) - \alpha_2 \frac{Q_2(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)})}{\sin(\kappa_2 h)} &= 0 \end{aligned}$$

имеют корни $(\gamma_1^{(i,n)}, \gamma_2^{(i,n)}) \in \Gamma$. □

Теорема 4 утверждает существование приближенных собственных значений краевой задачи P_2 . Система (1.80) при (2.4), (2.5) является приближенной системой дисперсионных уравнений для краевой задачи P_2 . Она отличается от точной системы дисперсионных уравнений только тем, что вместо вектора $\mathbf{w}$ в формулах используется вектор $\mathbf{w}^{(n)}$.

Следующая теорема утверждает сходимость приближенных собственных значений к точным.

Теорема 5. Пусть $\varepsilon_2 > \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} > 0$, $0 < \alpha \leq \frac{\beta C_{\min} M_{\min}}{C_{\max} h}$ и $q_2 < 1$. Пусть пары $(\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)})$ и $(\gamma_1^{(i,n)}, \gamma_2^{(i,n)})$ – соответственно пары точных и приближенных собственных значений задачи P_2 , $i = \overline{1, l_1 l_2}$, $l_1 \geq 1$, $l_2 \geq 1$. Тогда $|\gamma_1^{(i)} - \gamma_1^{(i,n)}| \rightarrow 0$, $|\gamma_2^{(i)} - \gamma_2^{(i,n)}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}\Phi_1(\gamma_1, \gamma_2) &= A_1 \sin(\kappa_1 h) g_1(\gamma_1) - \alpha Q_1(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}), \\ \Phi_2(\gamma_1, \gamma_2) &= A_2 \sin(\kappa_2 h) g_2(\gamma_2) - \alpha Q_2(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}), \\ \Phi_1^{(n)}(\gamma_1, \gamma_2) &= A_1 \sin(\kappa_1 h) g_1(\gamma_1) - \alpha Q_1(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)}), \\ \Phi_2^{(n)}(\gamma_1, \gamma_2) &= A_2 \sin(\kappa_2 h) g_2(\gamma_2) - \alpha Q_2(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)}).\end{aligned}$$

Тогда, используя оценку (1.89), находим

$$\begin{aligned}|\Phi_1(\gamma_1, \gamma_2) - \Phi_1^{(n)}(\gamma_1, \gamma_2)| &= \alpha |Q_1(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}) - Q_1(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)})| \leq \\ &\leq \frac{13\alpha}{4\beta} \|Q_1\| \|\mathbf{w} - \mathbf{w}^{(n)}\| \leq \frac{13\alpha}{4\beta} \frac{C_1 h}{\beta} \frac{q_2^n}{1 - q_2} \|\mathbf{h}\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\Phi_2(\gamma_1, \gamma_2) - \Phi_2^{(n)}(\gamma_1, \gamma_2)| &= \alpha |Q_2(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}) - Q_2(\gamma_1, \gamma_2; \mathbf{w}^{(n)})| \leq \\ &\leq \frac{13\alpha}{4\beta} \|Q_2\| \|\mathbf{w} - \mathbf{w}^{(n)}\| \leq \frac{13\alpha}{4\beta} \frac{C_2 h}{\beta} \frac{q_2^n}{1 - q_2} \|\mathbf{h}\|,\end{aligned}$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от n , а q_2 – коэффициент сжатия, определенный формулой (1.88).

Следовательно

$$\max_{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma} |\Phi_1(\gamma_1, \gamma_2) - \Phi_1^{(n)}(\gamma_1, \gamma_2)| \leq \frac{13\alpha}{4\beta} \frac{C_1^* h}{\beta} \frac{Q^n}{1 - Q}, \quad (2.6)$$

$$\max_{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma} |\Phi_2(\gamma_1, \gamma_2) - \Phi_2^{(n)}(\gamma_1, \gamma_2)| \leq \frac{13\alpha}{4\beta} \frac{C_2^* h}{\beta} \frac{Q^n}{1 - Q}, \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} C_1^* &= \max_{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma} \{ \|\mathbf{h}(\gamma_1, \gamma_2)\| C_1(\gamma_1, \gamma_2) \}, \\ C_2^* &= \max_{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma} \{ \|\mathbf{h}(\gamma_1, \gamma_2)\| C_2(\gamma_1, \gamma_2) \}, \\ Q &= \frac{13\alpha}{4\beta} \max_{(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma} \|\mathbf{N}(\gamma_1, \gamma_2)\| < 1. \end{aligned}$$

При выполнении условий теорем 3 и 4 существуют пары решений $(\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(j)})$ и $(\gamma_1^{(i,n)}, \gamma_2^{(j,n)})$ точной и приближенной систем дисперсионных уравнений

$$\Phi_1(\gamma_1, \gamma_2) = 0,$$

$$\Phi_2(\gamma_1, \gamma_2) = 0$$

и

$$\Phi_1^{(n)}(\gamma_1, \gamma_2) = 0, \tag{2.8}$$

$$\Phi_2^{(n)}(\gamma_1, \gamma_2) = 0 \tag{2.9}$$

при $n \geq 0$. Из оценок (2.6) и (2.7) следует близость функций $\Phi_1, \Phi_1^{(n)}$ и $\Phi_2, \Phi_2^{(n)}$, соответственно. А значит $|\gamma_1^{(i)} - \gamma_1^{(i,n)}| \rightarrow 0, |\gamma_2^{(j)} - \gamma_2^{(j,n)}| \rightarrow 0$ при достаточно больших n .

□

2.3. Численный метод решения задачи распространения электромагнитных симметричных гибридных волн в нелинейном слое

2.3.1. Итерационный метод решения системы интегральных уравнений

Приближенные решения $\mathbf{u}^{(n)}(s) = (u_1^{(n)}(s), u_2^{(n)}(s), u_3^{(n)}(s))^T, s \in [0, h]$ системы интегральных уравнений (1.106) могут быть вычислены с помощью ите-

рационального процесса

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{(n+1)}(s) = \frac{\alpha\gamma^2}{\varepsilon_2\kappa_2^2} \int_0^h \partial_{xs}^2 G_3(x, s) f(|\mathbf{u}^{(n)}|^2) u_1^{(n)} dx + \\ + \frac{\alpha\gamma}{\varepsilon_2} \int_0^h \partial_s G_3(x, s) f(|\mathbf{u}^{(n)}|^2) u_3^{(n)} dx - \\ - \alpha\varepsilon_2^{-1} f(|\mathbf{u}^{(n)}|^2) u_1^{(n)}(s) + u_3^{(n)}(h) h_1(s), \\ u_2^{(n+1)}(s) = \alpha k_0^2 \int_0^h G_3(x, s) f(|\mathbf{u}^{(n)}|^2) u_2^{(n)} dx + u_2^{(n)}(h) h_2(s), \\ u_3^{(n+1)}(s) = \alpha\gamma\varepsilon_2^{-1} \int_0^h \partial_x G_3(x, s) f(|\mathbf{u}^{(n)}|^2) u_1^{(n)} dx + \\ + \alpha\varepsilon_2^{-1} \kappa_2^2 \int_0^h G_3(x, s) f(|\mathbf{u}^{(n)}|^2) u_3^{(n)} dx + u_3^{(n)}(h) h_2(s). \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Докажем, что последовательность $\mathbf{u}^{(n)}(s) = (u_1^{(n)}(s), u_2^{(n)}(s), u_3^{(n)}(s))^T$ равномерно сходится к решению системы уравнений (1.106) вследствие того, что правая часть системы уравнений (1.106) определяет сжимающий оператор.

Утверждение 16. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $q_3 < 1$, где q_3 определяется формулой (1.108). Тогда существует и единственно решение $\mathbf{u} \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (1.107) (или системы (1.106)), и последовательность приближенных решений $\mathbf{u}^n \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (1.107) (или системы (1.106)), определяемых посредством итерационного алгоритма

$$\mathbf{u}^{n+1} = \alpha \mathbf{N}_1(|\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n) + C \mathbf{h}_1, \quad (2.11)$$

сходится в норме пространства $\mathbf{C}[0, h]$ к (единственному) точному решению $\mathbf{u} \in \mathbf{C}[0, h]$ уравнения (1.107) (или системы (1.106)) при любом начальном приближении $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{C}[0, h]$ со скоростью геометрической прогрессии с показателем q_3 .

При доказательстве утверждения 11 было показано, что отображение $\mathbf{N}_1$ является сжатием в $\mathbf{C}[0, h]$. Тогда доказательство утверждения 16 следует из

принципа сжимающих отображений [25].

Приближенные решения $\mathbf{u}^{(n)}(s) = (u_1^{(n)}(s), u_2^{(n)}(s), u_3^{(n)}(s))^T$ системы интегральных уравнений (1.106) могут быть определены с помощью итерационного процесса (2.11).

2.3.2. Оценка скорости сходимости итерационного метода решения интегрального уравнения

Как показано в утверждении 16, последовательность $\mathbf{u}^{(n)}(s)$ равномерно сходится к решению $\mathbf{u}(s) = (u_1(s), u_2(s), u_3(s))^T$ системы (1.106). Известна также оценка для скорости сходимости итерационного алгоритма [25]. В частности, если выбрать в качестве начального приближения $\mathbf{u}^{(0)}(s) = (0, 0, 0)^T$, то получаем следующую оценку скорости сходимости итерационного процесса.

Утверждение 17. Пусть $\mathbf{u}^0(s) = (0, 0, 0)^T$. Последовательность приближенных решений $\mathbf{u}^{(n)}(s) = (u_1^{(n)}(s), u_2^{(n)}(s), u_3^{(n)}(s))^T$ системы (1.106), определяемых посредством итерационного алгоритма (2.11), существует и сходится в норме пространства $\mathbf{C}[0, h]$ к (единственному) точному решению $\mathbf{u}$ системы уравнений (1.106) и верна оценка скорости сходимости:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(n)}\| \leq \frac{q_3^n}{1 - q_3} C \|\mathbf{h}_1\|, \quad n \rightarrow \infty,$$

где q_3 – коэффициент сжатия отображения.

2.3.3. Теорема о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным

Далее будет сформулирован итерационный метод нахождения приближенных собственных значений задачи P_3 и доказана теорема о существовании сходимости приближенных собственных значений к точным.

Пусть $\lambda_{s,m} := k_0^2 \varepsilon_2 - \frac{j_{s,m}^2}{h^2}$, где $j_{s,m} = \pi m$ – это m -ый неотрицательный корень уравнения $\sin x = 0$. Заметим, что точки $\sqrt{\lambda_{s,m}}$ – полюса функции Грина (1.105). Пусть $\delta, \delta_m > 0$ – достаточно малые величины. Введем обозначения $\Lambda = \{(\sqrt{\lambda_{s,m}} - \delta_m, \sqrt{\lambda_{s,m}} + \delta_m) : m \in \mathbb{Z}\}$, $\Gamma = (\sqrt{k_0^2 \varepsilon_1} + \delta, \sqrt{k_0^2 \varepsilon_2} - \delta) \setminus \Lambda$.

Теорема 6. Пусть $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$, $q_3 < 1$. Пусть $(\gamma^{(i)}, \theta^{(i)}) \in \Gamma \times (0, 2\pi)$ – пара точных решений задачи P_3 . Тогда при достаточно больших n существует пара приближенных решений задачи P_3 $(\gamma^{(i,n)}, \theta^{(i,n)}) \in \Gamma \times (0, 2\pi)$ и $|\gamma^{(i)} - \gamma^{(i,n)}| \rightarrow 0$, $|\theta^{(i)} - \theta^{(i,n)}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Учитывая полученную ранее систему дисперсионных уравнений (1.114), рассмотрим функции

$$\begin{aligned}\Phi_E(\gamma, \theta) &= C \cos \theta g_E(\gamma) - \alpha Q_E(\gamma, \theta; \mathbf{u}), \\ \Phi_M(\gamma, \theta) &= C \sin \theta g_M(\gamma) - \alpha Q_M(\gamma, \theta; \mathbf{u}), \\ \Phi_E^{(n)}(\gamma, \theta) &= C \cos \theta g_E(\gamma) - \alpha Q_E(\gamma, \theta; \mathbf{u}^{(n)}), \\ \Phi_M^{(n)}(\gamma, \theta) &= C \sin \theta g_M(\gamma) - \alpha Q_M(\gamma, \theta; \mathbf{u}^{(n)}).\end{aligned}$$

Для функций $Q_E(\gamma, \theta)$, $Q_M(\gamma, \theta)$ справедливы следующие оценки

$$|Q_E(\gamma, \theta)| \leq \frac{C_E |u_2|}{\beta} h, \quad |Q_M(\gamma, \theta)| \leq \frac{C_{M1} |u_1| + C_{M2} |u_3|}{\beta} h,$$

где

$$C_E = k_0^2, \quad C_{M1} = \gamma \kappa_1, \quad C_{M2} = \kappa_1 \kappa_2.$$

Следовательно

$$\|Q_E\| \leq \frac{C_E h}{\beta}, \quad \|Q_M\| \leq \frac{(C_{M1} + C_{M2}) h}{\beta}.$$

Пусть $C_{\max} = \max\{C_1, C_2\}$, $C_{\min} = \min\{A_1, A_2\}$.

Тогда, используя оценку (1.109), находим

$$\begin{aligned} |\Phi_E(\gamma, \theta) - \Phi_E^{(n)}(\gamma, \theta)| &= \alpha |Q_E(\gamma, \theta; \mathbf{u}) - Q_E(\gamma, \theta; \mathbf{u}^{(n)})| \leq \\ &\leq \alpha \frac{C_E h}{\beta} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(n)}\| \leq \alpha \frac{C_E h}{\beta} C \frac{q_3^n}{1 - q_3} \|\mathbf{h}_1\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Phi_M(\gamma, \theta) - \Phi_M^{(n)}(\gamma, \theta)| &= \alpha |Q_M(\gamma, \theta; \mathbf{u}) - Q_M(\gamma, \theta; \mathbf{u}^{(n)})| \leq \\ &\leq \alpha \frac{(C_{M1} + C_{M2})h}{\beta} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(n)}\| \leq \alpha \frac{(C_{M1} + C_{M2})h}{\beta} C \frac{q_3^n}{1 - q_3} \|\mathbf{h}_1\|, \end{aligned}$$

где постоянные C_E , C_{M1} , C_{M2} не зависят от n , а q_3 – коэффициент сжатия, определенный формулой (1.108).

Следовательно

$$\max_{\gamma \in \Gamma, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})} |\Phi_E(\gamma, \theta) - \Phi_E^{(n)}(\gamma, \theta)| \leq \alpha \frac{Q^n}{1 - Q} C_E^*, \quad (2.12)$$

$$\max_{\gamma \in \Gamma, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})} |\Phi_M(\gamma, \theta) - \Phi_M^{(n)}(\gamma, \theta)| \leq \alpha \frac{Q^n}{1 - Q} C_M^*, \quad (2.13)$$

где

$$C_E^* = h C_E C \max_{\gamma \in \Gamma, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})} \{ \|\mathbf{h}_1(\gamma, \theta)\| \},$$

$$C_M^* = h C \max_{\gamma \in \Gamma, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})} \{ (C_{M1}(\gamma) + C_{M2}(\gamma)) \|\mathbf{h}_1(\gamma, \theta)\| \},$$

$$Q = \frac{13\alpha}{4\beta} \max_{\gamma \in \Gamma, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})} \{ \|\mathbf{N}_1(\gamma, \theta)\| \} < 1.$$

Пусть $(\gamma^{(i)}, \theta^{(i)})$ и $(\gamma^{(i,n)}, \theta^{(i,n)})$ – пары решений точной и приближенной систем дисперсионных уравнений

$$\Phi_E(\gamma, \theta) = 0, \quad \Phi_M(\gamma, \theta) = 0$$

и

$$\Phi_E^{(n)}(\gamma, \theta) = 0, \quad \Phi_M^{(n)}(\gamma, \theta) = 0$$

при $n \geq 0$. Из оценок (2.12) и (2.13) следует близость функций Φ_E , $\Phi_E^{(n)}$ и Φ_M , $\Phi_M^{(n)}$, соответственно. Следовательно, при достаточно больших n существует пара приближенных решений задачи P_3 $(\gamma^{(i,n)}, \theta^{(i,n)}) \in \Gamma \times (0, 2\pi)$ и справедливо

$$|\gamma^{(i)} - \gamma^{(i,n)}| \rightarrow 0, \quad |\theta^{(i)} - \theta^{(i,n)}| \rightarrow 0$$

при достаточно больших n .

□

Результаты и выводы по главе 2

1. Разработан и обоснован численный метод приближенного решения задачи дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением. Найдена оценка скорости сходимости данного численного метода.
2. Разработан и обоснован численный метод приближенного решения задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения. Доказана теорема о сходимости численного метода и найдена оценка его скорости сходимости. Доказаны теоремы о существовании и сходимости приближенных связанных собственных значений и собственных функций к точным.
3. Разработан и обоснован численный метод приближенного решения задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения. Доказана теорема о сходимости численного метода и найдена оценка его скорости сходимости. Доказана теорема о существовании и сходимости

приближенных собственных значений и собственных функций к точным.

ГЛАВА 3

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОМ СЛОЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

3.1. Комплекс программ для численного решения задач дифракции и распространения поляризованных электромагнитных ТЕ-волн на нелинейном слое

На основе итерационных методов, описанных в главе 2, разработан программный комплекс, вычисляющий для задачи P_{1s} приближенные значения функции u в точках разбиения отрезка $[0, h]$ и амплитуд F_R , F_T для заданных значений амплитуды F_I , для задачи P_2 приближенные значения собственных функции u и v в точках разбиения отрезка $[0, h]$ и связанных собственных значений (γ_1, γ_2) , а для задачи P_3 приближенные значения собственных функции u_1 , u_2 , u_3 в точках разбиения отрезка $[0, h]$ и пары решений (γ, θ) . Программный комплекс реализован на языке C/C++.

Блок-схема алгоритма приближенного решения задач P_{1s} , P_2 , P_3 представлена на рис. 4.

На вход подается значение n , где n – номер решаемой задачи ($n = 1, 2, 3$).

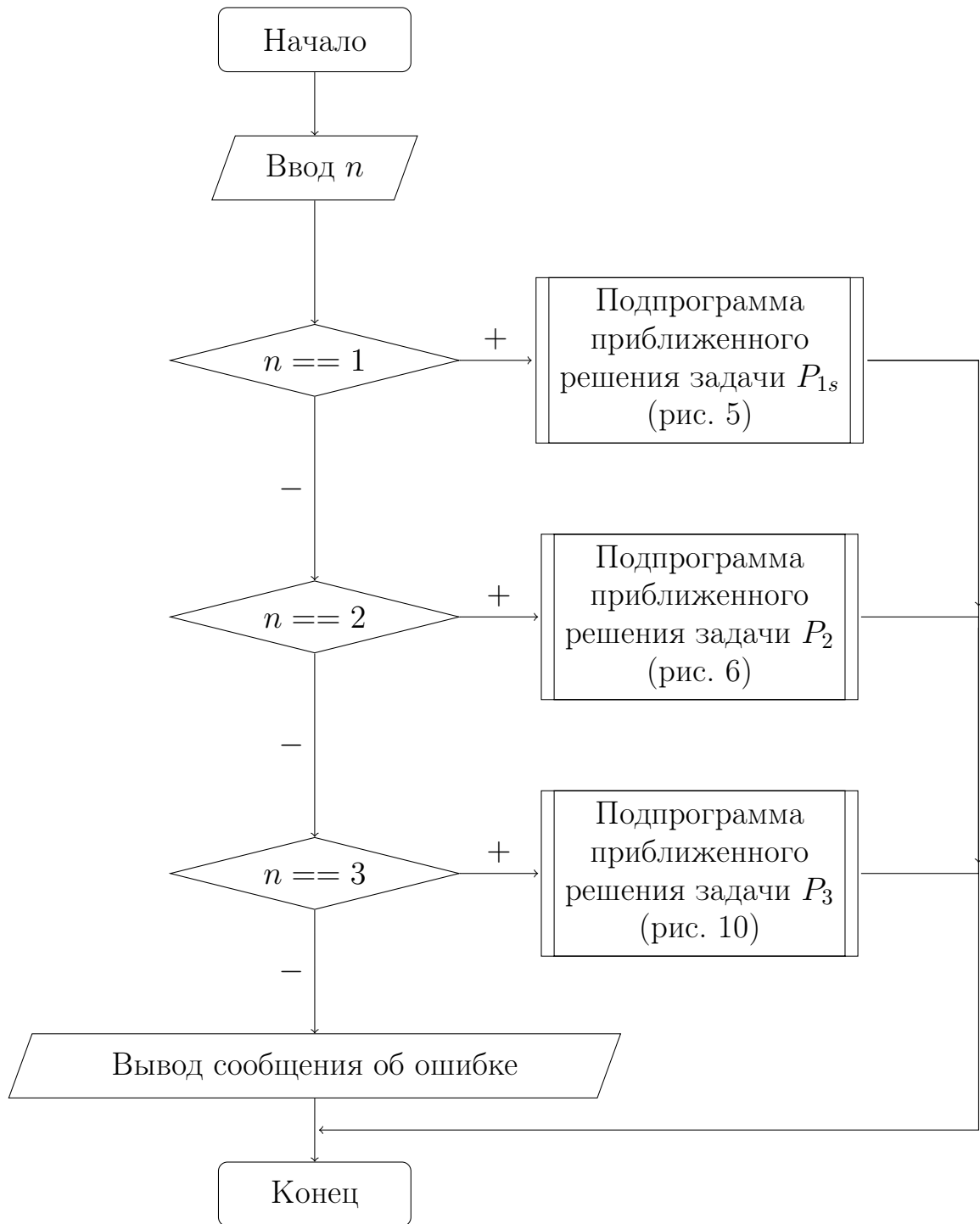


Рисунок 4. Блок-схема комплекса программ приближенного решения задач P_{1s} , P_2 , P_3 .

3.1.1. Алгоритм приближенного решения задачи P_{1s}

Блок-схема алгоритма приближенного вычисления функции u в точках разбиения отрезка $[0, h]$ и значений амплитуд F_R , F_T для заданных значений амплитуды F_I представлена на рис. 5.

Входными данными являются: значения $\alpha, \beta, h, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma, k_0^2, F_{I\min}$ – начальное значение F_I , $F_{I\max}$ – конечное значение F_I , m_1 – число разбиений по F_I , m_2 – число разбиений по $x \in [0, h]$, ϵ – точность.

В результате работы алгоритма должны быть найдены значения функции u в точках $x[l]$, $l = \overline{0, m_2}$ и массивы значений $F_I[i]$, $F_R[i]$, $F_T[i]$, $i = \overline{0, m_1}$.

Вычисляя интеграл в формуле (2.1) с использованием метода прямоугольников, получаем следующую формулу для нахождения функции $u^{(n)}$

$$u^{(n)}[l_1] = \alpha \sum_{l_2=0}^{m_2} Q_1(x[l_2], x[l_1]) \frac{(u^{(n-1)}[i_2])^3}{1 + \beta(u^{(n-1)}[i_2])^2} \frac{h}{m_2} + q_2(x[l_1]), \quad (3.1)$$

где функции Q_1, q_2 определены формулами (1.30), (1.31).

Вычисляя интегралы в формулах (1.26), (1.27), получаем следующие формулы для нахождения значений $F_R[j]$, $F_T[j]$

$$F_T[i] = -\frac{2\kappa_1 G_1(0, h) F_I[i]}{D_T D_{TR} D_R} + \alpha \sum_{l_1=0}^{m_2} \frac{D_R G_1(x[l_1], 0) - \kappa_1 G_1(0, h) G_1(x[l_1], h)}{D_T D_{TR} D_R} \frac{(u^{(n)}[l_1])^3}{1 + \beta(u^{(n)}[l_1])^2} \frac{h}{m_2}, \quad (3.2)$$

$$F_R[i] = \frac{(D_I D_T + \kappa_1 \kappa_3 G_1^2(0, h)) F_I[i]}{D_T D_{TR} D_R} + \alpha \sum_{l_1=0}^{m_2} \frac{D_T G_1(x[l_1], h) - \kappa_3 G_1(0, h) G_1(x[l_1], 0)}{D_T D_{TR} D_R} \frac{(u^{(n)}[l_1])^3}{1 + \beta(u^{(n)}[l_1])^2} \frac{h}{m_2}, \quad (3.3)$$

где функция Грина $G_1(s, x)$ определена формулой (1.20), D_T, D_{TR}, D_R определены формулами (1.23), (1.25), (1.28).

Значение $\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}\|$, где $\mathbf{u}^{(n)} = (u^{(n)}[0], u^{(n)}[1], \dots, u^{(n)}[m_2])$, вычис-

ляется с использованием метода прямоугольников по формуле

$$||\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}|| = \sqrt{\sum_{l=0}^{m_2} (u^{(n)}[l] - u^{(n-1)}[l])^2 \frac{h}{m_2}}. \quad (3.4)$$

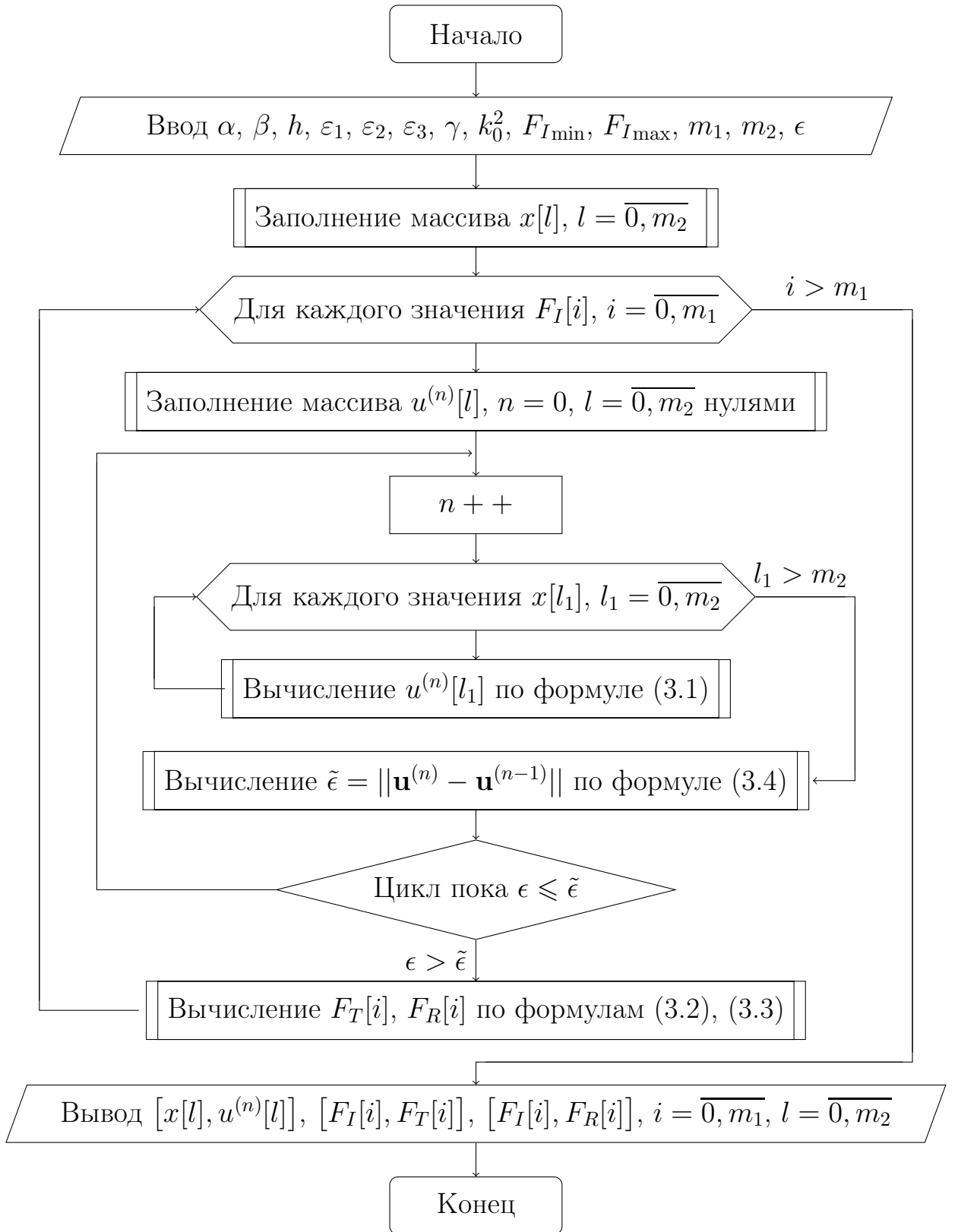


Рисунок 5. Блок-схема алгоритма приближенного нахождения функции u и значений F_R, F_T для заданных значений F_I .

3.1.2. Алгоритм приближенного решения задачи P_2

Блок-схема алгоритма приближенного вычисления связанных собственных значений (γ_1, γ_2) и собственных функции u_1, u_2, u_3 в точках разбиения отрезка $[0, h]$ представлена на рис. 6.

Входными данными являются: значения $\alpha, \beta, h, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, k_0^2, \gamma_{1\min}$ – начальное значение γ_1 , $\gamma_{1\max}$ – конечное значение γ_1 , $\gamma_{2\min}$ – начальное значение γ_2 , $\gamma_{2\max}$ – конечное значение γ_2 , n_1 – число разбиений по γ_1 , n_2 – число разбиений по γ_2 , m – число разбиений по $x \in [0, h]$, ϵ – точность.

В результате работы алгоритма должны быть найдены пара связанных собственных значений (γ_1, γ_2) , и значения соответствующих собственных функций $u[l], v[l]$ в точках $x[l], l = \overline{0, m}$.

Вычисляя интеграл в формуле (2.2) с использованием метода прямоугольников, получаем следующую систему для нахождения $u^{(n)}[l_1], v^{(n)}[l_1], l_1 = \overline{1, m}$

$$\begin{aligned} u^{(n)}[l_1] = & \alpha k_1^2 \sum_{l_2=0}^m G_{21}(x[l_2], x[l_1]) f(u^{(n-1)}[l_2], v^{(n-1)}[l_2]) u^{(n-1)}[l_2] \frac{h}{m} + \\ & + \alpha k_1^2 p_1 \cos(\kappa_1(\tilde{\gamma}_1)(x[l_1] - h)) \times \\ & \times \sum_{l_2=0}^m G_{21}(x[l_2], 0) f(u^{(n-1)}[l_2], v^{(n-1)}[l_2]) u^{(n-1)}[l_2] \frac{h}{m} + h_1, \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(n)}[l_1] = & \alpha k_2^2 \sum_{l_2=0}^m G_{22}(x[l_2], x[l_1]) f(u^{(n-1)}[l_2], v^{(n-1)}[l_2]) v^{(n-1)}[l_2] \frac{h}{m} + \\ & + \alpha k_2^2 p_2 \cos(\kappa_2(\tilde{\gamma}_2)(x[l_1] - h)) \times \\ & \times \sum_{l_2=0}^m G_{22}(x[l_2], 0) f(u^{(n-1)}[l_2], v^{(n-1)}[l_2]) v^{(n-1)}[l_2] \frac{h}{m} + h_2, \quad (3.6) \end{aligned}$$

где p_1, p_2 определены (1.86),

$$h_1 = A_1 \frac{\kappa_{11}(\tilde{\gamma}_1) (\cos(\kappa_1(\tilde{\gamma}_1)x[l_1]) + p_1 \cos(\kappa_1(\tilde{\gamma}_1)(x[l_1] - h)))}{\kappa_1(\tilde{\gamma}_1) \sin(\kappa_1(\tilde{\gamma}_1)h)},$$

$$h_2 = A_2 \frac{\kappa_{21}(\tilde{\gamma}_2) (\cos(\kappa_2(\tilde{\gamma}_2)x[l_1]) + p_2 \cos(\kappa_2(\tilde{\gamma}_2)(x[l_1] - h)))}{\kappa_2(\tilde{\gamma}_2) \sin(\kappa_2(\tilde{\gamma}_2)h)},$$

$$\kappa_{11}(\tilde{\gamma}_1) = \sqrt{\tilde{\gamma}_1^2 - k_1^2 \varepsilon_1}, \quad \kappa_{21}(\tilde{\gamma}_2) = \sqrt{\tilde{\gamma}_2^2 - k_2^2 \varepsilon_1},$$

$$\kappa_1(\tilde{\gamma}_1) = \sqrt{k_1^2 \varepsilon_2 - \tilde{\gamma}_1^2}, \quad \kappa_2(\tilde{\gamma}_2) = \sqrt{k_2^2 \varepsilon_2 - \tilde{\gamma}_2^2},$$

функции Грина G_{21}, G_{22} определены (1.72), (1.73).

Вычисляя интеграл в формулах (1.83), (1.84) с использованием метода прямоугольников, получаем следующие выражения

$$\Phi_1^{(n)}[i][j] = A_1 \sin(\kappa_1 h) g_1(\gamma_1[i]) - \alpha Q_1(\gamma_1[i], \gamma_2[j]; \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}^{(n)}), \quad (3.7)$$

$$\Phi_2^{(n)}[i][j] = A_2 \sin(\kappa_2 h) g_2(\gamma_2[j]) - \alpha Q_2(\gamma_1[i], \gamma_2[j]; \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}^{(n)}). \quad (3.8)$$

где

$$Q_1(\gamma_1[i], \gamma_2[j]; \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}^{(n)}) = (\kappa_{13} \cos(\kappa_1 h) - \kappa_1 \sin(\kappa_1 h)) \times$$

$$\times \sum_{l=0}^m \cos(\kappa_1 x) f(u^{(n)}[l], v^{(n)}[l]) u^{(n)}[l] \frac{h}{m} -$$

$$- \kappa_{13} \sum_{l=0}^m \cos(\kappa_1(x - h)) f(u^{(n)}[l], v^{(n)}[l]) u^{(n)}[l] \frac{h}{m},$$

$$Q_2(\gamma_1[i], \gamma_2[j]; \mathbf{u}^{(n)}, \mathbf{v}^{(n)}) = (\kappa_{23} \cos(\kappa_2 h) - \kappa_2 \sin(\kappa_2 h)) \times$$

$$\times \sum_{l=0}^m \cos(\kappa_2 x) f(u^{(n)}[l], v^{(n)}[l]) v^{(n)}[l] \frac{h}{m} -$$

$$- \kappa_{23} \sum_{l=0}^m \cos(\kappa_2(x - h)) f(u^{(n)}[l], v^{(n)}[l]) v^{(n)}[l] \frac{h}{m}.$$

функции g_1, g_2 определены (1.81), (1.82), $\mathbf{u}^{(n)} = (u^{(n)}[0], u^{(n)}[1], \dots, u^{(n)}[m])$,

$$\mathbf{v}^{(n)} = (v^{(n)}[0], v^{(n)}[1], \dots, v^{(n)}[m]).$$

Погрешность $\tilde{\epsilon}$ определяем по формуле

$$\tilde{\epsilon} = \max \{ \|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}\|, \|\mathbf{v}^{(n)} - \mathbf{v}^{(n-1)}\| \}, \quad (3.9)$$

где значения $\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}\|$, $\|\mathbf{v}^{(n)} - \mathbf{v}^{(n-1)}\|$ вычисляются с использованием метода прямоугольников по формулам

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}^{(n-1)}\| &= \sqrt{\sum_{l=0}^m (u^{(n)}[l] - u^{(n-1)}[l])^2 \frac{h}{m}}, \\ \|\mathbf{v}^{(n)} - \mathbf{v}^{(n-1)}\| &= \sqrt{\sum_{l=0}^m (v^{(n)}[l] - v^{(n-1)}[l])^2 \frac{h}{m}}. \end{aligned}$$

3.1.3. Алгоритм приближенного решения задачи P_3

Блок-схема алгоритма приближенного вычисления собственных значений γ и собственных функции u_1 , u_2 , u_3 представлена на рис. 10.

Входными данными являются: значения α , β , h , ε_1 , ε_2 , k_0^2 , $\gamma_{\min}$ – начальное значение γ , $\gamma_{\max}$ – конечное значение γ , $\theta_{\min}$ – начальное значение θ , $\theta_{\max}$ – конечное значение θ , n_2 – число разбиений по γ , n_1 – число разбиений по θ , m – число разбиений по $x \in [0, h]$, ϵ – точность.

В результате работы алгоритма должны быть найдены пара решений (θ, γ) и значения соответствующих собственных функций $u_1[l]$, $u_2[l]$, $u_3[l]$ в точках $x[l]$, $l = \overline{0, m}$.

Вычисляя интеграл в формулах (2.10) с использованием метода прямоугольников, получаем следующие уравнения для нахождения $u_1^{(n)}[l_1]$, $u_2^{(n)}[l_1]$,

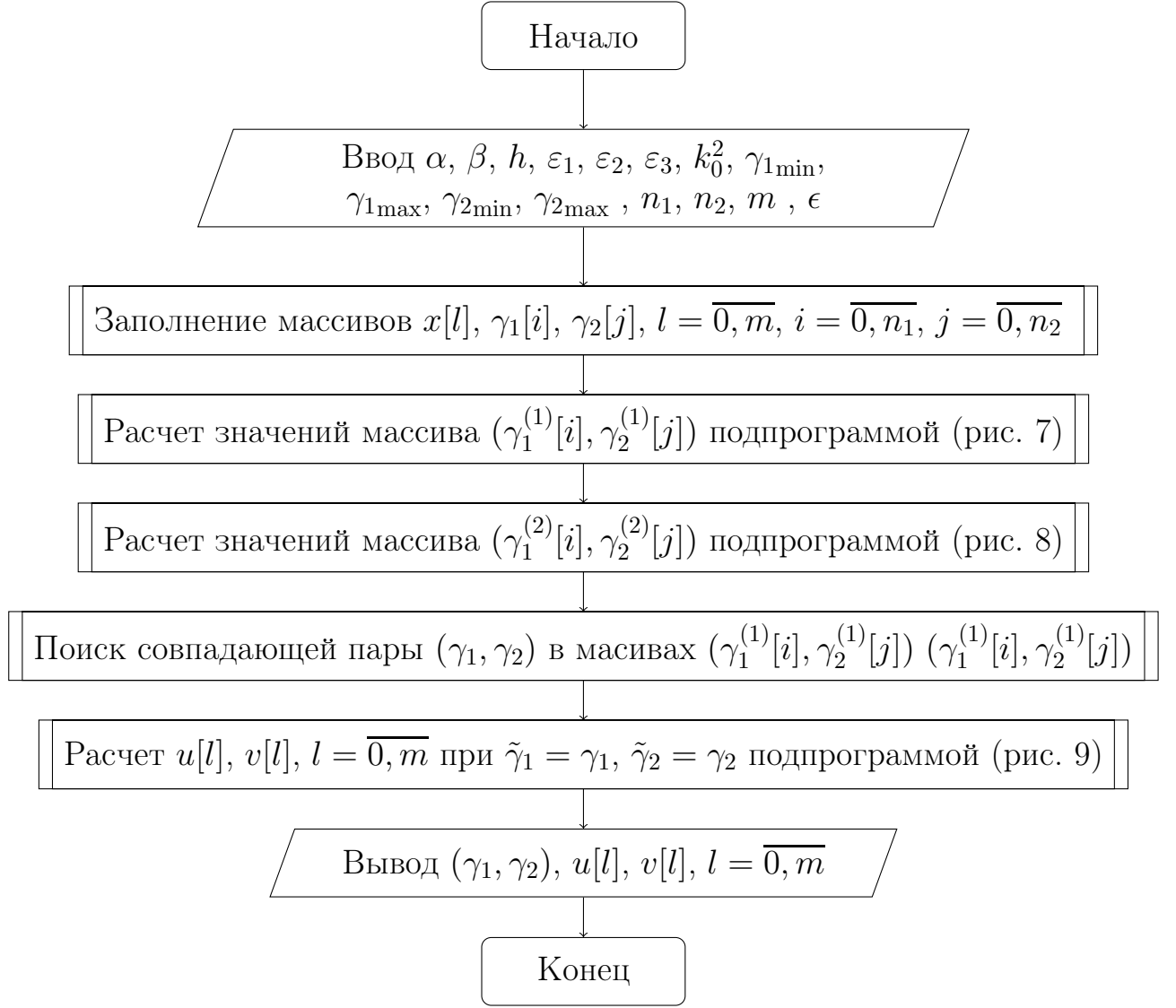


Рисунок 6. Блок-схема алгоритма приближенного нахождения связанных собственных значений (γ_1, γ_2) и собственных функции u, v в точках разбиения отрезка $[0, h]$.

$$u_3^{(n)}[l_1], l_1 = \overline{1, m}$$

$$\begin{aligned}
 u_1^{(n)}[l_1] = & \frac{\alpha \gamma^2[j]}{\varepsilon_2 \kappa_2^2} \sum_{l_2=0}^m \partial_{xs}^2 G_3(x[l_2], x[l_1]) f(|\mathbf{u}^{(n-1)}[l_2]|^2) u_1^{(n-1)}[l_2] \frac{h}{m} + \\
 & + \frac{\alpha \gamma[j]}{\varepsilon_2} \sum_{l_2=0}^m \partial_s G_3(x[l_2], x[l_1]) f(|\mathbf{u}^{(n-1)}[l_2]|^2) u_3^{(n-1)}[l_2] \frac{h}{m} - \\
 & - \alpha \varepsilon_2^{-1} f(|\mathbf{u}^{(n-1)}[l_2]|^2) u_1^{(n-1)}[l_1] + C h_1 \sin \theta[i], \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

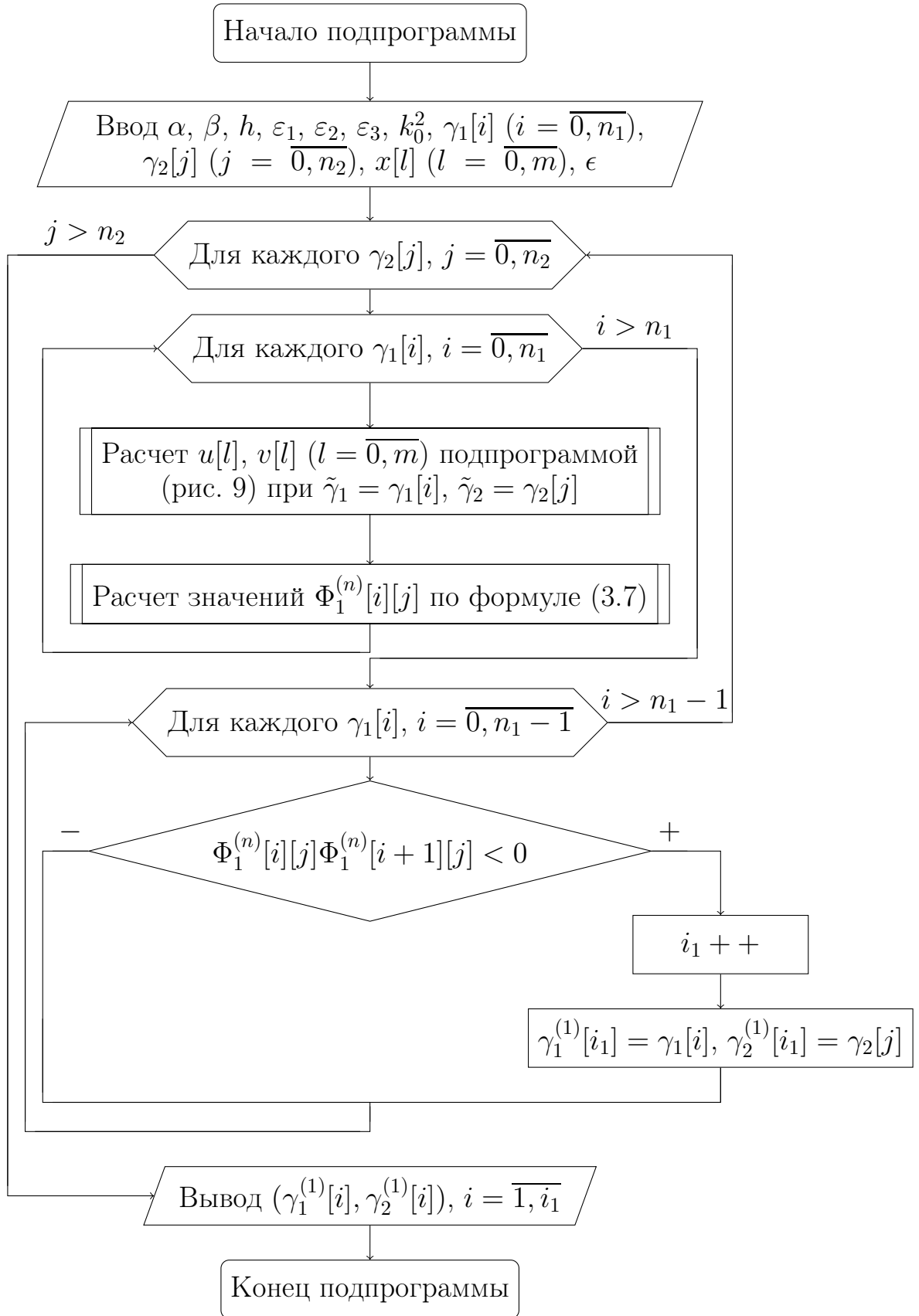


Рисунок 7. Блок-схема алгоритма приближенного нахождения массива связанных собственных значений из дисперсионного уравнения (2.8).

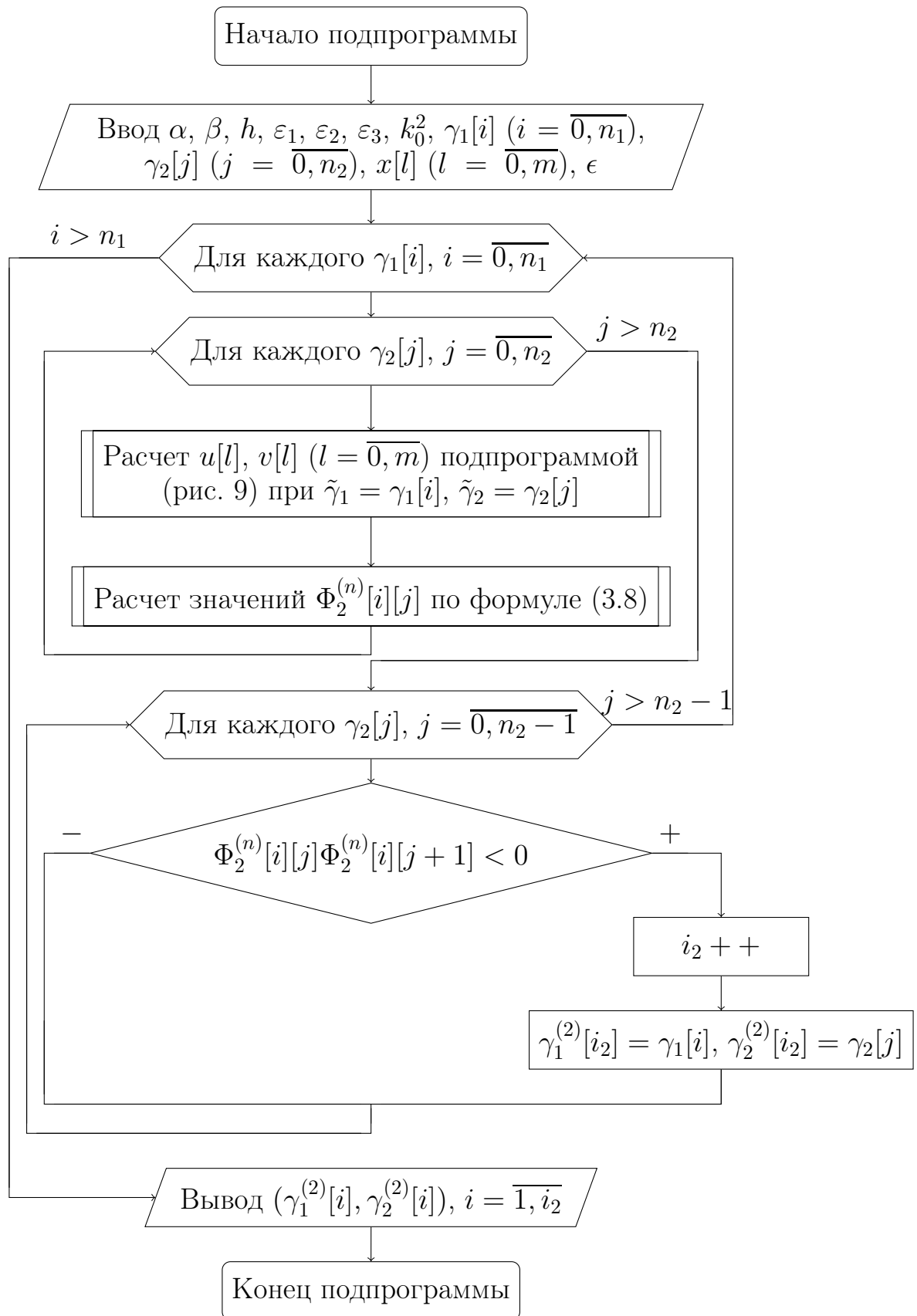


Рисунок 8. Блок-схема алгоритма приближенного нахождения массива связанных собственных значений из дисперсионного уравнения (2.9).

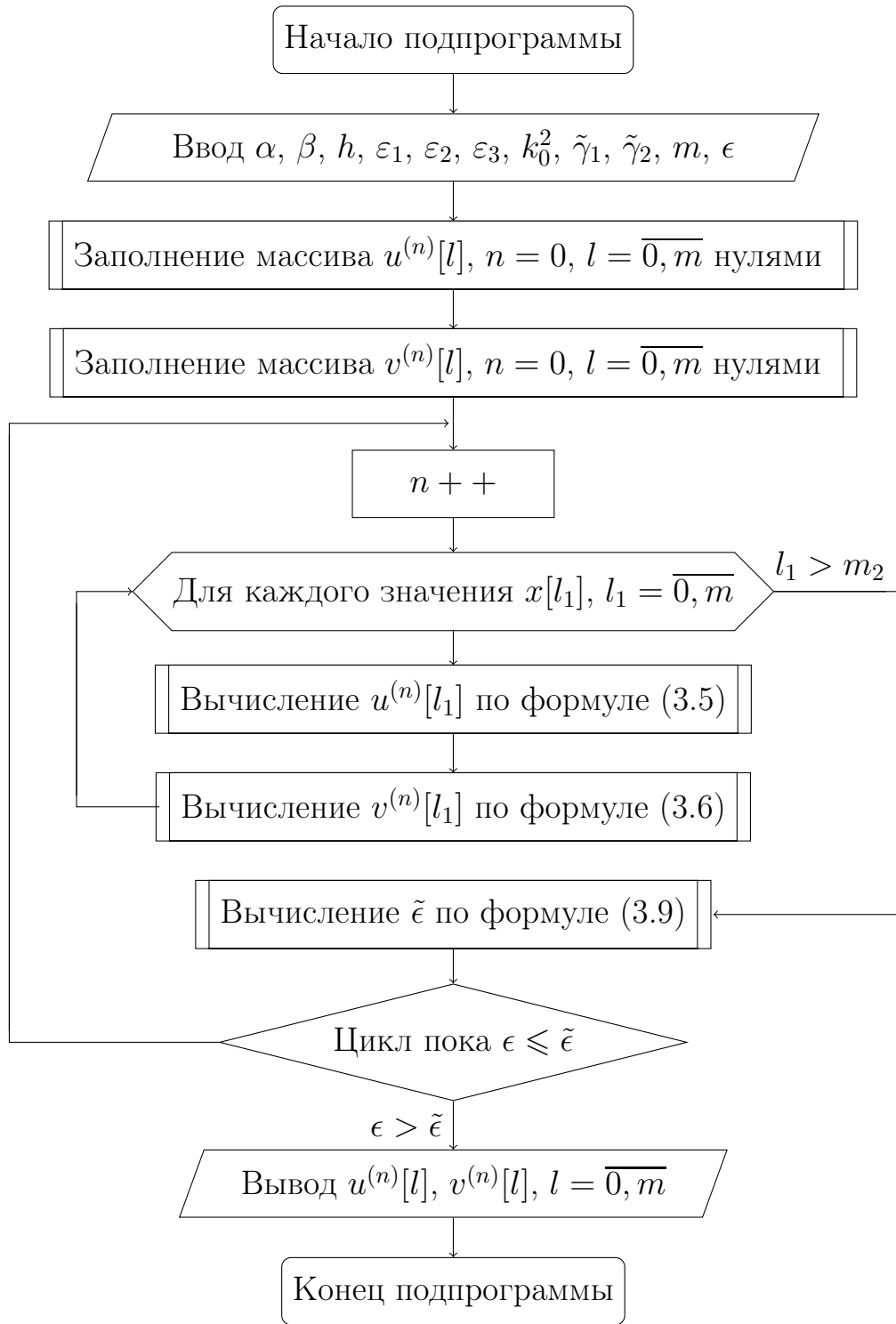


Рисунок 9. Блок-схема алгоритма приближенного нахождения собственных функций $u^{(n)}, v^{(n)}$ в точках разбиения отрезка $[0, h]$.

$$u_2^{(n)}[l_1] = \alpha k_0^2 \sum_{l_2=0}^m G_3(x[l_2], x[l_1]) f(|\mathbf{u}^{(n-1)}[l_2]|^2) u_2^{(n-1)}[l_2] \frac{h}{m} +$$

$$+ Ch_2 \cos \theta[i], \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
u_3^{(n)}[l_1] = & \alpha \gamma[j] \varepsilon_2^{-1} \sum_{l_2=0}^m \partial_x G_3(x[l_2], x[l_1]) f(|\mathbf{u}^{(n-1)}[l_2]|^2) u_1^{(n-1)}[l_2] \frac{h}{m} + \\
& + \alpha \varepsilon_2^{-1} \kappa_2^2 \sum_{l_2=0}^m G_3(x[l_2], x[l_1]) f(|\mathbf{u}^{(n-1)}[l_2]|^2) u_3^{(n-1)}[l_2] \frac{h}{m} + \\
& + C h_2 \sin \theta[i], \quad (3.12)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{u}^{(n)}[l] = (u_1^{(n)}[l], u_2^{(n)}[l], u_3^{(n)}[l])^\top$,

$$|\mathbf{u}^{(n)}[l]|^2 = (u_1^{(n)}[l])^2 + (u_2^{(n)}[l])^2 + (u_3^{(n)}[l])^2,$$

$$f(|\mathbf{u}^{(n)}[l]|^2) = \frac{|\mathbf{u}^{(n)}[l]|^2}{1 + \beta |\mathbf{u}^{(n)}[l]|^2}.$$

$$h_1(s) = \gamma[j] \kappa_2^{-1} \frac{\cos(\kappa_2 x[l_1])}{\sin(\kappa_2 h)}, \quad h_2(s) = \frac{\sin(\kappa_2 x[l_1])}{\sin(\kappa_2 h)},$$

$\kappa_2 = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 - \gamma^2[j]}$, функция Грина $G_3(x[l_1], x[l_2])$ определяется (1.105).

Вычисляя интеграл в формулах (1.111), (1.113) с использованием метода прямоугольников, получаем следующие выражения

$$\begin{aligned}
\Phi_E^{(n)}(\gamma[j], \theta[i]) &= C \cos \theta[i] g_E(\gamma[j]) - \alpha Q_E(\gamma[j], \theta[i]; \mathbf{u}_1^{(n)}, \mathbf{u}_2^{(n)}, \mathbf{u}_3^{(n)}), \\
\Phi_M^{(n)}(\gamma[j], \theta[i]) &= C \sin \theta[i] g_M(\gamma[j]) - \alpha Q_M(\gamma[j], \theta[i]; \mathbf{u}_1^{(n)}, \mathbf{u}_2^{(n)}, \mathbf{u}_3^{(n)}),
\end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$Q_E(\gamma[j], \theta[i]; \mathbf{u}_1^{(n)}, \mathbf{u}_2^{(n)}, \mathbf{u}_3^{(n)}) = k_0^2 \sum_{l=0}^m \sin(\kappa_2 x[l]) f(|\mathbf{u}^{(n)}[l]|^2) u_2^{(n)}[l] \frac{h}{m}.$$

$$\begin{aligned}
Q_M(\gamma[j], \theta[i]; \mathbf{u}_1^{(n)}, \mathbf{u}_2^{(n)}, \mathbf{u}_3^{(n)}) &= \gamma \kappa_1 \sum_{l=0}^m \cos(\kappa_2 x[l]) f(|\mathbf{u}^{(n)}[l]|^2) u_1^{(n)}[l] \frac{h}{m} + \\
&+ \kappa_1 \kappa_2 \sum_{l=0}^m \sin(\kappa_2 x[l]) f(|\mathbf{u}^{(n)}[l]|^2) u_3^{(n)}[l] \frac{h}{m}.
\end{aligned}$$

функции g_E, g_M определены (1.110), (1.112), $\mathbf{u}_1^{(n)} = (u_1^{(n)}[0], u_1^{(n)}[1], \dots, u_1^{(n)}[m])$,

$$\mathbf{u}_2^{(n)} = (u_2^{(n)}[0], u_2^{(n)}[1], \dots, u_2^{(n)}[m]), \quad \mathbf{u}_3^{(n)} = (u_3^{(n)}[0], u_3^{(n)}[1], \dots, u_3^{(n)}[m]),$$

$$\kappa_1 = \sqrt{\gamma^2[j] - k_0^2 \varepsilon_2}.$$

Погрешность $\tilde{\epsilon}$ определяем по формуле

$$\tilde{\epsilon} = \max \{ \|\mathbf{u}_1^{(n)} - \mathbf{u}_1^{(n-1)}\|, \|\mathbf{u}_2^{(n)} - \mathbf{u}_2^{(n-1)}\|, \|\mathbf{u}_3^{(n)} - \mathbf{u}_3^{(n-1)}\| \}, \quad (3.14)$$

где значения $\|\mathbf{u}_1^{(n)} - \mathbf{u}_1^{(n-1)}\|$, $\|\mathbf{u}_2^{(n)} - \mathbf{u}_2^{(n-1)}\|$, $\|\mathbf{u}_3^{(n)} - \mathbf{u}_3^{(n-1)}\|$ вычисляются с использованием метода прямоугольников по формуле

$$\|\mathbf{u}_i^{(n)} - \mathbf{u}_i^{(n-1)}\| = \sqrt{\sum_{l=0}^m (u_i^{(n)}[l] - u_i^{(n-1)}[l])^2 \frac{h}{m}},$$

$i = 1, 2, 3$.

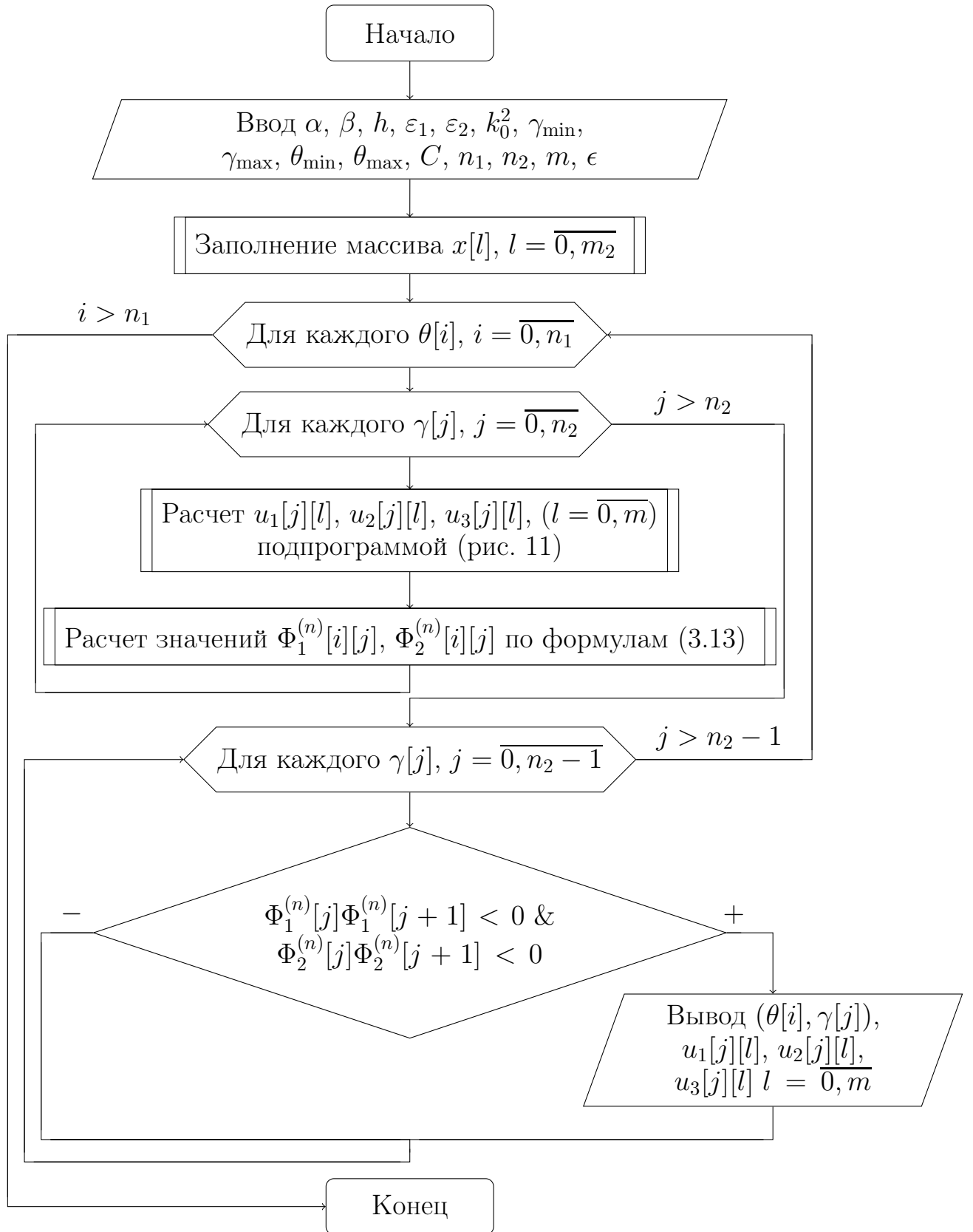


Рисунок 10. Блок-схема алгоритма приближенного нахождения решений задачи $P_3(\theta, \gamma)$ и собственных функции u_1, u_2, u_3 в точках разбиения отрезка $[0, h]$.

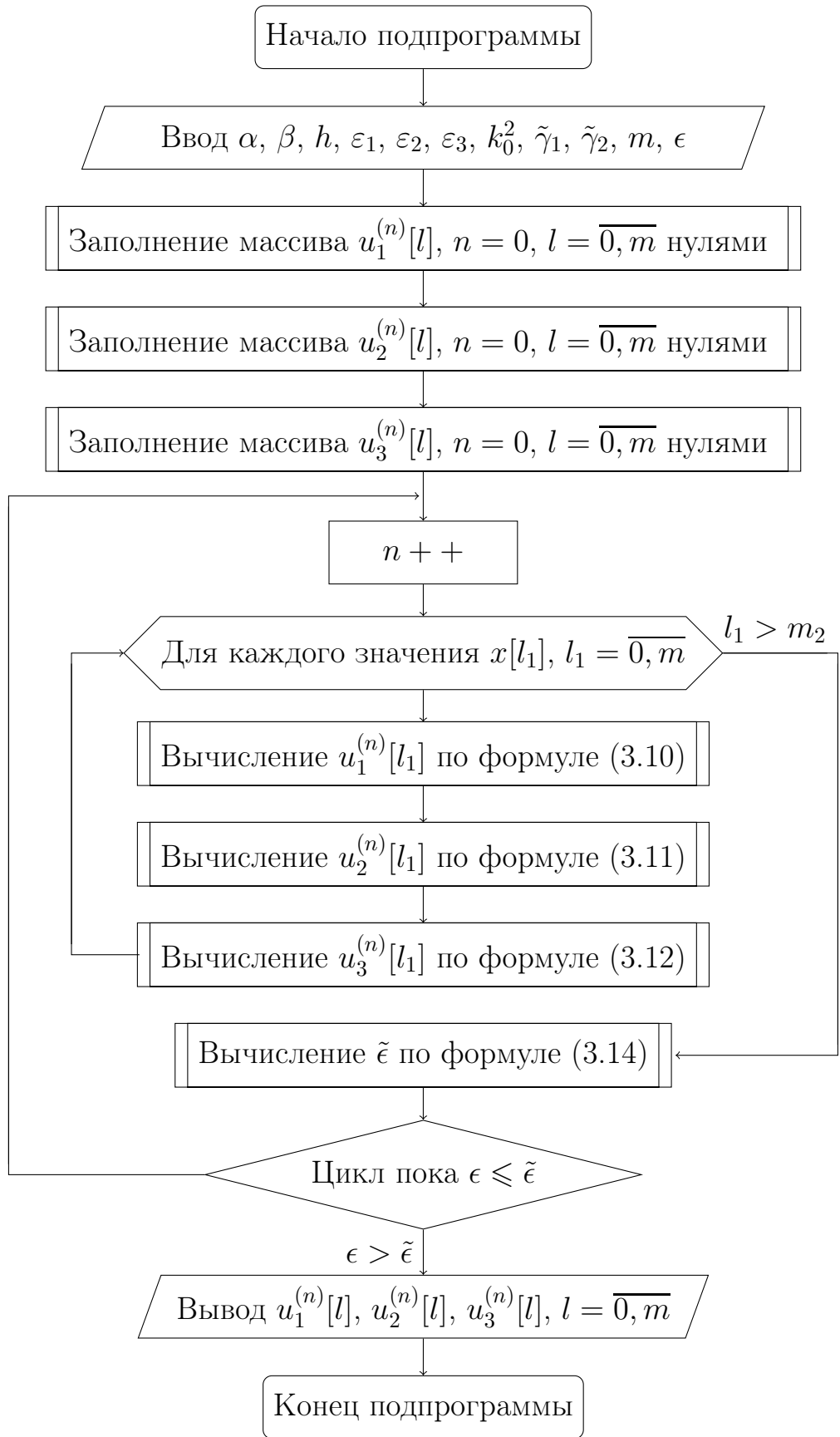


Рисунок 11. Блок-схема алгоритма приближенного нахождения собственных функций $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}$ в точках разбиения отрезка $[0, h]$.

3.2. Результаты расчетов для задачи дифракции поляризованных электромагнитных ТЕ-волн на нелинейном слое

При построении рис. 12–18 использовались следующие параметры: $h = 3$ мм, $x_0 = 4$ мм, $\omega = 1$ ГГц, $\mu_0 = 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 3$, $\varepsilon_3 = 1$, $\alpha = 0.01$ мм²/В².

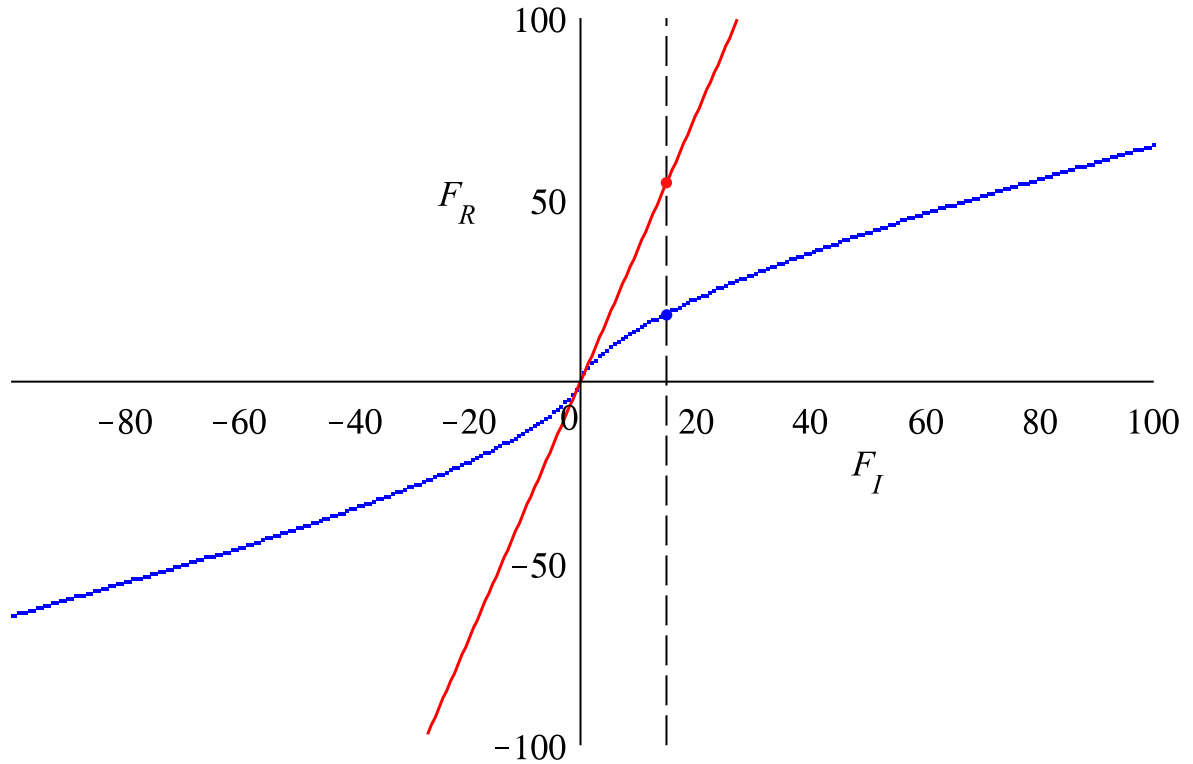


Рисунок 12. График зависимости амплитуды отраженного поля от амплитуды падающего поля для случая нелинейности с насыщением.

Графики построены для двух широко используемых типов нелинейностей [3]. Кроме того, представлено сравнение нелинейного и линейного случаев для каждого типа нелинейности.

На рис. 12–14 построена зависимость амплитуды отраженного поля F_R от амплитуды падающего поля F_I . Наклонная линия на рис. 12–14 соответствует линейному случаю ($\alpha = 0$), кривые – нелинейным. Вертикальная пунктирная прямая соответствует $F_I = 15$ В/мм. Точки пересечения пунктирной прямой с кривыми соответствуют амплитудам отраженного поля в нелинейных случаях,

а пересечение пунктирной прямой с наклонной линией соответствует амплитуде отраженного поля в линейном случае.

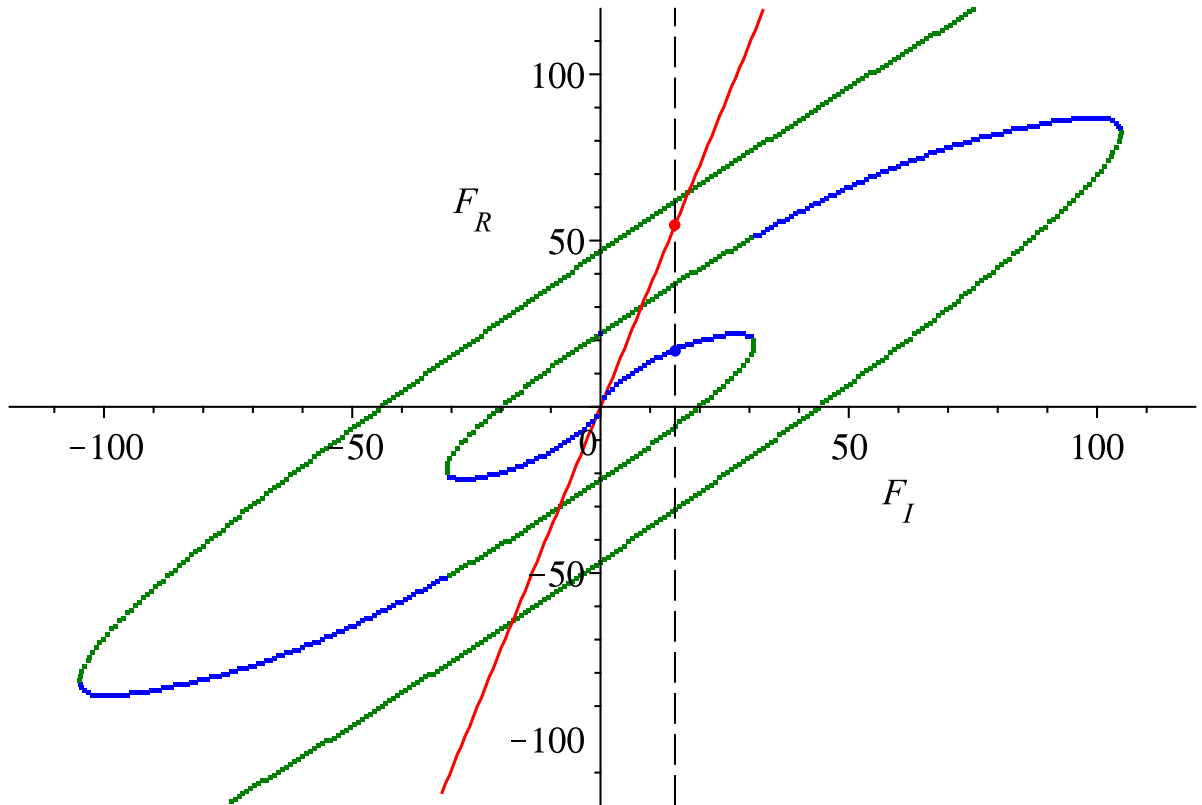


Рисунок 13. График зависимости амплитуды отраженного поля от амплитуды падающего поля для случая нелинейности с насыщением.

На рис. 12, 13 представлены случаи нелинейности с насыщением вида $f(|\mathbf{u}|^2) = \frac{u^2}{1+\beta u^2}$. Для рис. 12 значение $\beta = 0.005 \text{ мм}^2/\text{В}^2$ и выполняется условие теоремы 1 на коэффициенты нелинейности α и β $q_1 < 1$, где q_1 определяется формулой (1.32). На рис. 12 видно, что каждому фиксированному значению F_I соответствует единственное значение F_R .

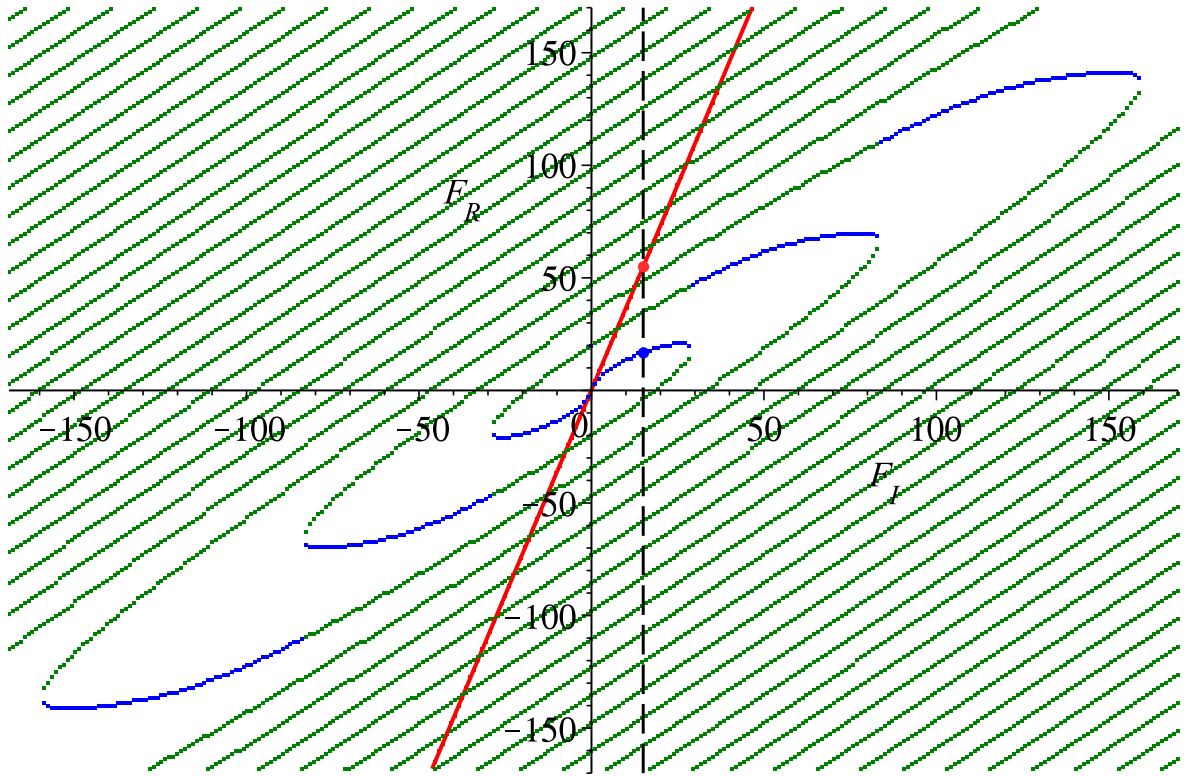


Рисунок 14. График функции u для случая нелинейности Керра.

Для рис. 13 значение $\beta = 0.0005 \text{ мм}^2/\text{В}^2$ и условие теоремы 1 на коэффициенты нелинейности α и β не выполняется. В данном случае на рис. 13 видно, что фиксированному значению $F_I = 15$ соответствует несколько значений F_R , некоторые из них можно видеть на рис. 13. Синим цветом для каждого значения F_I выделены значения F_R , при которых энергия

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^h \left(\left(\varepsilon_2 + \frac{\alpha u^2}{1 + \beta u^2} \right) u^2 + \frac{\gamma^2 u^2 + u'^2}{\omega^2 \mu_0} \right) dx$$

имеет минимальное значение.

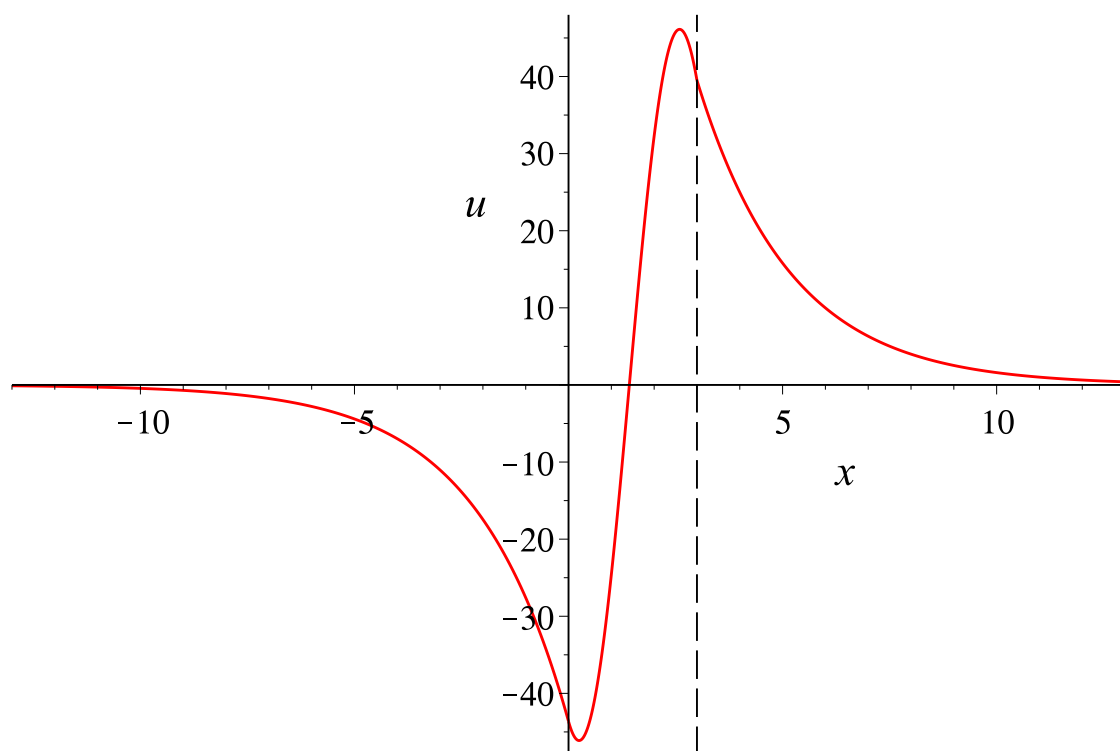


Рисунок 15. График функции u для линейного случая при $F_I = 15$ В/мм, $F_R \approx 54.5$ В/мм.

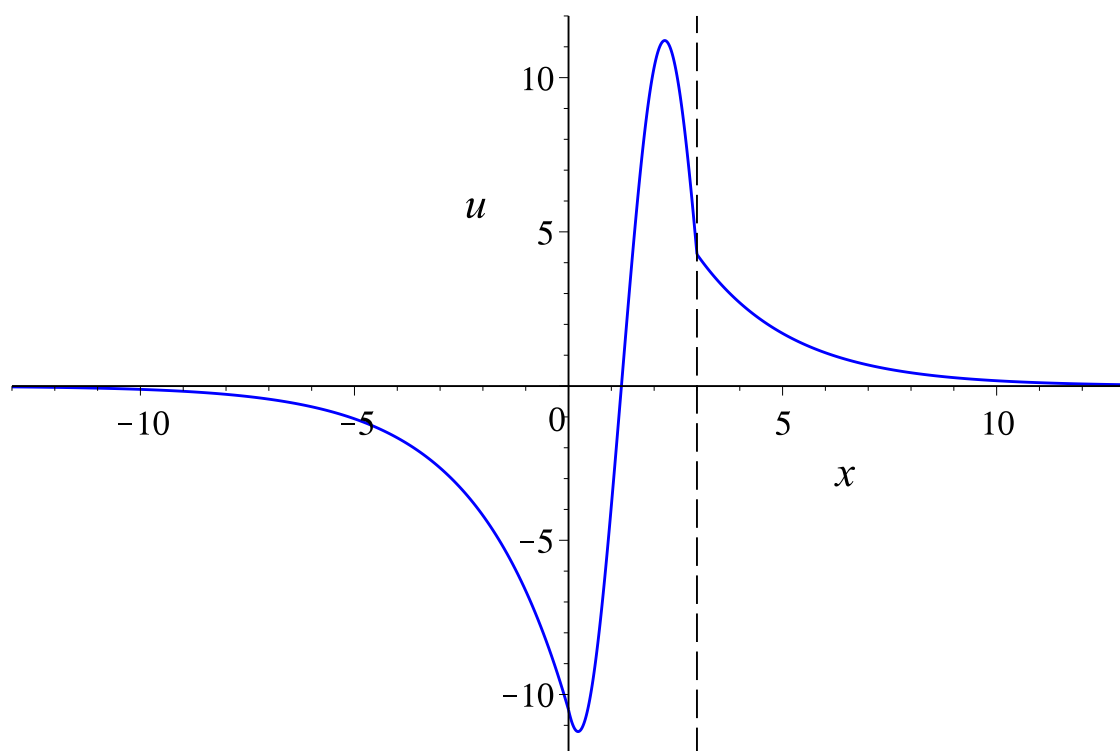


Рисунок 16. График функции u для случая нелинейности с насыщением, представленного на рис. 12, при $F_I = 15$ В/мм, $F_R \approx 19.27$ В/мм.

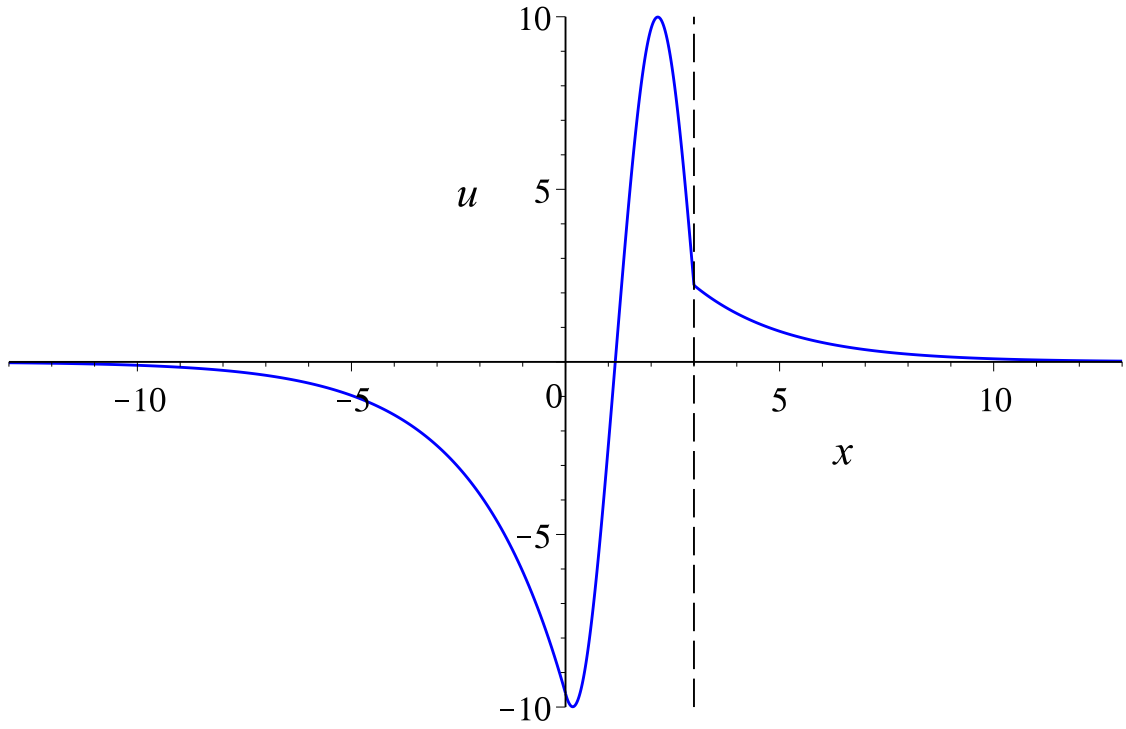


Рисунок 17. График функции u для случая нелинейности с насыщением, представленного на рис. 13, при $F_I = 15$ В/мм, $F_R \approx 17.22$ В/мм.

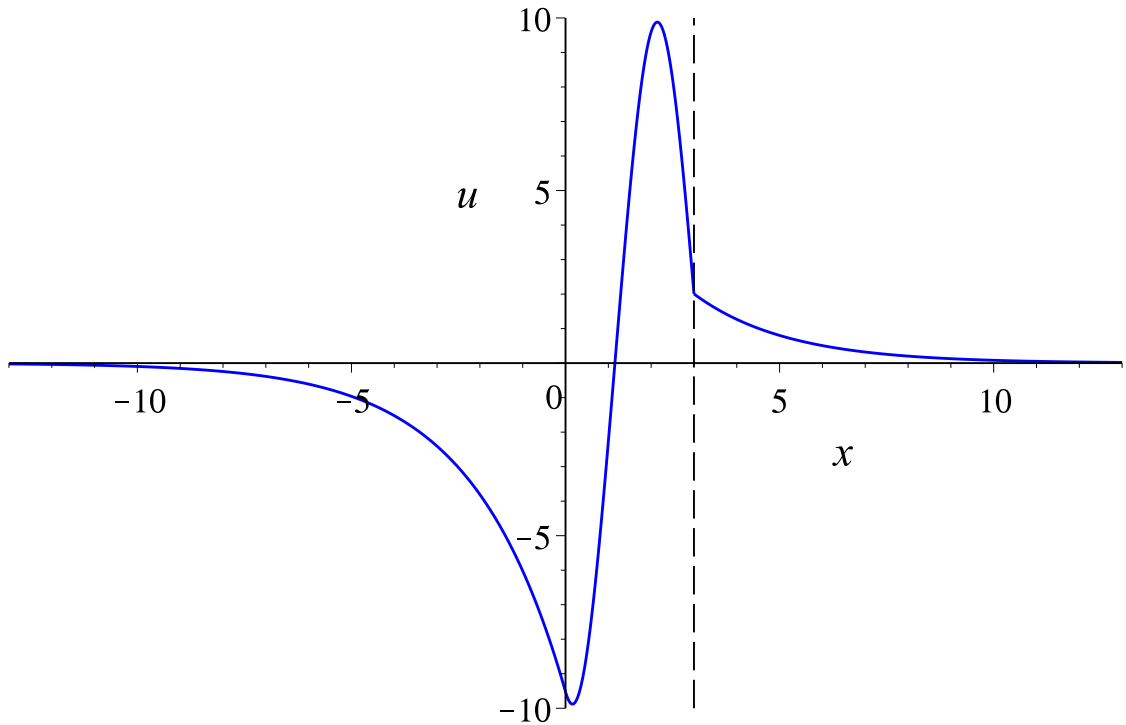


Рисунок 18. График функции u для случая нелинейности Керра, представленного на рис. 14, при $F_I = 15$, $F_R \approx 17.005$.

На рис. 14 представлен случай нелинейности Керра вида $f(|\mathbf{u}|^2) = |\mathbf{u}|^2$.

Видно, что фиксированному значению $F_I = 15$ В/мм соответствует множество значений F_R (вообще говоря, бесконечное в силу теоремы 2), часть из них можно видеть на рис. 14. Синим цветом для каждого значения F_I выделены значения F_R при которых энергия

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^h \left(0.5\alpha u^4 + \frac{2\gamma^2 u^2}{\omega^2 \mu_0} \right) dx + \\ + \frac{h}{8\pi\omega^2 \mu_0} \left((\kappa_1^2 (F_R + F_I)^2 + \kappa_2^2 (F_R - F_I)^2 + 0.5\alpha (F_R - F_I)^4) \right)$$

имеет минимальное значение.

На рис. 15–18 представлены графики функции u . Вертикальная пунктирная линия соответствует границе волновода Σ_1 $x = h$. Графики касательной компоненты электрического поля согласуются с физической постановкой задачи, а именно, функции u непрерывны на границах раздела сред и затухают при $|x| \rightarrow \infty$.

3.3. Результаты расчетов для задачи распространения электромагнитных связанных ТЕ-ТЕ-волн в нелинейном слое

При построении рис. 19–34 использовались следующие параметры: $h = 5$ мм, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 1$, $k_1^2 = 1$ мм, $k_2 = \sqrt{1.5}$ мм, $A_1 = 1$ В/мм, $A_2 = 2$ В/мм, $\alpha = 0.01$ мм²/В², $\beta = 0.8$ мм²/В², $n = 50$.

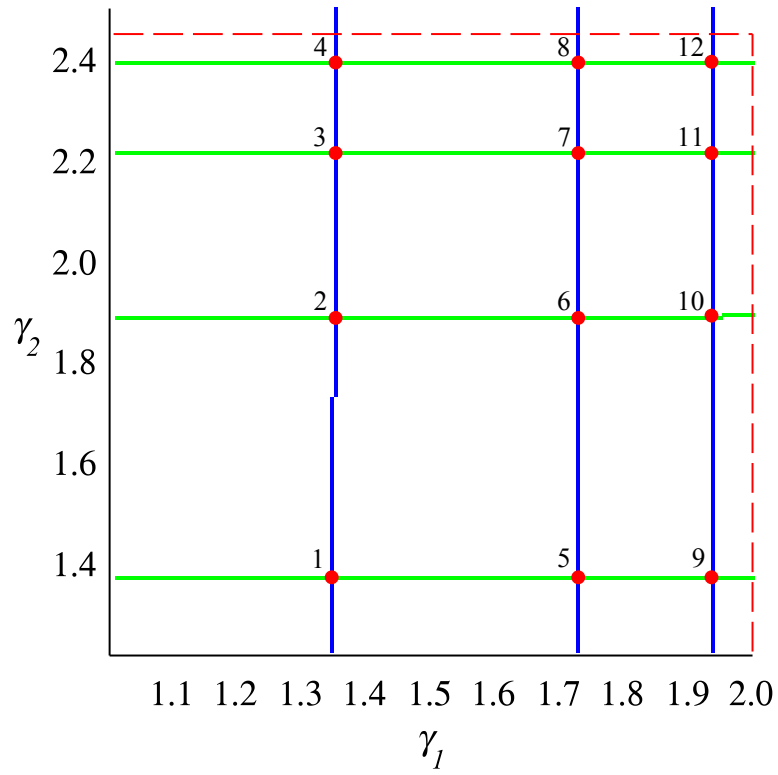


Рисунок 19. Связанные собственные значения. $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\max_{i=\overline{1,12}} q_2^{(i)} \approx 0.824$.

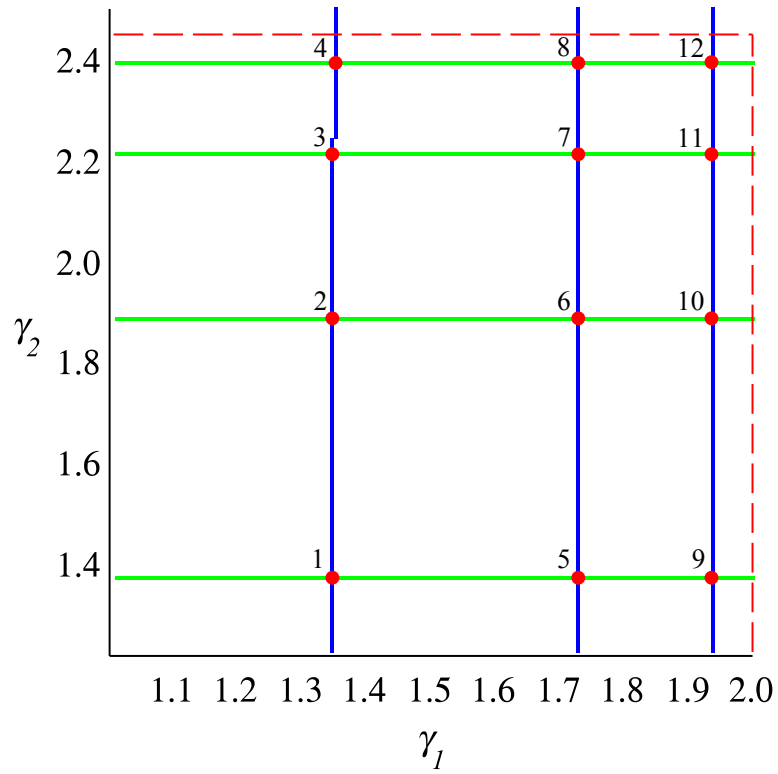


Рисунок 20. Связанные собственные значения. $\alpha = 0.005 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.4 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\max_{i=\overline{1,12}} q_2^{(i)} \approx 0.823$.

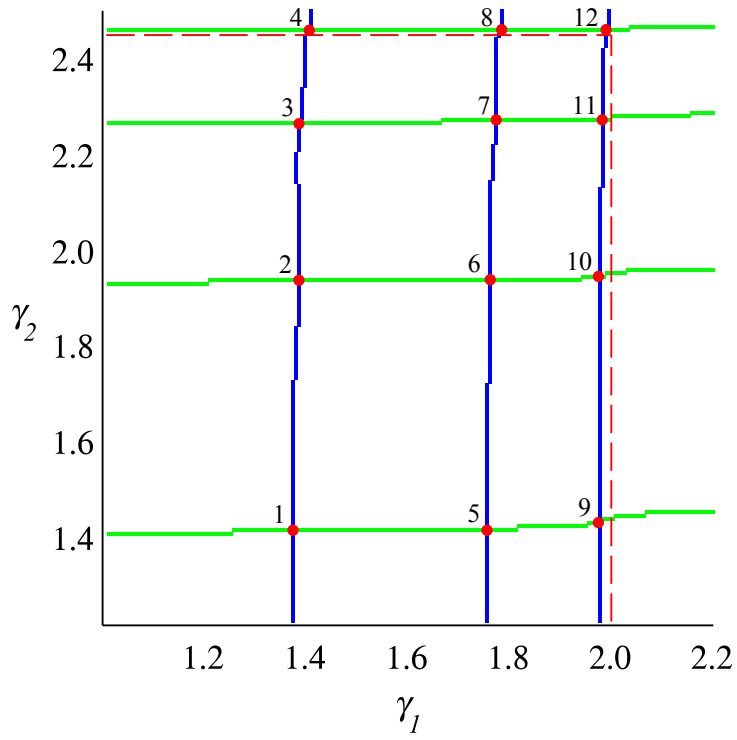


Рисунок 21. Связанные собственные значения. $\alpha = 0.05 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.2 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\min_{i=\overline{1,12}} q_2^{(i)} \approx 7.951$.

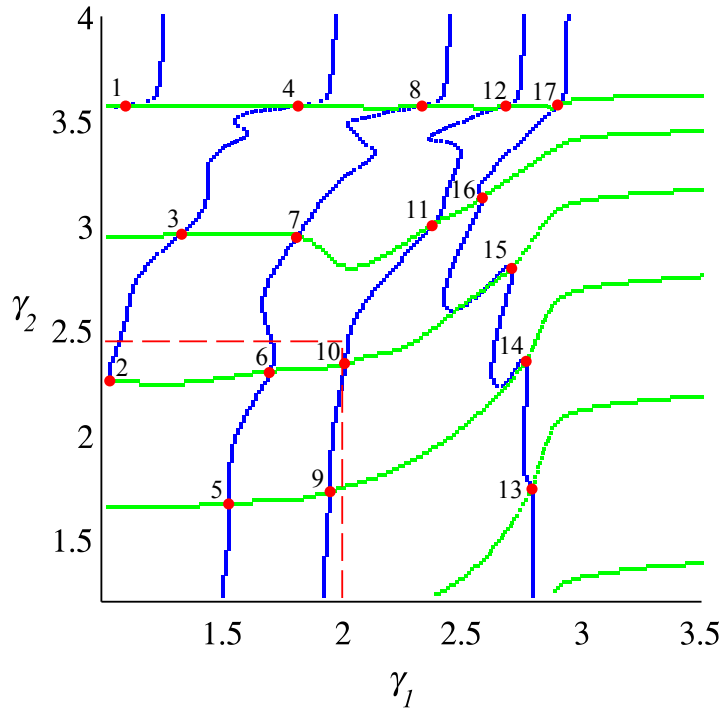


Рисунок 22. Связанные собственные значения. $\alpha = 0.2 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.04 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\min_{i=\overline{1,17}} q_2^{(i)} \approx 12.032$.

Таблица 1. Связанные собственные значения.

Связанные собственные значения отмеченные на рис. 19, мм ⁻¹ .						
i	1	2	3	4	5	6
$\gamma_1^{(i)}$	1.351	1.352	1.352	1.352	1.7301	1.7302
$\gamma_2^{(i)}$	1.374	1.889	2.215	2.3952	1.374	1.889
i	7	8	9	10	11	12
$\gamma_1^{(i)}$	1.7304	1.7305	1.937	1.937	1.937	1.937
$\gamma_2^{(i)}$	2.215	2.3952	1.375	1.889	2.215	2.3955
Связанные собственные значения отмеченные на рис. 20, мм ⁻¹ .						
i	1	2	3	4	5	6
$\gamma_1^{(i)}$	1.351	1.351	1.351	1.351	1.7295	1.7298
$\gamma_2^{(i)}$	1.374	1.888	2.214	2.3951	1.3735	1.888
i	7	8	9	10	11	12
$\gamma_1^{(i)}$	1.7301	1.7303	1.937	1.937	1.937	1.937
$\gamma_2^{(i)}$	2.214	2.3951	1.374	1.888	2.2145	2.3952
Связанные собственные значения отмеченные на рис. 21, мм ⁻¹ .						
i	1	2	3	4	5	6
$\gamma_1^{(i)}$	1.375	1.383	1.388	1.404	1.756	1.761
$\gamma_2^{(i)}$	1.418	1.939	2.262	2.457	1.418	1.939
i	7	8	9	10	11	12
$\gamma_1^{(i)}$	1.773	1.783	1.975	1.976	1.984	1.988
$\gamma_2^{(i)}$	2.273	2.458	1.432	1.945	2.273	2.458
Связанные собственные значения отмеченные на рис. 22, мм ⁻¹ .						
i	1	2	3	4	5	6
$\gamma_1^{(i)}$	1.084	1.026	1.327	1.831	1.523	1.696
$\gamma_2^{(i)}$	3.571	2.249	2.959	3.573	1.677	2.304
i	7	8	9	10	11	12
$\gamma_1^{(i)}$	1.809	2.352	1.946	2.015	2.401	2.692
$\gamma_2^{(i)}$	2.948	3.579	1.733	2.349	3.033	3.579
i	13	14	15	16	17	
$\gamma_1^{(i)}$	2.783	2.755	2.706	2.582	2.908	
$\gamma_2^{(i)}$	1.758	2.355	2.802	3.139	3.583	

При $\alpha = 0$ мм²/В² получаем две независимые линейные задачи. Решения данных задач можно найти из дисперсионных уравнений (1.90), (1.91). При указанных выше параметрах уравнение (1.90) имеет 3 решения – собственные значения, отвечающих линейной задаче: $\tilde{\gamma}_1^{(1)} \approx 1.349$ мм⁻¹, $\tilde{\gamma}_1^{(2)} \approx 1.727$ мм⁻¹, $\tilde{\gamma}_1^{(3)} \approx 1.934$ мм⁻¹. Уравнение (1.91) имеет 4 решения – собственные значения, отвечающих линейной задаче: $\tilde{\gamma}_2^{(1)} \approx 1.371$ мм⁻¹, $\tilde{\gamma}_2^{(2)} \approx 1.885$ мм⁻¹, $\tilde{\gamma}_2^{(3)} \approx 2.211$ мм⁻¹, $\tilde{\gamma}_2^{(4)} \approx 2.391$ мм⁻¹.

На рис. 19–22 построены графики связанных собственных значений. Зеле-

ный цвет соответствует решению $\Phi_1^{(n)}(\gamma_1, \gamma_2) = 0$, а синий – решению $\Phi_2^{(n)}(\gamma_1, \gamma_2) = 0$. Красные точки пересечений зеленых и синих кривых – приближенные связанные собственные значения задачи P_2 . Их значения приведены в таблице 1. Красные пунктирные линии определяют область $\tilde{\Gamma} = (k_1\sqrt{\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}}, k_1\sqrt{\varepsilon_2}) \times (k_2\sqrt{\max\{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}}, k_2\sqrt{\varepsilon_2})$. Все пары собственных значений, отвечающих линейным задачам, существуют только в области $\tilde{\Gamma}$. Для случаев, представленных на рис. 19–21, значения $q_2^{(i)}$ определяются по формуле (1.88) при $\gamma_1 = \gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2 = \gamma_2^{(i)}$, $i = \overline{1, 12}$. Для случая, представленного на рис. 22, значения $q_2^{(i)}$ определяются по формуле (1.88) при $\gamma_1 = \gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2 = \gamma_2^{(i)}$, $i = \overline{1, 17}$.

На рис. 19, 20 выполняется условие $q_2 < 1$ утверждения 8, и каждой паре собственных значений, отвечающих линейным задачам, $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$ соответствует только одно связанное собственное значение (γ_1, γ_2) . Кроме того, из таблицы 1 видно, что связанные собственные значения лежат близко к соответствующим парам решений линейных задач.

На рис. 21 условие $q_2 > 1$ выполняется, при этом взаимоднозначное соответствие между парами линейных собственных значений $(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2)$ и связанными собственными значениями (γ_1, γ_2) сохраняется, но связанные собственные значения больше отличаются от пар линейных значений, чем связанные собственные значения на рис. 19, 20 (см. таблицу 1). Кроме того, существует не менее 3 связанных собственных значений за пределами области $\tilde{\Gamma}$. Поэтому увеличение α (уменьшение β) приводит к отдалению связанных собственных значений от пар линейных собственных значений.

На рис. 22 условие $q_2 < 1$ не выполняется, существуют нелинейные связанные собственные значения, которые не соответствуют парам линейных собственных значений, и только 4 связанных собственных значения лежат в области $\tilde{\Gamma}$.

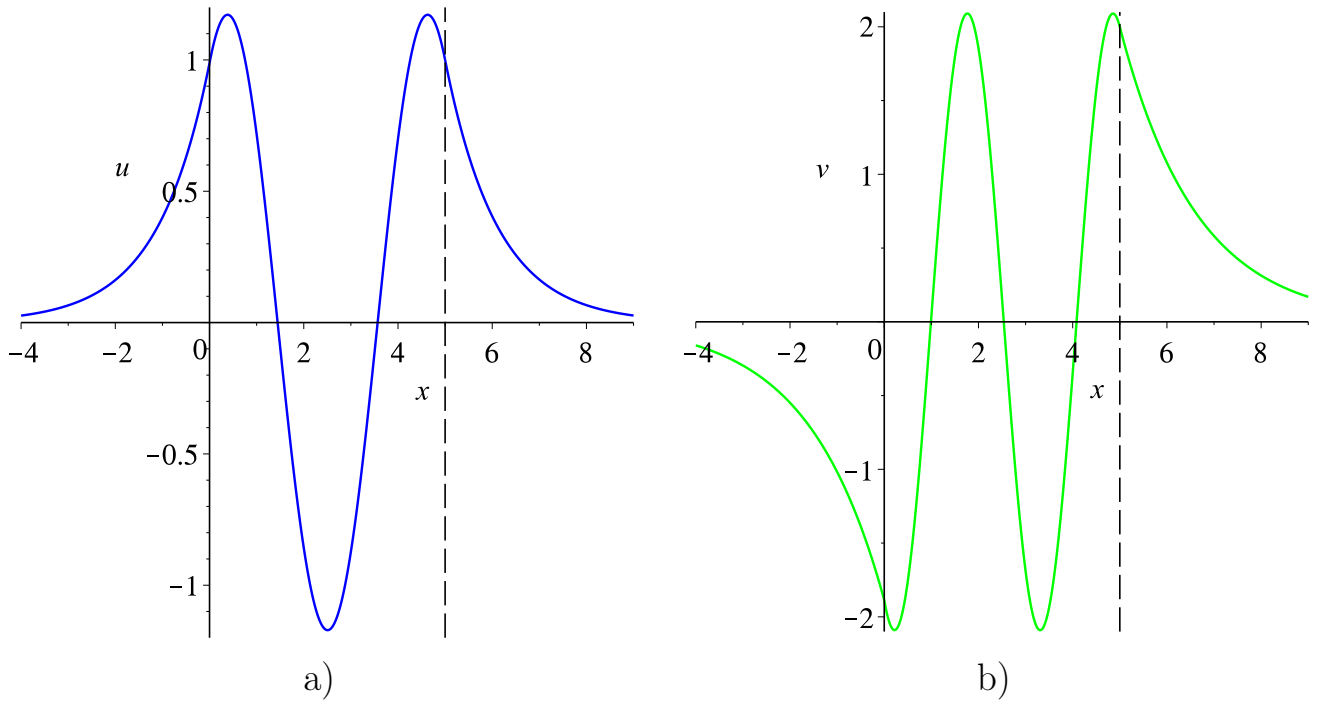


Рисунок 23. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(1)} \approx 1.351 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(1)} \approx 1.374 \text{ мм}^{-1}$.

Собственные функции u , v для собственных значений отмеченных на рис. 19 показаны на рис. 23–34. Вертикальная пунктирная линия соответствует границе волновода Σ_2 при $x = h$. Поведения пар собственных функций, соответствующих разным парам собственных значений, отличаются.

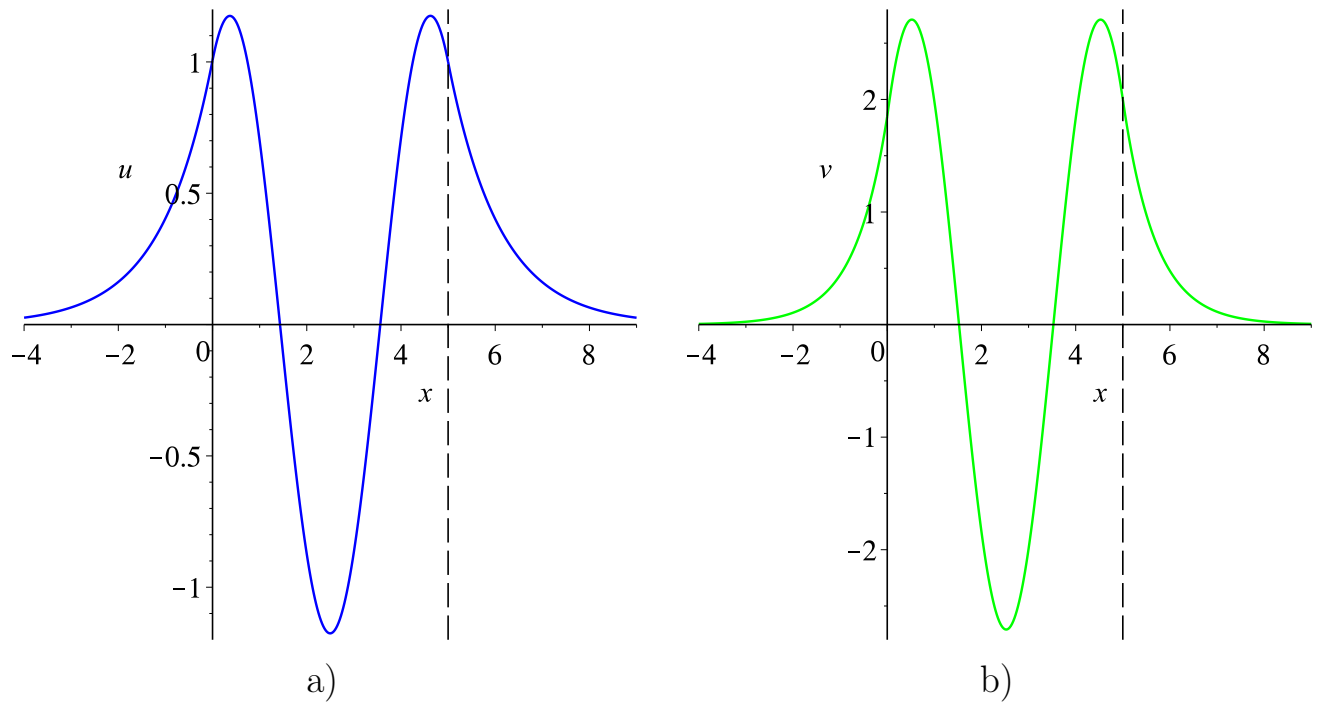


Рисунок 24. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(2)} \approx 1.351 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(2)} \approx 1.888 \text{ мм}^{-1}$.

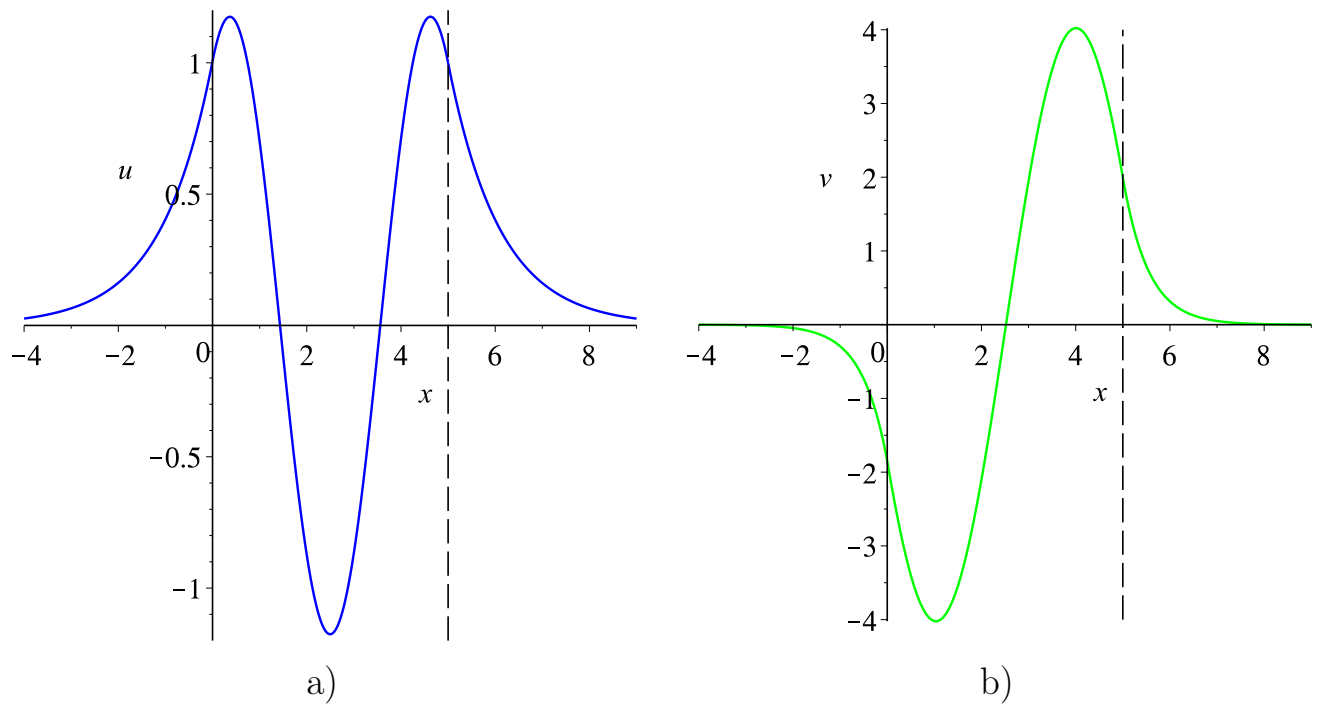
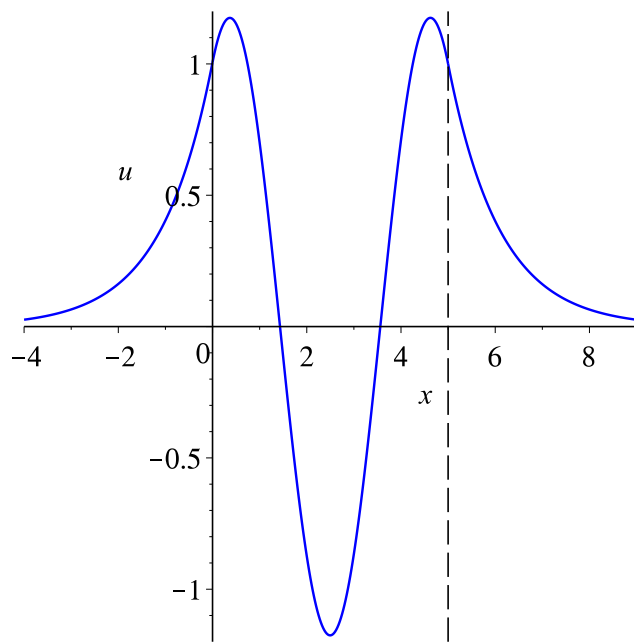
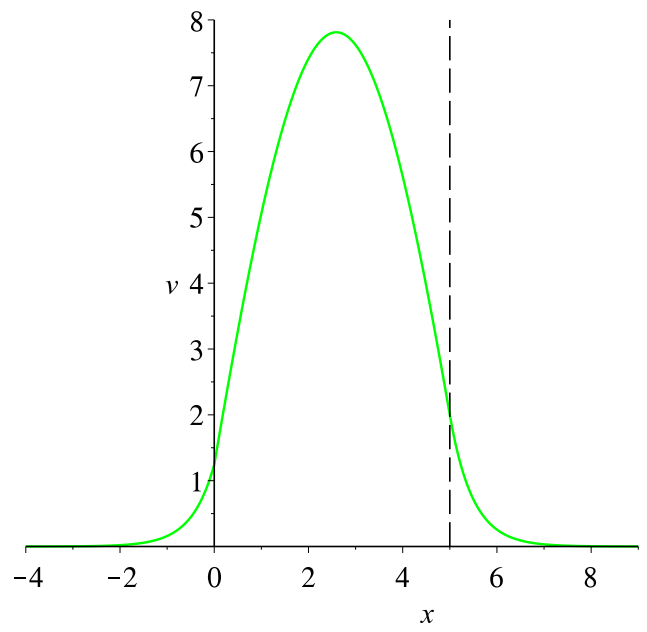


Рисунок 25. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(3)} \approx 1.352 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(3)} \approx 2.215 \text{ мм}^{-1}$.

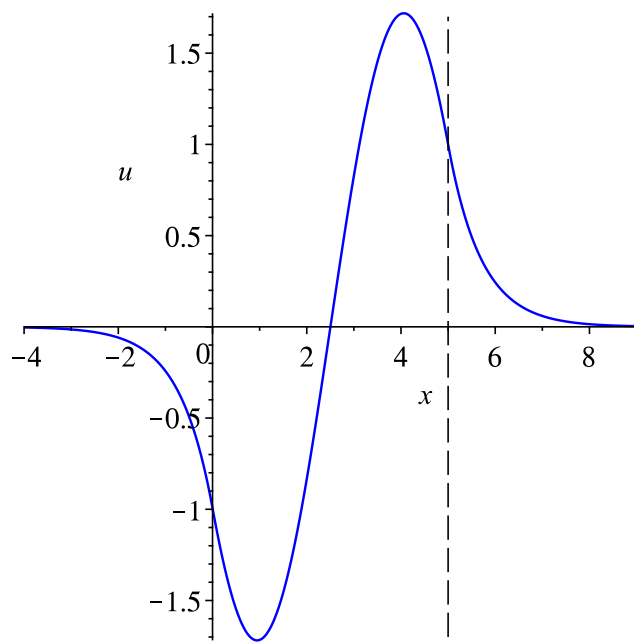


a)

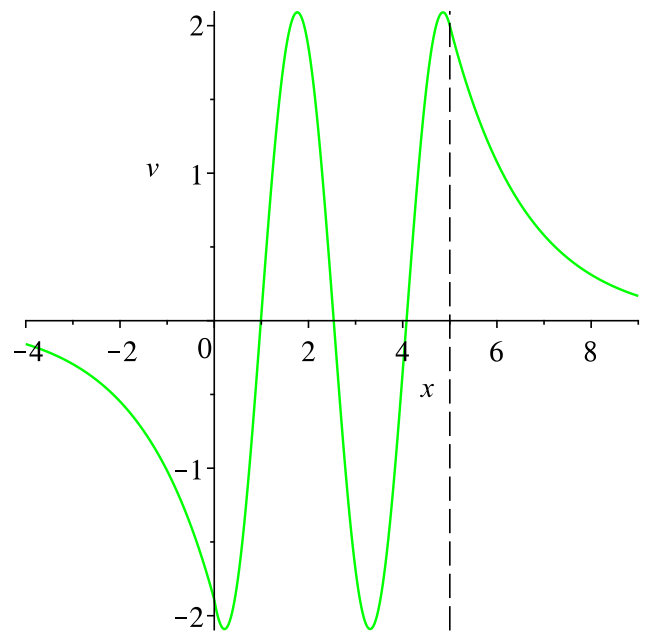


b)

Рисунок 26. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(4)} \approx 1.352 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(4)} \approx 2.3952 \text{ мм}^{-1}$.



a)



b)

Рисунок 27. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(5)} \approx 1.7301 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(5)} \approx 1.374 \text{ мм}^{-1}$.

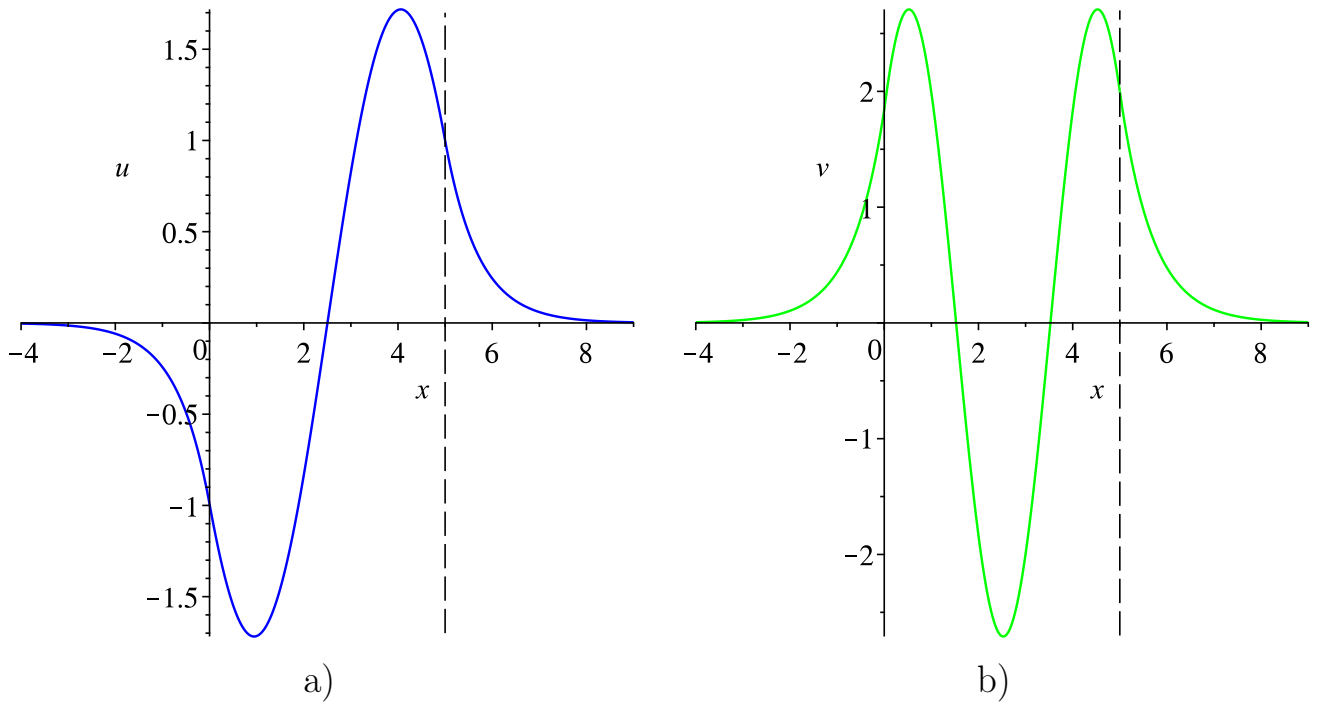


Рисунок 28. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(6)} \approx 1.7302 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(6)} \approx 1.889 \text{ мм}^{-1}$.

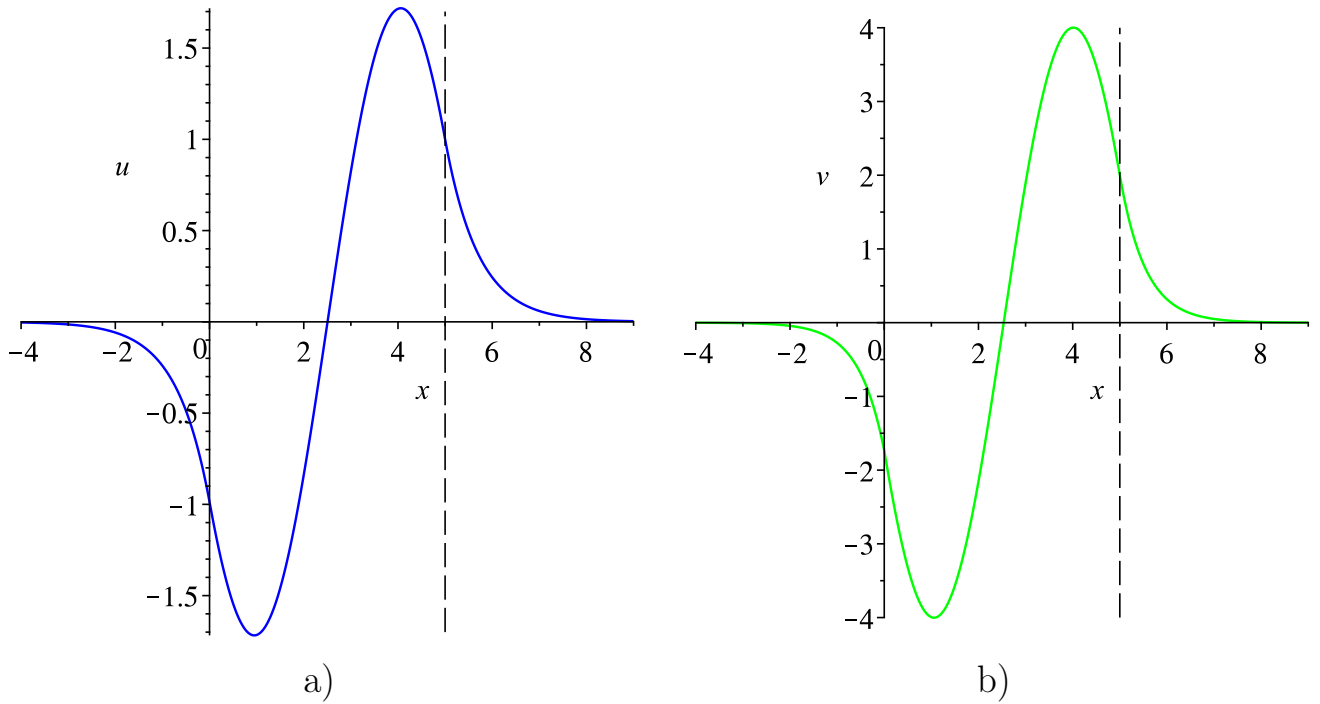
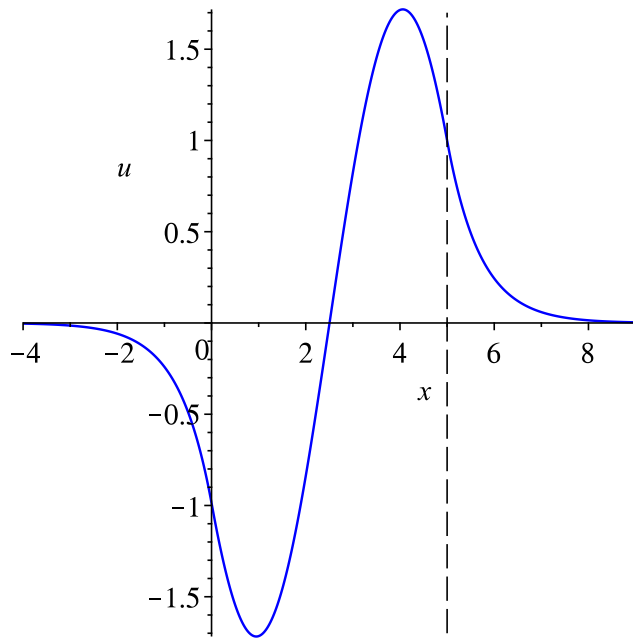
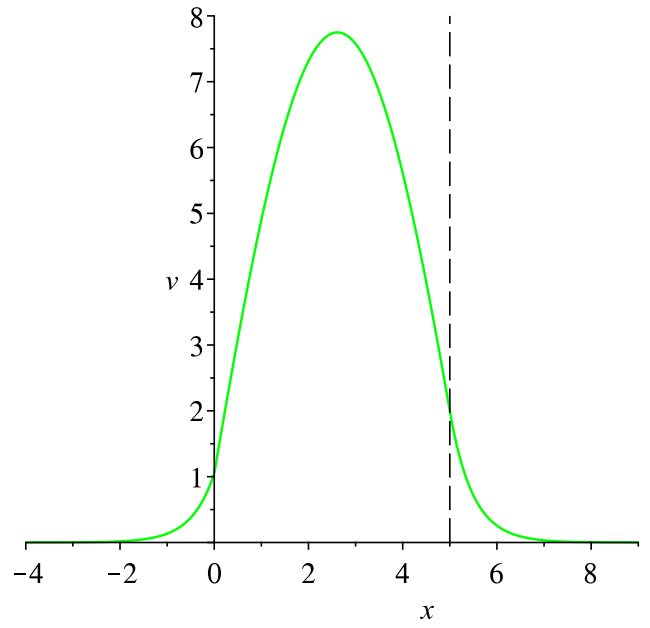


Рисунок 29. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(7)} \approx 1.7304 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(7)} \approx 2.215 \text{ мм}^{-1}$.

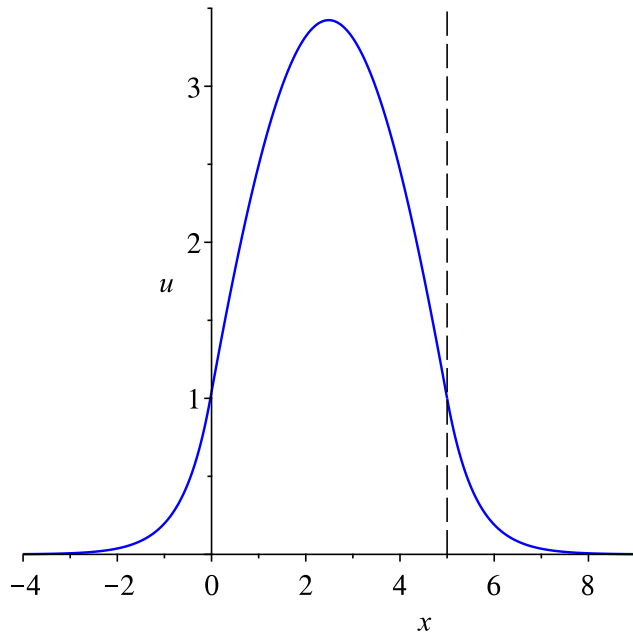


a)

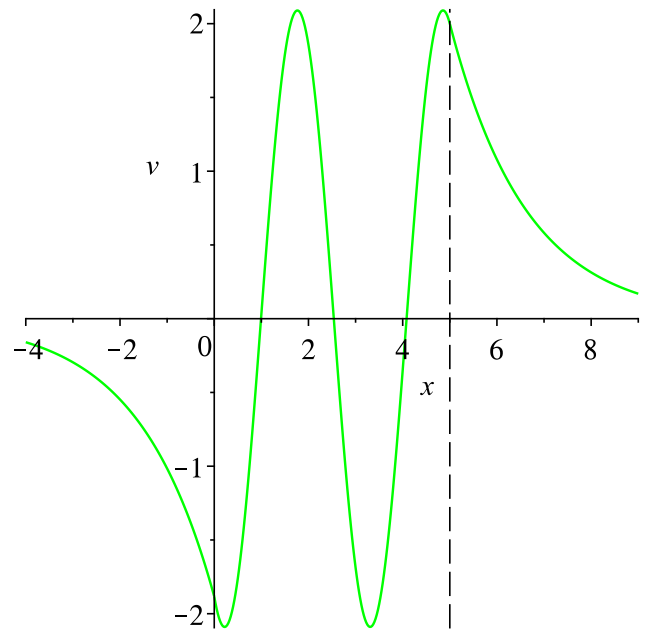


b)

Рисунок 30. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(8)} \approx 1.7305 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(8)} \approx 2.3952 \text{ мм}^{-1}$.



a)



b)

Рисунок 31. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(9)} \approx 1.937 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(9)} \approx 1.375 \text{ мм}^{-1}$.

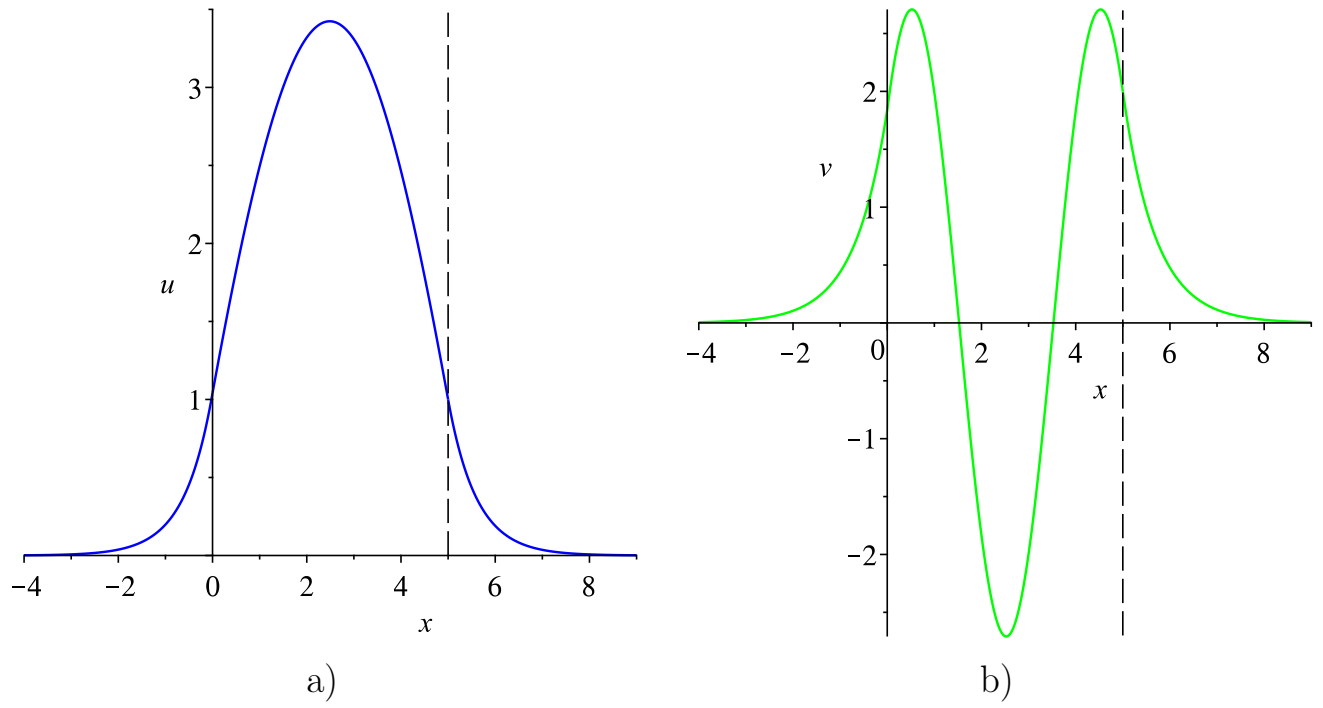


Рисунок 32. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(10)} \approx 1.937 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(10)} \approx 1.889 \text{ мм}^{-1}$.

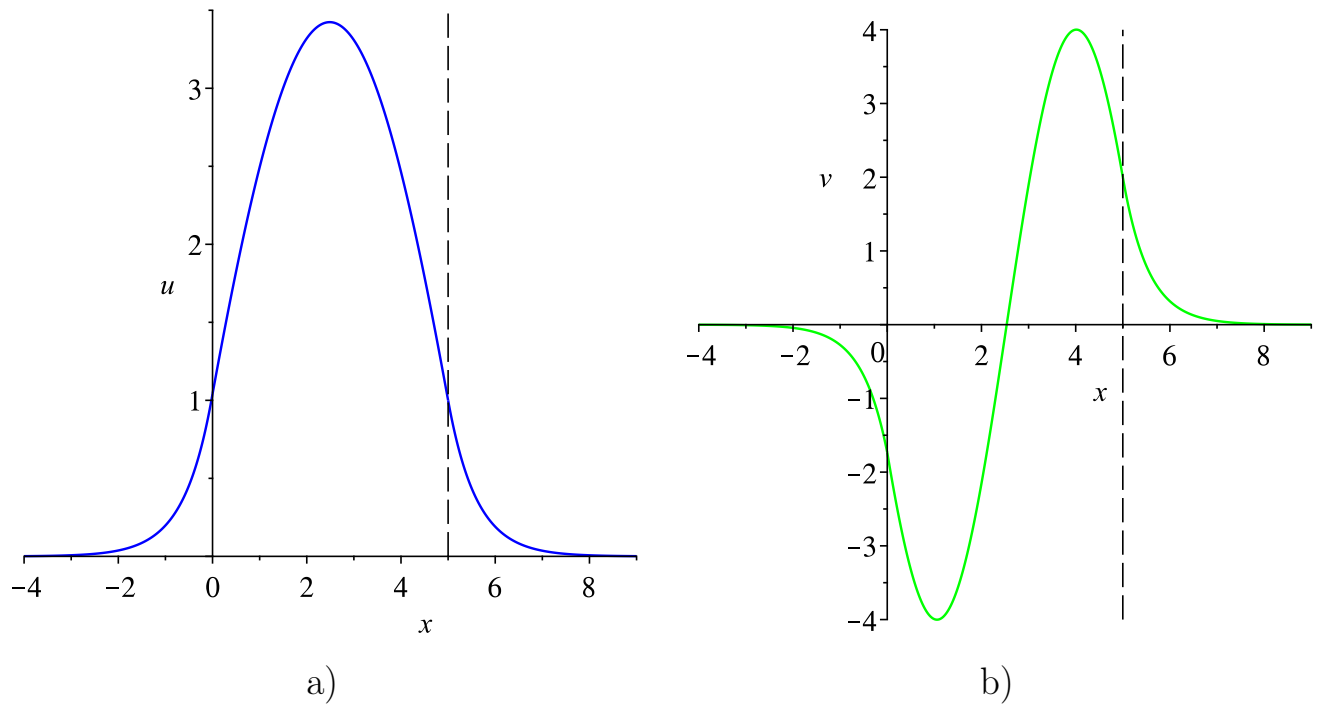


Рисунок 33. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(11)} \approx 1.937 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(11)} \approx 2.215 \text{ мм}^{-1}$.

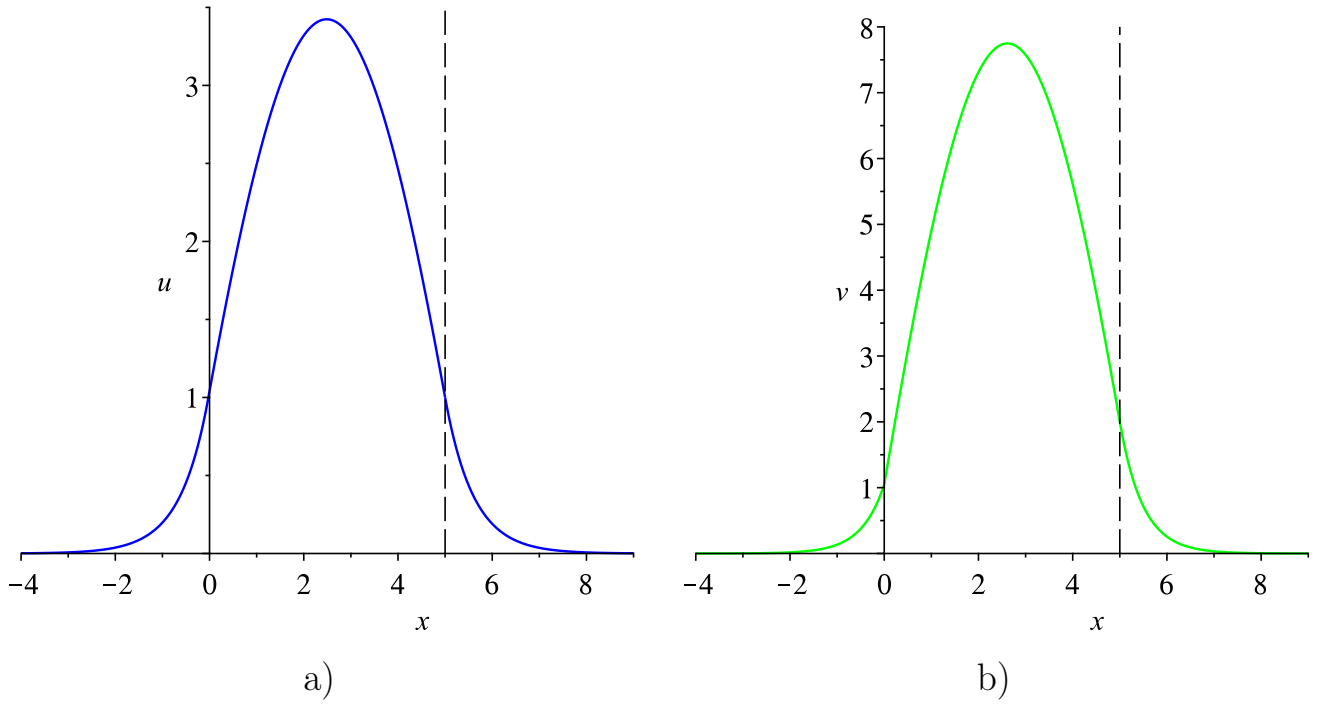


Рисунок 34. Собственные функции u и v . $\alpha = 0.01 \text{ мм}^2/\text{В}^2$, $\beta = 0.8 \text{ мм}^2/\text{В}^2$; $\gamma_1^{(12)} \approx 1.937 \text{ мм}^{-1}$, $\gamma_2^{(12)} \approx 2.3955 \text{ мм}^{-1}$.

Собственные функции v на рис. 23, 27, 31 являются нечетными функциями относительно центра волновода Σ_2 и имеют три нуля. Собственные функции u на рис. 23–26 и собственные функции v на рис. 24, 28, 32 являются четными функциями относительно центра волновода Σ_2 и имеют два нуля. Собственные функции u на рис. 27–30 и собственные функции v на рис. 25, 29, 33 являются нечетными функциями относительно центра волновода Σ_2 и имеют один ноль. Собственные функции u на рис. 31–34 и собственные функции v на рис. 26, 30, 34 являются четными функциями относительно центра волновода Σ_2 и не имеют нулей. Графики касательных компонент электромагнитного поля согласуются с физической постановкой задачи, а именно, обе собственные функции u , v непрерывны на границах раздела сред и затухают при $|x| \rightarrow \infty$.

3.4. Результаты расчетов для задачи распространения электромагнитных симметричных гибридных волн в нелинейном слое

При построении рис. 35–40 использовались следующие параметры: $h = 5$ мм, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$, $C = 25$ В/мм, $\alpha = 0.3$ мм²/В², $\beta = 0.001$ мм²/В².

На рис. 35 показана зависимость собственного значения γ от дополнительного параметра θ при $\omega = 1$ ГГц. Зеленые кривые соответствуют решению уравнения $u_2(0) = 0$, а синии – решению уравнения $u_3(0) = 0$, где $u_2(x)$, $u_3(x)$ – решения задачи Коши [14] для системы уравнений (1.100) со следующими начальными условиями

$$u_1(h) = \rho, \quad u_2(h) = C \cos \theta, \quad u_2'(h) = -\kappa_1 C \cos \theta, \quad u_3(h) = C \sin \theta,$$

где ρ определяется как решение следующего уравнения $(k_0^2 \varepsilon_2 + \alpha f(\rho^2 + C^2))\rho = \kappa_1^{-1} \gamma C k_0^2 \varepsilon_1 \sin \theta$. Пересечения кривых, отмеченные красными точками, являются приближенными собственными значениями задачи P_3 .

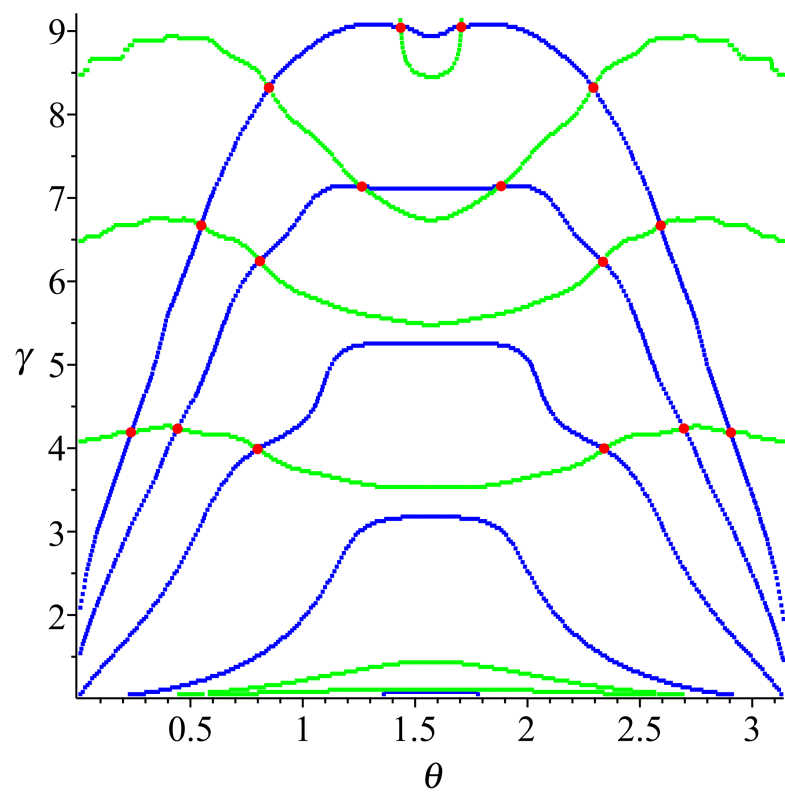


Рисунок 35. График зависимости γ от θ .

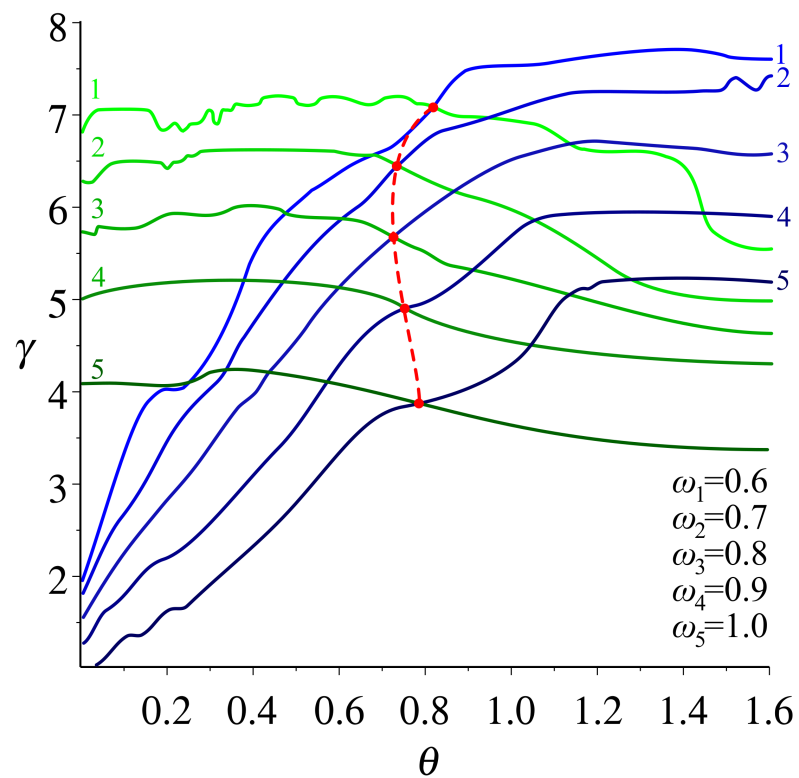


Рисунок 36. График зависимости γ от θ и ω .

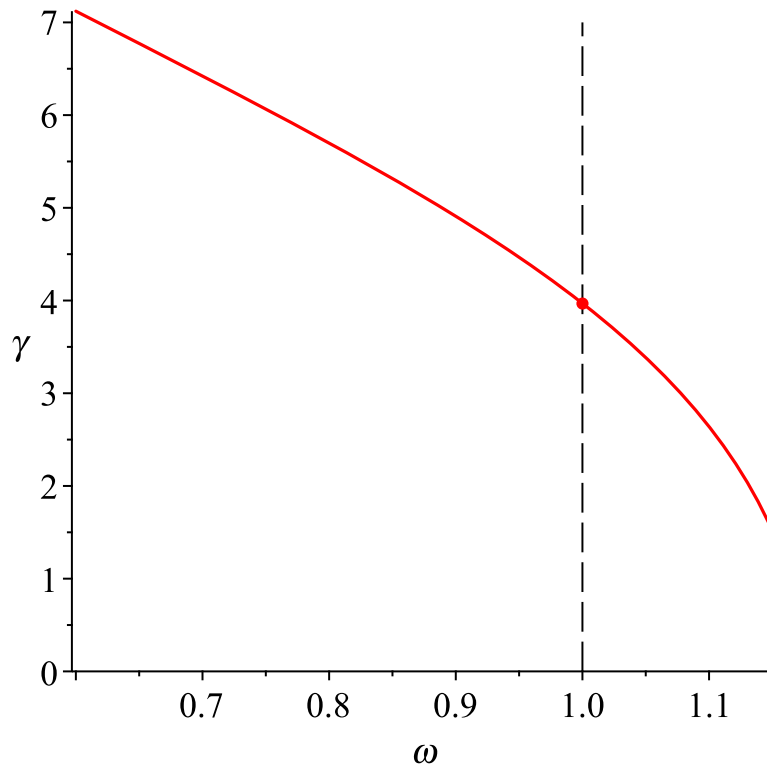


Рисунок 37. Дисперсионная кривая. Отмеченное собственное значение: $\gamma \approx 3.989 \text{ мм}^{-1}$, $\theta \approx 0.801$.

Как и раньше, на рис. 36 зеленые и синие кривые соответствуют решениям уравнений $u_2(0) = 0$ и $u_3(0) = 0$, соответственно, и приближенные собственные значения отмечены красными точками. Однако на рис. 36 показано, как выбранное собственное значение зависит от круговой частоты. Синие и зеленые кривые с одинаковыми номерами соответствуют круговой частоте с тем же индексом.

На рис. 37 представлен график зависимости собственного значения γ от круговой частоты ω . Данная зависимость называется дисперсионной кривой. Вертикальная пунктирная линия соответствует выбранной круговой частоте $\omega = 1 \text{ ГГц}$. Точка пересечения вертикальной пунктирной линии с дисперсионной кривой является собственным значением (постоянной распространения) задачи P_3 .

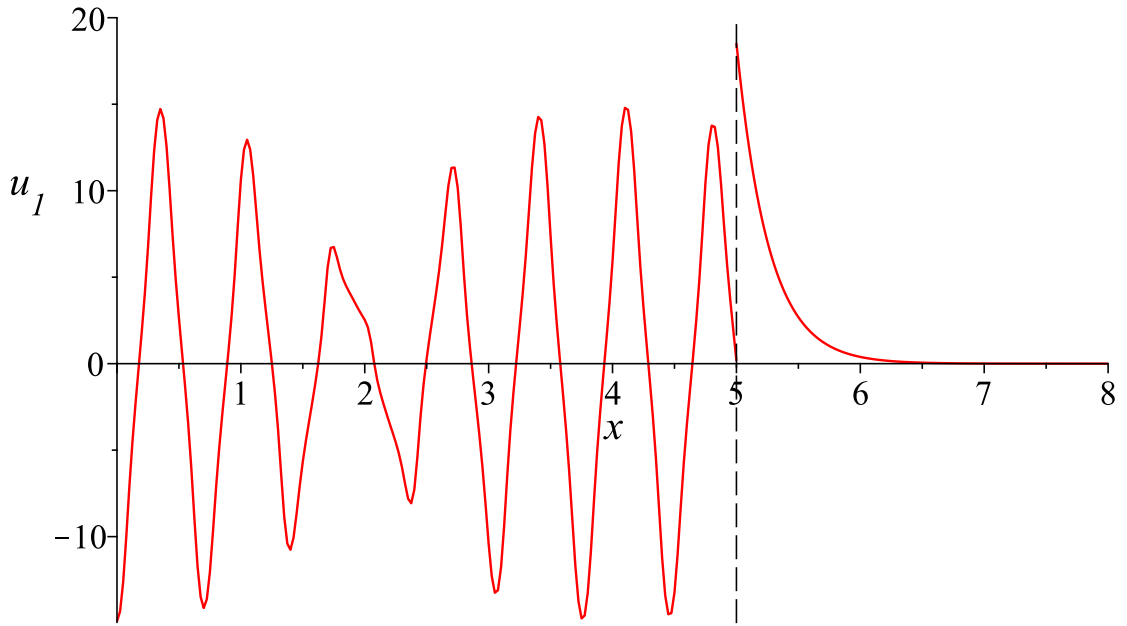


Рисунок 38. Собственная функция u_1 при $\omega = 1$ ГГц, $\gamma \approx 3.989$ мм⁻¹, $\theta \approx 0.801$.

На рис. 38–40 показаны графики собственных функций u_1 , u_2 , u_3 для собственного значения, отмеченного на рис. 37. Графики компонент электрического поля согласуются с физической постановкой задачи; а именно, собственные функции u_2 и u_3 обращаются в ноль на границе $x = 0$ и являются непрерывными на границе $x = h$, u_1 , u_2 , u_3 затухают при $x \rightarrow +\infty$.

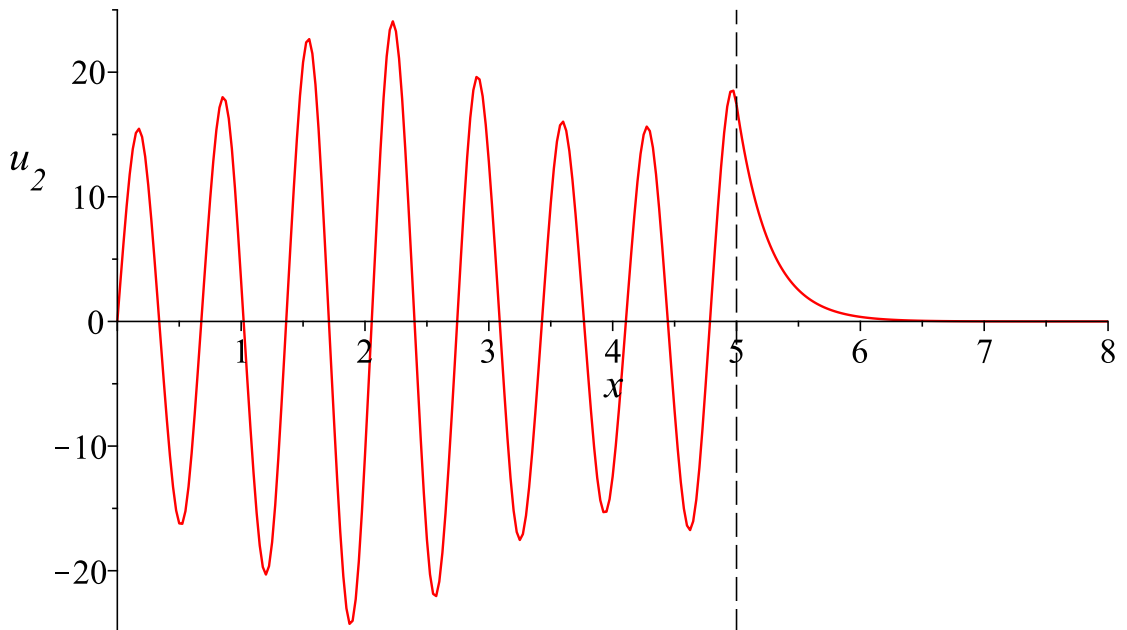


Рисунок 39. Собственная функция u_2 при $\omega = 1$ ГГц, $\gamma \approx 3.989$ мм⁻¹, $\theta \approx 0.801$.

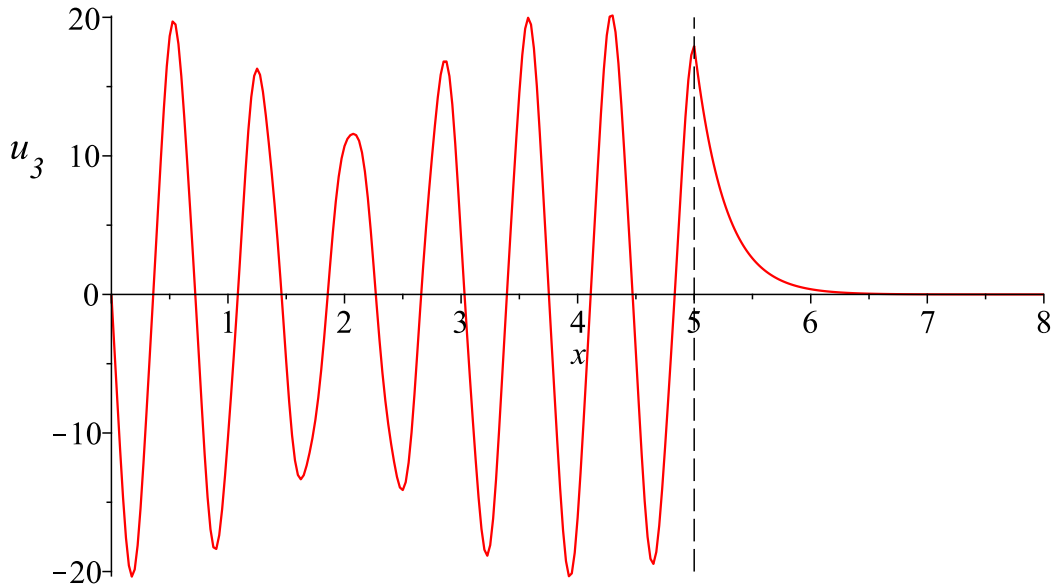


Рисунок 40. Собственная функция u_3 при $\omega = 1$ ГГц, $\gamma \approx 3.989$ мм⁻¹, $\theta \approx 0.801$.

Результаты и выводы по главе 3

1. Разработан и протестирован вычислительный алгоритм, на основе которого реализован программно-вычислительного комплекс для численного решения задачи дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.
2. Получены и проанализированы результаты расчетов для задач дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения, и задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском волноводе, заполненном нелинейной средой с эффектом насыщения.

3. Предложен критерий восстановления единственности решения задачи дифракции поляризованной ТЕ-волны на слое, заполненном средой с нелинейностью Керра, обнаружены нелинейные связанные ТЕ-ТЕ-волны, которым не соответствуют пары линейных поляризованных ТЕ-волн, и симметричные гибридные волны в слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены результаты о разрешимости задачи дифракции электромагнитных поляризованных ТЕ-волн на плоских слоях, заполненных средой с нелинейностью Керра и нелинейностью с насыщением. Найдены условия на коэффициенты нелинейности, при которых задача дифракции имеет единственное решение в случае нелинейности с насыщением. Разработан и обоснован численный (итерационный) метод приближенного нахождения касательной компоненты электрического поля и амплитуды отраженной волны для заданной амплитуды падающей волны, получена оценка скорости сходимости данного метода.

Получены результаты о разрешимости задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения. Найдены условия существования и единственности решения для задачи. Установлено соотношение для коэффициентов нелинейности, при котором удастся обосновать численный (итерационный) метод нахождения приближенных связанных собственных значений и собственных функций задачи, точнее, получить результат о сходимости приближенных связанных собственных значений и собственных функций к точным.

Получены результаты о разрешимости задачи распространения симметричной гибридной электромагнитной волны в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением. Найдены условия на коэффициенты нелинейности, при которых задача имеет единственное решение. Разработан и обоснован численный (итерационный) метод приближенного нахождения собственных значений и собственных функций, доказаны теоремы о существовании и сходимости приближенных собственных значений к точным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамс, М. Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. – М.: Мир, 1984. – 512 с.
2. Ахманов, С.А. Проблемы нелинейной оптики / С.А. Ахманов, Р.В. Хохлов. – М.: АН СССР, 1964. – 297 с.
3. Ахмедиев, Н.Н. Солитоны, нелинейные импульсы и пучки / Н.Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М.: Физматлит, 2003. – 304 с.
4. Бломберген, Н. Нелинейная оптика / Н. Бломберген. – М.: Мир, 1966. – 424 с.
5. Вайнштейн, Л.А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
6. Валовик, Д.В. Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью / Д.В. Валовик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51. – № 9. – С. 1729–1739.
7. Валовик, Д.В. О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д.В. Валовик, Ю.Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 12. – С. 2186–2194.
8. Валовик, Д.В. О собственных значениях одной нелинейной спектральной задачи / Д.В. Валовик, В.Ю. Курсеева // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т. 52. – № 2. – С. 149–156.
9. Даутов, Р.З. Существование и свойства решений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов / Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский //

- Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – Т. 40. – № 8. – С. 1250–1263.
10. Делоне, Н.Б. Взаимодействие лазерного излучения с веществом / Н.Б. Делоне. – М.: Наука, 1989. – 277 с.
 11. Ильинский, Ю.А. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом / Ю.А. Ильинский, Л.В. Келдыш. – М.: Изд-во Московского университета, 1989. – 304 с.
 12. Келих, С. Молекулярная нелинейная оптика / С. Келих. – М.: Наука, 1981. – 672 с.
 13. Курсеева (Мартынова) В.Ю. Об одной задаче распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском нелинейном волноводе / В.Ю. Курсеева (Мартынова) // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XII Международной научно-технической конференции. – 2017. – С. 140–146.
 14. Курсеева (Мартынова) В.Ю. Численное исследование задачи о распространении симметричных гибридных волн в плоском неоднородном нелинейном волноводе / В.Ю. Курсеева (Мартынова) // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 4(44). – С. 96–105.
 15. Маныкин, Э.А. Взаимодействие излучения с веществом. Феноменология нелинейной оптики / Э.А. Маныкин. – М.: МИФИ, 1996. – 91 с.
 16. Маркузе, Д. Оптические волноводы / Д. Маркузе. – М.: Мир, 1974. – 576 с.
 17. Сидоров В.М. Задача дифракции электромагнитной те-волны на слое, заполненном нелинейной средой / В.М. Сидоров, В.Ю. Мартынова // Мате-

- матическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения: тезисы докладов Международной научной конференции. под ред. Ю.Г. Смирнова. – 2019. – С. 27–29.
18. Мартынова В.Ю. Распространение симметричных гибридных волн в плоском волноводе с произвольной нелинейностью с эффектом насыщения / В.Ю. Мартынова // Математическое моделирование в электродинамике: теория, методы и приложения: тезисы докладов Международной научной конференции. под ред. Ю.Г. Смирнова. – 2019. – С. 68–69.
 19. Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. – М.: Наука, 1973. – 608 с.
 20. Самохин, А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А.Б. Самохин. – М.: Радио и связь, 1998. – 160 с.
 21. Смирнов, Ю.Г. Распространение электромагнитных волн в цилиндрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю.Г. Смирнов, С.Н. Куприянова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. – № 10. – С. 1850–1860.
 22. Снегур М.О. Об одной задаче распространения гибридных нелинейных азимутально-симметричных волн в экранированном волноводе с нелинейным неоднородным заполнением / М.О. Снегур, В.Ю. Курсеева (Мартынова) // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: материалы XIII Международной научно-технической конференции. Под редакцией И.В. Бойкова. – 2018. – С. 11–16.
 23. Сущинский, М.М. Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов / М.М. Сущинский. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

24. Таланов, В.И. О самофокусировке волновых пучков в нелинейных средах / В. И. Таланов // Письма в ЖЭТФ. – 1965. – Т. 2. – № 5. – С. 218–222.
25. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
26. Шен, И.Р. Принципы нелинейной оптики / И.Р. Шен. – М.: Наука, 1989. – 557 с.
27. Angermann, L. A nonlinear multiparameter EV problem / L. Angermann, Y.V. Shestopalov, Y.G. Smirnov, V.V. Yatsyk // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2018. – V. 243. – P. 55–70.
28. Angermann, L. Nonlinear multi-parameter eigenvalue problems for systems of nonlinear ordinary differential equations arising in electromagnetics / L. Angermann, Y.V. Shestopalov, Y.G. Smirnov, V.V. Yatsyk // Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach gGmbH Oberwolfach Preprints. – 2014. – V. 15. – P. 1–10.
29. Balourdos, P.S. Reflectivity of a nonlinear discontinuity in optical waveguides / P.S. Balourdos, D.J. Frantzeskakis, M.C. Tsilis, I.G. Tigelis // Pure and Applied Optics. – 1998. – V. 7. – № 1. – P. 1–11.
30. Besse, V. Determination of the third and fifth-order optical nonlinearities: the general case / V. Besse, G. Boudebs, H. Leblond // Applied Physics B. – 2014. – V. 116. – № 4. – P. 911–917.
31. Boardman, A.D. Nonlinear waves in metamaterials: state of the art / A.D. Boardman, P. Egan, R.C. Mitchell-Thomas, M. McCall, Y.G. Rapoport // Proc. SPIE 8093, Metamaterials: Fundamentals and Applications IV. – 2011. – V. 8093. – P. 809303 (7 pages).

32. Boardman, A.D. Transverse-electric and transverse-magnetic waves in nonlinear isotropic waveguides / A.D. Boardman, T. Twardowski // *Physical Review A*. – 1989. – V. 39. – № 5. – P. 2481–2492.
33. Chen Qin. Exact dispersion relation for TM waves guided by thin dielectric films bounded by nonlinear media / Chen Qin, Zi Hua Wang // *Optics letters*. – 1993. – V. 18. – №4. – P. 1–3.
34. Eleonskii, P.N. Cylindrical nonlinear waveguides / P.N. Eleonskii, L.G. Ogan'es'yants, V.P. Silin // *Soviet Physics JETP*. – 1972. – V. 35. – № 1. – P. 44–47.
35. Eleonskii, P.N. Nonlinear theory of penetration of p-polarized waves into a conductor / P.N. Eleonskii, V.P. Silin // *Soviet Physics JETP*. – 1971. – V. 33. – № 5, P. 1039–1044.
36. Joseph, R.I. Exact field decomposition for TM-waves in nonlinear media / R.I. Joseph, D.N. Christodoulides // *Optics Letters*. – 1987. – V. 12. – № 10. – P. 826–828.
37. Kurseeva (Martynova), V.Yu. Electromagnetic non-polarized symmetric hybrid wave propagation in a plane waveguide with nonlinear anisotropic permittivity / V.Yu. Kurseeva (Martynova) // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2018. – V. 39. – № 8. – P. 1075–1089.
38. Kurseeva (Martynova), V.Yu. Electromagnetic non-polarized symmetric hybrid wave propagation in nonlinear media with saturation / V.Yu. Kurseeva (Martynova) // *Proceedings of the International Conference Days on Diffraction*. – 2018. – № 8553516. – P. 198–203.
39. Kurseeva (Martynova), V.Yu. Electromagnetic wave propagation in nonlinear media with saturation / V.Yu. Kurseeva (Martynova), D.V. Valovik // *Progress in Electromagnetics Research Symposium*. – 2017. – P. 359–364.

40. Kurseeva (Martynova), V.Yu. On the Solvability of the Problem of Electromagnetic Wave Diffraction by a Layer Filled with a Nonlinear Medium / V.Yu. Kurseeva (Martynova), Yu.G. Smirnov, E. Smolkin // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2019. – V. 59. – № 4. – P. 644–658.
41. Kurseeva (Martynova), V.Yu. Problem of Coupled Electromagnetic TE-TE Wave Propagation in a Layer Filled with Nonlinear Medium with Saturation / V.Yu. Kurseeva (Martynova), Yu.G. Smirnov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – V. 40. – № 10. – P. 1673–1684.
42. Kurseeva (Martynova), V.Yu. Theory of nonlinear guided electromagnetic waves in a plane two-layered dielectric waveguide / V.Yu. Kurseeva, D.V. Valovik // Mathematical Problems in Engineering. – 2017. – V. 2017. – Article ID 4215685. – P. 1–19.
43. Khardikov, V. Electromagnetic wave diffraction by periodic planar metamaterials with nonlinear constituents / V. Khardikov, P. Mladyonov, S. Prosvirnin, V. Tuz // Springer Series in Optical Sciences. – 2016. – V. 199. – P. 81–98.
44. Khoo, I.C. Nonlinear optics, active plasmonics and metamaterials with liquid crystals / I.C. Khoo // Progress in Quantum Electronics. – 2014. – V. 38. – № 2. – P. 77–117.
45. Langbein, U. Nonlinear TM-polarized waves in non-kerr media / U. Langbein, F. Lederer, D. Mihalache, D. Mazilu // Physica B+C. – 1987. – V. 145. – P. 377–385.
46. Lapine, M. Colloquium: Nonlinear metamaterials / M. Lapine // Reviews of Modern Physics. – 2014. – V. 86. – № 3. – P. 1093–1123.

47. Martynova, V.Yu. Coupled electromagnetic TE-TE wave propagation in nonlinear layer with saturated nonlinearity / V.Yu. Martynova, Yu.G. Smirnov // Journal of Modern Optics. – 2019.
48. Reyna, A.S. High-order optical nonlinearities in plasmonic nanocomposites—a review / A.S. Reyna, C.B. de Araújo // Advances in Optics and Photonics. – 2017. – V. 9. – № 4. – P. 720–774.
49. Schürmann, H.W. On the theory of reflectivity and transmissivity of a lossless nonlinear dielectric slab / H.W. Schürmann, R.Z. Schmoltdt // Zeitschrift für Physik B Condensed Matter. – 1993. – V. 92. – № 2. – P.179–186.
50. Schürmann, H.W. Propagation of TE waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides / H.W. Schürmann, Y. Smirnov, Y. Shestopalov // Physical Review E – Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. – 2005. – V.71. – № 7. – P. 016614.
51. Schürmann, H.W. Solutions to the Helmholtz equation for TE-guided waves in a three-layer structure with Kerr-type nonlinearity / H.W. Schürmann, V. S. Serov, Yu.V. Shestopalov // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2002. – V. 35. – № 50. – P. 10789–10801.
52. Schürmann, H.W. Theory of TE-polarized waves in a lossless cubic-quintic nonlinear planar waveguide / H.W. Schürmann, V.S. Serov // Phys. Rev. A. – 2016. – V. 93. – № 6. – P. 063802.
53. Smirnov, Yu.G. Coupled electromagnetic TE-TM wave propagation in a layer with Kerr nonlinearity / Y.G. Smirnov, D.V. Valovik // Journal of Mathematical Physics. – 2012. – V. 53. – № 12. – P. 123530.
54. Smirnov, Yu.G. Coupled electromagnetic transverse-electric-transverse magnetic wave propagation in a cylindrical waveguide with Kerr nonlinearity

- / Y.G. Smirnov, D.V. Valovik // Journal of Mathematical Physics. – 2013. – V. 54. – № 4. – P. 043506.
55. Smirnov, Yu.G. Diffraction of TE polarized electromagnetic waves by a layer with a nonlinear medium / Y.G. Smirnov, E. Smolkin, V. Kurseeva (Martynova) // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2018. – V. 243. – P. 39–53.
 56. Smirnov, Yu.G. Diffraction of TE polarized electromagnetic waves by a nonlinear layer: saturated and Kerr nonlinearities / Yu.G. Smirnov, E. Smolkin V.Yu., Kurseeva (Martynova) // Applicable Analysis. – 2019.
 57. Smirnov, Yu.G. Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity / Yu.G. Smirnov, D.V. Valovik // Physical Review A. – 2015. – V. 91. – № 1. – P. 013840 (6 pages).
 58. Smirnov, Yu.G. Integral equation approach for the propagation of TE-waves in a nonlinear dielectric cylindrical waveguide / Y. Smirnov, H.W. Schürmann, Y. Shestopalov // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2004. – V. 11. – № 2. – P. 256–268.
 59. Smirnov, Yu.G. Nonlinear coupled wave propagation in a n-dimensional layer / Y.G. Smirnov, D.V. Valovik // Applied Mathematics and Computation. – 2017. – V. 294. – P. 146–156.
 60. Smirnov, Yu.G. On the infinitely many nonperturbative solutions in a transmission eigenvalue problem for Maxwell's equations with cubic nonlinearity / Yu.G. Smirnov, D.V. Valovik // Journal of Mathematical Physics. – 2016. – V. 57. – № 10. – P. 103504 (15 pages).
 61. Smirnov, Y.G. Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation / Y.G. Smirnov, D.V. Valovik // J. Math. Phys. – 2013. – V. 54. – P. 083502.

62. Smirnov, Yu.G. The new type of non-polarized symmetric electromagnetic waves in planar nonlinear waveguide / Yu.G. Smirnov, E. Smolkin, V. Kurseeva (Martynova) // *Applicable Analysis*. – 2019. – V. 98. – № 3. – P. 483–498.
63. Smolkin, E. The azimuthal symmetric hybrid waves in nonlinear cylindrical waveguide / E. Smolkin // *Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings*. – 2017. – P. 348–353.
64. Snyder, A.W. *Optical Waveguide Theory* / A.W. Snyder, J.D. Love. – London: Chapman and Hall, 1983. – 734 p.
65. Stratton, J.A. *Electromagnetic Theory* / J.A. Stretton. – McGraw Hill, New York, 1941. – 550 p.
66. Trutschel, U. Transmission and reflection of transverse-magnetic-polarized optical fields at stratified nonlinear media / U. Trutschel, F. Lederer, U. Langbein // *Physical Review B*. – 1989. – V. 40. – № 12. – P. 8275–8283.
67. Urbas, A.M. Roadmap on optical metamaterials / A.M. Urbas and all // *Journal of Optics (United Kingdom)*. – 2016. – V. 18. – № 9. – P. 093005.
68. Valovik, D.V. Nonlinear coupled electromagnetic wave propagation: Saturable nonlinearities / D.V. Valovik // *Wave Motion*. – 2016. – V. 60. – P.166–180.
69. Valovik, D.V. Novel propagation regimes for TE waves guided by a waveguide filled with Kerr medium / D.V. Valovik // *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*. – 2016. – V. 25. – № 4. – P. 1650051 (17 pages).
70. Valovik, D.V. On the problem of nonlinear coupled electromagnetic transverse-electric–transverse magnetic wave propagation / D.V. Valovik // *J. Math. Phys.* – 2013. – V. 54. – P. 042902.

71. Valovik, D.V. Integral dispersion equation method to solve a nonlinear boundary eigenvalue problem / D.V. Valovik // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2014. – V. 20. – № 1. – P. 52–58.
72. Weerawarne, D.L. Higher-order nonlinearities revisited and their effect on harmonic generation / D.L. Weerawarne, X. Gao, A.L. Gaeta, B. Shim // Phys. Rev. Lett. – 2015. – V. 114. – № 9. – P. 093901.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Программный код

Файл Main.cpp

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include "P1_Main.h"
#include "P2_Main.h"
#include "P3_Main.h"

void main()
{
int problemNumber = 1; // Номер решаемой задачи
cout << "Choose a problem:" << endl;
cout << "Diffraction of TE waves by a nonlinear layer\t\t\t\t-t1"
<< endl;
cout << "Coupled electromagnetic TE-TE wave propagation in a
nonlinear layer\t-\t2" << endl;
cout << "Electromagnetic symmetric hybrid wave propagation
in a nonlinear layer\t-\t3" << endl;
cout << endl;

// Выбор номера решаемой задачи
cin >> problemNumber;
cout << endl;
switch (problemNumber) {
case 1:
p1_main();
break;
case 2:
p2_main();
break;
case 3:
p3_main();
break;
default:
cout << "Error: The Problem Number is incorrect! " << endl;
break;
```

```

}
cout<<"End."<<endl;
_getch();
}

```

Файл P1_Main.h

```

#ifndef P1_MAIN_H
#define P1_MAIN_H
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include "Matrix.h"
#include "Structs.h"
#include "P1_VariousFunctions.h"
#include "Integrals.h"
using namespace std;
void p1_main();
#endif

```

Файл P1_Main.cpp

```

#include "P1_Main.h"

void p1_main()
{
//Входные данные
Values_1 v = { 0.001, 0.060, // alpha, beta
1.5, // h
1, 3, 1, // epsilon
1.1, // gamma
1, // волновое число
0.01 // погрешность
};

Split_1 n = { 50, // разбиение по s
100 }; // разбиение по амплитуде падающей волны

int i = 0, j = 0, i_1, i_2, iter = 0;
double err = v.error * 2, N2 = 0.0;
Amplitude aInc, aRef, aTra;
aInc.begin = 10;

```

```

aInc.end = 11;
aInc.cell = new double[n.ampOfIncField];
fromFile(v, n, aInc, "P1_in.txt"); // Считывание входных данных

aRef.cell = new double[n.ampOfIncField];
aTra.cell = new double[n.ampOfIncField];
double *s = new double[n.segment + 1];
double Den;
Funcion *u = new Funcion[n.segment + 1];
Funcion *copyOfu = new Funcion[n.segment + 1];

// Заполнение массива s
for (i = 0; i <= n.segment; i++)
s[i] = i*v.thickness / n.segment;

// Итерационный метод
for (i_1 = 0; i_1 < n.ampOfIncField; i_1++)
{
aInc.cell[i_1] = aInc.begin + i_1 * (aInc.end - aInc.begin) /
n.ampOfIncField;
u = isEqualToZero(n.segment + 1);
iter = 0;
do
{
iter++;
copyOfu = isEqualTo(u, n.segment + 1);
for (j = 0; j <= n.segment; j++)
u[j].E_y = v.alpha*Int_Q_1(s[j], copyOfu, v, n.segment) +
q_2(s[j], aInc.cell[i_1], v);
err = norma(u, copyOfu, v, n.segment);
} while (err > v.error);
Den = (kappa_2(v)*kappa_2(v) - kappa_1(v)*kappa_3(v))*
sin(kappa_2(v)*v.thickness) - kappa_2(v)*(kappa_1(v) +
kappa_3(v))*cos(kappa_2(v)*v.thickness);
aRef.cell[i_1] = v.alpha*Int_Ref(u, v, n.segment) +
aInc.cell[i_1] * ((kappa_2(v)*kappa_2(v) +
kappa_1(v)*kappa_3(v))*sin(kappa_2(v)*v.thickness) +
kappa_2(v)*(kappa_1(v) - kappa_3(v))*
cos(kappa_2(v)*v.thickness)) / Den;
aTra.cell[i_1] = v.alpha*Int_Tra(u, v, n.segment) +

```

```

aInc.cell[i_1] * (2 * kappa_1(v)*kappa_2(v) / Den);
}
cout << "End of main cycle" << endl;
cout << endl;
ToFile(aInc.cell, aRef.cell, n.ampOfIncField, "IncRef.txt");
ToFile(aInc.cell, aTra.cell, n.ampOfIncField, "IncTra.txt");
delete[] s, u, copyOfu, aInc.cell, aTra.cell, aRef.cell;
}

```

Файл P2_Main.h

```

#ifndef P2_MAIN_H
#define P2_MAIN_H
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include "Matrix.h"
#include "Structs.h"
#include "P1_VariousFunctions.h"
#include "Method.h"
#include "Integrals.h"
using namespace std;
void p2_main();
#endif

```

Файл P2_Main.cpp

```

#include "P2_Main.h"

void p2_main()
{
Values_2 v = { 0.01, 0.8, // alpha, beta
5, // h
1, 4, 1, // epsilon
1, 2, // C
1, 1.5, // tau
0.01 // погрешность
};
Split_2 n = { 100, // разбиение по s
50, // разбиение по gamma_1
50 }; // разбиение по gamma_2

```

```

int i = 0, j = 0, i_1, i_2, i_gamma_sol = 0;
double gamma_1_s = 0.0, gamma_2_s = 0.0, N1 = 0.0, N2 = 0.0;
EigenValues pc1, pc2;
pc1.begin_gamma_1 = 1.351;
pc1.begin_gamma_2 = 1.37;
pc1.end_gamma_1 = 1.36;
pc1.end_gamma_2 = 1.4;
pc1.gamma_1 = new double[n.gamma_1];
pc1.gamma_2 = new double[n.gamma_2];
pc2.begin_gamma_1 = 1.351;
pc2.begin_gamma_2 = 1.37;
pc2.end_gamma_1 = 1.36;
pc2.end_gamma_2 = 1.4;
pc2.gamma_1 = new double[n.gamma_1];
pc2.gamma_2 = new double[n.gamma_2];
fromFile(v, n, pc1, pc2, "P2_in.txt");//Считывание входных данных
double *s = new double[n.segment];
double *Phi_1 = new double[n.gamma_1];
double *Phi_2 = new double[n.gamma_2];
CoupledFuncfions *mas_u = new CoupledFuncfions[n.segment];
CoupledFuncfions *mas_v = new CoupledFuncfions[n.segment];
Points *point1 = new Points[n.gamma_1*n.gamma_2];
Points *point2 = new Points[n.gamma_1*n.gamma_2];
int n1 = 0, n2 = 0;

// Разбиение по s и gamma
for (i = 0; i<n.segment; i++)
s[i] = i*v.thickness / (n.segment - 1);
for (i = 0; i<n.gamma_1; i++)
{
pc1.gamma_1[i] = pc1.begin_gamma_1 +
(pc1.end_gamma_1 - pc1.begin_gamma_1)*i / n.gamma_1;
pc2.gamma_1[i] = pc2.begin_gamma_1 +
(pc2.end_gamma_1 - pc2.begin_gamma_1)*i / n.gamma_1;
}
for (i = 0; i<n.gamma_2; i++)
{
pc1.gamma_2[i] = pc1.begin_gamma_2 +
(pc1.end_gamma_2 - pc1.begin_gamma_2)*i / n.gamma_2;
pc2.gamma_2[i] = pc2.begin_gamma_2 +

```

```

(pc2.end_gamma_2 - pc2.begin_gamma_2)*i / n.gamma_2;
}
for (i_1 = 0; i_1 < n.gamma_1; i_1++)
{
for (i_2 = 0; i_2 < n.gamma_2; i_2++)
{
Phi_1[i_2] = 0.0;
mas_v = iterations(pc2.gamma_1[i_2], pc2.gamma_2[i_1], s, v, n);
Phi_1[i_2]=v.const_1*sin(kappa_1(pc2.gamma_1[i_2], v)*v.thickness)*
g_1(pc2.gamma_1[i_2], v) -
v.alpha*v.tau_1*Int_Q_1(pc2.gamma_1[i_2], mas_v, v, n);
}
for (i_2 = 0; i_2 < n.gamma_2 - 1; i_2++)
{
if (Phi_1[i_2] * Phi_1[i_2 + 1] < 0.0000001)
{
point1[n1].gamma_1 = pc2.gamma_1[i_2];
point1[n1].gamma_2 = pc2.gamma_2[i_1];
n1++;
}
}
}
cout << "End of cycle 1" << endl;
cout << endl;
for (i_1 = 0; i_1 < n.gamma_2; i_1++)
{
for (i_2 = 0; i_2 < n.gamma_1; i_2++)
{
Phi_2[i_2] = 0.0;
mas_u = iterations(pc1.gamma_1[i_1], pc1.gamma_2[i_2], s, v, n);
Phi_2[i_2]=v.const_2*sin(kappa_2(pc1.gamma_2[i_2], v)*v.thickness)*
g_2(pc1.gamma_2[i_2], v) -
v.alpha*v.tau_2*Int_Q_2(pc1.gamma_2[i_2], mas_u, v, n);
}
for (i_2 = 0; i_2 < n.gamma_2 - 1; i_2++)
{
if (Phi_2[i_2] * Phi_2[i_2 + 1] < 0.0000001)
{
point2[n2].gamma_1 = pc1.gamma_1[i_1];
point2[n2].gamma_2 = pc1.gamma_2[i_2];

```

```

n2++;
}
}
}
cout << "End of cycle 2" << endl;
cout << endl;
for (i_1 = 0; i_1 < n1; i_1++)
{
for (i_2 = 0; i_2 < n2; i_2++)
{
if ((point1[i_1].gamma_1 == point2[i_2].gamma_1) &&
    (point1[i_1].gamma_2 == point2[i_2].gamma_2))
{
mas_u=iterations(point1[i_1].gamma_1, point1[i_1].gamma_2,s,v,n);
toFile(mas_u, s, point1[i_1].gamma_1, point1[i_1].gamma_2,
n.segment, "Solution_2.txt");
}
}
}
cout << endl;
delete[] s, mas_u, mas_v, point1, point2, Phi_1, Phi_2,
pc1.gamma_1, pc1.gamma_2, pc2.gamma_1, pc2.gamma_2;
}

```

Файл P3_Main.h

```

#ifndef P3_MAIN_H
#define P3_MAIN_H
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
#include "Matrix.h"
#include "Structs.h"
#include "P3_VariousFunctions.h"
#include "Integrals.h"
#include "Method.h"
using namespace std;
void p3_main();
#endif

```

Файл P3_Main.cpp

```

#include "P3_Main.h"

void p3_main()
{
    // Исходные данные
    Values_3 v = { 0.001, 0.1, // alpha beta
    5, // h
    1, 2, // epsilon
    25, // C
    1, // волновое число
    0.01 // погрешность
    };
    // Параметры разбиений
    Split_3 n = { 50, // разбиение по s
    15, // разбиение по gamma
    15 }; // разбиение по theta
    // Дополнительные переменные
    int i = 0, j = 0, i_1, i_2, i_gamma_sol = 0;

    // Массив постоянных распространения
    ArrayOf gamma;
    gamma.begin = 1.3;
    gamma.end = 1.35;
    gamma.cell = new double[n.gamma];

    // Массив угловых параметров
    ArrayOf theta;
    theta.begin = 0.0;
    theta.end = 0.01;
    theta.cell = new double[n.theta];
    fromFile(v,n,gamma,theta,"P3_in.txt");//Считывание входных данных

    // Массивы разбиений по x
    double *s = new double[n.segment];
    double *s_ = new double[n.segment + 1];
    // Массивы значений дисперсионных уравнений
    double *Phi_E = new double[n.gamma];
    double *Phi_M = new double[n.gamma];
    // Массивы собственных функций
    EigenFuncfions *mas_u = new EigenFuncfions[n.segment];

```

```

EigenFuncions *u_Int = new EigenFuncions[n.segment + 1];
EigenFuncions *mas_u_ = new EigenFuncions[n.segment];
EigenFuncions *u_Int_ = new EigenFuncions[n.segment + 1];
// Заполнение массивов s, gamma и theta
for (i = 0; i<n.segment; i++)
s[i] = i*v.thickness / (n.segment - 1);

for (i = 0; i < n.segment + 1; i++)
s_[i] = i*v.thickness / (n.segment);

for (i = 0; i<n.gamma; i++)
gamma.cell[i] = gamma.begin + (gamma.end - gamma.begin)*i/n.gamma;

for (i = 0; i<n.theta; i++)
theta.cell[i] = theta.begin + (theta.end - theta.begin)*i/n.theta;

for (i_1 = 0; i_1 < n.theta; i_1++)
{
for (i_2 = 0; i_2 < n.gamma; i_2++)
{
Phi_E[i_2] = 0.0;
Phi_M[i_2] = 0.0;
mas_u = iteration(gamma.cell[i_2], theta.cell[i_1], s, s_, v, n);

Phi_E[i_2] = v.const_C*cos(theta.cell[i_1])*g_E(gamma.cell[i_2],v) -
v.alpha*Int_Q_E(gamma.cell[i_2], mas_u, v, n.segment);
Phi_M[i_2] = v.const_C*sin(theta.cell[i_1])*g_M(gamma.cell[i_2],v) +
v.alpha*Int_Q_M(gamma.cell[i_2], mas_u, v, n.segment);
}
for (i_2 = 1; i_2 < n.gamma; i_2++)
{
if ((Phi_E[i_2] * Phi_E[i_2 - 1] <= 0.0) &&
(Phi_M[i_2] * Phi_M[i_2 - 1] <= 0.0))
{
mas_u = iteration((gamma.cell[i_2] + gamma.cell[i_2 - 1]) / 2,
theta.cell[i_1], s, s_, v, n);
toFile(mas_u, s, (gamma.cell[i_2] + gamma.cell[i_2 - 1]) / 2,
theta.cell[i_1], n.segment, "Solution_3.txt");
}
}
}

```

```

}
delete[] s, s_, gamma.cell, theta.cell, Phi_E, Phi_M,
mas_u, u_Int, mas_u_, u_Int_;
}

```

Файл Matrix.h

```

#ifndef MATRIX_H
#define MATRIX_H
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <stdlib.h>
#include <iomanip>
#include <string>
#include "Structs.h"
using namespace std;
void fromFile(Values_1 &v, Split_1 &n, Amplitude &a, char *s);
void toFile(double *A1, double *A2, int n, string s);
void fromFile(Values_2 &v, Split_2 &n, EigenValues &a1,
EigenValues &a2, char*s);
void toFile(CoupledFuncions *A, double *x, double gamma_1,
double gamma_2, int n, string s);
void fromFile(Values_3 &v, Split_3 &n, ArrayOf &a1,
ArrayOf &a2, char *s);
void toFile(EigenFuncions *A, double* x, double gamma,
double theta, int n, string s);
#endif

```

Файл Matrix.cpp

```

#include "Matrix.h"

void fromFile(Values_1 &v, Split_1 &n, Amplitude &a, char*s)
{
double c;
int i, j, p = 0;
FILE* fin;
fopen_s(&fin, s, "r");
fscanf_s(fin, "%lg", &v.alpha);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.beta);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.thickness);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.epsilon_1);

```

```

fscanf_s(fin, "%lg", &v.epsilon_2);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.epsilon_3);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.gamma);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.waveNumber);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.error);
fscanf_s(fin, "%i", &n.segment);
fscanf_s(fin, "%i", &n.ampOfIncField);
fscanf_s(fin, "%lg", &a.begin);
fscanf_s(fin, "%lg", &a.end);
fclose(fin);
cout << "The file " << s << " was read" << endl;
cout << endl;
cout << "alpha =\t\t" << v.alpha << endl;
cout << "beta =\t\t" << v.beta<< endl;
cout << "thickness =\t" << v.thickness << endl;
cout << "epsilon_1 =\t" << v.epsilon_1 << endl;
cout << "epsilon_2 =\t" << v.epsilon_2 << endl;
cout << "epsilon_3 =\t" << v.epsilon_3 << endl;
cout << "gamma =\t\t" << v.gamma << endl;
cout << "waveNumber =\t" << v.waveNumber << endl;
cout << "error =\t\t" << v.error << endl;
cout << endl;
}

void toFile(double *A1, double *A2, int n, string s)
{
float c;
int i, j, p = 0;
ofstream fout;
fout.open(s);
for (i = 0; i<n; i++)
{
c = (float)(A1[i]);
fout << c;
fout << "\t";
c = (float)(A2[i]);
fout << c;
fout << "\n";
}
fout.close();
cout << "Solutions were written to file " << s << endl;

```

```

cout << endl;
}
void fromFile(Values_2 &v, Split_2 &n, EigenValues &a1,
EigenValues &a2, char*s)
{
double c;
int i, j, p = 0;
FILE* fin;
fopen_s(&fin, s, "r");
fscanf_s(fin, "%lg", &v.alpha);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.beta);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.thickness);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.epsilon_1);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.epsilon_2);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.epsilon_3);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.const_1);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.const_2);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.tau_1);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.tau_2);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.error);
fscanf_s(fin, "%i", &n.segment);
fscanf_s(fin, "%i", &n.gamma_1);
fscanf_s(fin, "%i", &n.gamma_2);
fscanf_s(fin, "%lg", &a1.begin_gamma_1);
fscanf_s(fin, "%lg", &a1.end_gamma_1);
fscanf_s(fin, "%lg", &a1.begin_gamma_2);
fscanf_s(fin, "%lg", &a1.end_gamma_2);
fscanf_s(fin, "%lg", &a2.begin_gamma_1);
fscanf_s(fin, "%lg", &a2.end_gamma_1);
fscanf_s(fin, "%lg", &a2.begin_gamma_2);
fscanf_s(fin, "%lg", &a2.end_gamma_2);
fclose(fin);
cout << "The file " << s << " was read" << endl;
cout << endl;
cout << "alpha =\t\t" << v.alpha << endl;
cout << "beta =\t\t" << v.beta << endl;
cout << "thickness =\t" << v.thickness << endl;
cout << "epsilon_1 =\t" << v.epsilon_1 << endl;
cout << "epsilon_2 =\t" << v.epsilon_2 << endl;
cout << "epsilon_3 =\t" << v.epsilon_3 << endl;

```

```

cout << "A_1 =\t\t" << v.const_1 << endl;
cout << "A_2 =\t\t" << v.const_2 << endl;
cout << "waveNumber_1 =\t" << v.tau_1 << endl;
cout << "waveNumber_2 =\t" << v.tau_2 << endl;
cout << "error =\t\t" << v.error << endl;
cout << endl;
}

void toFile(CoupledFuncions *A, double *x, double gamma_1,
double gamma_2, int n, string s)
{
float c;
int i, j, p = 0;
ofstream fout;
cout << "Have written" << endl;
fout.open(s);
c = (float)(gamma_1);
fout << "gamma_1 = ";
fout << c;
fout << "\t\t";
fout << "gamma_2 = ";
c = (float)(gamma_2);
fout << c;
fout << "\n";
fout << "\n";
fout << "x\t\tE_1y\t\tE_2z\n";
for (i = 0; i<n; i++)
{
c = (float)(x[i]);
fout << setprecision(4) << c;
fout << "\t\t";
c = (float)(A[i].E_1y);
fout << setprecision(4) << c;
fout << "\t\t";
c = (float)(A[i].E_2z);
fout << setprecision(4) << c;
fout << "\n";
}
fout << "\n";
fout.close();
cout << "Solutions were written to file " << s << endl;

```

```

cout << endl;
}
void fromFile(Values_3 &v, Split_3 &n, ArrayOf &a1,
ArrayOf &a2, char*s)
{
double c;
int i, j, p = 0;
FILE* fin;
fopen_s(&fin, s, "r");
fscanf_s(fin, "%lg", &v.alpha);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.beta);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.thickness);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.epsilon_1);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.epsilon_2);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.const_C);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.waveNumber);
fscanf_s(fin, "%lg", &v.error);
fscanf_s(fin, "%i", &n.segment);
fscanf_s(fin, "%i", &n.gamma);
fscanf_s(fin, "%i", &n.theta);
fscanf_s(fin, "%lg", &a1.begin);
fscanf_s(fin, "%lg", &a1.end);
fscanf_s(fin, "%lg", &a2.begin);
fscanf_s(fin, "%lg", &a2.end);
fclose(fin);
cout << "The file " << s << " was read" << endl;
cout << endl;
cout << "alpha =\t\t" << v.alpha << endl;
cout << "beta =\t\t" << v.beta << endl;
cout << "thickness =\t" << v.thickness << endl;
cout << "epsilon_1 =\t" << v.epsilon_1 << endl;
cout << "epsilon_2 =\t" << v.epsilon_2 << endl;
cout << "waveNumber =\t" << v.waveNumber << endl;
cout << "C =\t\t" << v.const_C << endl;
cout << "error =\t\t" << v.error << endl;
cout << endl;
}
void toFile(EigenFuncions *A, double *x, double gamma,
double theta, int n, string s)
{

```

```

float c;
int i, j, p = 0;
ofstream fout;
cout << "Have written" << endl;
fout.open(s);
c = (float)(gamma);
fout << "gamma = ";
fout << c;
fout << "\t\t";
fout << "theta = ";
c = (float)(theta);
fout << c;
fout << "\n";
fout << "\n";
fout << "x\t\tE_x\t\tE_y\t\tE_z\n";
for (i = 0; i<n; i++)
{
c = (float)(x[i]);
fout << setprecision(5) << c;
fout << "\t\t";
c = (float)(A[i].E_x);
fout << c;
fout << "\t\t";
c = (float)(A[i].E_y);
fout << c;
fout << "\t\t";
c = (float)(A[i].E_z);
fout << c;
fout << "\n";
}
fout << "\n";
fout.close();
cout << "Solutions were written to file " << s << endl;
cout << endl;
}

```

Файл Integrals.h

```

#ifndef INTEGRALS_H
#define INTEGRALS_H
#include "Structs.h"
#include "P1_VariousFunctions.h"

```

```

#include "P2_VariousFunctions.h"
#include "P3_VariousFunctions.h"
double maximumOf(double x1, double x2);
double maximumOf(double x1, double x2, double x3);
double maximumOf(double x1, double x2, double x3, double x4,
double x5, double x6);
double Int_Q_1(double s_, Function *u, Values_1 v, int s);
double Int_Ref( Function *u, Values_1 v, int s);
double Int_Tra(Function *u, Values_1 v, int s);
double norma(Function *u1, Function *u2, Values_1 v, int s);
double norma_1(Values_1 v, Split_1 s);
double Int_1(double s_, double gamma, CoupledFuncfions *u,
Values_2 v, Split_2 s);
double Int_2(double s_, double gamma, CoupledFuncfions *u,
Values_2 v, Split_2 s);
double Int_Q_1(double gamma, CoupledFuncfions *u,
Values_2 v, Split_2 s);
double Int_Q_2(double gamma, CoupledFuncfions *u,
Values_2 v, Split_2 s);
double norma(CoupledFuncfions *u1, CoupledFuncfions *u2,
Values_2 v, Split_2 s);
double norma_N1(double gamma_1, double gamma_2, Values_2 v,
Split_2 s)
double Int_11(double s_, double gamma, EigenFuncfions *u,
Values_3 v, int m_1);
double Int_13(double s_, double gamma, EigenFuncfions *u,
Values_3 v, int m_1);
double Int_22(double s_, double gamma, EigenFuncfions *u,
Values_3 v, int m_1);
double Int_31(double s_, double gamma, EigenFuncfions *u,
Values_3 v, int m_1);
double Int_33(double s_, double gamma, EigenFuncfions *u,
Values_3 v, int m_1);
double Int_Q_E(double gamma, EigenFuncfions *u, Values_3 v,
int m_1);
double Int_Q_M(double gamma, EigenFuncfions *u, Values_3 v,
int m_1);
double norma_N1(double gamma, Values_3 v, Split_3 s);
double norma(EigenFuncfions *u1, EigenFuncfions *u2,
Values_3 v, Split_3 s);

```

```
#endif
```

Файл Integrals.cpp

```
#include "Integrals.h"
```

```
double maximumOf(double x1, double x2)
{
    return (x1 < x2) ? x2 : x1;
}

double maximumOf(double x1, double x2, double x3)
{
    return (maximumOf(x1, x2) < x3) ? x3 : maximumOf(x1, x2);
}

double maximumOf(double x1, double x2, double x3, double x4,
double x5, double x6)
{
    return (maximumOf(x1, x2, x3) < maximumOf(x4, x5, x6)) ?
    maximumOf(x4, x5, x6) : maximumOf(x1, x2, x3);
}

// Задача P1
double Int_Q_1(double s_, Function *u, Values_1 v, int s){
    int i, m_1 = s ;
    double *x = new double[m_1+ 1];
    double sum = 0;
    // Разбиение по x
    for (i = 0; i <= m_1; i++)
        x[i] = i*v.thickness / m_1;
    for (i = 0; i <= m_1; i++)
        sum += Q_1(x[i], s_, v)*f_u(u[i], v)*(v.thickness / m_1);
    delete[] x;
    return sum;
}

double Int_Ref(Function *u, Values_1 v, int s){
    int i, m_1 = s;
    double *x = new double[m_1 + 1];
    double sum = 0;
    // Разбиение по x
    for (i = 0; i <= m_1; i++)
        x[i] = i*v.thickness / m_1;
    for (i = 0; i <= m_1; i++)
        sum += Q_Ref(x[i], v)*f_u(u[i], v)*(v.thickness / m_1);
```

```

delete[] x;
return sum;
}
double Int_Tra(Function *u, Values_1 v, int s){
int i, m_1 = s;
double *x = new double[m_1 + 1];
double sum = 0;
// Разбиение по x
for (i = 0; i <= m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / m_1;
for (i = 0; i <= m_1; i++)
sum += Q_Tra(x[i], v)*f_u(u[i], v)*(v.thickness / m_1);
delete[] x;
return sum;
}
double norma(Function *u1, Function *u2, Values_1 v, int s){
int i, m_1 = s;
double *x = new double[m_1 + 1];
double sum = 0;
// Разбиение по x
for (i = 0; i <= m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / m_1;
for (i = 0; i <= m_1; i++)
sum += (u1[i].E_y - u2[i].E_y) *(u1[i].E_y - u2[i].E_y) *
(v.thickness / m_1);
delete[] x;
return sqrt(sum);
}
double norma_1(Values_1 v, Split_1 s)
{
int i, j, m_1 = s.segment;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0.0 , max = 0.0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / m_1;
for (i = 0; i < s.segment; i++)
{
sum = 0.0;
for (j = 0; j < m_1; j++)

```

```

sum += fabs(Q_1(x[i], x[j], v)) * (v.thickness / m_1);
if (max < sum)
max = sum;
}
delete[] x;
return 3 * v.alpha * max / (2 * v.beta);
}
// Задача P2
double Int_1(double s_, double gamma, CoupledFuncfions *u,
Values_2 v, Split_2 s)
{
int i, m_1 = s.segment;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
sum += K_1(x[i], s_, gamma, v)*f_u(u[i], v)*
(v.thickness / (m_1 - 1));
delete[] x;
return sum;
}
double Int_2(double s_, double gamma, CoupledFuncfions *u,
Values_2 v, Split_2 s)
{
int i, m_1 = s.segment;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
sum += K_2(x[i], s_, gamma, v)*f_v(u[i], v)*
(v.thickness / (m_1 - 1));
delete[] x;
return sum;
}
double Int_Q_1(double gamma, CoupledFuncfions *u,
Values_2 v, Split_2 s)

```

```

{
int i, m_1 = s.segment;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
sum += ((kappa_13(gamma, v)*cos(kappa_1(gamma, v)*v.thickness) -
kappa_1(gamma, v)*sin(kappa_1(gamma, v)*v.thickness))*
cos(kappa_1(gamma, v)*x[i]) - kappa_13(gamma, v)*
cos(kappa_1(gamma, v)*(x[i] - v.thickness)))*
f_u(u[i], v)* (v.thickness / (m_1 - 1)));
delete[] x;
return sum;
}

double Int_Q_2(double gamma, CoupledFuncfions *u,
Values_2 v, Split_2 s)
{
int i, m_1 = s.segment;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
sum += ((kappa_23(gamma, v)*cos(kappa_2(gamma, v)*v.thickness) -
kappa_2(gamma, v)*sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness))*
cos(kappa_2(gamma, v)*x[i]) - kappa_23(gamma, v)*
cos(kappa_2(gamma, v)*(x[i] - v.thickness)))*
f_v(u[i], v)* (v.thickness / (m_1 - 1)));
delete[] x;
return sum;
}

double norma(CoupledFuncfions *u1, CoupledFuncfions *u2,
Values_2 v, Split_2 s)
{
int i, j, m_1 = s.segment;
double *x = new double[m_1];
double sum_1 = 0.0, sum_2 = 0.0, max = 0.0;

```

```

// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < s.segment; i++)
{
sum_1 += (u1[i].E_1y - u2[i].E_1y)*(u1[i].E_1y - u2[i].E_1y)*
(v.thickness / (m_1 - 1));
sum_2 += (u1[i].E_2z - u2[i].E_2z)*(u1[i].E_2z - u2[i].E_2z)*
(v.thickness / (m_1 - 1));
}
max = maximumOf(sum_1, sum_2);
delete[] x;
return sqrt(max);
}

double norma_N1(double gamma_1, double gamma_2,
Values_2 v, Split_2 s)
{
int i, j, m_1 = s.segment + 1;
double *x = new double[m_1];
double sum_1 = 0.0, sum_2 = 0.0, max = 0.0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < s.segment; i++)
{
sum_1 = 0.0;
sum_2 = 0.0;
for (j = 0; j < m_1; j++)
{
sum_1 += fabs(K_1(x[i], x[j], gamma_1, v)) *
(v.thickness / (m_1 - 1));
sum_2 += fabs(K_2(x[i], x[j], gamma_2, v)) *
(v.thickness / (m_1 - 1));
}
max = maximumOf(max, sum_1, sum_2);
}
delete[] x;
return 13 * v.alpha * max / (4 * v.beta);
}

// Задача P3

```

```

double Int_11(double s_, double gamma, EigenFuncfions *u,
Values_3 v, int m_1)
{
int i;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
{
sum += K_11(x[i], s_, gamma, v) * norma(u[i], v) * u[i].E_x *
(v.thickness / (m_1 - 1));
}
delete[] x;
return sum;
}

double Int_13(double s_, double gamma, EigenFuncfions *u,
Values_3 v, int m_1)
{
int i;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
{
sum += K_13(x[i], s_, gamma, v) * norma(u[i], v) * u[i].E_z *
(v.thickness / (m_1 - 1));
}
delete[] x;
return sum;
}

double Int_22(double s_, double gamma, EigenFuncfions *u,
Values_3 v, int m_1)
{
int i;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;

```

```

// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
{
sum += K_22(x[i], s_, gamma, v) * norma(u[i], v) * u[i].E_y *
(v.thickness / (m_1 - 1));
}
delete[] x;
return sum;
}

double Int_31(double s_, double gamma, EigenFuncfions *u,
Values_3 v, int m_1)
{
int i;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
{
sum += K_31(x[i], s_, gamma, v) * norma(u[i], v) * u[i].E_x *
(v.thickness / (m_1 - 1));
}
delete[] x;
return sum;
}

double Int_33(double s_, double gamma, EigenFuncfions *u,
Values_3 v, int m_1)
{
int i;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
{
sum += K_33(x[i], s_, gamma, v) * norma(u[i], v) * u[i].E_z *

```

```

(v.thickness / (m_1 - 1));
//cout << u[i].E_z << endl;
}
delete[] x;
return sum;
}

double Int_Q_E(double gamma,EigenFuncfions *u,Values_3 v,int m_1)
{
int i;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
{
if (gamma*gamma<v.epsilon_2)
sum += v.waveNumber*sin(kappa_2(gamma, v)*x[i])*norma(u[i], v)*
u[i].E_y* (v.thickness / (m_1 - 1));
else
sum += v.waveNumber*sinh(kappa_2(gamma, v)*x[i])*norma(u[i], v)*
u[i].E_y* (v.thickness / (m_1 - 1));
}
delete[] x;
return sum;
}

double Int_Q_M(double gamma,EigenFuncfions *u,Values_3 v,int m_1)
{
int i;
double *x = new double[m_1];
double sum = 0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < m_1; i++)
{
if (gamma*gamma<v.epsilon_2)
sum += (gamma*kappa_1(gamma, v)*cos(kappa_2(gamma, v)*x[i])*
norma(u[i], v)*u[i].E_x +
kappa_1(gamma, v)*kappa_2(gamma, v)*sin(kappa_2(gamma, v)*x[i])*

```

```

norma(u[i], v)*u[i].E_z)*(v.thickness / (m_1 - 1));
else
sum += (gamma*kappa_1(gamma, v)*cosh(kappa_2(gamma, v)*x[i])*
norma(u[i], v)*u[i].E_x -
kappa_1(gamma, v)*kappa_2(gamma, v)*sinh(kappa_2(gamma, v)*x[i])*
norma(u[i], v)*u[i].E_z)*(v.thickness / (m_1 - 1));
}
delete[] x;
return sum;
}

double norma_N1(double gamma, Values_3 v, Split_3 s)
{
int i, j, m_1 = s.segment;
double *x = new double[m_1];
double sum_11 = 0.0, sum_13 = 0.0, sum_31 = 0.0,
sum_33 = 0.0, sum_22 = 0.0, max = 0.0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < s.segment; i++)
{
sum_11 = 0.0; sum_13 = 0.0;
sum_22 = 0.0;
sum_31 = 0.0; sum_33 = 0.0;
for (j = 0; j < m_1; j++)
{
sum_11 += fabs(K_11(x[i], x[j], gamma, v)) * (v.thickness/(m_1 - 1));
sum_13 += fabs(K_13(x[i], x[j], gamma, v)) * (v.thickness/(m_1 - 1));
sum_22 += fabs(K_22(x[i], x[j], gamma, v)) * (v.thickness/(m_1 - 1));
sum_31 += fabs(K_31(x[i], x[j], gamma, v)) * (v.thickness/(m_1 - 1));
sum_33 += fabs(K_33(x[i], x[j], gamma, v)) * (v.thickness/(m_1 - 1));
}
max = maximumOf(max, fabs(sum_11 - 1 / v.epsilon_2), sum_13,
sum_22, sum_31, sum_33);
}
delete[] x;
return max;
}

double norma(EigenFuncions *u1, EigenFuncions *u2,
Values_3 v, Split_3 s)

```

```

{
int i, j, m_1 = s.segment;
double *x = new double[m_1];
double sum_1 = 0.0, sum_2 = 0.0, sum_3 = 0.0, max = 0.0;
// Разбиение по s
for (i = 0; i < m_1; i++)
x[i] = i*v.thickness / (m_1 - 1);
for (i = 0; i < s.segment; i++)
{
sum_1 += (u1[i].E_x - u2[i].E_x)*(u1[i].E_x - u2[i].E_x)*
(v.thickness / (m_1 - 1));
sum_2 += (u1[i].E_y - u2[i].E_y)*(u1[i].E_y - u2[i].E_y)*
(v.thickness / (m_1 - 1));
sum_3 += (u1[i].E_z - u2[i].E_z)*(u1[i].E_z - u2[i].E_z)*
(v.thickness / (m_1 - 1));
}
max = maximumOf(sum_1, sum_2, sum_3);
delete[] x;
return sqrt(max);
}

```

Файл P1_VariousFunctions.h

```

#ifndef P1_VF_H
#define P1_VF_H
#include <math.h>
#include "Structs.h"
Function* isEqualTo(Function* u, int n);
Function* isEqualToZero(int n);
double kappa_2(Values_1 v);
double kappa_1(Values_1 v);
double kappa_3(Values_1 v);
double G(double x, double s, Values_1 v);
double dRef(Values_1 v);
double dInc(Values_1 v);
double dTra(Values_1 v);
double dTraRef(Values_1 v);
double Q_1(double x, double s, Values_1 v);
double Q_Ref(double x, Values_1 v);
double Q_Tra(double x, Values_1 v);
double Phi_1(double x, Values_1 v);
double Phi_2(double x, Values_1 v);

```

```
double f_u(Function u, Values_1 v);
double q_2(double s, double aInc, Values_1 v);
#endif
```

Файл P1_VariousFunctions.cpp

```
#include "P1_VariousFunctions.h"
```

```
Function* isEqualTo(Function* u, int n)
{
    int i;
    Function* resultFunction = new Function[n];
    for (i = 0; i < n; i++)
        resultFunction[i] = u[i];
    return resultFunction;
}

Function* isEqualToZero(int n)
{
    int i;
    Function* resultFunction = new Function[n];
    for (i = 0; i < n; i++)
        resultFunction[i].E_y = 0.0;
    return resultFunction;
}

double kappa_2(Values_1 v)
{
    return sqrt(v.waveNumber*v.epsilon_2 - v.gamma*v.gamma);
}

double kappa_1(Values_1 v)
{
    return sqrt(-v.waveNumber*v.epsilon_1 + v.gamma*v.gamma);
}

double kappa_3(Values_1 v)
{
    return sqrt(-v.waveNumber*v.epsilon_3 + v.gamma*v.gamma);
}

double G(double x, double s, Values_1 v)
{
    if (x >= s)
        return -cos(kappa_2(v)*(x - v.thickness))*cos(kappa_2(v)*s) /
            (kappa_2(v)*sin(kappa_2(v)*v.thickness));
```

```

if (x < s)
return -cos(kappa_2(v)*x)*cos(kappa_2(v)*(s - v.thickness)) /
(kappa_2(v)*sin(kappa_2(v)*v.thickness));
}
double dRef(Values_1 v)
{
return 1 + kappa_1(v)*G(v.thickness, v.thickness, v);
}
double dInc(Values_1 v)
{
return 1 - kappa_1(v)*G(v.thickness, v.thickness, v);
}
double dTra(Values_1 v)
{
return 1 + kappa_3(v)*G(0, 0, v);
}
double dTraRef(Values_1 v)
{
return 1 - kappa_1(v)*kappa_3(v)*G(0, v.thickness, v)*
G(0, v.thickness, v) / (dTra(v) * dRef(v));
}
double Q_1(double x, double s, Values_1 v)
{
double Dendenominator=sin(kappa_2(v)*v.thickness)*((kappa_2(v)*
kappa_2(v) - kappa_1(v)*kappa_3(v))*sin(kappa_2(v)*v.thickness) -
kappa_2(v)*(kappa_1(v) + kappa_3(v))*cos(kappa_2(v)*v.thickness));
double Numerator1 = kappa_2(v)*sin(kappa_2(v)*v.thickness) -
kappa_3(v)*cos(kappa_2(v)*v.thickness);
double Numerator2 = kappa_2(v)*sin(kappa_2(v)*v.thickness) -
kappa_1(v)*cos(kappa_2(v)*v.thickness);
double C_G_x_h = (kappa_1(v)*cos(kappa_2(v)*s)*Numerator1 +
kappa_1(v)*kappa_3(v)*cos(kappa_2(v)*(s - v.thickness))) /
Dendenominator;
double C_G_x_0 = (kappa_1(v)*kappa_3(v)*cos(kappa_2(v)*s) +
kappa_3(v)*cos(kappa_2(v)*(s - v.thickness))*Numerator2) /
Dendenominator;
return G(x,s,v) + C_G_x_h*G(x,v.thickness,v) + C_G_x_0*G(x,0,v);
}
double Q_Ref(double x, Values_1 v)
{

```

```

double Dendenominator = ((kappa_2(v)*kappa_2(v) -
kappa_1(v)*kappa_3(v))*sin(kappa_2(v)*v.thickness) -
kappa_2(v)*(kappa_1(v) + kappa_3(v))*cos(kappa_2(v)*v.thickness));
double Numerator1 = kappa_2(v)*sin(kappa_2(v)*v.thickness) -
kappa_3(v)*cos(kappa_2(v)*v.thickness);
double C_G_x_h = kappa_2(v)*Numerator1 / Dendenominator;
double C_G_x_0 = kappa_2(v)*kappa_3(v)/ Dendenominator;
return C_G_x_h*G(x, v.thickness, v) + C_G_x_0*G(x, 0.0, v);
}

double Q_Tra(double x, Values_1 v)
{
double Dendenominator = ((kappa_2(v)*kappa_2(v) -
kappa_1(v)*kappa_3(v))*sin(kappa_2(v)*v.thickness) -
kappa_2(v)*(kappa_1(v) + kappa_3(v))*cos(kappa_2(v)*v.thickness));
double Numerator2 = kappa_2(v)*sin(kappa_2(v)*v.thickness) -
kappa_1(v)*cos(kappa_2(v)*v.thickness);
double C_G_x_0 = kappa_2(v)*Numerator2 / Dendenominator;
double C_G_x_h = kappa_2(v)*kappa_1(v) / Dendenominator;
return C_G_x_h*G(x, v.thickness, v) + C_G_x_0*G(x, 0.0, v);
}

double Phi_1(double x, Values_1 v)
{
return dTra(v)*G(x, v.thickness, v) -
kappa_3(v)*G(0, v.thickness, v)*G(x, 0, v);
}

double Phi_2(double x, Values_1 v)
{
return dRef(v)*G(x, 0, v) -
kappa_1(v)*G(0, v.thickness, v)*G(x, v.thickness, v);
}

double f_u(Function u, Values_1 v)
{
return u.E_y*u.E_y*u.E_y / (1 + v.beta*u.E_y*u.E_y);
}

double q_2(double s, double aInc, Values_1 v)
{
double Dendenominator = sin(kappa_2(v)*v.thickness)*
((kappa_2(v)*kappa_2(v) -
kappa_1(v)*kappa_3(v))*sin(kappa_2(v)*v.thickness) -
kappa_2(v)*(kappa_1(v) + kappa_3(v))*cos(kappa_2(v)*v.thickness));

```

```

double Numerator1 = kappa_2(v)*sin(kappa_2(v)*v.thickness) -
kappa_3(v)*cos(kappa_2(v)*v.thickness);
double C_aInc = (kappa_1(v)*cos(kappa_2(v)*s)*Numerator1 +
kappa_1(v)*kappa_3(v)*cos(kappa_2(v)*(s - v.thickness))) /
Dendenominator;
return 2*C_aInc*aInc;
}

```

Файл P2_VariousFunctions.h

```

#ifndef P2_VF_H
#define P2_VF_H
#include <iostream>
#include <math.h>
#include "Structs.h"
using namespace std;
CoupledFunctions* isEqualTo0(int n);
CoupledFunctions* isEqualTo(CoupledFunctions* u, int n);
double kappa_1(double gamma_, Values_2 v);
double kappa_11(double gamma_, Values_2 v);
double kappa_13(double gamma_, Values_2 v);
double kappa_2(double gamma_, Values_2 v);
double kappa_21(double gamma_, Values_2 v);
double kappa_23(double gamma_, Values_2 v);
double p_1(double gamma, Values_2 v);
double p_2(double gamma, Values_2 v);
double h_1(double s, double gamma, Values_2 v);
double h_2(double s, double gamma, Values_2 v);
double G1(double x, double s, double gamma, Values_2 v);
double G2(double x, double s, double gamma, Values_2 v);
double K_1(double x, double s, double gamma, Values_2 v);
double K_2(double x, double s, double gamma, Values_2 v);
double f_u(CoupledFunctions u, Values_2 v);
double f_v(CoupledFunctions u, Values_2 v);
double g_1(double gamma, Values_2 v);
double g_2(double gamma, Values_2 v);
#endif

```

Файл P2_VariousFunctions.cpp

```

#include "P2_VariousFunctions.h"

```

```

CoupledFuncions* isEqualTo0(int n)
{
    int i;
    CoupledFuncions* resultFunction = new CoupledFuncions[n];
    for (i = 0; i < n; i++)
    {
        resultFunction[i].E_1y = 0.0;
        resultFunction[i].E_2z = 0.0;
    }
    return resultFunction;
}

CoupledFuncions* isEqualTo(CoupledFuncions* u, int n)
{
    int i;
    CoupledFuncions* resultFunction = new CoupledFuncions[n];
    for (i = 0; i < n; i++)
    {
        resultFunction[i] = u[i];
    }
    return resultFunction;
}

double kappa_1(double gamma_, Values_2 v)
{
    return sqrt(v.tau_1*v.epsilon_2 - gamma_*gamma_);
}

double kappa_11(double gamma_, Values_2 v)
{
    return sqrt(-v.tau_1*v.epsilon_1 + gamma_*gamma_);
}

double kappa_13(double gamma_, Values_2 v)
{
    return sqrt(-v.tau_1*v.epsilon_3 + gamma_*gamma_);
}

double kappa_2(double gamma_, Values_2 v)
{
    return sqrt(v.tau_2*v.epsilon_2 - gamma_*gamma_);
}

double kappa_21(double gamma_, Values_2 v)
{
    return sqrt(-v.tau_2*v.epsilon_1 + gamma_*gamma_);
}

```

```

}
double kappa_23(double gamma_, Values_2 v)
{
return sqrt(-v.tau_2*v.epsilon_3 + gamma_*gamma_);
}
double p_1(double gamma, Values_2 v)
{
return kappa_13(gamma, v) /
    (kappa_1(gamma, v)*sin(kappa_1(gamma, v)*v.thickness) -
    kappa_13(gamma, v)*cos(kappa_1(gamma, v)*v.thickness));
}
double p_2(double gamma, Values_2 v)
{
return kappa_23(gamma, v) /
    (kappa_2(gamma, v)*sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness) -
    kappa_23(gamma, v)*cos(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}

double h_1(double s, double gamma, Values_2 v)
{
return v.const_1 * kappa_11(gamma, v)*(cos(kappa_1(gamma, v)*s) +
p_1(gamma, v)*cos(kappa_1(gamma, v)*(s - v.thickness))) /
    (kappa_1(gamma, v)*sin(kappa_1(gamma, v)*v.thickness));
}
double h_2(double s, double gamma, Values_2 v)
{
return v.const_2 * kappa_21(gamma, v)*(cos(kappa_2(gamma, v)*s) +
p_2(gamma, v)*cos(kappa_2(gamma, v)*(s - v.thickness))) /
    (kappa_2(gamma, v)*sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}
double G1(double x, double s, double gamma, Values_2 v)
{
if (fabs(sin(kappa_1(gamma, v)*v.thickness)) < 0.00001)
{
cout << "sin = 0" << endl;
return 0;
}
else
{
if (x >= s) {

```

```

return -cos(kappa_1(gamma, v)*(x - v.thickness))*
cos(kappa_1(gamma, v)*s) /
(kappa_1(gamma, v)*sin(kappa_1(gamma, v)*v.thickness));
}
if (x < s) {
return -cos(kappa_1(gamma, v)*x)*
cos(kappa_1(gamma, v)*(s - v.thickness)) /
(kappa_1(gamma, v)*sin(kappa_1(gamma, v)*v.thickness));
}
}
}
double G2(double x, double s, double gamma, Values_2 v)
{
if (fabs(sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness)) < 0.00001)
{
cout << "sin = 0" << endl;
return 0;
}
else
{
if (x >= s) {
return -cos(kappa_2(gamma, v)*(x - v.thickness))*
cos(kappa_2(gamma, v)*s) /
(kappa_2(gamma, v)*sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}
if (x < s) {
return -cos(kappa_2(gamma, v)*x)*
cos(kappa_2(gamma, v)*(s - v.thickness)) /
(kappa_2(gamma, v)*sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}
}
}
double K_1(double x, double s, double gamma, Values_2 v)
{
return v.tau_1*G1(x, s, gamma, v) +
v.tau_1*p_1(gamma, v)*cos(kappa_1(gamma, v)*(s - v.thickness))*
G1(x, 0, gamma, v);
}
double K_2(double x, double s, double gamma, Values_2 v)
{

```

```

return v.tau_2*G2(x, s, gamma, v) +
v.tau_2*p_2(gamma, v)*cos(kappa_2(gamma, v)*(s - v.thickness))*
G2(x, 0, gamma, v);
}
double f_u(CoupledFuncfions u, Values_2 v)
{
return u.E_1y*(u.E_1y*u.E_1y + u.E_2z* u.E_2z) /
(1 + v.beta*(u.E_1y*u.E_1y + u.E_2z* u.E_2z));
}
double f_v(CoupledFuncfions u, Values_2 v)
{
return u.E_2z*(u.E_1y*u.E_1y + u.E_2z* u.E_2z) /
(1 + v.beta*(u.E_1y*u.E_1y + u.E_2z* u.E_2z));
}
double g_1(double gamma, Values_2 v)
{
return (kappa_1(gamma, v)*kappa_1(gamma, v) -
kappa_11(gamma, v)*kappa_13(gamma, v))*
sin(kappa_1(gamma, v)*v.thickness) -
kappa_1(gamma, v)*(kappa_11(gamma, v) + kappa_13(gamma, v))*
cos(kappa_1(gamma, v)*v.thickness);
}
double g_2(double gamma, Values_2 v)
{
return (kappa_2(gamma, v)*kappa_2(gamma, v) -
kappa_21(gamma, v)*kappa_23(gamma, v))*
sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness) -
kappa_2(gamma, v)*(kappa_21(gamma, v) + kappa_23(gamma, v))*
cos(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}

```

Файл P3_VariousFunctions.h

```

#ifndef P3_VF_H
#define P3_VF_H
#include <iostream>
#include <math.h>
#include "Structs.h"
using namespace std;
EigenFuncfions* isEqualTo(EigenFuncfions* u, int n);
EigenFuncfions* isEqualToNull(int n);
double kappa_1(double gamma_, Values_3 v);

```

```

double kappa_2(double gamma_, Values_3 v);
double h_1(double s, double gamma, Values_3 v);
double h_2(double s, double gamma, Values_3 v);
double G(double x, double s, double gamma, Values_3 v);
double G_ds(double x, double s, double gamma, Values_3 v);
double G_dx(double x, double s, double gamma, Values_3 v);
double G_dxs(double x, double s, double gamma, Values_3 v);
double K_11(double x, double s, double gamma, Values_3 v);
double K_13(double x, double s, double gamma, Values_3 v);
double K_22(double x, double s, double gamma, Values_3 v);
double K_31(double x, double s, double gamma, Values_3 v);
double K_33(double x, double s, double gamma, Values_3 v);
double norma(EigenFuncfions u, Values_3 v);
double g_E(double gamma, Values_3 v);
double g_M(double gamma, Values_3 v);
#endif

```

Файл P3_VariousFunctions.cpp

```
#include "P3_VariousFunctions.h"
```

```

EigenFuncfions* isEqualTo(EigenFuncfions* u, int n)
{
    int i;
    EigenFuncfions* resultFunction = new EigenFuncfions[n];
    for (i = 0; i < n; i++)
        resultFunction[i] = u[i];
    return resultFunction;
}

EigenFuncfions* isEqualToNull(int n)
{
    int i;
    EigenFuncfions* resultFunction = new EigenFuncfions[n];
    for (i = 0; i < n; i++)
    {
        resultFunction[i].E_x = 0.0;
        resultFunction[i].E_y = 0.0;
        resultFunction[i].E_z = 0.0;
    }
    return resultFunction;
}

double kappa_2(double gamma_, Values_3 v)

```

```

{
return sqrt(fabs(v.waveNumber*v.epsilon_2 - gamma_*gamma_));
}
double kappa_1(double gamma_, Values_3 v)
{
return sqrt(gamma_*gamma_ - v.waveNumber*v.epsilon_1);
}
double h_1(double s, double gamma, Values_3 v)
{
if (gamma*gamma<v.epsilon_2)
return gamma * cos(kappa_2(gamma, v)*s) /
(kappa_2(gamma, v)*sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
else
return - gamma * cosh(kappa_2(gamma, v)*s) /
(kappa_2(gamma, v)*sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}
double h_2(double s, double gamma, Values_3 v)
{
if (gamma*gamma<v.epsilon_2)
return sin(kappa_2(gamma, v)*s) /
(sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
else
return sinh(kappa_2(gamma, v)*s) /
(sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}
double G(double x, double s, double gamma, Values_3 v)
{
if (gamma*gamma<v.epsilon_2)
{
if (fabs(sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness)) < 0.0001)
{
cout << "sin = 0" << endl;
return 0;
}
else
{
if (x >= s)
{
return -sin(kappa_2(gamma, v)*(x - v.thickness))*
sin(kappa_2(gamma, v)*s) /

```

```

(kappa_2(gamma, v)*sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}
if (x < s)
{
return -sin(kappa_2(gamma, v)*x)*
sin(kappa_2(gamma, v)*(s - v.thickness)) /
(kappa_2(gamma, v)*sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}
}
}
else
{
if (fabs(sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness)) < 0.0001)
{
cout << "sinh = 0" << endl;
return 0;
}
else{
if (x >= s)
{
return -sinh(kappa_2(gamma, v)*(x - v.thickness))*
sinh(kappa_2(gamma, v)*s) /
(kappa_2(gamma, v)*sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}
if (x < s)
{
return -sinh(kappa_2(gamma, v)*x)*
sinh(kappa_2(gamma, v)*(s - v.thickness)) /
(kappa_2(gamma, v)*sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}
}
}
}
double G_ds(double x, double s, double gamma, Values_3 v)
{
if (gamma*gamma<v.epsilon_2)
{
if (x > s)
{
return -sin(kappa_2(gamma, v)*(x - v.thickness))*

```

```

cos(kappa_2(gamma, v)*s) / sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}
if (x < s)
{
return -sin(kappa_2(gamma, v)*x)*
cos(kappa_2(gamma, v)*(s - v.thickness)) /
sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}
if (fabs(x-s)<0.01)
return 1.0;
}
else
{
if (x > s)
{
return -sinh(kappa_2(gamma, v)*(x - v.thickness))*
cosh(kappa_2(gamma, v)*s) / sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}
if (x < s)
{
return -sinh(kappa_2(gamma, v)*x)*
cosh(kappa_2(gamma, v)*(s - v.thickness)) /
sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}
if (x == s)
{
return -sinh(kappa_2(gamma, v)*(2 * x - v.thickness)) /
(2*sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness));
}
}
}
double G_dx(double x, double s, double gamma, Values_3 v)
{
return G_ds(s, x, gamma, v);
}
double G_dxs(double x, double s, double gamma, Values_3 v)
{
if (gamma*gamma<v.epsilon_2)
{
if (x >= s)

```

```

{
return -kappa_2(gamma, v)*cos(kappa_2(gamma, v)*
(x - v.thickness))*cos(kappa_2(gamma, v)*s) /
    sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}
if (x < s)
{
return -kappa_2(gamma, v)*cos(kappa_2(gamma, v)*x)*
cos(kappa_2(gamma, v)*(s - v.thickness)) /
    sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}
}
else
{
if (x >= s)
{
return -kappa_2(gamma, v)*cosh(kappa_2(gamma, v)*
(x - v.thickness))*cosh(kappa_2(gamma, v)*s) /
    sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}
if (x < s)
{
return -kappa_2(gamma, v)*cosh(kappa_2(gamma, v)*x)*
cosh(kappa_2(gamma, v)*(s - v.thickness)) /
    sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}
}
}
double K_11(double x, double s, double gamma, Values_3 v)
{
return gamma*gamma*G_dxs(x, s, gamma, v) /
(v.epsilon_2*(v.epsilon_2 - gamma*gamma));
}
double K_13(double x, double s, double gamma, Values_3 v)
{
return gamma*G_ds(x, s, gamma, v) / (v.epsilon_2);
}
double K_22(double x, double s, double gamma, Values_3 v)
{
return v.waveNumber*G(x, s, gamma, v);
}

```

```

}
double K_31(double x, double s, double gamma, Values_3 v)
{
return gamma*G_dx(x, s, gamma, v) / (v.epsilon_2);
}
double K_33(double x, double s, double gamma, Values_3 v)
{
return G(x, s, gamma, v)*(v.epsilon_2-gamma*gamma)/(v.epsilon_2);
}
double norma(EigenFuncfions u, Values_3 v)
{
return (u.E_x* u.E_x + u.E_y* u.E_y + u.E_z* u.E_z) /
(1 + v.beta * (u.E_x* u.E_x + u.E_y* u.E_y + u.E_z* u.E_z));
}
double g_E(double gamma, Values_3 v)
{
if (gamma*gamma<v.epsilon_2)
return kappa_2(gamma, v)*cos(kappa_2(gamma, v)*v.thickness) +
kappa_1(gamma, v)*sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
else
return kappa_2(gamma, v)*cosh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness) +
kappa_1(gamma, v)*sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}
double g_M(double gamma, Values_3 v)
{
if (gamma*gamma<v.epsilon_2)
return v.epsilon_1 * kappa_2(gamma, v) *
sin(kappa_2(gamma, v)*v.thickness) -
v.epsilon_2 * kappa_1(gamma, v) *
cos(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
else
return -v.epsilon_1 * kappa_2(gamma, v) *
sinh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness) -
v.epsilon_2 * kappa_1(gamma, v) *
cosh(kappa_2(gamma, v)*v.thickness);
}

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Свидетельства о государственной
регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018665405

**Вычислительный комплекс «Симметричные гибридные
нелинейные волны в плоском волноводе»**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Пензенский
государственный университет» (ФГБОУ ВО «Пензенский
государственный университет»)* (RU)

Авторы: *Курсеева Валерия Юрьевна (RU), Смолькин Евгений
Юрьевич (RU), Снегур Максим Олегович (RU)*



Заявка № 2018660518

Дата поступления 01 октября 2018 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 04 декабря 2018 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018665331

Вычислительный комплекс «ТЕ волны в экранированном слое, заполненном нелинейной средой»

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет» (ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет»)* (RU)

Авторы: *Валовик Дмитрий Викторович (RU), Курсеева Валерия Юрьевна (RU), Москалева Марина Александровна (RU)*

Заявка № 2018660595

Дата поступления 04 октября 2018 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 04 декабря 2018 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Излиев



РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019616693

**Вычислительный комплекс "ТЕ волны в открытом слое,
заполненном нелинейной средой"**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования "Пензенский
государственный университет" (RU)*

Авторы: *Зарембо Екатерина Викторовна (RU), Москалева Марина
Александровна (RU), Курсеева Валерия Юрьевна (RU), Валовик
Дмитрий Викторович (RU)*

Заявка № 2019613911

Дата поступления 12 апреля 2019 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 29 мая 2019 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2019667550

**Вычислительный комплекс «Симметричные гибридные
нелинейные волны в плоском волноводе с произвольной
нелинейностью с эффектом насыщения»**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования "Пензенский
государственный университет" (RU)*

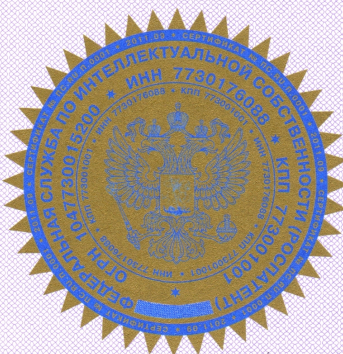
Авторы: *Мартынова Валерия Юрьевна (RU), Смолькин Евгений
Юрьевич (RU), Снегур Максим Олегович (RU)*

Заявка № 2019666506

Дата поступления 16 декабря 2019 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 25 декабря 2019 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Результаты внедрения исследовательской работы



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ПГУ»)

ул. Красная, д. 40, г. Пенза, Россия, 440026

Тел/факс: (841-2) 56-51-22, e-mail: cnit@pnzgu.ru, <http://www.pnzgu.ru>
ОКПО 02069042, ОГРН 1025801440620, ИНН/КПП 5837003736/583701001



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе ФГБОУ ВО
«Пензенский государственный университет»

В.Б. Механов

01

2020

АКТ

об использовании результатов диссертационной работы
Мартыновой Валерии Юрьевны «Численные методы решения задач дифракции и
распространения электромагнитных волн в нелинейном слое»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Настоящим подтверждается, что результаты диссертационной работы Мартыновой Валерии Юрьевны, работающей в ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» на кафедре «Математика и суперкомпьютерное моделирование», использованы в учебном процессе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пензенский государственный университет» на кафедре «Математика и суперкомпьютерное моделирование» для проведения лекций и практических занятий студентов по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», уровень бакалавриата, по дисциплине «Математические модели в электродинамике и акустике».

Разработанные итерационные методы и вычислительные алгоритмы приближенного решения задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с эффектом насыщения, задачи распространения связанных ТЕ-ТЕ-волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, задачи распространения симметричных гибридных электромагнитных волн в плоском слое, заполненном средой с нелинейностью с насыщением, использованы в ходе курсового проектирования и подготовки дипломных работ.

Директор Политехнического института

Декан ФВТ

Заведующий кафедрой МСМ

Г.В. Козлов

Л.Р. Фионова

Ю.Г. Смирнов