

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Применение производной к решению нестандартных и олимпиадных задач»

Студент Вася 21.05.25 Вяселева Алсу Равилевна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель Никитина 21.05.25 Никитина О.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр М- 28.06.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой Пань 2.06.25 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 4 (хор) (протокол заседания ГЭК от 8.04.25 № 9)

Секретарь ГЭК М- 8.04.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНЫХ И ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ	6
1.1 Роль производной в школьном курсе математики	6
1.2 Анализ учебников математики по изучению производной в курсе алгебры и начал анализа.....	10
1.3 Производная в нестандартных и олимпиадных задачах.....	22
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНЫХ И ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ	28
2.1 Элективный курс по решению задач с применением производной	28
2.2 Дидактические материалы к элективному курсу.....	35
2.3 Результаты опытно-экспериментальной работы	41
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	47
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	49

ВВЕДЕНИЕ

Главная задача политики образования России – обеспечение современного качества образования на основе сохранения его фундаментальности и соответствия актуальным и перспективным потребностям личности, общества и государства. Модернизация общеобразовательной школы предполагает ориентацию образования как на усвоение определенной суммы знаний, так и на развитие личности. Опора на богатейший опыт российской и советской школы, сохранение лучших традиций математического образования являются важными условиями для повышения качества общего образования [25].

Мощным средством развития, выявления способностей и интересов учащихся являются предметные олимпиады.

Под олимпиадной задачей понимается задача, для которой характерна нестандартность условий и методов решения, требующих известной изобретательности. Исходя из этого, разработаны следующие требования к олимпиадным задачам: они должны соответствовать программе курса математики; быть нестандартными по своей тематике, иметь оригинальные и изящные решения; быть максимально понятными, с более краткими условиями; допускать вариативность решения; соответствовать тому уровню или тому этапу, на котором они предлагаются; быть доступными для решения.

Несмотря на то, что современная школа накопила богатый опыт проведения внеурочных занятий по математике, неразрывно связанных с подготовкой к олимпиадам, в этом направлении имеются свои проблемы. Учителя общеобразовательных школ испытывают нехватку современной методической литературы, предназначенной для работы со способными учащимися. Многие учителя готовят учащихся к олимпиадам, опираясь на свой собственный опыт, взгляды, как правило, работа ведется на эмпирическом уровне без теоретической основы [23].

С другой стороны, понятие производной является одним из фундаментальных понятий, изучаемых в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы. Именно этим, в первую очередь, обусловлена особая актуальность рассматриваемой в работе темы о методике преподавания производной в курсе алгебры и начал анализа. Изучая производную, вырабатываются логические основы для понимания многих явлений в окружающем мире.

Несмотря на достаточно подробное изучение вопросов о методике преподавания начал анализа в общеобразовательной школе, поиск эффективных, универсальных и, в то же время, действительно работоспособных способов обучения сохраняет свою актуальность.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей подготовки обучающихся к применению производной в решении олимпиадных и нестандартных задач.

Предмет исследования: процесс подготовки к олимпиаде по математике.

Объект исследования: применение производной к решению олимпиадных и нестандартных задач.

Цель работы: разработать программу элективного курса и дидактических материалов по применению производной к решению олимпиадных и нестандартных задач.

Задачи исследования.

- 1) Определить роль изучения производной в курсе математики.
- 2) Проанализировать учебники математики на предмет изучения производной в курсе алгебры старшей школы.
- 3) Познакомиться с методами применения производной в олимпиадных и нестандартных задачах.
- 4) Разработать программу элективного курса по подготовке к олимпиаде по математике.
- 5) Разработать дидактические материалы к элективному курсу.

6) Провести опытно-экспериментальную работу, описать результаты.

Теоретико-методологическую основу составили труды Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачева. Теоретический аспект был использован для базового уровня обучения основам математического анализа в трудах А.Г. Мордковича, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунина.

Методы работы: анализ научной, педагогической и методической литературы по проблеме исследования, понятийно-терминологической системы, разработка программы элективного курса, педагогический эксперимент, статистические методы обработки данных.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что выявлены методические особенности по применению производной к решению олимпиадных и нестандартных задач.

Практическая значимость заключается в том, что представлены программа элективного курса и дидактические материалы к элективному курсу по подготовке к олимпиаде по математике.

Структура работы. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНЫХ И ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

1.1 Роль производной в школьном курсе математики

В курсе математики 10 – 11 классов изучаются различные свойства функций: нули функции, промежутки монотонности, знакопостоянства, выпуклости (вогнутости) и многие другие. Важнейшая роль в изучении свойств и особенностей функциональных зависимостей отводится исследованию производной функции, имеющей прикладное значение.

Понятие производной является основным понятием дифференциального исчисления и фундаментальным понятием физики, описывающей различные процессы и явления. Без четкого понимания, что такое производная, невозможно успешное усвоение дифференциального и интегрального исчислений, изучаемых в курсе математического анализа или в курсе высшей математики в вузе; тема «Производная и ее приложения» играет немаловажную роль в формировании естественнонаучного мировоззрения обучающихся. [10].

Цель изучения применения производной к исследованию функций двоякая. С одной стороны, нужно продемонстрировать учащимся, что с помощью производной можно аналитически установить много важных свойств функции. С другой стороны – показать, как, используя производную, можно строить графики функций более сложных, чем те, которые упомянуты в программе и графики которых строятся без применения производной [17].

На современном этапе данную тему учащиеся начинают изучать в 10 классе.

Основные понятия и алгоритмы темы «Производная функции».

1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел при $\Delta x \rightarrow 0$ отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента: $y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x$, где Δx – приращение аргумента, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции.

2. Дифференцирование – процесс нахождения производной.

3. Геометрический смысл: если в точке x_0 к графику функции $y = f(x)$ проведена касательная, то число $f'(x_0)$ есть тангенс угла α между этой касательной и положительным направлением оси Ox то есть $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$. Этот угол называется углом наклона касательной.

4. Физический смысл: если при прямолинейном движении путь s , пройденный точкой, есть функция от времени t , то есть $s = f(t)$, то скорость точки есть производная от пути по времени, то есть $v(t) = f'(t)$.

5. Линейная функция $f'(x)\Delta x$ называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0) = dy = f'(x_0)\Delta x$.

Алгоритм нахождения приближенного значения функции $f(x)$ с помощью дифференциала:

- 1) представим x как: $x = x_0 + \Delta x$,
- 2) вычисляем значение функции в точке x_0 : $f(x_0)$,
- 3) находим производную функции $f'(x_0)$,
- 4) подставляем полученные значения в формулу: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$,
- 5) вычисляем. Получившееся значение и будет приближенным значением функции $f(x)$.

6. Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция f возрастала (убывала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы во всех его точках производная была неотрицательной, $f'(x) \geq 0$ (неположительной, $f'(x) \leq 0$). Если всюду на (a, b) производная положительна: $f'(x) > 0$ (отрицательна: $f'(x) < 0$), то функция f строго возрастает (строго убывает) на рассматриваемом интервале.

7. Внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует, называется критической (подозрительной на экстремум).

8. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда x_0 называется точкой максимума (минимума) функции f , если существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx , удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$ (неравенство $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$). Если существует такое $\delta > 0$, что для всех $\Delta x \neq 0$ таких что $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ (неравенство $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$), то x_0 называется точкой строгого максимума (строгого минимума). Точки максимума (строгого максимума) и минимума (строгого минимума) называются точками экстремума функции.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего из значений функции f на отрезке $[a, b]$.

- 1) Находим критические точки функции f на отрезке $[a, b]$.
- 2) Находим значения функции f в критических точках и на концах отрезка.
- 3) Сравниваем найденные значения, выбираем из них большее и меньшее, это и будут наибольшее и наименьшее из значений функции на отрезке $[a, b]$ (глобальные минимум и максимум).

9. Необходимые условия экстремума: пусть x_0 является точкой экстремума функции f , определенной в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда либо производная $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$.

10. Достаточные условия экстремума: пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , кроме быть может, самой точки $x_0 \in (a, b)$, в которой она является непрерывной. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через x_0 , то x_0 является точкой строгого экстремума.

Алгоритм отыскания точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

- 1) Находим производную функции $f(x)$, приравниваем ее к нулю.
- 2) Вычисляем критические точки.
- 3) Отмечаем критические точки на интервале $(a; b)$.
- 4) Выясняем поведение функции $f(x)$ в каждом получившихся интервалов по знаку производной.

5) Учитывая поведение функции, определяем точки максимума и точки минимума.

11. Выпуклость функции и точки перегиба. Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и имеет непрерывную, не равную нулю в точке $x_0 \in (a; b)$ вторую производную. Тогда, если $f''(x) > 0$ всюду на интервале $(a; b)$, то функция $f(x)$ имеет вогнутость на этом интервале (выпуклость вниз), если $f''(x) < 0$, то функция имеет выпуклость (выпуклость вверх). Точки, которые разделяют промежутки выпуклости и вогнутости называются точками перегиба функции.

12. Что нужно знать для того, чтобы полностью исследовать определенную функцию.

1) Найти ее область определения, исследовать функцию на непрерывность, четность и периодичность.

2) Найти как нули функции, так и промежутки ее знакопостоянства.

3) Найти асимптоты графика функции.

4) Изучить монотонность функции, найти параметры экстремума.

5) Определить точки перегиба и интервалы вогнутости/выпуклости функции.

6) Построить эскиз графика функции.

13. Текстовые задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений.

Алгоритм решения задач.

1) Вводим переменные.

2) Согласно условиям задачи выражаем одну переменную через другую с помощью функциональной зависимости.

3) Определяем промежуток возможных значений независимой переменной (область определения функции).

4) Решаем задачу об отыскании наибольшего (наименьшего) значения функции на множестве.

Следует отметить, что помимо этого (и прежде этого) обучающиеся должны знать таблицу производных функций, а также владеть техникой дифференцирования.

На основе перечисленного выше можно сделать вывод, что с производной, ее параметрами и особенностями, ученикам придется сталкиваться неоднократно. Причем такие «столкновения» будут происходить не только на математике, но и на остальных дисциплинах.

Производная, если рассматривать ее с математической стороны, позволит ученикам решать самые разные виды задач, уравнений и неравенств.

По этой причине важно не только отрабатывать алгоритм нахождения производных, но и рассказывать об их важности. Ведь, если быть точным, без правильного и максимально углубленного понимания производной будет крайне сложно изучать что-то более серьезное и более углубленное.

Использование производной на практике – крайне важное знание в экономике и в целом ряде технических дисциплин, в которых человек имеет дело с теми процессами, которые протекают неравномерно. То есть знание будет крайне важным для тех, кто собирается продолжать обучение по техническим специальностям.

1.2 Анализ учебников математики по изучению производной в курсе алгебры и начал анализа

В школьных учебниках существуют различные подходы к изложению темы «Применение производной к решению задач».

1) УМК Алгебра и начала анализа, автор А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. [3].

Изучение темы «Производная» начинается с введения понятия «гладкой» кривой. Графики функций, которые учащиеся изучали ранее (линейной, квадратичной, обратной пропорциональности), являются «гладкими» кривыми.

Даётся понятие о касательной. Ставится задача: определить точное положение касательной к графику данной функции f в заданной точке (геометрический смысл производной). Делается вывод, что можно точно определить для каждой гладкой кривой положение касательной в данной точке.

Решается задача об определении мгновенной скорости движения (механический смысл производной). Составление общей схемы решения рассмотренных задач (Рисунок 1).

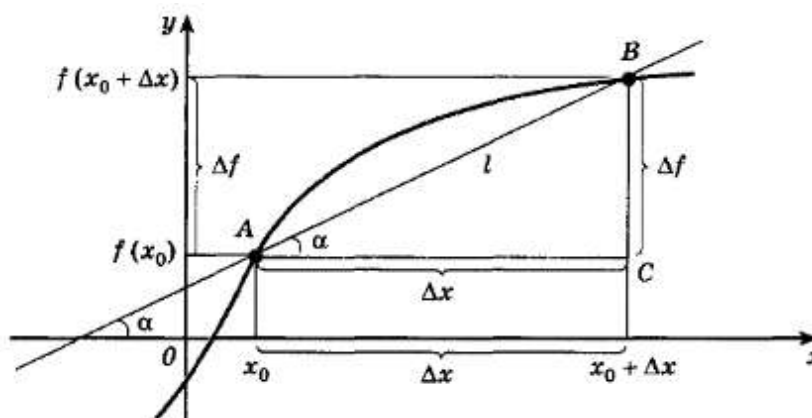


Рисунок 1 – Задача об определении мгновенной скорости

Определение производной дается без использования понятия предела (Рисунок 2).

Определение. Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при Δx , стремящемся к нулю.

Рисунок 2 – Определение производной

Вводится понятие дифференцируемой функции в точке, понятие производной как функции, название операции нахождения производной, ее обозначение. Выделяются формулы дифференцирования, полученные в ходе объяснения материала.

Вводится понятие о непрерывности функции и правила о предельном переходе (Рисунок 3).

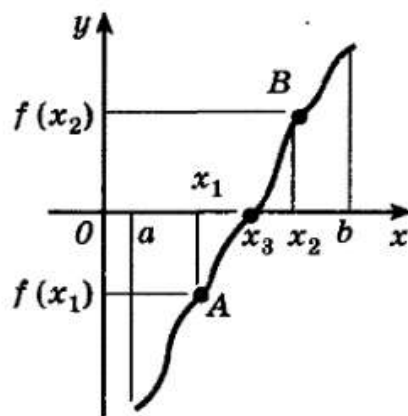


Рисунок 3 – Задача о непрерывности функции

Формулируются и доказываются основные правила дифференцирования: производная суммы, произведения, частного, вынесения множителя за знак производной. Производная степенной функции формулируется на интуитивной основе. Определяется понятие сложной функции и выводится формула ее дифференцирования. Выводятся и доказываются формулы дифференцирования тригонометрических функций.

Производная в физике и технике (механический смысл производной). Примеры применения производной. Применения производной к исследованию функций: признак возрастания (убывания) функции, критические точки функции, признак максимума и минимума (экстремумы) (Рисунок 4).

Достаточный признак возрастания функции. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I , то функция f возрастает на I .

Достаточный признак убывания функции. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I , то функция f убывает на I .

Рисунок 4 – Признаки возрастания и убывания функции

Примеры применения производной к исследованию функции, геометрический смысл касательной (Рисунок 5).

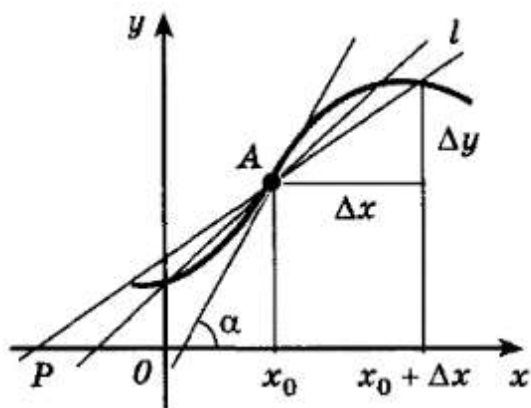


Рисунок 5 – Геометрический смысл касательной

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции. Даются исторические сведения.

Даются задачи на практическое применение производной (Рисунок 6).

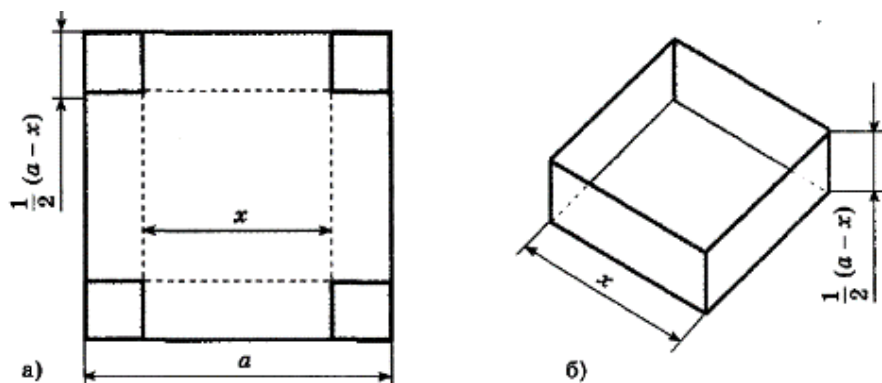


Рисунок 6 – Задача на исследование картонной коробки

После изучения логарифмической, показательной и степенной функций, определяется их производная. Вводится понятие о дифференциальных уравнениях: использование второй производной, дифференциальные уравнения показательного роста и показательного убывания, гармонические колебания, падение тел в атмосферной среде (дополнительный материал теоретического характера, отмечен треугольником). Исторические сведения.

Изучение производной в учебнике представлено на двух уровнях:

1) На наглядно-интуитивном, на котором создается материальный образ математического объекта. Производная рассматривается с двух позиций: как угловой коэффициент касательной; как мгновенная скорость движения.

2) На формально-логическом, где определение производной дается без использования понятия предела.

2) УМК Алгебра и начала анализа, автор Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. [2]

Изучение темы «Производная» начинается с рассмотрения задачи о мгновенной скорости. Рассматривается связь между средней и мгновенной скоростью движения (Рисунок 7).

Задача 1 На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он движется равнозамедленно с ускорением $1,6 \text{ м/с}^2$?

Рисунок 7 – Задача о мгновенной скорости

Вводится понятие разностного отношения, производной, ее обозначение.

Вводится понятие дифференцируемой функции в точке, название операции нахождения производной. Выводится строгое определение предела функции и дается его пояснение (Рисунок 8).

Определение. Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке x_0* и обозначается $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, где $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Рисунок 8 – Определение предела функции

Определяется понятие непрерывной функции.

На интуитивном уровне дается производная степенной функции. После вводятся правила дифференцирования: производная суммы, произведения, частного, вынесения множителя за знак производной (Рисунок 9).

Производная суммы равна сумме производных:
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \quad (1)$$

Производная произведения:
$$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x).$$

Рисунок 9 – Производная суммы и произведения

Формулируется правило вычисления сложной функции (Рисунок 10).

5. Производная сложной функции.

Рассмотрим функцию $F(x) = \log_2(x^2 + 1)$. Эту функцию можно рассматривать как сложную функцию $f(y) = \log_2 y$, где $y = g(x) = x^2 + 1$, т. е. как функцию $f(y)$, аргумент которой также является функцией $y = g(x)$. Иными словами, сложная функция — это функция от функции $F(x) = f(g(x))$. Производная сложной функции находится по формуле $F'(x) = f'(y) g'(x)$, где $y = g(x)$, т. е. по формуле

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) g'(x). \quad (5)$$

Рисунок 10 – Производная сложной функции

Даются производные элементарных функций: степенной, показательной, логарифмической и тригонометрической. Применение правил дифференцирования к решению задач. Изучается геометрический смысл производной (Рисунок 11).

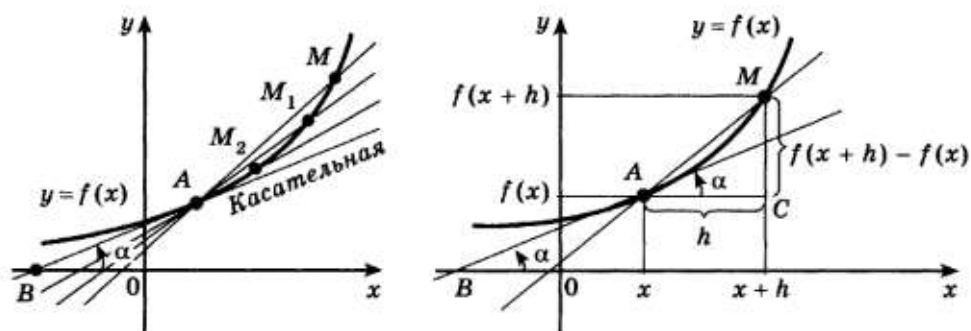


Рисунок 11 – Геометрический смысл производной

Выводится уравнение касательной к графику функции.

Применение производной к исследованию функций на нахождение промежутков возрастания и убывания (Рисунок 12).

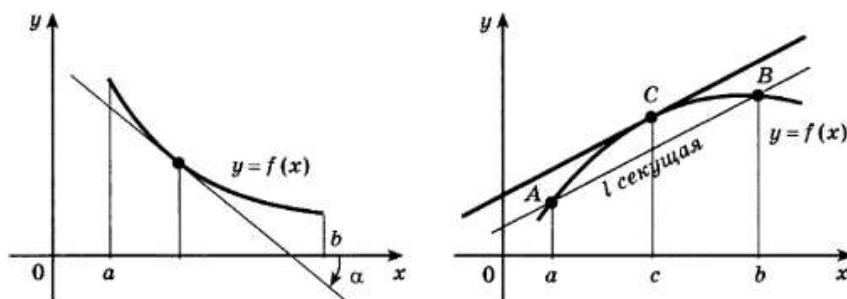


Рисунок 12 – Нахождение промежутков возрастания и убывания

Даются определения возрастающей (убывающей) функции. Формулируется теорема Лагранжа для доказательства теорем о достаточных условиях возрастания (убывания) функций.

Определяются понятия критических и стационарных точек, точек максимума и минимума (экстремумы) (Рисунок 13).

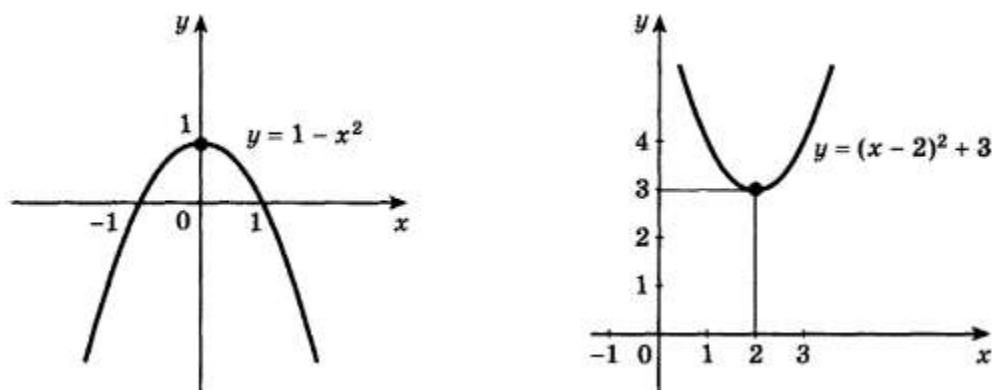


Рисунок 13 – Примеры точек максимума и минимума

Формулируется теорема Ферма, имеющая наглядный геометрический смысл, с помощью которой доказывается теорема о необходимом и достаточном условии для точек максимума и минимума (Рисунок 14).

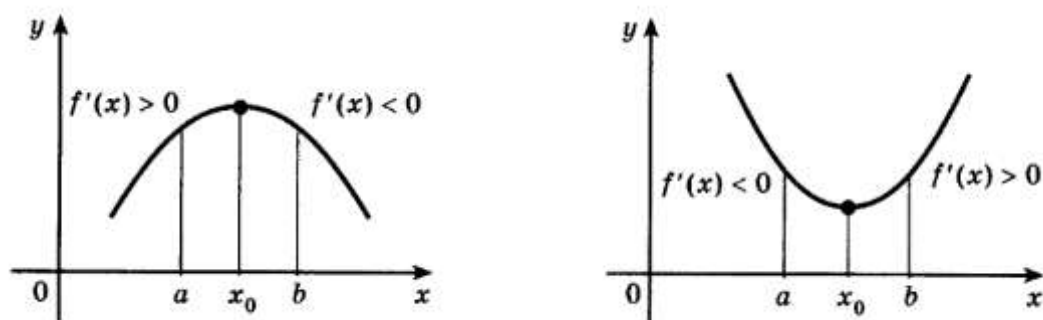


Рисунок 14 – Достаточные условия для точек максимума и минимума

Рассматривается применение производной к построению графиков функций. Предлагается схема исследования свойств функции, а также алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

Применение производной к решению задач на оптимизацию (дополнительный повышенной трудности материал, отмечен звездочкой). Вводится дополнительный более сложный материал: производная второго порядка, нужная для определения выпуклости графика функции и нахождения точек перегиба.

К учебнику прилагается соответствующий задачник. Его содержание построено на уровне дифференциации. Задания содержат трехуровневую систему: обязательные (выделены серым цветом), дополнительные более сложные (выделены светло-розовым цветом), трудные (выделены темно-розовым цветом). Так же в задачнике есть раздел «Проверь себя».

В данном учебнике введение понятия производной предваряется знакомством со средней и мгновенной скоростями движения, что приводит к понятию разностного отношения. Определение производной дается как предел разностного отношения. Понятие предела формулируется после определения производной без подробного изучения, а определение предела разностного отношения дается на интуитивной основе и разъясняется на конкретных примерах. При нахождении производных простейших функций пользуются наглядными представлениями. Это соответствует той идее курса, согласно которой элементы математического анализа в средней школе, излагаются на наглядно-интуитивной основе с акцентом на их практическое применение к решению простейших задач математики и физики.

3) УМК Алгебра и начала анализа 10-11 кл., автор А.Г. Мордкович, И.М. Смирнова, Л.О. Денищева и др. [4]

Изучение темы «Производная» начинается с рассмотрения физической задачи (на вычисление мгновенной скорости прямолинейного движения) (Рисунок 15).

Задача 1 (о скорости движения). По прямой, на которой заданы начало отсчета, единица измерения (метр) и направление, движется некоторое тело (материальная точка). Закон движения задан формулой $s = s(t)$, где t — время (в секундах), $s(t)$ — положение тела на прямой (координата движущейся материальной точки) в момент времени t по отношению к началу отсчета. Найти скорость движения тела в момент времени t (в м/с).

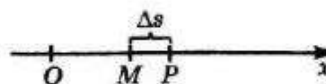


Рис. 127

Рисунок 15 – Задача о мгновенной скорости

Выясняется, что будет пониматься под касательной к произвольной плоской кривой. Рассматривается задача о касательной к графику функции. В процессе решения задачи на скорость и задачи на касательную пришли к новой математической модели – пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю (Рисунок 16).

Задача 2 (о касательной к графику функции). Дан график функции $y = f(x)$. На нем выбрана точка $M(a; f(a))$, в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной.

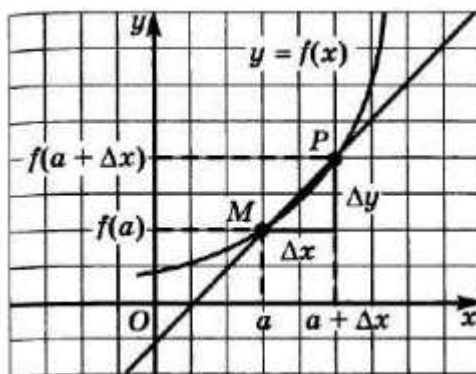
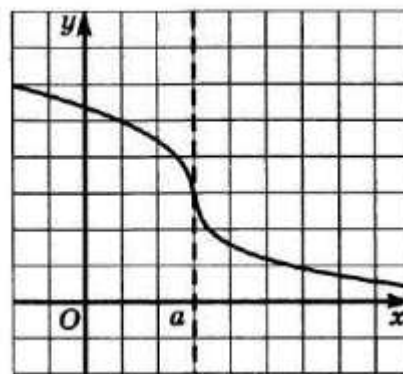


Рисунок 16 – Задача о касательной

Физический (механический) смысл производной: если $s(t)$ - закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t : $v = s'(t)$. Геометрическая смысл производной: если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y , то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной: $k = f'(a)$.

Истолкование определения производной с точки зрения приближенных равенств (Рисунок 17).

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0 . Дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0** и обозначают $f'(x_0)$.

Рисунок 17 – Определение производной

Дается пяти-шаговый алгоритм отыскания производной. Затем рассматриваются два примера на использование этого алгоритма (Рисунок 18).

**Алгоритм нахождения производной
функции $y = f(x)$**

1. Зафиксировать значение x , найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx , перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Рисунок 18 – Алгоритм нахождения производной

Вводится понятие дифференцируемой функции в точке, название операции нахождения производной. Обсуждается вопрос: как связаны между собой два достаточно тонких свойства функции – непрерывность и дифференцируемость функции в точке.

Выясняется – как по графику сделать вывод о дифференцируемости функции. Даются формулы дифференцирования, найденные по определению производной: $C' = 0$, $(x)' = 1$, $(kx + m)' = k$, $(x^2)' = 2x$, $(x > 0)$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$. После вводятся правила дифференцирования: производная суммы,

произведения, частного, вынесения множителя за знак производной, в результате которых выводятся формулы производных для тангенса и котангенса. На интуитивном уровне определяется формула для дифференцирования степенной функции (Рисунок 19).

Формулами дифференцирования обычно называют формулы для нахождения производных конкретных функций, например:

$$\begin{aligned} C' &= 0; \\ x' &= 1; \\ (kx + m)' &= k; \\ (x^2)' &= 2x; \\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Вы, конечно, узнали эти формулы — они были получены в § 27. Список формул дифференцирования будет постепенно пополняться. Вот еще три формулы (первую из них мы докажем в конце пункта 1, а вторую и третью приведем без доказательства):

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}; \\ (\sin x)' &= \cos x; \\ (\cos x)' &= -\sin x. \end{aligned}$$

Рисунок 19 – Формулы дифференцирования

Дается понятие второй, третьей производной и производной n -ого порядка. Делается вывод, что ускорение есть вторая производная координаты по времени, а это является механическим смыслом второй производной. Дается определение композиции (сложной функции). Выводится формула для нахождения производной сложной функции. Вычисляется производная для функции $y = f(kx + m)$, а также формулы дифференцирования обратных тригонометрических функций – арксинус и арккосинус.

Выводится уравнение касательной к графику функции в точке. Предоставляется алгоритм составления уравнения касательной к графику функции. Определяется в процессе рассуждений смысл приближенных вычислений.

Применения производной: для исследования функции на монотонность (связь между характером монотонности и знаком ее производной); для доказательства тождеств и неравенств; для построения графиков функций.

Формулируются: признак возрастания (убывания) функции, определение критической точки функции, признак максимума и минимума (экстремумы), теорема о постоянстве функции; теорема о нахождении точек максимума и минимума.

Вводятся понятия горизонтальной и вертикальной асимптот. Приводятся алгоритмы: исследования функции на монотонность и экстремумы; исследования функции и построение ее графика; нахождения наименьших и наибольших значений непрерывной функции на промежутке.

Рассматриваются задачи на оптимизацию. После изучения логарифмической и показательной функций, определяется их производная.

К учебнику прилагается соответствующий задачник. Он содержит два блока системы упражнений, выстроенных по каждой теме: первый блок состоит из базового уровня (никак не отмечен) и среднего уровня трудности (отмечен белым кружком), второй блок - из дополнительных заданий среднего уровня и заданий повышенной трудности (отмечены черным кружком). Количество задач представлено в достаточном и даже избыточном объеме, что дает возможность реализовать уровневую дифференциацию на уроке.

Изложение темы «Производная» представлено на наглядно-интуитивном, рабочем и формально-логическом уровне. Определение производной дается с использованием понятия предела, которое вводится перед изучением данной темы на наглядно-интуитивном уровне.

Итак, в изложении темы «Производная» в рассматриваемых учебниках для учащихся старших классов с углубленным изучением математики имеются общие моменты: изложение темы ведется на наглядно-интуитивном уровне, определение производной дается после изучения предела; приводится вывод уравнения касательной; дифференцирование функций: сложных,

показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных; вторая производная и производные высших порядков; вычисление приближенных значений величин; применение производной для нахождения максимального и минимального, наименьшего и наибольшего значений, определения промежутков монотонности функции; для исследования функций и построения их графиков.

Практически в большинстве своем весь материал алгебры и математического анализа представляет собой концентрированную форму построения (или точнее схему серпантина, внося в понимание концентрированной формы некоторые изменения).

1.3 Производная в нестандартных и олимпиадных задачах

Рассмотрим применение производной к решению нестандартных и олимпиадных задач для школьников.

1) Использование теоремы Ферма.

Если точка $x = a$ является точкой экстремума функции $y = f(x)$ и в этой точке существует производная, то $f'(a) = 0$ (необходимое условие экстремума).

Эта задача была предложена на олимпиаде для учащихся 10 – 11 классов на 68 Московской математической олимпиаде.

1. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы $\begin{cases} \sin x + a = bx \\ \cos x = b \end{cases}$ имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Преобразуем систему $\begin{cases} \sin x + a = bx \\ \cos x - b = 0 \end{cases}$.

Чтобы доказать, что система имеет решение, надо доказать, что второе уравнение системы имеет решение. Для этого воспользуемся теоремой.

Рассмотрим функции $f(x) = \sin x + a - bx$.

Докажем, что эта функция имеет экстремум.

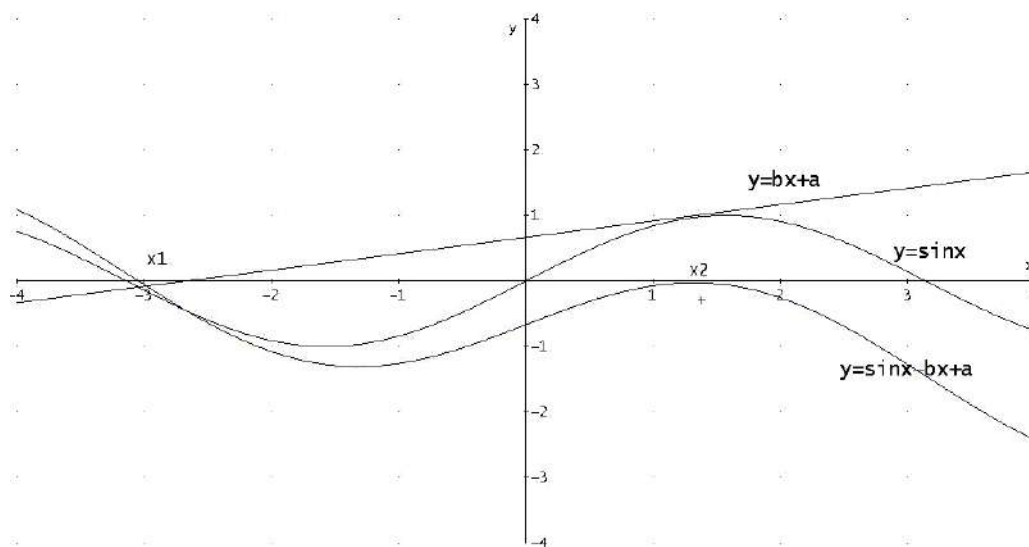
Производная этой функции существует. Докажем, что она имеет экстремум. Если, по условию, первое уравнение системы имеет ровно два решения, то функция $f(x)$ обращается в нуль ровно в двух точках x_1 и x_2 .

Пусть $x_1 < x_2$. Эти точки разбивают всю числовую прямую на 3 промежутка: $(-\infty, x_1]$, $(x_1, x_2]$, $(x_2, +\infty)$.

Докажем, что точка x_1 или x_2 является точкой экстремума.

Рассмотрим, какие знаки принимает функция на этих промежутках с помощью графика.

Для этого построим в одной прямоугольной системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = bx - a$ так, чтобы они имели две точки пересечения.



Поскольку $b \neq 0$ (если $b = 0$, то прямая параллельна оси x , и тогда графики будут иметь одну точку пересечения), а $|\sin x| \leq 1$, то на промежутках $(-\infty, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ функция $f(x)$ имеет разные знаки.

Поэтому на двух соседних промежутках $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) или (x_1, x_2) , $(x_2, +\infty)$ функция имеет одинаковые знаки, и тогда либо точка x_1 , либо точка x_2 является точкой экстремума. Это значит, что производная в ней равна 0.

$f'(x) = (\sin x + a - bx)' = \cos x - b = 0$, а производной является левая часть второго уравнения системы и поэтому, по теореме существует значение b , при котором, уравнение $\cos x - b = 0$ имеет хотя бы одно решение.

Утверждение доказано.

2) Метод введения вспомогательной функции.

Доказать неравенство: $\frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{x}{y}, 0 < x < y < \frac{\pi}{2}$

Решение.

Рассмотрим неравенство, $\frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{\operatorname{tg} y}{y}$ которое равносильно данному.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$.

Докажем, что функция возрастает.

Для этого нужно доказать, что $f'(x) > 0$. Найдем производную

$$f'(x) = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x^2 \cos^2 x}.$$

т.к., $x^2 \cos^2 x > 0$, то нужно доказать, что $x - \sin x \cos x > 0$.

Докажем, что числитель принимает положительные значения.

Чтобы это доказать рассмотрим другую функцию

$$g(x) = x - \sin x \cdot \cos x = x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

и найдем её производную: $g'(x) = 1 - \cos 2x, g'(x) > 0$, при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Следовательно, $f'(x) > 0$, т.к., числитель и знаменатель дроби принимают положительные значения. А значит $f(x)$ возрастает на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$. По условию $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ значит, большему значению аргумента соответствует

большее значение функции. Получим неравенство $\frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{\operatorname{tg} y}{y}$.

Отсюда следует доказываемое неравенство.

3) Использование свойств функции.

Для решения этой задачи используется следующее очевидное свойство:
 Если функция $y=f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a;b]$ или имеет внутри отрезка один экстремум, то в случае минимума наибольшее ее значение достигается на концах отрезка, (свойство А) а в случае максимума наименьшее значение достигается на концах отрезка (свойство В)ю

Докажите, что $x \cos x \leq \frac{\pi^2}{16}$, при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Запишем неравенство в виде $x \cos x - \frac{\pi^2}{16} \leq 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = x \cos x - \frac{\pi^2}{16}$ и найдем производную

$$f'(x) = (x \cos x - \frac{\pi^2}{16})' = \cos x - x \sin x.$$

Для того, чтобы определить знак производной найдем вторую производную на этом отрезке

$$f''(x) = (\cos x - x \sin x)' = -\sin x - \sin x - x \cos x = -(2 \sin x + x \cos x).$$

Вторая производная отрицательна, значит $f'(x) < 0$ следовательно, $f(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ убывает. Поэтому функция принимает наименьшее значение на конце отрезка при $x = \frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{16} < 0$. Нули этой функции можно найти приближенно. Неравенство доказано.

4) Введение новой переменной.

Какие значения принимает выражение

$$\frac{x^2 + y^2 - \sqrt{x^4 + y^4}}{xy}$$

при положительных x и y ?

Решение.

Эту задачу можно сформулировать иначе: найти значение

$$\text{функции } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - \sqrt{x^4 + y^4}}{xy}$$

при положительных значениях x и y .

Для этого преобразуем данное выражение:

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Введем новую переменную $\frac{y}{x} = t, t > 0$. Тогда функция примет вид:

$$f(t) = \frac{1}{t} + t - \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + (t)^2} = \frac{1}{t} + t - \sqrt{\left(\frac{1}{t} + t\right)^2 - 2}.$$

Для исследования этой функции введем переменную: $k = \frac{1}{t} + t, k > 0$,

будем искать множество значений функции $f(k) = k - \sqrt{k^2 - 2}, k \geq \sqrt{2}$.

Найдем производную $f'(k) = 1 - \frac{k}{\sqrt{k^2 - 2}} = \frac{\sqrt{k^2 - 2} - k}{\sqrt{k^2 - 2}} < 0$, т.к., $\sqrt{k^2 - 2} < k$

поэтому функция $f(k)$ убывающая. Данная функция ограничена снизу т.к.,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (k - \sqrt{k^2 - 2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k - (k^2 - 2)}{k + \sqrt{k^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{k + \sqrt{k^2 - 2}} = 0.$$

Значит $E(f) = (0; f(\sqrt{2})] = (0; \sqrt{2}]$.

Таким образом, мы рассмотрели применение производной в нестандартных и олимпиадных задачах и пришли к выводу, что для лучшего обучения старшеклассников решению таких задач необходимо разработать элективный курс.

Выводы по Главе 1.

В первой главе была определена роль изучения производной в курсе математики. Сделали вывод, что с производной и с ее особенностями ученикам нужно будет сталкиваться неоднократно, причем такие «столкновения» будут происходить не только на математике, но и на остальных дисциплинах. Производная, если рассматривать ее с математической стороны, позволит ученикам решать самые разные виды задач, уравнений и неравенств. Использование производной на практике – крайне важное знание в экономике и в целом ряде технических дисциплин, в которых человек имеет дело с теми процессами, которые протекают неравномерно. То есть знание будет крайне

важным для тех, кто собирается продолжать обучение по техническим специальностям.

Проанализировали учебники математики на предмет изучения производной в курсе алгебры старшей школы. В изложении темы «Производная» в рассматриваемых учебниках для учащихся старших классов с углубленным изучением математики имеются общие моменты.

Познакомились с методами применения производной в олимпиадных и нестандартных задачах. Пришли к выводу, что для лучшего обучения старшеклассников решению таких задач необходимо разработать элективный курс.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ НЕСТАНДАРТНЫХ И ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

2.1 Элективный курс по решению задач с применением производной

Разработаем программу элективного курса по решению нестандартных и олимпиадных задач с помощью производной.

Пояснительная записка

Согласно «Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования» особая роль при организации профильного обучения отводится элективным курсам, которые связаны с удовлетворением индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника. Их введение направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса, при котором существенно расширяются возможности построения учащимися индивидуальных образовательных программ, поскольку элективные курсы в наибольшей степени связаны с выбором каждым школьником содержания образования в зависимости от его интересов, способностей, последующих жизненных планов [23].

Ориентация исследовательской деятельности на углубленное изучение гуманитарных предметов в рамках профильного обучения выводит на первый план элективные курсы, выполняющие в общеобразовательном учреждении несколько функций: дополнение содержания профильного курса, углубление содержания одного из базовых курсов, удовлетворение познавательных интересов учащегося, выходящих за рамки выбранного им профиля.

Данная программа элективного курса позволяет более продуктивно решать многие задачи, некоторые из которых также встречаются и в ЕГЭ. Следует отметить, что знание нестандартных методов и приемов решения задач

способствует развитию нового, нешаблонного мышления. Для многих задач элементарной математики допускается как «элементарное», так и «неэлементарное» решение. Применение производной дает как правило более эффективно решение. Тем самым у учащихся появляется возможность оценить силу, красоту и общность нового математического решения [12].

Программа курса «Применение производной в решении нестандартных и олимпиадных задач» соответствует задачам модернизации содержания образования, основным положениям Концепции профильного обучения, является условием для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников.

На уроках математики не хватает достаточного количества времени, чтобы уделить должное внимание решению нестандартных и олимпиадных задач. Но, несмотря на это, такого рода задачи предложены в профильном уровне ЕГЭ и на олимпиадах по математике. Чтобы реально повысить интерес обучающихся к занятиям математикой, привлечь к участию в олимпиадах, нужно предлагать им красивые задачи. Лучшая подготовка к олимпиадам – систематические и серьезные занятия математикой.

Чтобы научиться нестандартному подходу к задаче, при котором задача выступает как объект тщательного изучения, а ее решение – как объект конструирования и изобретения, программа предусматривает помимо посещения коллективных занятий, выполнение домашних заданий. Оценка знаний и умений обучающихся будет производиться с помощью контрольных работ и успешное участие в предметной олимпиаде.

Предложенный элективный курс «Применение производной в решении нестандартных и олимпиадных задач» рассчитан на учеников 11 классов средней образовательной школы и предназначен для формирования у старшеклассников умений применять производную к решению нестандартных и олимпиадных задач. Элективный курс содержит в себе новый для

обучающихся материал, предназначенный для усвоения новых знаний обучающихся.

Грамотно подобранные задачи развивают мышление и познавательный интерес школьников, вырабатывает навыки преодоления трудностей и формирует умение их разрешать.

Программа элективного курса

Данный курс предлагается для обучающихся базовой школы. Курс рассчитан на 10 – 15 часов, его можно реализовать в течение одной учебной четверти.

Цель элективного курса:

- дополнить школьный материал, связанный с производной;
- познакомить обучающихся с решением задач на более высоком уровне;
- научить решать нестандартные и олимпиадные задачи.

Задачами курса являются:

- закрепление основ знаний о производной;
- расширение представлений о производной;
- формирование умений решать нестандартные и олимпиадные задачи применяя производную;
- вовлечение обучающихся в практическую деятельность как фактор личностного развития.

Обучающиеся должны знать:

- понятие производной;
- этапы решения задач и приёмы их выполнения;
- методы решения нестандартных и олимпиадных задач.

Обучающиеся должны уметь:

- выполнять моделирование в процессе решения задачи на максимум и минимум;

– применять различные методы для решения задач, уравнений и систем уравнений;

– правильно употреблять функциональную терминологию;

– решать нестандартные и олимпиадные задачи применяя производную;

Оценивание обучающихся: в конце курса проводится тестовая работа. В качестве оценки выставляется «зачёт» или «незачёт».

Тематическое планирование

№	Тема занятия	Форма проведения	Кол-во часов
1	Постановка цели. Проверка владения базовыми умениями.	Групповая работа. Самостоятельная работа. Тестирование	1
2	Использование теоремы Ферма. Метод введения вспомогательной функции. Введение новой переменной. Использование свойств функции.	Практикум. Беседа.	3
3	Нестандартное решение сложных задач.	Групповая работа. Беседа, объяснение.	2
4	Решение нестандартных задач с параметрами	Работа в группах. Беседа, консультации по работе с литературой.	2
5	Решение финансово-экономических задач	Групповая работа. Самостоятельная работа с учебной литературой. Беседа, защита групповой работы.	3

6	Построение графика с помощью производной.	Проблемное обучение, самостоятельная работа с литературой. Беседа, контроль решённых заданий	4
7	Обобщающее занятие	Тестовая работа.	2

Содержание курса

Постановка цели. Проверка владения базовыми умениями решать нестандартные и олимпиадные задачи.

Цели: проверка и актуализация базовых знаний.

Использование теоремы Ферма. Метод введения вспомогательной функции. Введение новой переменной. Использование свойств функции.

Цели.

1. Способствовать развитию навыков применения теоретических знаний в практической деятельности.

2. Научится применять различные способы решения олимпиадных задач, с использованием производной.

Нестандартное решение сложных задач.

Цели.

1. Способствовать развитию навыков применения теоретических знаний в практической деятельности.

2. Научится применять различные способы решения нестандартных задач, с использованием производной.

Решение нестандартных задач с параметрами.

Цели.

1. Способствовать развитию навыков применения теоретических знаний в практической деятельности.

2. Научится применять различные способы решения нестандартных задач, с использованием производной.

Решение финансово-экономических задач.

Цели.

1. Способствовать развитию навыков применения теоретических знаний в практической деятельности.

2. Научится применять различные способы решения финансово-экономических задач, с использованием производной.

Построение графика с помощью производной.

Цели.

1. Способствовать развитию навыков применения теоретических знаний в практической деятельности.

2. Научится строить график с помощью производной.

Обобщающее занятие.

Цель: контроль знаний.

Формирование изучения всех разделов и каждого из них по отдельности подчинено той схеме, которая указана ниже. Поэтому, согласно этой же схеме, изложение должно брать свое начало с комплексной актуализации нужных сведений с последующей постановкой основных проблем. Новые материалы необходимо для начала представить в форме лекции, а уже после этого раскрывать эти материалы за счет варьирования эвристических бесед с исполнением и классическом ключе, и с самостоятельной работой, которая может быть как индивидуальной или игровой (Рисунок 20).

Итоговая проверка предусматривает написание контрольной работы.

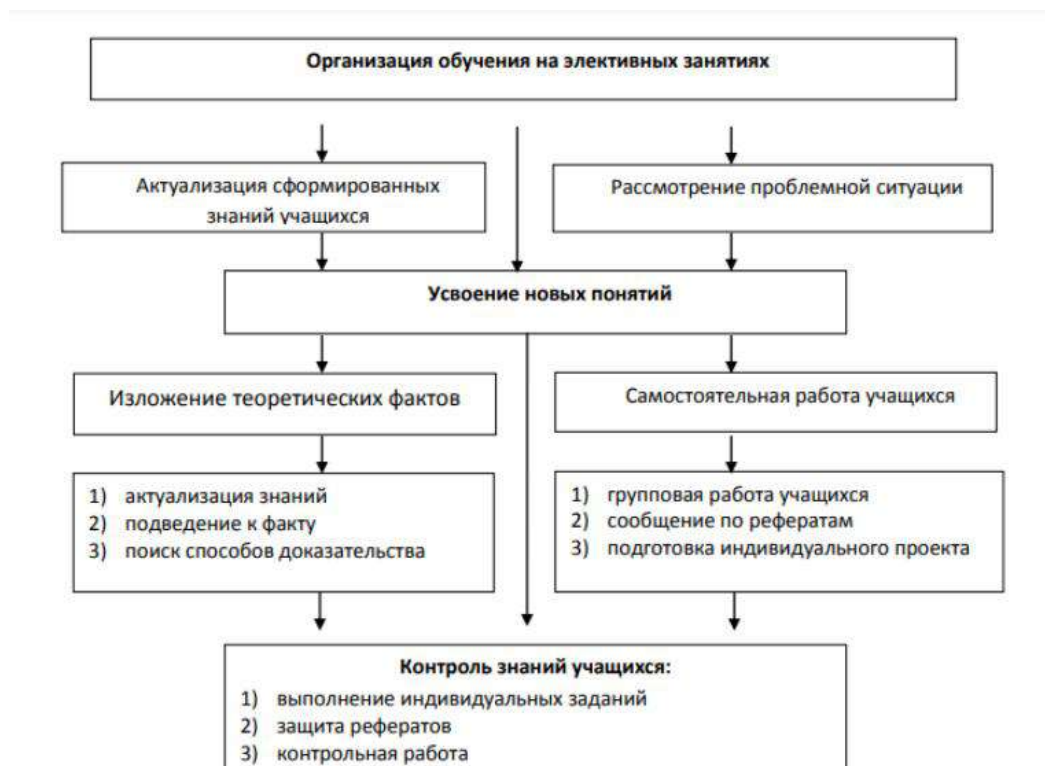


Рисунок 20 – Организация элективного курса

Теперь стоит выделить несколько вариаций исполнения учениками заданий для зачета.

В одном из самых простых вариантов такое исполнение может иметь следующие формы.

1. Решение обучающимися индивидуальных домашних заданий, предлагаемых преподавателем из списка, имеющегося в конце каждой лекции. Стоит учесть, что такие задачи «для самостоятельного решения» в рамках данного курса – это те задачи, при решении которых нужно установить теорему. Другими словами, ученикам нужно заняться самостоятельным исследованием. Такой подход помогает развивать логическое мышление учеников.

2. Решение обучающимися задач из одноименного раздела «Задачи для самостоятельного решения», но уже не в индивидуальном, а в коллективном исполнении.

Финальная аттестация учеников может быть проведена лишь после того, как они выполнят самостоятельные работы и выступят с рефератами. Над рефератом можно работать самостоятельно, однако есть и такие варианты, при которых создание реферата и выступление с ним может быть возложено не на одного ученика, а сразу же на группу. В некоторых случаях, если это посоветует учитель, ученики могут в качестве материалов-источников использовать самые разные виды источников (журналы, исследовательские работы, сборники заданий, используемых на конкурсах, литература и т.д.).

По итогам проведенной работы над индивидуальным или коллективным рефератом ученикам необходимо выступить со своими докладами прямо на уроке. Отдельно могут быть рассмотрены и оценены некоторые вызывающие интерес части реферата.

Материально-техническое обеспечение курса: компьютеры с установленной на них программой MS Excel (в составе пакета MS Office), мультимедийный проектор и раздаточные материалы к учебным занятиям.

Таким образом, была разработана программа факультативного курса, направленная на обучение старшеклассников применять производную при решении нестандартных и олимпиадных задач.

2.2 Дидактические материалы к элективному курсу

Для обеспечения организации проведения занятий элективного курса разработаем дидактические задания.

Проверка владения базовыми умениями

Задание 1. Расположи в правильном порядке действия для нахождения производной.

- Вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

- Зафиксировать значение x , найти $f(x)$.
- Дать аргументу x приращение Δx , перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
- Этот предел и есть $f'(x)$.
- Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Задание 2. Заполни таблицу. *Примечание.* Квадрат разности можно раскрыть по формулам сокращённого умножения.

$f(x) = (2x - 7)^2, x_0 = 1$	а) $f'(x_0) < 0$ б) $f'(x_0) > 0$ в) $f'(x_0) = 0$
$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{5} - 4\sqrt{x}, x_0 = 4$	а) $f'(x_0) < 0$ б) $f'(x_0) > 0$ в) $f'(x_0) = 0$
$f(x) = 11\sin x - x^2, x_0 = 0$	а) $f'(x_0) < 0$ б) $f'(x_0) > 0$ в) $f'(x_0) = 0$
$f(x) = \frac{\sin x}{5} - 3\cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}$	а) $f'(x_0) < 0$ б) $f'(x_0) > 0$ в) $f'(x_0) = 0$

Задание 3. Заполни таблицу.

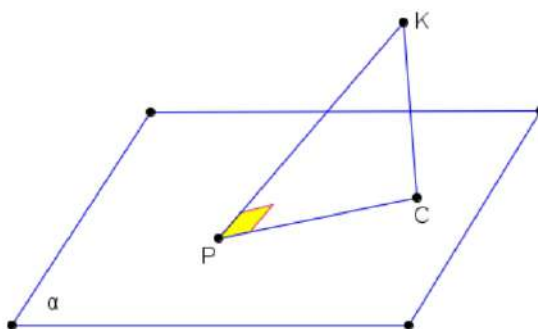
$f(x)$	$f'(x)$
$x^7 \cdot \ln x$	
$\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt{x}$	
$\operatorname{tg} x$	
$\operatorname{ctg} x$	

Использование теоремы Ферма. Метод введения вспомогательной функции. Введение новой переменной. Использование свойств функции

Задание 1. Доказать, что если a, b, c принимают значения из отрезка $[0;1]$, то

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a) + (1-b) + (1+c) \leq 1.$$

Задание 2. Даны плоскость α , точка P на этой плоскости и точка K вне плоскости α . Найти все точки C в плоскости α , для которых отношение $\frac{KP+PC}{KC}$ максимально.



Задание 3. Какие значения принимает выражение $\frac{x^2+y^2-\sqrt{x^4+y^4}}{xy}$ при положительных значениях x и y ?

Нестандартное решение сложных задач

Задание 1. В физических задачах широко распространено использование потенциала Леннарда-Джонса для описания взаимодействия двух молекул. Он описывает энергию взаимодействия частиц в зависимости от расстояния между ними в состоянии равновесия.

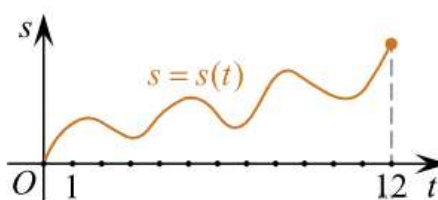
Данный потенциал записывается в следующем виде: $U(r) = 4\varepsilon\left[\frac{\sigma^{12}}{r^{12}} - \frac{\sigma^6}{r^6}\right]$, где r — расстояние между частицами; ε — глубина потенциальной ямы; σ — расстояние, на котором энергия взаимодействия становится равной нулю.

Определи расстояние, на котором будут находиться молекулы в равновесии молекулы Ксенона Xe , если для Ксенона параметры потенциала Леннарда-Джонса составляют: $\sigma=4,05\text{\AA}$; $\varepsilon=231\text{K}$.

Определи, как будет изменяться энергия взаимодействия между частицами, если частицы колеблются около положения равновесия с максимальной амплитудой в 10% от расстояния между ними в равновесии.

Задание 2. Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат – расстояние s .

Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Задание 3. При подготовке к итоговому экзамену школьник за x дней изучает $\frac{x}{x+2} \cdot 100\%$ от всего материала курса, а забывает $\frac{2x}{49} \cdot 100\%$ от курса. Сколько дней нужно готовиться к экзамену, чтобы изучить максимальную часть курса?

Решение нестандартных задач с параметрами.

Задание 1. Определи все значения параметра a , при которых уравнение:

$|(x - 2)^2 - a| = b$ не имеет решений либо имеет 4 решения при всех $b \in (0; 2)$.

Задание 2. Имеет ли система решение, если известно, что a и b таковы, что первое уравнение имеет ровно два решения?

$$a) \begin{cases} 2\sin x + ab = bx, \\ \sin 2x = b\sin x \end{cases}, б) \begin{cases} \cos x = ax + b \\ \sin x + a = 0 \end{cases}.$$

Задание 3. Касательная к параболе $y = x^2 + ax + 4$ проходит через начало координат. Найдите все значения параметра a , при которых абсцисса точки касания положительна, а ордината равна 6.

Решение финансово-экономических задач.

Задание 1. Функция полных издержек производства имеет вид $k = -x^3 + 3x^2 - 2,5x$, где x – объем производства продукции в условных единицах для данного производства. Определи, при каком объеме производства продукции средние издержки производства будут иметь наибольшее значение?

Задание 2. Потребление электроэнергии предприятиями и населением города с 8 ч до 18 ч описывается формулой $y = 10000 - 8t^2 + 15t$, где t – время в часах. В какой момент времени потребление энергии будет наибольшим?

Задание 3. Выручка магазина меняется в зависимости от сезона по формуле $w = 36,5x - \frac{14,6}{2\pi} \cos 2\pi x$. Найдите закон изменения дневной выручки магазина (скорость изменения выручки).

Построение графика с помощью производной.

Задание 1. Дана функция $f(x) = \frac{5x+2}{-x-1}$. Найди асимптоты, если они есть, и построй графики следующих функций:

- 1) $f(x)$
- 2) $f(|x|)$
- 3) $|f(x)|$
- 4) $|f(|x|)|$

Задание 2. Проведём исследование функции $y = x^4 - 5x^2 + 4$.

Функция является непрерывной на всей числовой оси.

Функция является чётной, поскольку $y(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4$.

Это обозначает, что её график симметричен относительно оси O_y .

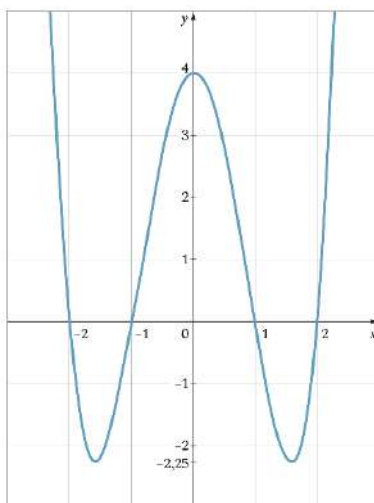
Производная функции равна $y' = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$ и имеет три критические точки, в которых меняет знак: $x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}, x_3 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Значит, эти точки – локальные экстремумы. Рассмотрим знаки производной. По ним можно понять, что на промежутках $(-\frac{\sqrt{10}}{2}; 0)$ и $(\frac{\sqrt{10}}{2}; +\infty)$ функция возрастает, на промежутках $(-\infty; -\frac{\sqrt{10}}{2})$ и $(0; \frac{\sqrt{10}}{2})$ функция

убывает, а $x_1 = 0$ – локальный максимум; $x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}$ и $x_3 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ – локальные минимумы.

Используя эти данные, построим график функции. Найдём значения функции в точках экстремумов, также учтём, что $y=0$ в точках 1, -1, 2, -2.

$y(x)$	-2,25	4	-2,25
x	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$



Исследуй следующие функции истрой их графики.

- 1) $y = x^4 - 4x^2$;
- 2) $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

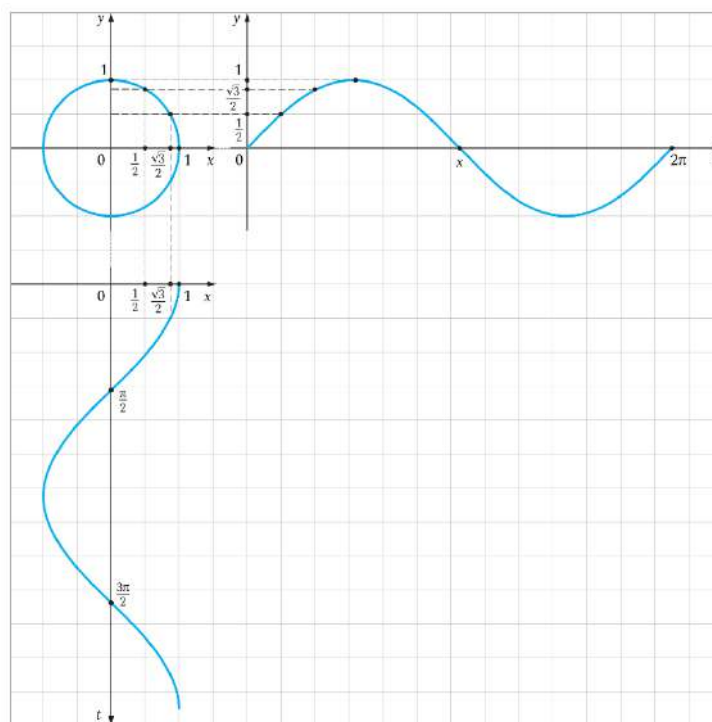
Задание 3. Иногда функцию задают неявно (не прописывая зависимость y от x), а параметрически, т. е. задавая зависимости $x(t)$ и $y(t)$. Таким образом, y и x связаны через параметр. Например, рассмотрим параметрически заданную кривую $y(t) = \cos t$ от $x(t) = \sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

Какую зависимость она задаёт? Нетрудно видеть, что $x^2 + y^2 = 1$, это окружность радиуса 1 с центром в начале координат $O(0; 0)$.

Её график известен и построить его совсем несложно. А как построить этот график, не выводя явную формулу зависимости y от x ?

Действительно, построим графики $y(t) = \cos t$ от $x(t) = \sin t$.

При росте tx сначала растёт от нуля до единицы, y при этом уменьшается от 1 до нуля. Далее ситуация меняется. Сопоставляя точки на графиках зависимостей x можно построить график зависимости $y(x)$.



Теперь построй график следующей зависимости, заданной параметрически: $x(t) = (1 + \cos t)\cos t, y(t) = (1 + \cos t)\sin t, t \in [0; 2\pi]$.

2.3 Результаты опытно-экспериментальной работы

Опытно-экспериментальная работа по формированию умения применять производную в решении нестандартных и олимпиадных задачах проходила в МБОУ СОШ №77, в 11 классе, в количестве 26 человек.

Апробация включала в себя следующие этапы:

- 1) Констатирующий;
- 2) Формирующий;
- 3) контролирующий.

Цель констатирующего этапа – начальная диагностика умения применять производную в решении задач.

Цель определяла следующие задачи:

- провести диагностический срез;
- анализ полученных данных.

На данном этапе применялись следующие методы исследования.

1. Педагогическое наблюдение.

Наблюдение проводилось постоянно на уроках математики.

2. Диагностический срез. Диагностический срез был направлен на анализ имеющихся у учащихся базовых знаний и умений в области применения производной.

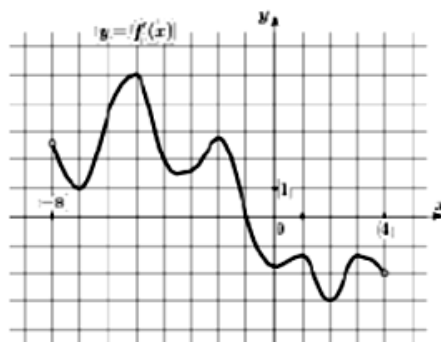
Текст диагностического среза.

1) Найти точку максимума функции: $y = 5 + 4x - \frac{x^3}{3}$.

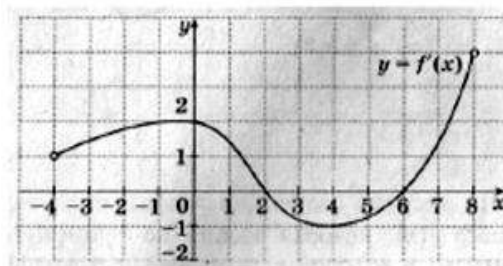
2) На отрезке $[0,7; 1,7]$ найти наибольшее значение функции

$$y = 5\ln x - 5x + 7.$$

3) На рисунке изображен график производной функции $f'(x)$, определенной на $(-8;4)$. В какой точке отрезка $[-7; -3]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение.



4) Функция определена на промежутке $(-4; 8)$. На рисунке изображен график ее производной функции $y = f'(x)$. Длину промежутка убывания функции $f(x)$.



Критерии:

высокий уровень – работа была выполнена без ошибок, аккуратно, без исправлений;

средний уровень: при выполнении работы ученик допустил 1 ошибку, 1 – 2 исправления;

низкий уровень – при выполнении работы ученик допустил более 2 ошибок и 2 – 3 исправления.

Данные о результатах среза приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты анкетирования

Уровень	Кол-во учащихся	Процентное соотношение
Высокий	6	23%
Средний	13	50%
Низкий	7	27%

Графическое представление результатов диагностического среза представлено на Рисунке 21.

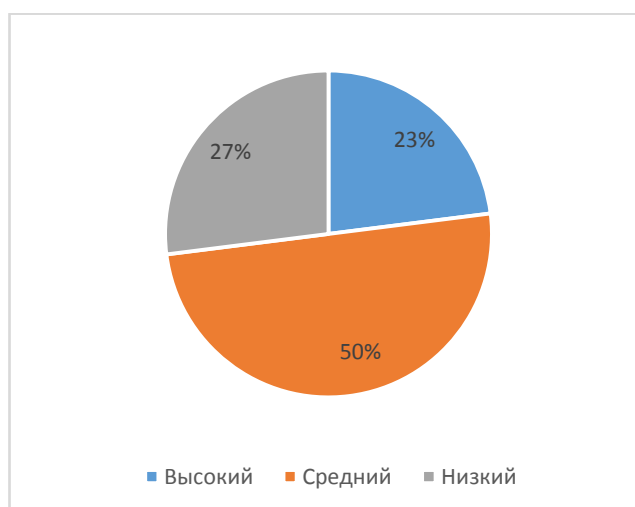


Рисунок 21 – Диаграмма результатов диагностического среза

Согласно проведенной диагностики можно сделать вывод, что высокий уровень знаний и умений у 23% учащихся, средний – у 50% и низкий – у 27%.

Таким образом, результаты диагностики говорят о необходимости проведения занятий элективного курса.

Формирующий этап был направлен на выявление объективной необходимости и определения теоретической основы построения элективного курса «Применение производной к решению нестандартных и олимпиадных задач». В поисковом этапе участвовал 11 класс в количестве 26 человек.

Во время формирующего этапа были разработаны:

- программа элективного курса «Применение производной к решению нестандартных и олимпиадных задач»,
- дидактические задания для обеспечения проведения занятий курса.

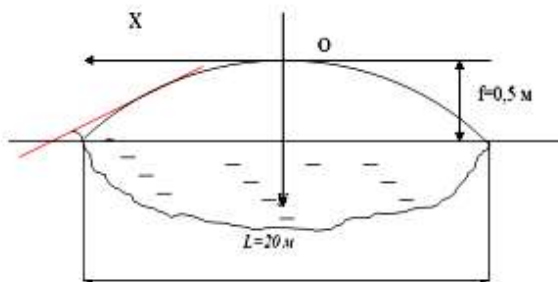
В ходе контролирующего этапа обучающимся предлагалось выполнить задание в рамках контрольной работы.

Текст контрольной работы.

1. Заряд, протекающий через проводник, меняется по закону $q = \sin(2t - 1)$. Найти силу тока в момент времени $t=5$ сек.

2. Зависимость между количеством вещества, полученного в некоторой реакции, и временем выражается уравнением $x(t) = 10(1 - e - 0,12t)$.

3. Строительная фирма просит вас помочь в решении следующей проблемы. Нам необходимо провести мост через реку. Мост имеет форму параболы $y(x) = px^2$. Каким надо сделать уклон насыпи к мосту, чтобы переход с моста на шоссе был плавным? Пролет моста имеет длину $L = 20$ м, стрела провеса $f = 0,5$ м. Предлагаем чертеж нашей работы:



4. В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает по закону $P(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$, где t выражается в часах. Найти максимальный размер этой популяции.

5. Турист идет из пункта А, находящегося на шоссе, в пункт В, расположенный в 8 км от шоссе. Расстояние от А до В по прямой равно 17 км. На каком расстоянии от А туристу следует свернуть с шоссе, чтобы в кратчайшее время прийти в пункт В, если его скорость по шоссе равна 5 км/ч, а по бездорожью – 3 км/ч?

Данные о результатах среза приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты контрольного среза

Уровень	Кол-во учащихся	%
Высокий	14	54%
Средний	9	27%
Низкий	3	0%

Графическое представление результатов контрольного среза представлено на Рисунке 22.

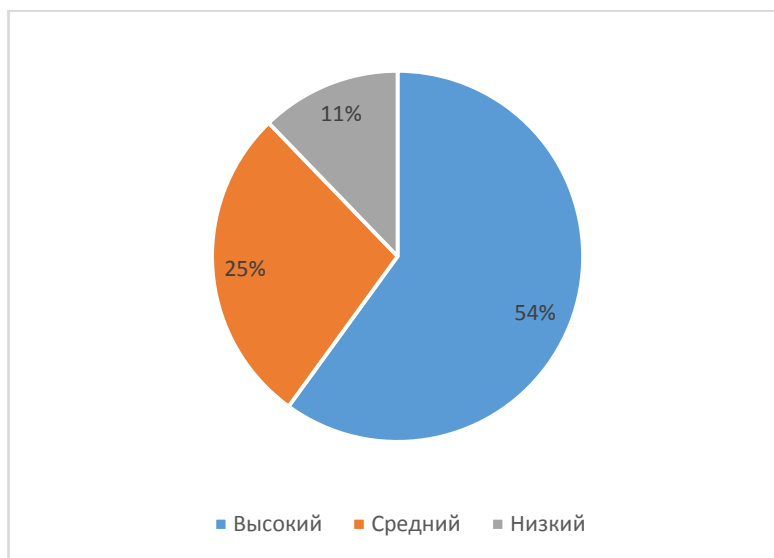


Рисунок 22 – Диаграмма результатов контрольного среза

Результаты повторной диагностики показали, что высокий уровень увеличился на 31%, средний уменьшился на 25% и низкий на 16%.

Делая вывод о результатах исследования необходимо отметить следующее: проведение занятий элективного курса «Применение производной при решении нестандартных и олимпиадных задач» положительно сказалось на сформированности умений учащихся. По результатам эксперимента произошло снижение низкого уровня и значительное повышение высокого уровня.

Вывод по Главе 2

Во второй главе была разработана программа элективного курса по решению нестандартных и олимпиадных задач с помощью производной. А также некоторые дидактические задания для обеспечения организации проведения занятий элективного курса.

Опытно-экспериментальная работа по формированию умения применять производную в решении нестандартных и олимпиадных задачах проходила в МБОУ СОШ №77, в 11 классе. На констатирующем этапе был проведен диагностический срез, направленный на анализ имеющихся у учащихся базовых знаний и умений в области применения производной.

Результаты диагностического среза показали, что большинство учащихся имеют средний и низкий уровень знаний и умений.

Формирующий этап был направлен на выявление объективной необходимости и определения теоретической основы построения элективного курса «Применение производной к решению нестандартных и олимпиадных задач». На обобщающем занятии был проведен контрольный срез.

Делая вывод о результатах исследования, необходимо отметить следующее: проведение занятий элективного курса «Применение производной при решении нестандартных и олимпиадных задач» положительно сказалось на сформированности умений учащихся. По результатам эксперимента произошло снижение низкого уровня и значительное повышение высокого уровня.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы была рассмотрена роль производной в курсе математики. С производной, ее параметрами и особенностями, ученикам нужно будет сталкиваться неоднократно, причем такие «столкновения» будут происходить не только на математике, но и на остальных дисциплинах. По этой причине важно не только отрабатывать алгоритм вычисления производных, но и рассказывать о важности ее применения. Ведь, если быть точным, без правильного и максимально углубленного понимания производной будет крайне сложно изучать что-то более серьезное и более углубленное. Использование производной на практике – крайне важное знание в экономике и в целом ряде технических дисциплин, в которых человек имеет дело с теми процессами, которые протекают неравномерно. То есть знание будет крайне важным для тех, кто собирается продолжать обучение по техническим специальностям.

Проанализированы учебники математики на предмет изучения производной в курсе алгебры старшей школы. В изложении темы «Производная» в рассматриваемых учебниках для учащихся старших классов с углубленным изучением математики имеются общие моменты: изложение темы ведется на наглядно-интуитивном уровне, определение производной дается после изучения предела; приводится вывод уравнения касательной; дифференцирование функций: сложных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных; вторая производная и производные высших порядков; вычисление приближенных значений величин; применение производной для нахождения максимального и минимального, наименьшего и наибольшего значений, определения промежутков монотонности функции; для исследования функций и построения их графиков.

Описаны методы применения производной в олимпиадных и нестандартных задачах.

Разработана программа элективного курса по решению нестандартных и олимпиадных задач с помощью производной. А также дидактические задания для обеспечения организации проведения занятий элективного курса.

Опытно-экспериментальная работа по формированию умения применять производную в решении нестандартных и олимпиадных задачах проходила в МБОУ СОШ №77, в 11 классе. На констатирующем этапе был проведен диагностический срез, направленный на анализ имеющихся у учащихся базовых знаний и умений в области применения производной.

Результаты диагностического среза показали, что большинство учащихся имеют средний и низкий уровень знаний и умений.

Формирующий этап был направлен на выявление объективной необходимости и определения теоретической основы построения элективного курса «Применение производной к решению нестандартных и олимпиадных задач». На обобщающем занятии был проведен контрольный срез.

Делая вывод о результатах исследования необходимо отметить следующее: проведение занятий элективного курса «Применение производной при решении нестандартных и олимпиадных задач» положительно сказалось на сформированности умений учащихся. По результатам эксперимента произошло снижение низкого уровня и значительное повышение среднего уровня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ Минобрнауки РФ от 18 ноября 2013 г. № 1252 «Об утверждении Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников» (с изменениями и дополнениями от 17.11.2016) / Российская газета. 29 января 2014 г. № 18.
2. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10 – 11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2006. 384 с.
3. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров [и др.]. М. : Просвещение, 2007. 384 с.
4. Алгебра и начала анализа 10 – 11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений. / А. Г. Мордкович [и др.]. М. : Мнемозина, 2002. 375 с.
5. Асланян И. Решаем задачи повышенной трудности: Аспект подготовки к ЕГЭ // Методическая работа в школе. 2010. № 3. С. 58-64.
6. Борисова Е. Б., Бородина Е. А. Практико-ориентированные задачи по анализу в школьном курсе математики // Студенческая наука и XXI век. Йошкар-Ола, 2018. Т. 15. № 1(16). Ч.2. С. 48-51.
7. Вакульчик П. А. Нестандартные и олимпиадные задачи по математике. Минск : УниверсалПресс, 2004. 352 с.
8. Вендина А. А. К вопросу изучения понятия производной // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2019. № 21. С. 242-247.
9. Вопросы преподавания алгебры и начала анализа в средней школе: сб. статей / сост. Е. Г. Глаголева [и др.]. М. : Просвещение, 1980. 256 с.
10. Головкова С. А. Производная в школьном курсе математики / С. А. Головкова, Н. М. Закирова // Проблемы школьного и дошкольного образования: материалы VIII региональной научно-практической конференции (электронное научное издание на компакт-диске), Глазов, 23 марта – 05 2017

года. Глазов : Глазовский государственный педагогический институт имени В.Г. Короленко, 2017. С. 184-188.

11. Гордина А. В. Элективный курс по теме «Применение производной в различных задачах» / А. В. Гордина // Молодежь XXI века : образование, наука, инновации : Материалы VIII Всероссийской студенческой научно-практической конференции с международным участием, Новосибирск, 04–06 декабря 2019 года / под редакцией Т. А. Василенко. Новосибирск : Новосибирский государственный педагогический университет, 2019. С. 219-220.

12. Ершова С. Н. Рекомендации по подготовке обучающихся к ЕГЭ по математике / С. Н. Ершова [и др.] // Справочник заместителя директора школы. 2010. № 4. С. 33-38.

13. Елифанова Т. Н. Отыскание экстремальных значений функции различными способами // Математика в школе. 2004. № 4. С. 52-54.

14. Казакова С. Р. Прикладные задачи по теме «Функция» в школьном курсе анализа / С. Р. Казакова, Е. Р. Мансурова // Физико-математическое и естественнонаучное образование: наука и школа : материалы Всероссийской научно-практической конференции преподавателей высшей и средней школы, Йошкар-Ола, 23 апреля 2021 года. Йошкар-Ола : Марийский государственный университет, 2021. С. 160-163.

15. Ковгореня Л. В. История изучения производной в школьном курсе математики / Л. В. Ковгореня // Преподаватель года 2021 : Сборник статей Международного профессионально-исследовательского конкурса в 3-х частях, Петрозаводск, 20 мая 2021 года. Петрозаводск : Международный центр научного партнерства «Новая Наука», 2021. С. 113-118.

16. Лебединцев К. Ф. Основные положения методики учения о функциях и элементах анализа в школах II ступени // Математика в школе. 1983. № 4. С. 60-67

17. Мансурова Е. Р. Практико-ориентированное обучение анализу в школе / Е. Р. Мансурова [и др.] // Sciences of Europe. 2019. № 38-3(38). С. 42-45.
18. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие. Чебоксары : Изд-во Чуваш. ун-та, 2009. С. 226 – 235.
19. Островерхая Л. Д. Нестандартные задачи с применением производной как средство развития математических способностей у студентов среднего профессионального образования / Л. Д. Островерхая, Т. П. Яковлева // Математика и методика ее преподавания : Сборник научно-методических статей / Ответственный редактор : А. С. Пережогин. Том Выпуск 9. Петропавловск-Камчатский : Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2015. С. 22-34.
20. Понтрягин Л. С. Математический анализ для школьников. М. : Наука. 1988. 96 с.
21. Производная и ее применение : Дидактический материал по курсу алгебры и началам анализа для 10-11 кл. сред. шк. / под ред. М. И. Башмакова. СПб. : СВЕТ, 1995. 80 с.
22. Рыжик В. И. Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу для 10-11 классов. М. : Просвещение, 2008. 145 с.
23. Сапаров Т. Е. Производная и ее применение / Т. Е. Сапаров, Т. Б. Мырзағалиев // Химия, физика, биология, математика: теоретические и прикладные исследования: сборник статей по материалам XLVIII международной научно-практической конференции, Москва, 18 мая 2021 года. Том 5 (37). М. : Общество с ограниченной ответственностью «Интернаука», 2021. С. 51-55.
24. Семенко Е. Наш ответ ЕГЭ : разноуровневое обобщающее повторение // Математика. Первое сентября. 2009. № 4. С. 16-21.
25. Семиглазова М. И., Мансурова Е. Р. Проектная деятельность при изучении темы «Производная» в школьном курсе математики // Физика и её применение в школе и в вузе. Йошкар-Ола : Изд-во МарГУ, 2018. С. 190-194.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 5 » 03 20 25 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Вяселевой Алсу Равиленовны

(ФИО полностью)

Тема работы «Применение производной к решению нестандартных и олимпиадных задач»

Утверждена приказом по Университету от « 5.03 » 20 25 г. № 259/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 21 » мая 20 25 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Определить роль изучения производной в курсе математики.	октябрь 2024г.	выполнено ИИИ
2.	Проанализировать учебники математики на предмет изучения производной в курсе алгебры старшей школы.	ноябрь - декабрь 2024г.	выполнено ИИИ
3.	Познакомиться с методами применения производной в олимпиадных и нестандартных задачах.	январь - февраль 2025г.	выполнено ИИИ
4.	Разработать программу элективного курса по подготовке к олимпиаде по математике.	март - апрель 2025г.	выполнено ИИИ
	Разработать дидактические материалы к элективному курсу.		
5.	Провести экспериментальную работу, описать результаты.	апрель - май 2025г.	выполнено ИИИ

Дата выдачи задания « 3 » 03 2025 г.

Руководитель ИИИ Никишина О.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

Вяз Васильева А.Р.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Вяселевой Алсу Равиловны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Вяселева Алсу Равиловна,

Ф.И.О. студента

студент (ка) 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Применение производной к решению нестандартных и олимпиадных задач», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


подпись

17.05.2025
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку

17.05.2025

дд.мм.гггг

Руководитель ВКР


подпись

Никитина Ольга Геннадьевна

И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Применение производной к решению нестандартных и олимпиадных задач»

студента (ки) 5 курса А.Р. Вяселевой (Зенюковой)

И.О. Фамилия

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»

Руководитель ВКР

О.Г. Никитина

И.О. Фамилия



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://pnzgu.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

Автор: Зенюкова Алсу Равиловна

Название документа: Диплом

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Пензенский государственный университет

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
47.78%



Оригинальность:
52.22%



Цитирования:
0%



Самοцитирование:
0%



17.05.2025

ДД.ММ.ГГГГ.

И.О.Ф.

подпись

О. Г. Никитина

И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Применение производной к решению нестандартных и
олимпиадных задач»
студентки Вяселевой Алсу Равилевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика», гр. 203ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Вяселевой Алсу Равилевны посвящена вопросам применения производной к решению нестандартных и олимпиадных задач.

Предметные олимпиады являются мощным средством выявления способностей и интересов учащихся и их математического и логического развития. Понятие производной является одним из фундаментальных понятий, изучаемых в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы. Изучая производную, вырабатываются логические основы для понимания многих явлений в окружающем мире. Кроме того есть целый ряд олимпиадных задач и задач повышенной сложности для решения которых необходимы знания основ математического анализа, в частности, производной и возможностей её применения.

Целью работы является разработка программы элективного курса и дидактических материалов по применению производной к решению олимпиадных и нестандартных задач.

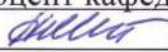
Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения, списка литературы.

Основная часть состоит из двух глав. В первой главе работы рассматриваются теоретические основы применения производной к решению нестандартных и олимпиадных задач. Рассматривается роль производной в школьном курсе и возможности её применения в нестандартных и олимпиадных задачах, проводится анализ учебников по изучению производной в курсе алгебры и начал анализа.

Во второй главе приведен разработанный элективный курс по теме работы и дидактические материалы к курсу. Здесь же указаны результаты апробации курса.

Работа Вяселевой А.Р. является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Вяселевой Алсу Равилевны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР доцент кафедры «Математическое образование»,
к.ф.-м.н.  Никитина Ольга Геннадьевна