МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Формирование исследовательских умений учащихся старших классов при решении неравенств»

Студент 04.06.21 Косухина Ирина Андреевна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель 04.06.21 Сорокина М.В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 29.06.2021 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 07.06.2021 № 8)

Заведующий кафедрой 07.06.21 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 07.07.21 № 5)

Секретарь ГЭК 07.07.21 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2021

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ…….3

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕМЫ……...…….5

1.1. Общая характеристика исследовательских умений…….....5

1.2. Неравенства в изложении школьных учебников математики….....11

1.3. Методы решения неравенств…….....17

ГЛАВА II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ ШКОЛЬНИКОВ……..……30

2.1. Методика изучения неравенств…….....30

2.2. Системы задач по теме «Решение неравенств и их систем»…….33

2.3. Решение неравенства разными способами…….…….47

ЗАКЛЮЧЕНИЕ…….57

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ……....58

ВВЕДЕНИЕ

В реалиях современного информационного общества с его непрерывным прогрессом, быстрым развитием технологий стоит острый вопрос о целостном воспитании поколения, способного с интересом заниматься самостоятельным поиском знаний, совершением научных открытий, привнесением в жизнь передовых идей. Подрастающее поколение должно иметь способности оценивать новые факты, разнообразные явления и идеи; быть полностью готовыми к восприятию полученной информации, глубокому осмыслению, отбору необходимых знаний, которые пригодятся для продолжения образования и самообразования, умение применять их в нестандартных и критических ситуациях.

На сегодняшний день образовательные учреждения должны быть готовы обеспечивать обучающихся подобной развернутой системой знаний, умений и навыков. Для качественной проверки уровня подготовки нынешних учеников используется основной государственный экзамен. Следовательно, для успешного прохождения данного испытания, выпускникам необходимо полное усвоение учебного материала, излагаемого в общеобразовательной организации. В рамках изучения предмета математики одной из ключевых составляющих успеха является формирование у обучающихся старшего звена исследовательских умений.

Изучение неравенств в школьном курсе математики занимает значительное место. Умение решать неравенства необходимо как в рамках алгебры как учебного предмета, так и в смежных дисциплинах. Например, неравенство как математическая модель возникает в задачах экономического содержания. Кроме этого неравенства присутствуют и в обязательном государственном экзамене за 9 класс и в задачах высокого уровня сложности на едином государственном экзамене. Как ни странно именно этот момент отрицательно сказывается за качестве подготовки обучающихся, их умении решать неравенства некоторых типов. Например, если в задании 15

профильного уровня ЕГЭ как правило не встречаются тригонометрические и иррациональные неравенства, то и на уроках они практически не изучаются, что приводит к отсутствию целостности математических знаний учащихся неравенства. Нестандартные методы и приемы решения не изучаются, и большинство обучающихся умеет решать только определенный круг задач. Отдельно следует отметить, что практически никто из обучающихся не сталкивается с заданиями на доказательство неравенств.

Все вышесказанное обуславливает актуальность данной работы.

Цель исследования: изучение роли темы «неравенства» при формировании исследовательских умений учащихся старших классов.

Исходя из темы исследования можно выделить следующие задачи:

1. На основе анализа методической литературы определить характеристики и произвести классификацию исследовательских умений учащихся.

2. Провести анализ действующих школьных учебников на предмет содержания темы «Неравенства».

3. Систематизировать методы решений неравенств.

4. Разработать системы задач по формированию исследовательских умений учащихся при решении различных типов неравенств.

Предмет исследования: использование неравенств для развития исследовательских умений учащихся старших классов.

При выполнении работы использовались следующие методы исследования: изучение и анализ учебной литературы, анализ школьных учеников по алгебре для общеобразовательных школ; сопоставление различных подходов формированию исследовательских умений учащихся.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕМЫ

1.1. Общая характеристика исследовательских умений

На сегодняшний день одной из ключевых задач современного образования является развитие у школьников исследовательских умений, направленных на качественную и плодотворную исследовательскую деятельность.

Исследовательская деятельность играет важную роль в становлении и развитии подрастающего поколения, помогая детям преодолевать сложности на пути к получению знаний, открытию новых граней понимания известных фактов, учиться ясно и четко выражать собственные мысли, стараться находить нестандартные выходы из сложившихся ситуаций, осознавать собственные возможности и силы. [8]

В научной литературе термин «исследовательские умения» понимается по-разному. Так, например, А.И. Савенков трактует общие исследовательские умения как умения видеть проблемы, задавать вопросы, выдвигать гипотезы, давать определения понятиям, классифицировать, наблюдать, проводить эксперименты, делать выводы и умозаключения, структурировать материал, работать с текстом, доказывать и защищать свои идеи. А П.В. Середенко видит их как возможность и реализация выполнения совокупности операций по осуществлению интеллектуальных и эмпирических действий, составляющих исследовательскую деятельность и приводящих к новому знанию. [39]

В настоящий момент мы можем найти много способов классифицировать исследовательские умения. Например, такие авторы как З.Ф. Есарева, Н.В. Кузьмина, В.А, Николаев классифицируют их по функциям деятельности, И.Г. Бердников, М.В. Владыка, Н.М. Яковлева – по логике процесса деятельности.

В школе мы, по мнению К.П. Кортнева и Н.Н. Шушариной, мы должны развивать следующие умения у обучающихся:

- охватывание проблемы в целом;
- корректно ставить исследовательскую задачу;

- оценивание методов решения поставленной задачи;
- планирование собственной исследовательской деятельности;
- поиск оптимального решения задачи;
- реализация выбранной исследовательской методики;
- оценивание информативности и точности с помощью прикладных занятий, например, лабораторно-практических;
- работа с учебной, научной, научно-популярной литературой;
- проведение наблюдения;
- постановка эксперимента;
- оформление и презентация результатов исследования.

Таблица 1 – Основные компоненты исследовательских умений

Основные компоненты исследовательских умений		
Мотивационный	Содержательный	Операционный (Технологический)
Проявляется в виде познавательного интереса, формулируется под воздействием целей новой деятельности	Включает систему знаний об исследовательской деятельности	Включает уже имеющуюся у ребенка систему умений и навыков

При обучении важно добиться присутствия всех трех компонентов (таблица 1) и их гармоничного развития, если этого не произойдет, то есть хотя бы один компонент не будет достаточно сформирован, то полноценное развитие исследовательских умений будет невозможно.

Объединив уже известные нам подходы, мы можем сформулировать определение исследовательских умений. Под данным термином мы будем понимать сложную систему умственных операций и прикладных действий, осуществляемых обучающимися при сопровождении педагога, позволяющую

мотивированно выполнить учебную исследовательскую деятельность или ее отдельные этапы, с помощью которых в ней формируются предметные компетенции. [41]

Основные функции исследовательских умений обучающихся:

- формирование познавательных мотивов и интереса, овладение новыми знаниями;
- выработка следующих качеств личности: внимание, наблюдательность, инициативность, настойчивость, трудолюбие, сообразительность, способность к изобретениям;
- расширение видов и способов деятельности, умение организовывать и контролировать процесс учебного исследования;
- развитие умственных способностей, направленное на формирование умения анализировать изучаемый материал, установка причинно-следственных связей, применение имеющихся знаний при решении поставленных задач;
- целенаправленное освоение приемов и действий, позволяющее обучающимся совершенствовать учебную деятельность.
- обучающимся совершенствовать учебную деятельность.

В таблице 2 представлены основные группы исследовательских умений.

Таблица 2 – Основные группы исследовательских умений

Группы исследовательских умений	Характеристика группы
Организационно-практические	Умения планировать работу, задавать вопросы и отвечать на них, преобразовывать полученные данные, выдвигать предположения, применять общелогические приемы, использовать различные формы представления результатов исследования

Поисковые	Умения выбрать тему исследования, увидеть проблему и поставить цель, то есть ответить себе на вопросы: Что я хочу узнать? Зачем я это делаю? Для чего мне будут нужны полученные знания? Умения самостоятельно изобретать способ действия, привлекая знания из различных областей, выбирать и применять доступные методы исследования, устанавливать причинно-следственные связи, умение находить несколько вариантов решения проблемы
Информационные	Умения находить источники информации, пользоваться ими, внимательно слушать выступающего, работать с определениями, понятиями, терминами, понимать и интерпретировать любой текст, фиксировать информацию в виде символов, условных знаков, формулировать выводы, самостоятельно найти недостающую информацию, запросить ее у педагога
Оценочные	Умения оценить свою работу, определить ее достоинства и недостатки, оценить работу,

	представленную другим исследователем, формулировать оценочные суждения, рекомендации, отзывы, обосновывать свою оценку

Отметим характерные признаки исследования в контексте учебного исследования:

- процесс поисковой познавательной деятельности (изучение, выявление, установление);
- направлено на получение новых знаний, то есть исследование всегда начинается с потребности узнать что-либо новое;
- предполагает самостоятельность обучающихся при выполнении заданий;
- направлено на реализацию дидактических целей обучения.

В процессе формирования исследовательских умений учащихся в предметном обучении педагог должен дать ответы на вопросы как научного, так и методического плана:

1. Каким образом можно у обучающегося сформировать исследовательские умения? Можно ли исследовательским умениям обучить? Ответ на данные вопросы предполагает определение условий и разработку модели формирования исследовательских умений учащихся в рамках конкретной дисциплины.

2. При изучении какого материала возможно формирование исследовательских умений? Для чего необходимо осуществить отбор содержания образования и технологий обучения.

3. По каким критериям можно оценить уровень сформированности исследовательских умений у обучающегося? Что предполагает выделение критериев и уровней сформированности исследовательских умений учащихся в рамках конкретной дисциплины.

Таблица 3 – Характеристика общих и специфических групп

Общие группы исследовательских умений	Специфические группы исследовательских умений
работа с источниками и документами; работа со справочной литературой; работа с компьютерными поисковыми системами; осуществление основных логических операций; проведение наблюдений; проведение различного вида исследований; организация данных различными способами; грамотное выражение собственных мыслей; представление результатов исследования.	умение устанавливать непротиворечивость свойств нового объекта построенной теории (умение устанавливать существование объекта); умение реконструировать исторические события.

Данные примеры умений (таблица 3) обусловлены особенностями объектов определенной предметной области и методами, используемыми для их изучения. Для осуществления исследовательской деятельности на основе определенного предметного содержания необходимо владеть этим содержанием. Это означает знать особенности объектов этой предметной области, представлять и уметь использовать ее методы, знать содержание важнейших понятий области и уметь ими оперировать. В связи со сказанным целесообразно выделить базовые предметные умения без которых не может осуществляться исследовательская деятельность в соответствующей области. [18]

В связи с необходимостью осуществлять в ходе исследовательской деятельности поиск информации и эксперименты с помощью различного оборудования (компьютерная и организационная, проекционная техника), учащиеся должны владеть умениями работы с оборудованием, или инструментальными исследовательскими умениями.

Исходя из высказанного, формируя исследовательские умения учащихся, можно выделить их виды (общие, специфические, инструментальные).

Таким образом, приняв за основу разные авторские подходы, изложенные выше, исследовательские умения учащихся можно рассматривать как совокупность умственных операций и прикладных действий, осуществляемых обучающимся при сопровождении педагога, позволяющую мотивированно выполнить учебную исследовательскую деятельность или ее отдельные этапы, с помощью которых в исследовательской деятельности формируются и предметные компетенции.

1.2. Неравенства в изложении школьных учебников математики

Рассмотрим перечень действующих учебников по алгебре на предмет наличия того, как авторы предоставляют теоретические знания о неравенствах, методах их решения, какие предлагают задания для проверки качества знаний обучающихся по этим темам.

1) Дорофеев Г. В., Суворова С. Б., Бунимович Е. А. Алгебра 8 класс

Тема неравенства не рассматривается в данном учебнике. [11]

Дорофеев Г. В., Суворова С. Б., Бунимович Е. А. Алгебра 9 класс

Вся первая глава посвящена изучению неравенств.

Перед общими свойствами неравенств рассматриваются действительные числа. В следующих же параграфах изучаются: решение неравенств как с одной, так и с несколькими переменными, решение методом интервалов, решение линейных неравенств и их систем, доказательство неравенств. [12]

2) Рубин А. Г., Чулков П. В. Алгебра 8 класс

Неравенства и их системы не рассматриваются. [37]

Рубин А. Г., Чулков П. В. Алгебра 9 класс

Уже во второй главе учебника вводится понятие неравенства и их свойства. Решаются неравенства с одним неизвестным. Рассматривается решение квадратных неравенств графическим методом и методом интервалов. Рассматривается решение рациональных неравенств методом интервалов. Последний пункт данной главы посвящен решению систем и совокупности неравенств. [38]

3) Никольский С. М., Потапов М. К, Решетников Н. Н., Шевкин А. В. Алгебра 8 класс

Неравенства и их системы не рассматриваются. [30]

Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В. Алгебра. Учебник для 9 класса

С первой главы затрагивается тема неравенств, в содержание которой включены: линейные неравенства с одним неизвестным, неравенства первой степени, графический метод решения, система неравенств с одним неизвестным.

Далее рассматриваются: неравенства второй степени с дискриминантом (положительным, отрицательным, равным нулю), неравенства сводящиеся к неравенствам второй степени, рациональные неравенства, метод интервалов, решение рациональных неравенств и их систем.

В дополнении к главе рассматривается доказательство неравенств. [31]

Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н.Н., Шевкин А. В.

Алгебра и начала математического анализа.11 класс

Во второй главе рассматривается равносильность неравенств и их равносильные преобразования. [29]

4) Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра 8 класс

Неравенствам посвящена большая глава. Рассматриваются линейные и квадратные неравенства, а также доказательство неравенств. [25]

5) Ткачева М. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И. Алгебра 8 класс

Первая глава учебника посвящена неравенствам. Здесь рассматриваются: понятие неравенства, основные свойства неравенств, сложение и умножение неравенств. Отдельный параграф посвящается строгим и нестрогим неравенствам.

Рассматривается решение неравенств с одной неизвестной, а также решение систем неравенств. Особенно можно отметить то, что в учебнике рассматриваются неравенства, содержащие модуль. [15]

6) Муравин Г. К., Муравин К. С., Муравина О. В. Алгебра 8 класс Неравенства и их системы не рассматриваются. [27]

7) Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Ткачева М. В. Алгебра 8 класс

Знакомство с неравенствами осуществляется аналогично учебнику М.В.

Ткачева, Н.Е.Федорова, М.И. Шабунин «Алгебра 8 класс».

Рассматриваемые темы: понятие неравенства, основные свойства неравенств, сложение и умножение неравенств, строгие и нестрогие неравенства, решение неравенств с одной неизвестной, решение систем неравенств, решение неравенств содержащих модуль. [3]

Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Сидоров Ю. В., Ткачева М. В.

Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс

В этом учебнике 3 главы подряд посвящены неравенствам.

В главе 2 «Степенная функция» затрагиваются иррациональные неравенства.

В следующей главе рассматриваются показательные неравенства и их системы. [2]

9) Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Сурвилло Г. С. Алгебра. Учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики Неравенства и их системы не рассматриваются. [6]

10) Макарычев Ю. Н. Алгебра 8 класс

Впервые неравенства встречаются в курсе «Алгебры» в этом классе.

Вводится понятие неравенства и его основные свойства. Решаются неравенства с одной переменной. Отдельно даже уделяется параграф посвященный доказательству неравенств, но он идет в разделе «Для тех, кто хочет знать больше». [20]

Макарычев Ю. Н. Алгебра 9 класс

В 9-м классе вновь возвращается к теме неравенств, но уже рассматриваются неравенства второй степени и вводится один из методов решения неравенств - метод интервалов.

Позже вводятся неравенства с двумя переменными. [19]

11) Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебра 9 класс

Неравенства изучаются уже в первой главе. Сначала дается понятие неравенства. В следующем параграфе рассматриваются свойства числовых неравенств.

Среди тем для изучения также представлены: сложение и умножение числовых неравенств, способы доказательства неравенств, неравенства с одной переменной, а также их разложение.

Далее рассматриваются системы неравенств с одной переменной. Чуть позже решение квадратных неравенств, при этом это предпоследняя тема второй главы. [22]

12) Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Т., Нешков К. И., Суворова С. Б. Алгебра 9 класс

В главе 2 затрагивается пункт «Уравнения и неравенства с одной переменной», в котором рассматриваются: решение неравенств второй степени с одной переменной, а также использование метода интервалов.

В главе 3 рассматривается решение неравенств уже с двумя переменными, а также решение их систем. [21]

13) Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра 9 класс

Неравенства затрагиваются в первой же главе: «Рациональные неравенства и их системы».

Изучаются следующие темы: линейные и квадратные неравенства, рациональные неравенства, системы неравенств.

Интересным фактом является то, что данная глава в учебнике расположена перед главой, посвященной системе уравнений, что является на мой взгляд, весьма необычным решением автора. [26]

Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс. Часть 1. Профильный уровень

В третьей главе затрагиваются показательные и логарифмические неравенства.

Практически в конце учебника даются для изучения темы: равносильные неравенства, неравенства с модулем, иррациональные неравенства, доказательство неравенств, неравенства с двумя переменными. [24]

14) Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварубуру С. И. Алгебра и математический анализ. Углублённое изучение 10 класс

Во второй главе в параграфе посвященному методу математической индукции, затрагивается тема доказательства неравенств методом описанным выше.

Также в этой главе рассматриваются: равносильные неравенства, решение неравенств и их доказательство, неравенства содержащие знак модуля. [5]

15) Пратусевич М. Я. и др. Алгебра и начала математического анализа 10 класс. Профильный уровень

В первой главе рассматриваются неравенства с одной переменной.

В четвертой главе представлен графический метод решения неравенств.

В конце изучаются логарифмические неравенства. [33]

Пратусевич М. Я. и др. Алгебра и начала математического анализа 11 класс. Профильный уровень

В последней главе рассматриваются следующие темы: системы неравенств, неравенства с параметром, множества на плоскости задаваемые неравенством, графический метод решения неравенств, иррациональные неравенства (в том числе и с параметром), показательные, логарифмические и тригонометрические неравенства. [34]

16) Алимов И. А. Алгебра 9 класс

В третьей главе затрагивается тема неравенств и уравнений, содержащих степень. [4]

17) Колмогоров А. Н. Алгебра и начала математического анализа. Учебник для 10-11 класса

В первой главе изучается решение простейших тригонометрических неравенств и их примеры. [14]

18) Шабунин М. И., Прокофьев А. А. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень 11 класс

В главе 12 рассматриваются тригонометрические неравенства.

Через 5 глав изучаются показательные и логарифмические неравенства с параметром, системы тригонометрических неравенств.

В главе 18: линейные и нелинейные неравенства с двумя переменными, неравенства с двумя переменными содержащие параметр. [44]

Вывод: в вышерассмотренных учебниках различных авторов, заданиям с неравенствами и их системами уделяется очень мало внимания, при этом решение таких задач входит в список самых сложных разделов математики в школе. В 8 классе не все учебники затрагивают тему неравенств. Однако в следующем классе задачи связанные с неравенствами появляются на страницах учебной литературы чаще, но при этом не задействуется большая часть методов решения неравенств. Основными и часто используемыми в школе являются: графический и метод интервалов. В 10-м классе темы связанные с неравенствами встречаются очень редко, но при этом в 11-м их практически не рассматривают.

Для хорошего усвоения школьниками тем связанных с неравенствами и их системами, необходимо проводить дополнительные занятия, кружки и факультативы.

1.3. Методы решения неравенств

В математике применяется три подхода при решении неравенств: алгебраический, геометрический и функциональный.

Алгебраические и функциональные подходы имеют отличия в определении неравенства, которые можно рассмотреть как:

- сравнение двух выражений;
- сравнение двух функций.

В случае применения алгебраического подхода, осуществляются (равносильные общие или частичные) преобразования неравенств (преобразуются все части или определенные выражения составляющие данное неравенство).

При применении функционального подхода задействуются свойства функции (область определения и область значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства и т.д.), которые включены в представленное неравенство. [28]

В определенных ситуациях два вышеперечисленных подхода будут взаимно заменяемыми. Используя определение неравенства это можно заметить. Также в преобразованиях неравенства можно использовать утверждения, придерживаясь функциональной или алгебраической линии.

Геометрический подход базируется на интерпретации неравенств и их решений на координатных прямых, координатной плоскости или в пространстве. Всё вышеперечисленное даёт возможность перехода к равносильным неравенствам, основываясь на геометрических утверждениях.

Рассмотрим каждую категорию методов более подробно. [42]

Для алгебраических методов решения характерно применение равносильных преобразований (возведение в степень, потенцирование, логарифмирование), которые помогают привести исходное неравенство к более простому виду. В ходе преобразований множество решений либо не имеет изменений, либо расширяется (получаем лишние решения), либо сужается (часть решений теряется).

В большинстве случаев, преобразования применяются для освобождения неравенства от степеней и от знаков: корней, модуля, логарифма.

Приведем пример цепочки преобразований неравенства. Важно заметить, что в большинстве случаев пропускаются некоторые преобразования, входящие в цепочку преобразований, для того, чтобы сделать её короче. [12]

Пример.

$$\sqrt[4n]{f(x)} > \sqrt[4n]{g(x)}, n \in N, \leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt[4n]{f(x)})^{4n} > (\sqrt[4n]{g(x)})^{4n} \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Вместо вышеуказанной цепи преобразований можно использовать укороченную:

$$\sqrt[4n]{f(x)} > \sqrt[4n]{g(x)}, n \in N, \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Как правило, когда решение неравенства не может быть представлено в стандартном виде, его последовательность разбивается на определенное количество логически возможных случаев. [17]

Пример. $x^2 + 25 \geq 8\sqrt{5 - x} + 10x$

$x^2 + 25 \geq 8\sqrt{5 - x} + 10x \leftrightarrow \left(8\sqrt{5 - x} + 10x\right) \leq x^2 + 25$

Переносим в правую часть $0 \leq (-8\sqrt{5 - x} + x^2 - 10x + 25)$

Группируем и преобразуем $(-25) \leq (-8\sqrt{5 - x} + x^2 - 10x)$

Получаем $\begin{cases} x \le 1 \\ 5 \le x \end{cases}$, преобразуем (-5)≤(-x), получаем x≤5.

x≤5 и 5≤x приводит к x=5.

x≤1, x=5.

Ответ: (-∞;1] ∪ {5}.

Решение неравенств содержащих иррациональные выражения

Существует множество схем решения неравенств содержащих иррациональные выражения. Приведем в качестве примера несколько стандартных схем, в которых задействуется возведение в натуральную степень обеих частей неравенства. [1]

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \ge \sqrt[2n]{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x) \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \le g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g^{2n}(x) \\ f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^{2n}(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \leftrightarrow f(x) \vee g(x)$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x) \leftrightarrow f(x) \vee g^{2n+1}(x)$$

Символ «v» в двух последних схемах является заменой для одного из знаков: $>, <, \geq, \leq$.

Рассмотрим неравенства, содержащие показательные выражения. Запишем в качестве примера несколько стандартных схем решения показательных неравенств, в которых используется логарифмирование обоих частей неравенства.

$$(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) \\ \varphi(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) \\ 0 < \varphi(x) < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(\varphi(x))^{f(x)} \geq (\varphi(x))^{g(x)} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \varphi(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f(x) \\ 0 < \varphi(x) < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

В частности, - если $\alpha > 1, \text{то } \alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)} \leftrightarrow f(x) > g(x)$

- если $0 < \alpha < 1, \text{то } \alpha^{f(x)} > \alpha^{g(x)} \leftrightarrow f(x) < g(x)$

$$(f(x))^{\varphi(x)} > (g(x))^{\varphi(x)} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример. $(0{,}2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$

$$5 < (0{,}2)^{\frac{2x-3}{x-2}}$$

Преобразуем степень: $\frac{2x}{x-2} - \frac{3}{x-2}$, получим $5 < (0{,}2)^{(\frac{2x}{x-2} - \frac{3}{x-2})}$ [35]

Логарифмируем неравенство по основанию «2», получим:

$$(\frac{2x}{x-2} - \frac{3}{x-2}) < 1 \leftrightarrow 1 < (-\frac{2x}{x-2} + \frac{3}{x-2})$$

Складываем: $1 + \left(-\frac{2x}{x-2} + \frac{3}{x-2}\right) = -\frac{3x+5}{x-2}$

Получаем неравенство: $0 < -\frac{3x+5}{x-2} \leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ \frac{5}{3} < x \end{cases}$

Вышеописанное условие выполняется, следовательно ответ: $(\frac{5}{3}; 2)$.

Рассмотрим неравенства, содержащие логарифмические выражения. Запишем в качестве примера несколько стандартных схем решения логарифмических неравенств, в которых используется потенцирование обоих частей неравенства. [9]

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0 \\ 0 < \varphi(x) < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

В частности: - если число

$$\alpha > 1, \text{то } \log_\alpha f(x) > \log_\alpha g(x) \leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$$

- если число

$$0 < \alpha < 1, \text{то } \log_\alpha f(x) > \log_\alpha g(x) \leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$$

$$\log_{\varphi(x)} f(x) \geq \log_{\varphi(x)} g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g(x) > 0 \\ \varphi(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq f(x) > 0 \\ 0 < \varphi(x) < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

В частности: - если число

$$\alpha > 1, \text{то } \log_\alpha f(x) \geq \log_\alpha g(x) \leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0$$

- если число

$$0 < \alpha < 1, \text{то } \log_\alpha f(x) \geq \log_\alpha g(x) \leftrightarrow 0 < f(x) \leq g(x)$$

Пример: $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_3(x-2)$

Осуществляем замену: $\log_3(x-2) < \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

$$0 < (-(\log_3(x-2) + \log_3(x+1)))$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{13}-1}{2} < x \\ x < \dfrac{\sqrt{13}+1}{2} \end{cases}$$

$$0 < (x-2) \leftrightarrow 2 < x$$

Отбрасываем неравенство $-\frac{\sqrt{13}-1}{2} < x$, так как оно является следствием вышеуказанного 2<x.

В таком случае, ответ: $(2;\frac{\sqrt{13}+1}{2})$.

Рассмотрим неравенства, содержащие выражения с модулями.

Пример: $\left|\frac{2x-1}{x-2}\right| > 2 \leftrightarrow 2 < \left|\frac{2x-1}{x-2}\right|$

$$\begin{cases} 2 < \dfrac{2x-1}{x-2} \\ \dfrac{2x-1}{x-2} < (-2) \end{cases}$$

Преобразуем неравенство: $0 < (x-2) \leftrightarrow 2 < x$

Преобразуем неравенство: $2(x-2) < (2x-1) \leftrightarrow 1 < 4$

Преобразуем неравенство: $(2x-1) < 2(x-2) \leftrightarrow (-1) < (-4)$

Отбрасываем ложные неравенства: $(-1) < (-4)$ и $x < 2$, также отбрасываем $1 < 4$.

$$\begin{cases} 2 < x \\ \dfrac{2x-1}{x-2} < (-2) \end{cases}$$

Преобразуем $(x-2) < 0 \leftrightarrow x < 2$

$$-2(x-2) < (2x-1) \leftrightarrow \frac{5}{4} < x$$

Получаем: $\begin{cases} x < 2 \\ \frac{5}{4} < x, \\ 2 < x \end{cases} \rightarrow x \neq 2, \frac{5}{4} < x$

Ответ: $(\frac{5}{4}; 2) \cup (2; +\infty)$.

Рассмотрим расщепление неравенств. В случае, когда слева в неравенстве находится произведение выражений, а справа нуль, схема решения будет зависеть от правила знаков при умножении (делении) положительных и отрицательных чисел. [16]

$$f(x) \cdot g(x) \geq 0 \leftrightarrow \left[\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}\right.$$

$$f(x) \cdot g(x) \leq 0 \leftrightarrow \left[\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}\right.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \leftrightarrow \left[\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}\right.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \leftrightarrow \left[\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}\right.$$

Рассмотрим метод замены переменных. Он осуществляется путем:

- введения новой переменной;
- введения двух переменных;
- тригонометрической подстановки.

Пример: $4^{x-1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2} > 0$

Преобразуем: $0 < 2^{2x-1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2}$

Введем новую переменную: $y = 2^x$

Получаем: $0 < \frac{1}{4}(y^2 + y) - \frac{3}{2}$

$$0 < \frac{y^2 + y}{4} - \frac{3}{2} \leftrightarrow \frac{3}{2} < \frac{y^2 + y}{4}$$

$$6 < (y + y^2) \leftrightarrow \begin{cases} y < (-3) \\ 2 < y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^x < (-3) - \text{ложное} \\ 2 < 2^x - \text{верное} \end{cases}$$

Следовательно, $1 < x$

Ответ: $[1; +\infty)$.

Также можно решать неравенства, используя разбиение ОДЗ неизвестной неравенства на промежутки, мы можем легко упростить некоторые виды неравенств. Решение рассматривается «отдельно» на каждом промежутке.

Рассмотрим группу функционально-графических методов решения. [10]

Существует достаточно большая сфера применения свойств функции в решении неравенств. Эти свойства (область определения и область значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства и т.д.), если они входят в неравенство, позволяют использовать нестандартные методы и пути решения стандартных неравенств.

Рассмотрим подробнее использование области определения функции. Проанализировав ОДЗ неизвестной неравенства, порой можно прийти к решению без преобразований неравенства.

Пример. $\frac{x^2 - 8x + 15}{x - 5} \geq 0$

Область определения задается корнями условиями: $x \neq 5$

А также корнями уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \leq 3 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$x \leq 5$ – отбрасываем

Ответ: $[3;5) \cup [5;+\infty)$.

Рассмотрим использование непрерывности функции. Для начала необходимо сформулировать свойство непрерывных функций: если какая-либо функция непрерывна на интервале и не обращается в нуль, то она на этом интервале является знакопостоянной. [43]

Именно на вышеуказанном свойстве базируется метод решения неравенств с одной переменной - метод интервалов (промежутков).

Рассмотрим метод интервалов. Формулировка свойства чередования знака линейного двучлена $ax + b\ (a \neq 0)$ выглядит так: при переходе через значение $x_0 = -\frac{b}{a}$ знак выражения $ax + b$ меняется на противоположный. Использование этого свойства позже позволяет отказаться от линейных двучленов канонического вида: $x-x_0$.

Вышеуказанное свойство является важной составляющей метода интервалов и нашло достаточно широкое применение при решении алгебраических неравенств с более высокой степенью.

Доказывается данное свойство при помощи теоремы Больцано-Коши.

Первая теорема Больцано-Коши:

Пусть функция f непрерывна на отрезке [x,y], значения функции на концах отрезка имеют различные знаки, то есть $f(x) > 0, f(y) < 0$ или наоборот. Тогда существует точка $T \in (x, y)$, в которой $f(T) = 0$.

Геометрический смысл данной теоремы заключается в том, что график вышеописанной функции будет пересекать ось абсцисс, по крайней мере, в одной точке.

Рассмотрим метод рационализации неравенств. Используя метод интервалов при решении неравенств, порой можно столкнуться с трудностями вычислительного характера в вычислении значений функции в промежуточных точках.

Для удобства обычно используется идея рационализации неравенств (метод замены множителей).

Его суть заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на наиболее простое (рациональное) $G(x)$, при которой неравенство $G(x) \vee 0$ будет равносильным $F(x) \vee 0$ в области определения $F(x)$.

Несколько примеров используемых замен (без учета области допустимых значений).

а) Замена знакопостоянных множителей:

$$(ax^2 + bx + c) \leftrightarrow 1, \qquad (a > 0, D < 0)$$

$$\left(\sqrt{f} + |g|\right) \leftrightarrow 1, \qquad (|f| + |g| \neq 0)$$

$$(|f| + g) \leftrightarrow 1, \qquad (g > 0)$$

$$a^f \leftrightarrow 1$$

$$(a^f + a^g + a^h + \cdots) \leftrightarrow 1$$

б) Замена не знакопостоянных множителей с модулем:

$$(|f| - |g|) \leftrightarrow f^2 - g^2 = (f - g)(f + g)$$

$$\left(|f| - \sqrt{g}\right) \leftrightarrow f^2 - g$$

$$\sqrt{f} \leftrightarrow f$$

$$\sqrt{|f|} \leftrightarrow f^2$$

в) Замена не знакопостоянных множителей с показательными и логарифмическими выражениями:

$$\left(a^f - g\right) \leftrightarrow (f - \log_a g)(a - 1), (g \geq 0)$$

$$(a^f - 1) \leftrightarrow f(a - 1)$$

$$\log_a f \leftrightarrow (f - 1)(a - 1)$$

Рассмотрим метод интервалов на координатной окружности. Он наиболее удобен для решения тригонометрических неравенств, приведенных к виду:

$(f_1(x) - a_1)(f_2(x) - a_2) \ldots \cdot (f_n(x) - a_n) \text{v } 0$,

в частности: $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) \text{v} 0$, где каждая $f_i(x)$ является одной из простейших тригонометрических функций и a_i – действительные числа, $i = 1,2, \ldots, n$.

В ситуации, когда наименьший общий период T тригонометрических функций, входящих в данное неравенство, не будет больше 2π, решение неравенства можно рассмотреть на числовой окружности на промежутке, равном по длине периоду. При записи ответа, необходимо будет учесть то факт, что решением данного числового неравенства будут являться все числа, отличающиеся от полученных на nT, где $n \epsilon Z$. [36]

Рассмотрим использование ограниченности функций. Для данного типа методов необходимо заранее уметь находить множество значений функции и знать оценки области значений стандартных функций.

Можно выделить следующие методы, относящиеся к данному типу:

- метод оценки;
- неограниченности функций;
- применения свойства модуля;
- ограниченности синуса и косинуса;
- применения классических неравенств (к примеру, неравенство Коши).

Рассмотрим каждый метод более подробно.

Метод оценки: порой неравенство $f(x) \text{v } g(x)$ устроено таким образом, что на всей области допустимых значений переменной x имеют место неравенства $f(x) \geq A \text{ и } g(x) \leq A$ при некотором A. Тогда, решение неравенства:

а) $f(x) \leq g(x)$ сводится к нахождению значений x при которых $f(x) = g(x) = A$;

б) $f(x) \geq g(x)$ сводится к нахождению тех решений неравенства $f(x) \geq A$, для которых определена функция $g(x)$.

Метод не отрицательности функции: пусть левая часть неравенства $f(x)$ v 0 является суммой определенного числа функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$ которые по отдельности являются неотрицательными для любого x из их областей определения. [40]

В таком случае, неравенство $f(x) \leq 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

А $f(x) \geq 0$ будет сводится к нахождению области определения $f(x)$.

Графический метод: при помощи рисунка или графика можно получить несколько преимуществ таких, как:

- построив график функций, содержащихся в неравенстве, можно сделать вывод о влиянии на решение взаимного расположения графиков;
- строя график, можно аналитически формулировать условия необходимости и достаточности для решения данного задания. Графическая форма записи, в отличие от аналитической, является менее громоздкой.
- На основании графика, ряд утверждений помогает получать строгие и обоснованные умозаключения о различных решениях неравенства. [32]

Группа геометрических методов решения позволяет решать красиво и без больших усилий задачи различной сложности. Интерпретируются неравенства, по большей части, как модули или же расстояние на координатной прямой.

Рассмотрим метод расстояния на координатной прямой. Геометрический смысл модуля заключается в том, что модулем разности двух чисел будет являться расстояние между точками координатной прямой, координаты которых будут соответствовать этим числам.

Расстояние на координатной плоскости: для любых n точек $M_1, M_2, \dots, M_n$ при $n \geq 3$ будет выполнимо неравенство:

$$M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_{n-1}M_n \geq M_1M_n$$

В декартовой системе координат, через координаты точек $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2), M_3(x_3;y_3)$ неравенство записывается в следующем виде:

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} + \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} \geq \geq \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$$

Метод векторной интерпретации неравенства: пусть имеется два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Для скалярного произведения $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами, будут справедливы неравенства:

$-|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \leq \bar{a} \cdot \bar{b} \leq |\bar{a}| \cdot |\bar{b}|$, при этом крайние значения скалярного произведения возникают при коллинеарности векторов.

В координатном виде, вышеописанные неравенства будут выглядеть так:

- Для векторов на плоскости:

$$-\sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2} \leq a_1a_2+b_1b_2 \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

- Для векторов в пространстве:

$$-\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2} \leq a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 \leq \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$$

ГЛАВА II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ УМЕНИЙ ШКОЛЬНИКОВ

2.1. Методика изучения неравенств

Материал, связанный с неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики. Это объясняется их широким применением в различных математических разделах и решении прикладных задач.

При изучении неравенств в школе, важно помнить о двух процессах, сопровождающих обучение. Первый – постепенное возрастание количества классов неравенств и приемов их решения, различных преобразований, применяемых в решении. За счет увеличения объема материал как бы дробится, изучение его новых фрагментов затрудняется наличием уже изученных. Второй процесс – установление разнообразных связей между различными классами неравенств, выявление все более общих классов, закрепление более обобщенных типов преобразований, упрощение описания и обоснования решения. [23]

В результате взаимодействия этих процессов изученный материал должен представляться учащимся в сравнительно компактном виде, не затрудняющим, а, наоборот, облегчающем усвоение нового. Необходимость установления такого взаимодействия обусловлена применяемым методическим приемом, в частности, распределение материала по ступеням.

Можно выделить следующие ступени: независимое изучение основных типов неравенств и их систем; постепенное расширение количества изученных классов неравенств и их систем; формирование приемов решения и анализа, имеющих широкую область применимости; синтез материала линии неравенств.

Среди всех изучаемых неравенств в школьном курсе математики выделяется сравнительно ограниченное количество основных типов: линейные неравенства с одним неизвестным, квадратные неравенства, простейшие иррациональные и трансцендентные неравенства.

Эти классы изучаются с большой тщательностью, для них указывается и доводится до автоматизма выполнение алгоритмов решения, указывается форма, в которой должен быть записан ответ.

Введение каждого нового основного класса неравенств сопровождается введением новой области числовых выражений, входящих в стандартную форму записи ответа. Вместе с тем, когда материал усвоен, целесообразно изредка предлагать и такие задания, в которых могут возникать нестандартные для данного класса ответы.

Каждый из основных классов неравенств и их систем требует проведения исследования зависимости результата от коэффициентов, поскольку множества решений у заданий, входящих в один и тот же класс, могут существенно различаться: для неравенств и их систем в качестве меры различия берутся простейшие особенности геометрических фигур, изображающих их множества решений на координатной прямой или плоскости.

Выделим ряд особенностей изучения неравенств:

1. Как правило, навыки решения неравенств, за исключением квадратных, формируются на более низком уровне, чем соответствующих уравнений. Эта особенность имеет объективную причину: неравенства сложнее.

2. Большинство приемов решения неравенств состоит в переходе от данного неравенства $a>b$ к уравнению $a=b$ и последующем переходе от найденных корней уравнения к множеству решений исходного неравенства. Пожалуй, такого перехода не производится лишь при рассмотрении линейных неравенств, где в нем нет необходимости из-за простоты процесса решения. Эту особенность необходимо постоянно подчеркивать, с тем, чтобы переход к уравнениям и обратный переход превратились в основной метод решения неравенств; в старших классах он формализуется в виде «метода интервалов».

3. В изучении неравенств большую роль играют наглядно-графические средства.

Указанные особенности могут быть использованы для обоснования расположения материала, относящегося к неравенствам, количестве заданий, необходимых для усвоения программного минимума.

Рассмотрим примеры. Первая особенность может быть истолкована так: при выполнении одного и того же числа упражнений техника решения неравенств какого-либо класса будет ниже, чем уравнений соответствующего класса; следовательно, если имеется необходимость формирования прочных навыков решения неравенств, то для этого требуется большее число заданий. Вторая особенность объясняет то, что темы, относящиеся к неравенствам, расположены после тем, относящихся к соответствующим классам уравнений. В соответствии с третьей особенностью изучение неравенств зависит от качества изучения функциональной линии школьного курса математики.

Перечисленные особенности показывают, что изучение предшествующего материала сильно влияет на изучение неравенств.

Проиллюстрируем указанные особенности на материале квадратных неравенств. Изучение этого раздела курса следует за изучением квадратного уравнения и квадратного трехчлена. К моменту его изучения учащиеся умеют строить графики квадратичной функции, причем на них отмечаются нули функции, если они существуют. Поэтому переход к рассмотрению квадратных неравенств можно осуществить как переход от неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ к построению и изучению графика функции $y = ax^2 + bx + c$. Поскольку возможны различные случаи расположения графика относительно оси абсцисс, лучше начать с рассмотрения конкретного задания, для которого соответствующий квадратный трехчлен имеет различные корни. На этом примере устанавливается соответствие между двумя задачами: «Решить неравенство $ax^2 + bx + c > 0$»; «Найти значения аргумента, для которых значения функции $y = ax^2 + bx + c$ положительны». Посредством этой связи производится переход к построению графика функции. Нули этой функции

разбивают ось абсцисс на три промежутка, в каждом из которых она сохраняет знак, поэтому ответ считывается прямо с чертежа. Другие случаи решения квадратных неравенств (у квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$>0 не больше одного корня) требуют дополнительного рассмотрения, но опираются на то же соответствие.

В процессе дальнейшего изучения устанавливаются, что нет нужды в точно вычерченном графике квадратного трехчлена, достаточно наметить только положение корней, если они есть, и учесть на эскизе нужные особенности графика (направление ветвей параболы). [23]

В школьном курсе математики ограничиваются изучением только неравенств основных классов; задания, которые требуют сведения к основным классам, встречаются сравнительно реже. Например, не изучаются биквадратные неравенства.

Из числа типов заданий, в которых проявляется прикладная роль неравенств в курсе алгебры, отметим нахождение области определения функции и исследование корней в зависимости от параметров.

2.2. Системы задач по теме «Решение неравенств и их систем»

Задачи с неравенствами составляют достаточно обширный класс задач, которые довольно сложно систематизировать из-за большого количества существующих критериев.

В педагогике выделяют следующие принципы отбора и составления систем задач, как:

- Принцип системности: присутствие заданий, для которых необходимо изолировано изучить отдельные факты, связанные с уже полученными знаниями;
- Принцип последовательности: задания следуют от более простого к более сложному;

- Принцип прочности: в системе присутствует однотипность заданий.

Пользуясь данными принципами, мы составили системы задач. [7]

Система задач №1: «Сравнение чисел».

В задачах 1-15 сравните данные числа.

Задача 1: $a = \frac{8}{7}$ и $b = \frac{9}{7}$.

Задача 2: $a = \frac{6}{9}$ и $b = \frac{5}{6}$.

Задача 3: $a = \frac{124}{119}$ и $b = \frac{137}{129}$.

Задача 4: $a = 0{,}3$ и $b = \frac{1}{3}$.

Задача 5: $a = 3^{10}$ и $b = 4^{10}$.

Задача 6: $a = 0{,}5^{10}$ и $b = 0{,}5^{20}$.

Задача 7: $a = 14^{15}$ и $b = 4^{25}$.

Задача 8: $a = (2\sqrt{2})^{100}$ и $b = 8^{49}$.

Задача 9: $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$ и $b = 1$.

Задача 10: $a = 2\sqrt{5}$ и $b = \sqrt{19}$.

Задача 11: $a = \sqrt[3]{\frac{22}{7}}$ и $b = \sqrt[3]{\pi}$.

Задача 12: $a = \sqrt[8]{10}$ и $b = \sqrt[4]{3}$.

Задача 13: $a = \sqrt[4]{6 + \sqrt{20}}$ и $b = \sqrt{1 + \sqrt{5}}$.

Задача 14: $a = \log_4 0{,}6$ и $b = \log_5 0{,}7$.

Задача 15: $a = 2^{\log_3 5}$ и $b = 5^{\log_3 2}$.

Система задач №2: «Линейные неравенства».

Задача 1: Решите неравенство $-3 - 3x > 7x - 9$

а)$(0{,}6; +\infty)$ в)$(1{,}2; +\infty)$

б)$(-\infty; 1{,}2)$ г)$(-\infty; 0{,}6)$

Задача 2: Решите неравенство $2x-4>7x-1$

а)$(-0{,}6;+\infty)$ в)$(1;+\infty)$

б)$(-\infty;1)$ г)$(-\infty;-0{,}6)$

Задача 3: Решите неравенство $2x-3(x-7)\leq 3$

а)$[18;+\infty)$ в)$[-24;+\infty)$

б)$(-\infty;24]$ г)$(-\infty;18]$

Задача 4: При каких значениях x значение выражения 5x+2 меньше значения выражения 4x+8?

а)$x>10$ в)$x>6$

б)$x<10$ г)$x<6$

Задача 5: При каких значениях a выражение 4a+9 принимает отрицательные значения?

а)$a>-\frac{4}{9}$ в)$a>-\frac{9}{4}$

б)$a<-\frac{9}{4}$ г)$a<-\frac{4}{9}$

В задачах 6-10 решите неравенства.

Задача 6: $3x+4(-7+6x)\leq -7x+6$

Задача 7: $6x+10(7+5x)\geq -9x+5$

Задача 8: $3(x+2)-4(x-6)>2(x-5)$

Задача 9: $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<2x+1$

Задача 10: $\frac{x-2}{3}+\frac{x+3}{2}<0$

Система задач №3: «Квадратные неравенства».

В задачах 1-2, 5, 9-10 решите неравенства.

Задача 1: $x^2+x\geq 0$

Задача 2: $x^2 - 4x < 0$

Задача 3: Решением какого из данных неравенств является решение (-2;3)?

а)$x^2 + 4 < 0$ в)$x^2 - 4 < 0$

б)$x^2 + 4 > 0$ г)$x^2 - 4 > 0$

Задача 4: Решите неравенство $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

а)$[1;3]$ в)$(-\infty;1] \cup [3;+\infty)$

б)$[1;+\infty)$ г)$[3;+\infty)$

Задача 5: $(2x-5)(x+3) \geq 0$

Задача 6: Укажите неравенство, которое не имеет решений

а)$x^2 - 64 \leq 0$ в)$x^2 + 64 \leq 0$

б)$x^2 + 64 \geq 0$ г)$x^2 - 64 \geq 0$

Задача 7: Укажите неравенство, решением которого является любое число

а)$x^2 - 15 < 0$ в)$x^2 + 15 < 0$

б)$x^2 + 15 > 0$ г)$x^2 - 15 > 0$

Задача 8: Решите неравенство $x^2 - 36 > 0$

а)$(-\infty;+\infty)$ в)$(-\infty;-6) \cup (6;+\infty)$

б)$(-6;6)$ г) нет решений

Задача 9: $x - x^2 < 0$

Задача 10: $x^2 - 17x + 72 < 0$

Система задач №4: «Рациональные неравенства».

В задачах 1-13 решите неравенства.

Задача 1: $\frac{2x^2-4x-21}{x-3} + x^2 \geq 7 - x$

Задача 2: $\frac{2}{x^2-8x+15}-\frac{1}{x^2-7x+12}\leq 0$

Задача 3: $5x^3-3x^2-\frac{2x^2-4x-20}{x+5}\leq 4$

Задача 4: $\frac{x^2+x-2}{x-5}+\frac{x+2}{x^2-7x+10}\geq 0$

Задача 5: $\frac{3(x+2)^{-1}+3}{4(x+2)^{-1}-1}\leq 1+\frac{1}{x+2}$

Задача 6: $\frac{2(1-2x)^{-1}-1}{(1-2x)^{-1}-3}<2$

Задача 7: $2\frac{x^2+2}{x+8}+\frac{x+8}{x^2+2}\geq 3$

Задача 8: $4(\frac{x^2-1}{x+2})^2+\frac{x+2}{x^2-1}\geq 3$

Задача 9: $\frac{(2x+x^2+3)(x+2)}{x^2+3x+2}\leq -1-\frac{x+3}{x-2}$

Задача 10: $\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}\cdot\left(\frac{2x^2-x-1}{x^2-x}\right)^{-1}\geq\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}-2{,}5$

Задача 11: $\frac{\frac{1}{x-1}-1}{1-\frac{1}{x-7}}\geq 0$

Задача 12: $\frac{x^2-4x+4}{(x+1)^2}+\frac{x^2+6x+9}{(x-1)^2}\leq\frac{(2x^2+x+5)^2}{2(x^2-1)^2}$

Задача 13: $(x^2+3x)(2x+3)-16\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x}\geq 0$

Задача 14: Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x)=\frac{5x-5}{4x-6}$ и $g(x)=1$ меньше, чем 0,5.

Задача 15: Определите множество всех значений x, при которых функции $f(x)=\frac{-5}{x-3}$ и $g(x)=2x+4$ имеют одинаковые знаки.

Система задач №5: «Иррациональные неравенства».

В задачах 1-13 решите неравенства.

Задача 1: $\frac{\sqrt{2x+4}}{x-3}(x^2+3x-10)\geq 0$

Задача 2: $\frac{2\sqrt{x+5}}{2x-4}\leq\frac{5\sqrt{x+5}}{2x+2}$

Задача 3: $\sqrt{x^2-x-2}<x+2$

Задача 4: $\sqrt{3x^2-14x-5}<\sqrt{x^2-11x}$

Задача 5: $\sqrt{5x+4}<\frac{x+1}{\sqrt{3x}}$

Задача 6: $\sqrt{2x^2+x+3}+\sqrt{2x^2+x}<\sqrt{6}$

Задача 7: $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}\geq\sqrt{x+7}$

Задача 8: $\left(2+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-4}{1-\sqrt{3-x}}\right)\geq 5\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-4}{1-\sqrt{3-x}}\right)$

Задача 9: $\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+5}+2}{\sqrt{x^2-2x+5}}\right)\geq 2\left(\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}\right)$

Задача 10: $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1}\leq x$

Задача 11: $\sqrt{5-x}<\frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$

Задача 12: $\sqrt{2x+44}+\sqrt{28-2x}\geq 4\cdot\sqrt[4]{x^2+8x+97}$

Задача 13: $\sqrt{2x^2+3x-35}+\sqrt{2x^2+x-36}\le\sqrt{2x+1}$

Задача 14: Найдите область определения функции $y=\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{x-1}}$

Задача 15: При каких значениях аргумента график функции $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{2x+1}}$ лежит выше графика функции $g(x)=\sqrt{5x-3}$?

Система задач №6: «Неравенства с модулем».

В задачах 1-15 решите неравенства.

Задача 1: $\frac{2}{|x|}+\frac{1}{x^2}\ge 2$

Задача 2: $2|2x-2|+|1-x|<2x+4$

Задача 3: $2|x^2-1|+|1-x|\le 2$

Задача 4: $-\left|2x-|x+5|\right|<x-2$

Задача 5: $|x^2+3x-4|-x^2+|x+4|<2$

Задача 6: $|x-3|^{-1}+2|x-4|^{-1}\ge\frac{3}{|x^2-7x+12|}$

Задача 7: $\frac{|x^2+6x+9|+|x^3+5x^2+8x+6|}{3x-|2x-3|+1}\ge 0$

Задача 8: $|x^3+2x^2+8x-7|\le x^3+4x^2-8x+7$

Задача 9: $|x^3+2x^2-8x|+|x^2-3x-10|\le|x^3+3x^2-11x-10|$

Задача 10: $\left||x^2-8x+2|-x^2\right|\ge 2x+2$

Задача 11: $\left|\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}\right| \leq 1$

Задача 12: $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2-|x|-2} \geq -3x$

Задача 13: $\frac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|} \leq 0$

Задача 14: $\frac{2|x-3|}{|x-5|} < \frac{|x-5|}{|x-3|}$

Задача 15: $\frac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6} \geq 0$

Система задач №7: «Показательные неравенства».

В задачах 1-15 решите неравенства.

Задача 1: $2^x + 3 \leq 10 \cdot \frac{1}{2^x}$

Задача 2: $3^{x^2} \leq \frac{9}{3^x}$

Задача 3: $16^{x^2-3x-1} \geq 0{,}5^{4x^2-3x+2}$

Задача 4: $5^{x-1} > 25 \cdot 0{,}2^x + 4$

Задача 5: $5^{2x+1} - 5^{x+2} - 5^x + 5 \leq 0$

Задача 6: $2^x + 6 \cdot 2^{2-x} \geq 11$

Задача 7: $\frac{9^{x+1}-22\cdot 3^{x+1}-135}{3^{x+1}-1} \geq 0$

Задача 8: $\frac{4^{x-1}-2^x-2}{2^x+4} - \frac{4^x-2\cdot 2^{x-1}-3}{2^x-8} \leq 2^{x+1} - 4$

Задача 9: $2^{2x+\frac{1}{3}} + 2^{x-\frac{1}{3}} - 3 < 0$

Задача 10: $3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x \geq 0$

Задача 11: $6 \cdot 4^x + 6^x - 2 \cdot 9^x \geq 0$

Задача 12: $27 \cdot 45^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 15^x + 12 \cdot 9^x + 5^x - 3^x \leq 0$

Задача 13: $3^{2+2x} - 100 \cdot 3^x - 100 \cdot 3^{-x} + 3^{2-2x} + 182 \geq 0$

Задача 14: $4^{x^2-x} - 10 \cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} \geq 0$

Задача 15: $2^{2x-1} - 2^{x-1}\left(2x^{\frac{1}{2}} + x\right) + x \cdot x^{\frac{1}{2}} > 0$

Система задач №8: «Логарифмические неравенства.

В задачах 1-13 решите неравенства.

Задача 1: $\log_4\left(\frac{x+30}{2}\right) - 2 \geq \log_4(x^2 - 3)$

Задача 2: $\frac{3lg^2x-8}{lg^2x-4} \geq 2$

Задача 3: $\log_3 x \geq 5\frac{\log_3 x+9}{3\log_3 x-1}$

Задача 4:

$log_2^2(16 + 6x - x^2) + 10\log_{0,5}(16 + 6x - x^2) + 24 > 0$

Задача 5: $4log_4^2(x^2 - 4) - \log_2(x^2 - 4) \geq 2$

Задача 6: $lg^4x - 4lg^3x + 5lg^2x - 2lgx \geq 0$

Задача 7: $\log_5(3x^2 - 2) - \log_5 x < \log_5\left(3x^2 + \frac{1}{x} - 3\right)$

Задача 8: $2\log_2 x + \log_2\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \leq 2\log_2\left(\frac{x^2+x}{2}\right)$

Задача 9: $\frac{\log_x(x^2-1)-\log_x(x+1)}{\log_{x+3}(2x^2-3x+1)} \leq 0$

Задача 10:

$\log_{(-x)^2}(x^2-5x+4)-\log_{(-x)^2}(x-4) \geq \log_{(-x)^2}(x-1)^2$

Задача 11: $(5x-13)\cdot\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geq 0$

Задача 12: $\log_{\frac{2}{x}} 256 \geq \log_2 2x$

Задача 13: $\frac{\log_{(2+x)^2} x-\log_{2+x}(x^2)}{\log_{2+x} x} \leq 0$

Задача 14: Найдите все значения x, для которых точки графика функции $f(x)=\frac{log_{0,7}^2(23+4x)}{45-4x}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $g(x)=\frac{83}{4x-45}$.

Задача 15: Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций

$f(x)=\log_{\sqrt{2}}(5x+14)$ и $g(x)=10$ меньше, чем 2.

Система задач №9: «Смешанные неравенства».

В задачах 1-15 решите неравенства.

Задача 1: $|x-2|^{3-x}+|2-x|^{x-3} \leq 2$

Задача 2: $|2x-1|^{5-x}+|1-2x|^{x-5} \leq 2$

Задача 3: $2^{\lg(x^2-4)} \geq (x+2)^{lg2}$

Задача 4: $3^{\frac{(\log_3 x)^2}{4}} \leq \frac{x^{\frac{\log_3 x}{3}}}{3}$

Задача 5: $x^{lg^2x-3lgx+1} > 1000$

Задача 6: $9^{|x|} + 6 \cdot 3^x \geq 11$

Задача 7: $\left(2^{\frac{x-4}{2}} - 1\right)\sqrt{2^x - 10\sqrt{2^x} + 16} \geq 0$

Задача 8: $\sqrt{17 \cdot 9^x - 4^x} \geq 3^x - 3 \cdot 2^x$

Задача 9: $\frac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|2^x-3|} \geq 1$

Задача 10: $\left||3^x + 4x - 9| - 8\right| \leq 3^x - 4x - 1$

Задача 11: $\frac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}} - \frac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1} \geq \frac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}$

Задача 12: $|\log_3(x+2)| > 2$

Задача 13: $2 < \left|\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) - 4\right| \leq 3$

Задача 14: $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 1$

Задача 15: $\sqrt{\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 4\log_2\sqrt{x}} < \sqrt{2}(4 - \log_{16} x^4)$

Система задач №10: «Системы неравенств».

В задачах 1-15 решите системы неравенств.

Задача 1: $\begin{cases} \frac{2^{4x+2}}{4^{x+1}} > 1, \\ 1 + \log_3(x-4) \leq \log_3(x+21) \end{cases}$

Задача 2: $\begin{cases} 9^x - 10 \cdot 3^x + 9 < 0, \\ \frac{2}{x} < 2 + \frac{3}{x-1} \end{cases}$

Задача 3: $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{32}} \cdot 8^{3x^2} > 2^{x+3}, \\ |\sqrt{2}x-1| = \sqrt{2}x-1 \end{cases}$

Задача 4: $\begin{cases} 3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 > 0, \\ log_3^2 x + 4\log_3 x + 3 \geq 0 \end{cases}$

Задача 5: $\begin{cases} 9^{x+1} + 3 \geq 28 \cdot 3^x, \\ \log_2(x^2 - 2x) \leq 3 \end{cases}$

Задача 6: $\begin{cases} 8 \cdot 4^x - 65 \cdot 2^x + 8 \leq 0, \\ log_{|x|}^2(x^4) + \log_3(x^2) \leq 18 \end{cases}$

Задача 7: $\begin{cases} (x^2 - 8x + 12)\sqrt{x^2 - 10x + 21} \geq 0, \\ 4^{x-1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2} \geq 0 \end{cases}$

Задача 8: $\begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \leq 0, \\ 9^{\log_{\frac{1}{9}} \log_5 x^2} < 5^{\log_{\frac{1}{5}} \log_9 x^2} \end{cases}$

Задача 9: $\begin{cases} 2 \cdot 3^{2x^2} + 4 \leq 3^{x^2+2}, \\ \log_8(x^2 - 4x + 3) < 1 \end{cases}$

Задача 10: $\begin{cases} 5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} \geq 8 \cdot 15^x, \\ \log_2\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) < \log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right) \end{cases}$

Задача 11: $\begin{cases} 7^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x > 2, \\ 3^{x^2} \leq 9 \cdot 3^{-x} \end{cases}$

Задача 12: $\begin{cases} (9 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 1) \cdot \log_{x+1}|x - 3{,}5| \geq 0, \\ 9^{x+1} + \log_{x+1}|x - 3{,}5| + 1 \geq 10 \cdot 3^x \end{cases}$

Задача 13: $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \log_2(x+5) \geq 0, \\ 8 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 4 \geq 0 \end{cases}$

Задача 14: $\begin{cases} \frac{\sqrt{log_2^2 x - 3\log_2 x + 2}}{\log_5\left(\frac{1}{3}(\log_3 5 - 1)\right)} \geq 0, \\ x - \sqrt{x} - 2 \geq 0 \end{cases}$

Задача 15: $\begin{cases} |2x-1| + |2x+1| \leq 3 - |2x|, \\ 2x(x+1) + \frac{874}{875} > (x+1)^2 - x\left(\frac{1}{35} + \frac{1}{25}\right) \end{cases}$

Комментарий к системам задач:

Вышеприведенные системы заданий относятся к разным темам школьной программы, а задания групп 9 и 10 выходят за рамки школьного курса математики и относятся к заданиям высокого уровня сложности единого государственного экзамена. Система заданий 1 на сравнение чисел является базовой и необходима для формирования исследовательских умений школьников, заданиям подобного рода зачастую уделяется недостаточно внимания.

Данные системы задач применимы к разным классам основной общеобразовательной школы. Так, к примеру, системы №2 и №3 хорошо подходит для реализации в 8 классе, в частности в учебниках Алимова и Макарычева. Задания подобраны по вышеуказанным принципам и помогают детям познакомиться с основами исследования функций. Вся система заданий №2 может быть реализована согласно принципу системности: мы предлагаем сначала варианты заданий с выбором ответа, а затем усложняем и предлагаем решить неравенства в общем виде. Задания с выбором ответа необходимо подбирать таким образом, чтобы ребенок не мог однозначно выбрать ответ путем простой подстановки числа. Задания №1 и №2 реализуют принцип прочности, который прослеживается и в заданиях №3, №6-8. Задача №4 требует от учащихся самим сделать переход от словесной формулировки к математической модели в виде неравенства, то есть в данном случае также

реализован принцип системности. В последних двух заданиях наблюдается усложнение в форме работы с обыкновенными дробями.

Система №3 предлагает обучающимся, помимо исследования заданных функций, применять знания о формулах сокращенного умножения и умения строить графики функций. Задачи №1-2, №5, №9-10 реализуют принцип прочности, аналогично предыдущей системе, так же данный принцип присутствует для задач №6-8 с выбором одного верного ответа. Принцип системности можно применить к заданию №5, так как его модно решить двумя способами: раскрыв скобки и графически изобразив параболу на системе координат; применив сразу метод интервалов.

Система №4 рассчитана на школьников 9 класса. Ученикам предлагаются для решения задачи, идущие от простой к более сложной, что отражено принципом последовательности. Обучающиеся с помощью предлагаемых заданий могут выявить пробелы в собственных знаниях, отточить навык построения и исследования графиков функций, таких как смещенная прямая, парабола, гипербола. Принцип прочности отражен в текущей системе в задачах под номерами 1-13. Для решения задач №14 и №15 необходимо обладать знаниями построения графиков функций, что и требуется продемонстрировать при решении. Так же отметим, что последние два задания более сложные для решения, что отражено в принципе системности.

Системы №1, 5-10 составлены для учеников старшей школы (10-11 классы). Здесь в полной мере дети могут реализовать исследования, применить знания о свойствах степеней, иррациональных неравенств, логарифмических, показательных функций, функций с модулем. Задачи сформулированы с учетом требований к подготовке школьников к основному государственному экзамену по математике. Ученики, применяя знания о построении, свойстве функций, умениях анализировать условия и определять ОДЗ формируют у себя основы исследовательских умений. В системе задач по иррациональным неравенствам принцип прочности отражен в заданиях №1-13, задания №14-15 подобраны по

принципу системности: ребятам необходимо продемонстрировать работу с функциями, показать работу на понимание, проверить себя на так называемых нетиповых заданиях. Системы с модульными неравенствами, показательными, смешанными составлены по принципам прочности и последовательности, это же характерно для задач по системам неравенств и для заданий №1-13 в логарифмических неравенствах. В системе логарифмических неравенств №14-15 представлен принцип системности, так как эти задания нацелены на работу с графиками функций и являются более сложными по сравнению предыдущими задачами.

2.3. Решение неравенств разными способами

Рассмотрим на одном примере разные способы решения неравенства.

Пример 1: решить неравенство $\log_x 2 < \log_{6-x} 2$.

Первый способ (обобщенный метод интервалов):

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} < \frac{1}{\log_2 (6-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2 (6-x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 (6-x) - \log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_2 (6-x)} < 0 .$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\log_2 (6-x) - \log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_2 (6-x)}$.

Ее область определения задается условиями:

$$\begin{cases} 6-x > 0, \\ x > 0, \\ 6-x \neq 1, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Отсюда $D(f) = (0;1) \cup (1;5) \cup (5;6)$.

Функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения и обращается в нуль при x=3. Используя «метод пробной точки», определим знак $f(x)$ на промежутках (0;1), (1;3), (3;5), (5;6).

$$f(0,5)=\frac{\log_2 11}{\log_2 0,5\cdot\log_2 5,5}<0;$$

$$f(2)=\frac{\log_2 2}{\log_2 2\cdot\log_2 4}>0;$$

$$f(4)=\frac{\log_2 0,5}{\log_2 4\cdot\log_2 2}<0;$$

$$f(5,5)=\frac{-\log_2 11}{\log_2 5,5\cdot\log_2 0,5}>0.$$

Следовательно, решениями неравенства являются все значения $x\in(0;1)\cup(3;5)$.

Второй способ (решим неравенство «методом рационализации»):

$$\log_x 2<\log_{6-x}2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}((6-x)-x)(x-1)((6-x)-1)<0\\6-x>0,\\6-x\neq 1,\\x>0,\\x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3-x)(x-1)(5-x)<0\\x<6,\\x\neq 5,\\x>0,\\x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1,\\3<x<5.\end{array}\right.$$

Третий способ («метод расщепления»):

$$\frac{\log_2(6-x)-\log_2 x}{\log_2 x\cdot\log_2(6-x)}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2(6-x)-\log_2 x>0,\\ \log_2 x\cdot\log_2(6-x)<0\end{cases}\quad(1)\\ \begin{cases}\log_2(6-x)-\log_2 x<0\\ \log_2 x\cdot\log_2(6-x)>0\end{cases}\quad(2)\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

Решим систему (1):

$$\begin{cases}\log_2(6-x)-\log_2 x>0,\\ \log_2 x\cdot\log_2(6-x)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\log_2(6-x)>\log_2 x,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2 x>0,\\ \log_2(6-x)<0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2 x<0\\ \log_2(6-x)>0\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}0<x<3,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1,\\ 5<x<6\end{cases}\\ \begin{cases}0<x<1\\ x<5\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}0<x<3,\\ \left[\begin{array}{l}5<x<6\\ 0<x<1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow 0<x<1.$$

Решим систему (2):

$$\begin{cases}\log_2(6-x)-\log_2 x<0\\ \log_2 x\cdot\log_2(6-x)>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\log_2(6-x)<\log_2 x\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2 x>0,\\ \log_2(6-x)>0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2 x<0\\ \log_2(6-x)<0\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<6-x<x \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1, \\ 6-x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 0<6-x<1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3<x<6 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1, \\ x<5 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 5<x<6 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x<6 \\ 1<x<5 \end{cases} \Leftrightarrow 3<x<5.$$

Объединяя решения систем (1) и (2), получаем $(0;1) \cup (3;5)$.

Четвертый способ (решение неравенства на промежутках):

Неравенство имеет смысл при значениях x таких, что:

$$\begin{cases} 6-x>0, \\ 6-x\neq 1, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<6, \\ x\neq 5, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(0;1)\cup(1;5)\cup(5;6).$$

Равенство $\log_x 2 = \log_{6-x} 2$ выполняется на множестве $(0;1) \cup (1;5) \cup (5;6)$, если x=6-x, то есть при x=3.

Получаем четыре промежутка: (0;1), (1;3), (3;5), (5;6).

Рассматривая неравенство на каждом из промежутков, получаем:

- если $x \in (0;1)$, то $6 - x > 5$ и верны неравенства:

$\log_x 2 < 0, \log_{6-x} 2 > 0,$ и $\log_x 2 < \log_{6-x} 2$;

- если значения $x \in (1;3)$, то $6 - x > x > 1$ и верно неравенство

$\log_x 2 > \log_{6-x} 2$, то есть исходное неравенство не выполняется;

- если значения $x \in (3;5)$, то $1 < 6 - x < x$ и верно неравенство

$\log_x 2 < \log_{6-x} 2$;

- если значения $x \in (5;6)$, то $0 < 6 - x < 1$ и верны неравенства:

$\log_x 2 > 0, \log_{6-x} 2 < 0,$ и $\log_x 2 > \log_{6-x} 2$, то есть исходное неравенство не выполняется.

В итоге получаем множество решений исходного неравенства $(0;1) \cup (3;5)$.

Пятый способ (графический):

Рассмотрим функции: $f(x) = \log_x 2, D(f) = (0;1) \cup (1;+\infty),$ и

$g(x) = \log_{6-x} 2, D(g) = (-\infty;5) \cup (5;6)$.

Отсюда $D(f) \cap D(g) = (0;1) \cup (1;5) \cup (5;6)$.

Так как $f(x) = \frac{1}{\log_2 x}$ и $f'(x) = \left(\frac{1}{\log_2 x}\right)' = -\frac{1}{(\log_2 x)^2} \cdot \frac{1}{x \ln 2}$, то замечаем, что $f'(x) < 0$ при всех значениях $x \in D(f)$, то есть функция $f(x)$ убывает на промежутках (0;1) и $(1;+\infty)$.

Соответственно $g(x) = \frac{1}{\log_2 (6-x)}$ и $g'(x) = \left(\frac{1}{\log_2 (6-x)}\right)' = \frac{1}{(\log_2 (6-x))^2} \cdot \frac{1}{(6-x) \ln 2}$, то замечаем, что $g'(x) > 0$ при всех

значениях $x \in D(g)$, то есть функция $g(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty; 5)$ и $(5; 6)$.

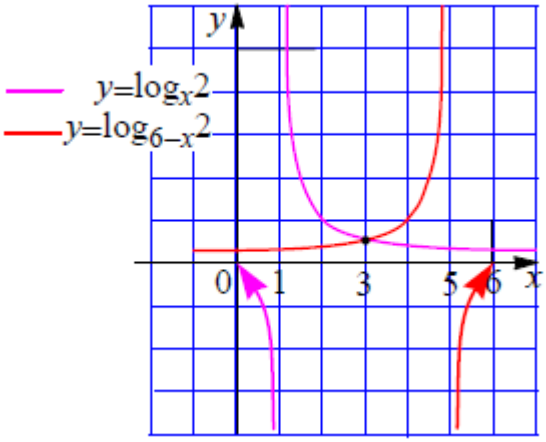

Рисунок 1 – Графический способ решения примера №1

На рисунке 1 изображены эскизы графиков функций $f(x)$ и $g(x)$. Из уравнения $f(x) = g(x)$ или $\log_x 2 = \log_{6-x} 2$ получаем x=3.

Учитывая характер монотонности функций $f(x) = g(x)$, и то, что при $x \in (0;1)\ f(x) < 0, \text{а}\ g(x) > 0, \text{а}$ при $x \in (5;6)\ f(x) > 0, \text{а}\ g(x) < 0,$ получаем множество решений данного неравенства (0;1)∪(3;5).

Ответ: (0;1)∪(3;5).

Пример 2: решить неравенство $(\log_3 x + 1)(\log_3 x - 2) \le 4$.

Первый способ («метод замены»):

Пусть $\log_3 x = a$, тогда имеем неравенство $(a + 1)(a - 2) \le 4$ или

$a^2 - a - 6 \le 0$.

Отсюда $-2 \le a \le 3$.

Возвращаемся к первоначальной переменной $-2 \le \log_3 x \le 3$;

$\log_3 \frac{1}{9} \leq \log_3 x \leq \log_3 27.$

По свойству возрастающей функции $y = \log_3 t$ на множестве $(0; +\infty)$ получаем $\frac{1}{9} \leq x \leq 27.$

Второй способ («метод рационализации»):

Данное неравенство приведем к виду:

$$\log_3^2 x - \log_3 x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_3 x + 2)(\log_3 x - 3) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_3 x + \log_3 9)(\log_3 x - \log_3 27) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3 (9x) \cdot (\log_3 x - \log_3 27) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-1)(9x-1)(3-1)(x-27) \leq 0, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq x \leq 27.$$

Третий способ («обобщенный метод интервалов»):

Приведем исходное неравенство к виду $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 \leq 0$ и рассмотрим функцию: $f(x) = (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 6,$ где $x>0$.

Решая уравнение $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$, находим нули функции $f(x): x = \frac{1}{9}$ или $x = 27.$

На интервалах $\left(0; \frac{1}{9}\right), \left(\frac{1}{9}; 27\right)$ и $(27; +\infty)$ функции $f(x)$ сохраняет постоянный знак.

Так как $f\left(\frac{1}{27}\right) > 0, f(1) < 0, f(81) > 0,$ то $f(x) \leq 0$ при всех значениях $x \in \left[\frac{1}{9}; 27\right].$

Четвертый способ («метод расщепления»):

Преобразуем данное неравенство:

$$\log_3^2 x - \log_3 x - 6 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x + 2)(\log_3 x - 3) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x + 2 \ge 0, \\ \log_3 x - 3 \le 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x + 2 \le 0, \\ \log_3 x - 3 \ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x \ge \log_3 \frac{1}{9}, \\ \log_3 x \le \log_3 27. \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x \le \log_3 \frac{1}{9}, \\ \log_3 x \ge \log_3 27. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \frac{1}{9}, \\ x \le 27. \end{cases} \\ \begin{cases} x \le \frac{1}{9}, \\ x \ge 27. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{9} \le x \le 27.$$

Ответ: $\frac{1}{9} \le x \le 27.$

Рассмотрев подробнее применение методов на практике, мы можем дать некоторые рекомендации о достоинствах и недостатках каждого из них, которые можно реализовать на факультативных занятиях как алгоритмические предписания, позволяющие стимулировать исследовательские умения учащихся. То есть обучающиеся должны хорошо представлять плюсы и минусы каждого метода и самостоятельно делать выбор в пользу того или иного метода.

Метод интервалов или обобщенный метод интервалов: считается универсальным при решении простых строгих или дробно-рациональных неравенств, понятен в объяснении и применении, в целом, не вызывает затруднений в усвоении у школьников. Однако, при видимых преимуществах, имеет недостаток: сложно применить к более громоздким неравенствам, неравенствам с модулем или смешанным типам неравенств. В методе интервалов велика вероятность сделать ошибку, так как школьники не осознают связь этого метода с функциональной линией, поэтому не всегда ведется верное исследование области определения функции.

Метод рационализации как правило школьники воспринимают формально, думая, что для успешного применения этого метода нужно выучить основные замены, помогающие в решении. Однако это не так, этот метод, как и метод интервалов, основан на глубоком понимании свойств числовых функций. Поэтому учителю, знакомящему обучающихся с методом рационализации не следует вводить его формально. Из достоинств следует отметить упрощение громоздких примеров и сведение их к более простым формам, удобство применения при решении №15 из профильного экзамена по математике в 11 классе; из минусов – при неправильном применении замены получаем более громоздкое неравенство; в школах, как правило данный метод не изучается, следовательно, детям придется знакомиться с ним самостоятельно. Важно не только запомнить основные замены, но и внимательно изучить, когда они применяются, чтобы не допустить ошибку в решении.

Графический метод: не смотря на свою, казалось бы, простоту, метод помогает наглядно увидеть, как ведет себя функция на том или ином промежутке, вместе с тем, не всегда удается точно отметить точки, начертить правильно график, нужно проверять себя дополнительными вычислениями, а это, в свою очередь, съедает много времени, к тому же иногда в заданиях представлены такие функции, что сразу построить их без специальных программ школьникам не под силу.

Метод расщепления: интересный метод, помогающий рассмотреть сразу все замечания относительно данного неравенства, но на практике не слишком удобен, так как дети теряют корни, расписывают не полное количество условий, накладываемых на данное задание, теряют промежутки.

Метод решения неравенства на промежутках схож с методом расщепления в своих плюсах и минусах.

Метод замены переменной является вторым по популярности в применении у обучающихся. Метод можно считать одним из удобных и универсальных, однако в число его недостатков входит потеря корней: ребенок решая методом замены, находит некоторое значение для новой переменной и ошибочно принимает его за правильный ответ, забывая выполнить обратную подстановку.

На наш взгляд, в школе для формирования исследовательских навыков хорошо применим метод интервалов, метод расщепления, так как помогает охватывать большой пласт знаний, оттачивать умения анализировать и решать задачи. Наряду с ними, для больших и более сложных заданий подходит метод рационализации, помогающий упростить громоздкость задачи и сэкономить время решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении отметим, что для полного развития исследовательских умений обучающихся старших классов необходимо тщательное изучение темы неравенств и методов их решения, так как данная тема является занимает серьезное место в школьной программе по математике, является логическим продолжение линии уравнений. Кроме это прослеживается метапредметный характер данной темы, связь ее с другими дисциплинами: экономика, физика, биология.

При изучении темы «неравенства» необходимо уходить от формального подхода и при изучении каждого типа неравенств делать упор на уже изученные вещи, проводить аналогию. Особую роль необходимо уделять осознанию обучающимися связи функциональной линии школьного курса математики и решением неравенств различных типов. Это будет способствовать формированию исследовательских умений учащихся.

Исходя из цели выпускной квалификационной работы, были решены все поставленные задачи, а именно, проведен анализ учебно-методической литературы, школьных учебников, рассмотрены различные методы решения неравенств, разработаны системы задач по формированию исследовательских умений учащихся при решении различных типов неравенств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала математического анализа : учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров [и др.] ; под ред. А. Н. Колмогорова. М. : Просвещение, 2008. 384 с.

2. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый уровень / Ш. А. Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2012. 464 с.

3. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и проф. уровни / С. М. Никольский [и др.]. М. : Просвещение, 2017. 464 с.

4. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2012. 255 с.

5. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / С. М. Никольский [и др.]. М. : Просвещение, 2014. 301 с.

6. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Г. В. Дорофеев [и др.]. 3-е изд. М. : Просвещение, 2016. 320 с.

7. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. М. Колягин [и др.]. М. : Просвещение, 2013. 336 с.

8. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2013. 287 с.

9. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2014. 271 с.

10. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2012. 287 с.

11. Алгебра. 9 класс. : учеб. для общеобразоват. организаций / С. М. Никольский [и др.]. М. : Просвещение, 2014. 335 с.

12. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. 12-е изд., испр. М. : Мнемозина, 2010. 223 с.

13. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Г. В. Дорофеев [и др.]. 5-е изд. М. : Просвещение, 2010. 304 с.

14. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 21-е изд. М. : Просвещение. 2014. 271 с.

15. Алгебра. Учебник для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики. / Н. Я. Виленкин [и др.]. М. : Просвещение, 2006. 369 с.

16. Александрова О. В., Семенов Ю. С. Решение алгебраических и иррациональных уравнений и неравенств. М. : Илекса, 2013. 96 с.

17. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 10 класса : учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубленным изучением математики. М. : Просвещение, 1999. 336 с.

18. Виноградова Л. В. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие. Ростов н/Д. : Феникс, 2005. 252 с.

19. Гладкова А. П. Процесс формирования исследовательских умений школьников во внеурочной деятельности // Историческая и социально-образовательная мысль. 2012. № 4. С. 91-94.

20. Далингер В. А. Математика. Логарифмические уравнения и неравенства. Учебное пособие для СПО. М. : Просвещение, 2018. 176 с.

21. Далингер В. А. Математика. Тригонометрические уравнения и неравенства. Учебное пособие. М. : Юрайт, 2018. 136 с.

22. Епихин В. Е., Гераськин С. С. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач. М. : КноРус, 2013. 608 с.

23. Коннова Е. Г., Дрёмов В. А., Иванов С. О. Математика. Подготовка к олимпиадам: основные идеи, темы, типы задач. 6–11 класс. М. : Легион, 2019. 256 с.

24. Кортнев К. П., Шушарина К. П. Сочетание в обучении решения задач и лабораторного практикума // Современные методы физико-математических наук: труды международ. конф. : сб.ст. Орел, 9–14 октября 2006 г. Орел : ОГУ. Т. 3. 2006.

25. Кошелева Д. В. Генезис понятия «исследовательские умения» // Знание. Понимание. Умение. 2011. № 2. С. 218-221.

26. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебра: 9 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М. : Вентана-Граф, 2014. 304 с.

27. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика : учебное пособие для студентов педагогических институтов по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох [и др.] ; сост. В. И. Мишин. М. : Просвещение, 1987. 117 с.

28. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень). М. : Мнемозина, 2013. 400 с.

29. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. 12-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2010. 215 с.

30. Муравин Г. К., Муравин К. С., Муравина О. В. Алгебра. 8 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений. М. : Дрофа, 2013. 254 с.

31. Неравенства. Справочные материалы. М. : Айрис-Пресс, 2013. 2 с.

32. Подготовка к олимпиадам. Основные идеи, темы, типы задач. М. : Легион, 2016. 224 с.

33. Пратусевич М. Я., Столбов К. М., Головин А. Н. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : профил. уровень. М. : Просвещение, 2009. 415 с.

34. Пратусевич М. Я., Столбов К. М., Головин А. Н. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений : профил. уровень. М. : Просвещение, 2010. 463 с.

35. Решение простейших неравенств. Справочные материалы. М. : Айрис-Пресс, 2013. 2 с.

36. Решение тригонометрических неравенств. Таблица. М. : Айрис-Пресс, 2013. 2 с.

37. Рубин А. Г., Чулков П. В. Алгебра. 8 класс. : учеб. для общеобразоват. организаций. М. : Баллас, 2016. 240 с.

38. Рубин А. Г., Чулков П. В. Алгебра. 9 класс. : учеб. для общеобразоват. организаций. М. : Баллас, 2017. 240 с.

39. Савенков А. И. Содержание и организация исследовательского обучения школьников. М. : Сентябрь, 2003. 204 с.

40. Садовничий Ю. В. ЕГЭ 2021. Математика. Профильный уровень. 100 баллов. Уравнения и неравенства. М. : Экзамен, 2021. 96 с.

41. Середенко П. В. Развитие исследовательских умений и навыков школьников в условиях перехода к образовательным стандартам нового поколения : монография. Южно-Сахалинск: Изд-во СахГУ, 2014. 208 с.

42. Татарников О. В., Чуйко А. С., Шершнев В. Г. Элементы линейной алгебры. Учебник и практикум. М. : Юрайт, 2016. 334 с.

43. Хорошилова Е. В. Математика в ЕГЭ и олимпиадах. Применение тождеств и неравенств. Учебное пособие. М. : Издательство Московского университета, 2017. 176 с.

44. Шабунин М. И., Прокофьев А. А. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень : учебник для 11 класса. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. 384 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«25» сентября 2020 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Косухиной Ирины Андреевны.
(ФИО полностью)

Тема работы «Формирование исследовательских умений учащихся старших классов при решении неравенств».

Утверждена приказом по Университету от «25» ноября 2020 г. № 0883/о.

Срок сдачи студентом законченной работы: «4» июня 2021 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение психолого-педагогической литературы по теме исследования.	Октябрь-ноябрь, 2020.	выполнено
2.	Изучение методической литературы по теме исследования.	Декабрь, 2020.	выполнено
3.	Изучение различных методов решений неравенств.	Январь, 2021.	выполнено
4.	Изучение структуры ЕГЭ и задач по геометрии, входящих в единый экзамен по математике профильного уровня.	Февраль, 2021.	выполнено
5.	Разработка систем упражнений для обучения решению различных видов неравенств.	Март, 2021.	выполнено
6.	Подбор задач высокого уровня сложности.	Апрель, 2021.	выполнено
7.	Оформление текста работы.	Май, 2021.	выполнено
8.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь, 2021.	выполнено

Дата выдачи задания «25» 09 2020 г.

Руководитель _____ Сорокина М.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Косухина И.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Косухиной Ирины
Андреевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Косухина Ирина Андреевна,
Ф.И.О. студента

студент (ка) 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Формирование исследовательских умений учащихся старших классов при решении неравенств», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись
04.06.2021г
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 04.06.2021г
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР _____ М.В. Сорокина
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы
«Формирование исследовательских умений учащихся старших классов при решении неравенств»
студентки 4 курса **Косухиной Ирины Андреевны**
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР *М.В.Сорокина*

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: Косухина Ирина
Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна (sorokina_m@list.ru / ID: 168)
Организация: Пензенский государственный университет

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - pnzgu.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 54
Начало загрузки: 11.06.2021 22:52:19
Длительность загрузки: 00:00:21
Имя исходного файла: VKR.docx
Название документа: VKR.docx
Размер текста: 62 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 63017
Слов в тексте: 11745
Число предложений: 489

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 12.06.2021 09:04:57
Длительность проверки: 00:00:44
Комментарии: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Модули поиска: Интернет Плюс, Сводная коллекция РГБ, Перефразирования по Интернету, Шаблонные фразы, Модуль поиска "ПГУ", Кольцо вузов, Сводная коллекция ЭБС, Перефразирования по eLIBRARY.RU, eLIBRARY.RU, Переводные заимствования (RuEn), Диссертации НБД, Библиография, ИПС Адилет, Цитирования, Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), Переводные заимствования издательства Wiley (RuEn), СПС ГАРАНТ, Медицина, Патенты СССР, РФ, СНГ, СМИ России и СНГ, Издательство Wiley, Переводные заимствования

ЗАИМСТВОВАНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
30,23%	0%	2,36%	67,41%

12.06.2021 М.В.Сорокина

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Формирование исследовательских умений учащихся старших классов при решении неравенств»
студентки Косухиной Ирины Андреевны
факультета физико-математических и естественных наук направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль подготовки «Математика», гр. 17ФПМ1

Изучение различных типов неравенств является одной из основных линий в школьном курсе алгебры и алгебры и начал анализа. Фактически изучение основных типов неравенств приходится на старшую школу. Выпускная квалификационная работа Косухиной И.А. посвящена формированию исследовательских умений учащихся старших классов при решении неравенств.

Работа состоит из двух глав. В первой главе изложены вопросы, касающиеся теоретических основ данной темы. В частности, рассмотрена общая характеристика исследовательских умений, дан анализ школьных учебников на предмет содержания материала по теме неравенства, кратко описаны основные методы решения различных типов неравенств.

Вторая глава работы посвящена методическим разработкам по данной теме. Изложены методические особенности изучения темы неравенства в школьном курсе математики. Разработаны системы упражнений по каждой теме с соблюдением основных методических принципов. Рассмотрены примеры неравенств высокого уровня сложности единого государственного экзамена и проанализированы различные методы решения заданий подобного типа на предмет возможности формирования исследовательских умений учащихся.

Работа Косухиной И.А. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Фрагменты работы могут быть использованы в процессе работы учителя математики на уроках или факультативных занятиях.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «хорошо».

Научный руководитель,
доцент кафедры «МО»,
к.ф.м.н., доцент М.В. Сорокина