

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Функционально-графические методы решения неравенств»

Студент

Е. Карнычева - 06.05.25.
(подпись, дата)

Карнычева Анастасия Александровна
(ФИО полностью)

Руководитель

О. Г. Никитина 06.05.25
(подпись, дата)

Никитина О. Г.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Е. Журавлёва - 23.06.25
(подпись, дата)

Журавлёва Е. Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой

В. И. Паньженский 2.06.25
(подпись, дата)

Паньженский В. И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 26.06.25 № 2)

Секретарь ГЭК

Е. Журавлёва - 26.06.25
(подпись, дата)

Журавлёва Е. Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ	6
1.1 Сущность функционально-графических методов решения неравенств	6
1.2 Функционально-графические методы при решении неравенств	14
1.3 Методика изучения функционально-графических методов в школьном курсе математики	21
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ НА ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ	24
2.1 Программа элективного курса по функционально-графическим методам решения неравенств	24
2.2 Методические материалы к элективному курсу	34
2.2.1 Дидактические задания к занятиям на различные темы	34
2.2.2 Конспекты двух занятий	43
2.3 Результаты апробации элективного курса	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	56
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	58

ВВЕДЕНИЕ

В современной системе школьного образования математика по праву занимает одно из центральных мест: она способствует формированию у школьников логического мышления, развивает аналитические способности и умение справляться с задачами повышенной сложности. Среди ключевых тем курса — решение неравенств, которое требует от учеников не только владения алгебраическими приёмами, но и понимания принципов функциональной зависимости.

Неравенства — это неотъемлемая часть школьной математики: они сопровождают учащихся от начальных этапов обучения и до углублённого изучения предмета в старших классах. Их широкое применение в таких дисциплинах, как физика, экономика, инженерия и других областях науки, подчеркивает их высокую практическую значимость [4]. Несмотря на это, многие ученики испытывают затруднения при решении неравенств, особенно если задачи выходят за рамки стандартных и требуют нетривиального подхода и глубокого понимания зависимости между величинами. Одним из действенных подходов в решении таких задач являются функционально-графический метод. Основанный на свойствах функций и их графических представлений, он позволяет не только упростить вычисления, но и углубить понимание взаимосвязи между алгебраическими и геометрическими представлениями математических объектов.

Тем не менее, несмотря на эффективность, функционально-графическому методу зачастую не уделяется должного внимания в школьных учебниках и образовательных программах. Большинство пособий ограничиваются традиционными алгебраическими подходами, тем самым лишая учащихся возможности освоить графические методы и применять их в нестандартных ситуациях. В то же время, задачи, требующие использования функционально-графического подхода, часто встречаются на экзаменах, таких как ЕГЭ и ОГЭ,

что делает актуальным изучение этих методов в рамках школьного курса. Таким образом, образуется противоречие между важностью применения к решению неравенств и их систем функционально-графического метода и отсутствия методических рекомендаций для учителей по применению данного метода в учебном процессе.

Актуальность темы обусловлена необходимостью совершенствования методики преподавания математики, особенно в части решения неравенств. В условиях модернизации образования и перехода к компетентностному подходу важно не только дать учащимся базовые знания, но и научить их применять эти знания в различных ситуациях. Функционально-графические методы решения неравенств способствуют развитию таких ключевых компетенций, как способность к анализу, синтезу, критическому мышлению и решению задач.

Объектом исследования являются функционально-графические методы решения неравенств.

Предметом исследования являются методические аспекты их применения на элективных курсах по математике.

Целью работы является изучение функционально-графических методов решения неравенств и разработка методических рекомендаций по их использованию на элективных курсах по математике.

Для достижения этой цели были поставлены следующие *задачи*:

1. Провести анализ существующих методов решения неравенств, с акцентом на функционально-графические подходы.
2. Изучить теоретические основы функционально-графических методов, включая свойства функций и их графиков.
3. Разработать систему задач и упражнений, направленных на формирование у учащихся навыков решения неравенств с использованием функционально-графических методов.
4. Провести практическую проверку эффективности разработанных методик в условиях реального учебного процесса. На основе полученных

результатов сформулировать рекомендации для преподавателей по применению функционально-графических методов в обучении математике.

В качестве *методов исследования* использовались анализ научной и методической литературы, обобщение педагогического опыта, а также проведение экспериментальной проверки разработанных методических подходов.

Практическая значимость данного исследования заключается в создании и интеграции методических рекомендаций, учебных заданий и материалов, применимых в рамках элективных курсов по математике. Такие курсы предоставляют учащимся возможность более глубокого освоения отдельных тем, формирования профильных компетенций, а также качественной подготовки к экзаменационным испытаниям, таким как ЕГЭ, ОГЭ или вступительные экзамены в высшие учебные заведения. В этом контексте применение функционально-графических методов при решении неравенств может существенно повысить уровень математической подготовки школьников.

Таким образом, изучение темы «Функционально-графические методы решения неравенств» представляет собой актуальное и значимое направление в контексте современного образования, способствующее формированию у учащихся осознанного понимания математических закономерностей и развитию их творческих способностей.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО– ГРАФИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

1.1 Сущность функционально–графического метода решения неравенств

Функционально – графические методы решения неравенств представляют собой совокупность приемов, основанных на использовании свойств функций и их графиков. Эти методы позволяют не только находить решения неравенств, но и визуализировать процесс решения, что способствует более глубокому пониманию математических понятий. Основная идея функционально-графического метода заключается в том, чтобы с помощью графиков функций определить области, где выполняется заданное неравенство.

Основные понятия, связанные с функционально-графическим методом.

- Функция – закон, по которому каждому значению величины x из некоторого множества чисел, называемого областью определения функции, ставится в соответствие одно вполне определенное значение величины y . Совокупность значений, которые принимает зависимая переменная y , называется областью значений функции.
- График функции – это множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргументов, а ординаты – соответствующим значениям функции.
- Неравенство – это отношение, связывающие два числа a и b посредством одного из знаков: $<$ (меньше), $\leq$ (меньше или равно), $>$ (больше), $\geq$ (больше или равно). Иногда несколько неравенств записывают вместе, например $a < b < c$.

Ниже рассмотрены ключевые теоремы, лежащие в основе функционально-графического подхода.

1. Теорема о монотонности функции.

Если производная функции $f'(x) > 0$ на некотором промежутке X , то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке. Если $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает на промежутке X [9].

Эта теорема позволяет использовать монотонность функции для решения неравенств.

Пример. Решить неравенство $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$.

Решение.

- 1) Найти критические точки функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
- 2) Исследовать знак функции на интервалах, определяемые критическими точками $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$.
- 3) Определить, на каких интервалах выполняется неравенство $f(x) \geq 0$. Так, на интервале $(-\infty, 0)$ $f(x) \geq 0$. Аналогично, на интервалах $(0, 2)$, $(2, +\infty)$.
- 4) Записать решение неравенства в виде промежутков.

Неравенство $f(x) \geq 0$ выполняется на всех интервалах $(-\infty, 0]$ $[0, 2]$ $[2, +\infty) = (-\infty, +\infty)$.

2. Теорема о промежуточных значениях функции (теорема Больцано – Коши).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков (т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$). То существует хотя бы одна точка $c \in [a, b]$, в которой $f(c) = 0$.

Эта теорема используется для доказательства существования корней уравнения $f(x) = 0$, что важно при решении неравенств методом интервалов.

Пример. На отрезке $[0, 2]$ исследовать функцию: $x^2 - 5x + 6 = 0$ на наличие корней.

Решение.

1. Сначала необходимо проверить функцию на непрерывность.
2. Далее проверить значения функции на концах отрезка.

3. Проверить выполняется ли условие теоремы (см. п.2)
4. После этого можно сделать вывод о существовании корня уравнения на отрезке.

3. Теорема о непрерывности элементарных функций.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности конечной точки a , называется непрерывной в этой точке, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Графически непрерывность функции в конечной точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a (Рисунок 1).

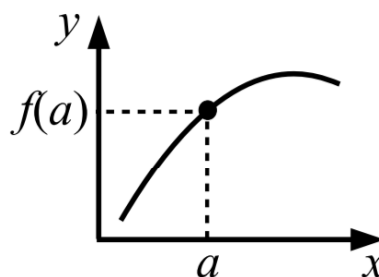


Рисунок 1 – График непрерывной функции.

Важно заметить, что все элементарные функции (линейные, квадратные и т. д.) непрерывны, что позволяет использовать метод интервалов.

Пример. Решить неравенство

$$(2x^2 - 5x + 3)(\sqrt[3]{3} - x) \leq 0.$$

Для решения необходимо сделать следующее.

1) Переписать неравенство в виде: $(2x-3)(x-1)(\sqrt[3]{3} - x) \leq 0$.

2) Используя метод интервалов, рассмотреть функцию

$$f(x) = (2x-3)(x-1)(\sqrt[3]{3} - x).$$

3) Найти область определения функции $f(x)$: $D(f) = \mathbb{R}$.

4) Найти нули функции $f(x) = 0$. Отсюда получить корни уравнения.

5) Найти промежутки знакопостоянства функции. Расставить знаки для других промежутков в соответствии с правилом знакочередования.

4. Свойство ограниченности функций.

Если функция ограничена сверху (или снизу) на некотором промежутке, то существует число M (или m), такое что $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$) для всех x из этого промежутка.

Эта теорема используется для оценки значений функций при решении неравенств. Например, если функция ограничена сверху, то неравенство не имеет решений.

Пример. Решить неравенство

$$\sqrt{16 - (5x + 2)^2} \geq 4 + \cos^2\left(\frac{15\pi x}{4}\right).$$

Решение.

1) Оценим правую часть неравенства.

Функция $\cos^2\left(\frac{15\pi x}{4}\right)$ ограничена сверху и снизу, так как

$$0 \leq \cos^2\left(\frac{15\pi x}{4}\right) \leq 1.$$

Следовательно, правая часть неравенства удовлетворяет условию:

$$4 \leq 4 + \cos^2\left(\frac{15\pi x}{4}\right) \leq 5.$$

2) Оценим левую часть неравенства. Рассмотрим выражение под корнем:

$$16 - (5x + 2)^2 > 0.$$

Это неравенство выполняется при $-4 \leq 5x + 2 \leq 4 \rightarrow -\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{2}{5}$.

Таким образом, левая часть неравенства:

$$\sqrt{16 - (5x + 2)^2} \leq 4$$

3) Анализ неравенства.

Левая часть не превышает 4, а правая часть не меньше 4. Следовательно, неравенство может выполняться только в случае, когда обе части равны 4.

4) Решить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 4 + \cos^2\left(\frac{15\pi x}{4}\right) = 4 \\ \sqrt{16 - (5x + 2)^2} = 4 \end{cases}$$

5. Понятие четности и нечетности функций.

Функция $f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$ для всех x из области определения. Функция $f(x)$ называется нечетной, если $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения.

Свойства четности и нечетности функций позволяют упростить анализ неравенств, так как график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример. Решить неравенство

$$\frac{x^3 + 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0.$$

Решение.

1) Исследовать функцию на четность:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 2(-x)}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} = \frac{-x^3 - 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{x^3 + 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -f(x),$$

таким образом функция является нечетной.

2) Применить свойство нечетности.

Для нечетной функции выполняется неравенство: $f(-x) = -f(x)$. Это указывает на то, что ее график обладает симметрией относительно начала координат. Таким образом, если для $x \geq 0$ выполняется неравенство $f(x) \geq 0$, то для $x \leq 0$, соответственно будет выполняться $f(x) \leq 0$.

3) Рассмотрим неравенство:

$$\frac{x^3 + 2x}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0.$$

Поскольку $x^2 + 1$ всегда больше нуля, знак выражения зависит от знака числителя $x^3 + 2x$.

Вынесем x за скобки: $x(x^2 + 2) > 0$.

Так как $x^2 + 2$ всегда положительно, неравенство сводится к тому, что $x \geq 0$.

4) Использовать свойство нечетности функции.

Используя свойство нечетности функции, для $x \leq 0$ имеем: $f(x) \leq 0$.
Следовательно, неравенство $f(x) \geq 0$ не выполняется для $x \leq 0$.

5) Объединить результаты.

Неравенство $f(x) \geq 0$ выполняется только для $x \geq 0$.

6. Свойство периодичности функции $f(x)$.

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом T , если $f(x + T) = f(x)$ для всех x из области определения.

Периодичность функций позволяет ограничить анализ неравенства одним периодом, что упрощает решение.

Пример. Решить неравенство

$$\sin(3x) \geq \frac{1}{2}.$$

Решение.

1) Определить периоды функций.

- Функция $\sin(3x)$ имеет период $T_1 = \frac{2\pi}{3}$

Таким образом, функция является периодической с периодом $\frac{2\pi}{3}$.

2) Решить неравенство на одном периоде $[0, \frac{2\pi}{3}]$.

Сначала решим уравнение:

$$\sin(3x) = \frac{1}{2}.$$

Общее решение:

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ или } 3x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Делим на 3:

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \text{ или } x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}.$$

Теперь выбираем решения на $[0, \frac{2\pi}{3}]$.

- При $n=0$ $x_1 = \frac{\pi}{18}$, $x_2 = \frac{5\pi}{18}$.

- При $n=1$ $x_3 = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{13\pi}{18}$ (уже выходит за $\frac{2\pi}{3}$), $x_4 = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} = \frac{17\pi}{18}$

(тоже выходит).

Итак, на отрезке $[0, \frac{2\pi}{3}]$ решения: $x \in \{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\}$.

3) Общее решение с учетом периодичности.

Добавляем период $\frac{2\pi k}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$:

$$X \in \{\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}\}, k \in \mathbb{Z}.$$

7. Свойства взаимно обратных функций.

Если функция $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, то графики этих функций симметричны относительно прямой $y=x$.

Это свойство используется при решении неравенств, содержащих взаимно обратные функции. Например, если $f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратны, то неравенство $f(x) > g(x)$ можно решить, сравнивая значения функций в точках пересечения графиков.

Пример. Решить неравенство

$$\arcsin(x) + \arccos(x) \geq \frac{\pi}{2}.$$

Для решения неравенства необходимо следующее.

1) Использовать свойства обратных функций:

Известно, что для любого $x \in [-1, 1]$ выполняется тождество

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Это следует из того, что функции $\arcsin(x)$ и $\arccos(x)$ являются взаимно обратными на интервале $[-1, 1]$.

2) Подставить тождество в неравенство.

Подставим $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ в исходное неравенство $\frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{2}$

Это неравенство выполняется для всех $x \in [-1, 1]$.

8. Теорема о строгой монотонности функции $f(x)$ и единственности решения уравнения $f(x)=c$.

Теорема 1.

Если на некотором промежутке функция $f(x)$ монотонна и c – некоторое число, то уравнение $f(x) = c$ на этом промежутке имеет не более одного корня.

Теорема 2.

Если на некотором промежутке одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ возрастает, а другая – убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Пример.

Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + (x+y)^5 = 2. \\ y^2 + 7x = 1. \end{cases}$$

Решение.

Рассмотрим первое уравнение системы.

Пусть $x + y = t$, тогда получаем уравнение $\sqrt{t} + t^5 = 2$.

Так как функции $y = \sqrt{t}$ и $y = t^5$ возрастающие, то их сумма $g(t) = \sqrt{t} + t^5$ также возрастающая функция, поэтому уравнение $g(t) = 2$ может иметь не более одного корня.

Корень $t = 1$ легко находится подбором, и он единственный. Таким образом, $x + y = 1$. Получаем систему $\begin{cases} x + y = 1, \\ y^2 + 7x = 1, \end{cases}$ откуда $x = 0, y = 1$ или $x = -5, y = 6$.

Решением системы будет: $(0;1), (-5;6)$.

Методические аспекты.

- Постепенное усложнение задач. Лучше начинать с простых линейных и квадратичных неравенств и постепенно переходить к более сложным, как показательные и тригонометрические.

- Комбинации методов. Функционально-графический метод часто применяется вместе с аналитическими подходами, что позволяет лучше справиться со сложными неравенствами. Например, сначала можно найти корни уравнения $f(x) = g(x)$, а потом с помощью графиков определить области, где выполняется неравенство.

Функционально-графические методы решения неравенств — это инструмент, который не только помогает находить решения, но и наглядно показывает процесс. Они основаны на свойствах функций и их графиках, что делает их особенно полезными при решении сложных задач. В школьном курсе стоит изучить эти методы последовательно, начиная с основ и заканчивая более сложными задачами.

1.2 Функционально-графические методы решения неравенств

Функционально-графический метод особенно полезен и актуален тем, что он помогает визуализировать процесс решения задачи. Здесь мы рассмотрим компоненты функционально-графического метода.

1. Использование области определения функции.

Область определения функции — это допустимые значения независимой переменной (переменной x). Обозначается область определения функции $D(y)$. При решении неравенств важно учитывать область определения, так как она ограничивает значения переменной.

Пример (9 класс). Найти допустимые значения переменной, входящей в данное неравенство:

$$\sqrt{2x - 4} + \frac{1}{\sqrt{6 - x}} \geq 0$$

Решение.

Найдем область определения функции.

Неравенство содержит два выражения под квадратными корнями, поэтому оба корня должны быть определены.

- Первое выражение $\sqrt{2x - 4}$ определено, если $2x - 4 \geq 0$, то есть $x \geq 2$.
- Второе выражение $\frac{1}{\sqrt{6-x}}$ определено, если $6-x > 0$, то есть $x < 6$.

Таким образом, область определения функции $2 \leq x < 6$.

Методические аспекты.

- Учащиеся должны уметь находить область определения различных функций (рациональных, иррациональных, логарифмических, тригонометрических и т.д).

- Важно учитывать ограничения, накладываемые областью определения, при построении графиков функций.

- Учащиеся должны помнить, что область определения может быть ограничена не только алгебраическими выражениями, но и условиями задачи. Например, в физических задачах переменные могут иметь ограничения по смыслу (например, время не может быть отрицательным).

- Важно научить учащихся учитывать область определения при решении неравенств с параметрами, где область определения может зависеть от значения параметра.

2. Использовать непрерывности функции.

Непрерывность функции позволяет использовать метод интервалов для решения неравенств. Если функция непрерывна на некотором промежутке, то ее график не имеет разрывов, и знак функции меняется только в точках, где функция равна нулю или не определена.

Пример. Решить неравенство:

$$\frac{(x^2 - 16)(x - 6)^2}{(x + 8)(x - 3)} \geq 0.$$

Решение.

1. Для начала нужно найти точки, в которых числитель равен нулю, а знаменатель не равен.

$$(x^2-16)(x-6)^2=0 \rightarrow x=-4, 4, 6,$$

$$(x+8)(x-3)=0 \rightarrow x \neq -8, 3.$$

2. После этого разбить числовую прямую на промежутки, исходя из точек, которые получились в п. 1.

$$(-\infty, -8) (-8, -4], [-4, 3), (3, 4], [4, 6], [6, +\infty).$$

3. В условии стоит знак ≥ 0 , значит нужно выбрать те, интервалы на которых функция принимает знак «+».

$$(-\infty, -8), [-4, 3), [4, 6], [6, +\infty). \text{ А также учесть точки: } -4, 4 \text{ и } 6.$$

Таким образом, ответом для данного неравенства будет являться:

$$(-\infty, -8) [-4, 3), [4, 6], [6, +\infty), \text{ что можно переписать в виде}$$

$$(-\infty, -8), [-4, 3), [4, +\infty).$$

3. Использование ограниченности функций.

Если функция $f(x)$ ограничена сверху, причем $\max f(x) = A$, функция $g(x)$ ограничена снизу, причем $\min g(x) = A$, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно

$$\text{системе уравнений } \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$$

Если функция $f(x)$ ограничена сверху, причем $\max f(x) = A$, функция $g(x)$ ограничена снизу, причем $\min g(x) = A$, то уравнение $f(x) \geq g(x)$ равносильно

$$\text{системе уравнений } \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение $\cos x + 4 \sin \frac{x}{2} = 6 - \sin 10x$.

Решение.

1. Так как $\cos x \leq 1$, а $\sin \frac{x}{2} \leq 1$, то $\cos x + 4 \sin \frac{x}{2} \leq 5$.

2. Если мы рассмотрим уравнение $\cos x + 4 \sin \frac{x}{2} = 5$, то заметим, что оно выполнимо когда $\cos x = 1$ и $\sin \frac{x}{2} = 1$, что невозможно.

3. Следовательно, мы имеем неравенство $\cos x + 4 \sin \frac{x}{2} < 5$.
4. Правая часть исходного уравнения удовлетворяет неравенству $6 - \sin 10x \geq 5$ (поскольку $-1 \leq \sin 10x \leq 1$).
5. Таким образом, мы делаем вывод, что уравнение не имеет решений.

Методические аспекты.

- Учащиеся должны понимать, как определить, ограничена ли функция сверху или снизу, и как это влияет на решение неравенств.
- Нужно учить школьников использовать ограничения функции для оценки значений и выявления возможных решений.
- Ученики должны осознавать, что ограниченность функции помогает оценивать решения неравенств, особенно когда речь идет о тригонометрических функциях, которые всегда имеют пределы.
- Важно объяснить учащимся, что при решении неравенств с параметрами нужно учитывать ограничения, которые могут зависеть от значения этого параметра.

4. Использование монотонности функции.

Монотонность функции позволяет упростить анализ неравенств. Если функция монотонно возрастает (или убывает) на некотором промежутке, то неравенство $f(x) > f(a)$ (или $f(x) < f(a)$) выполняется для всех $x > a$ (или $x < a$).

Пример. Решить неравенство:

$$\log_2(x^2 - 4x + 5) \leq 1.$$

Решение.

1. Найти область определения функции $f(x) = \log_2(x^2 - 4x + 5)$.
 - Логарифм определен только для положительных аргументов, поэтому:
 $x^2 - 4x + 5 > 0$.
 - Решим неравенство $x^2 - 4x + 5 > 0$.

Так как дискриминант отрицательный, квадратное выражение всегда положительно. Следовательно, область определения – все действительные числа $x \in \mathbb{R}$.

2. Исследовать монотонность функции $f(x) = \log_2(x^2 - 4x + 5)$.

- Логарифмическая функция $\log_2(t)$ монотонно возрастает при $t > 0$.
- Поэтому функция $f(x)$ будет монотонно возрастать, если $x^2 - 4x + 5$ возрастает.

- Исследуем функцию $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

- Это квадратичная функция, график которой – парабола, ветви которой направлены вверх.

- Вершина параболы находится в точке $x_0 = 2$.

- Таким образом, $g(x)$ убывает при $x < 2$ и возрастает при $x > 2$.

- Следовательно $f(x)$ убывает при $x < 2$ и возрастает при $x > 2$.

3. Решить неравенство $\log_2(x^2 - 4x + 5) \leq 1$.

- Перепишем неравенство в виде $\log_2(x^2 - 4x + 5) \leq \log_2(2)$.

- Поскольку логарифмическая функция монотонно возрастает, неравенство эквивалентно неравенству:

$$x^2 - 4x + 5 \leq 2, x \in [1, 3].$$

Методические аспекты.

- Учащиеся должны понимать, как монотонность функции влияет на решение неравенства.

- Важно научить учащихся определять промежутки монотонности функций и использовать их для решения неравенств.

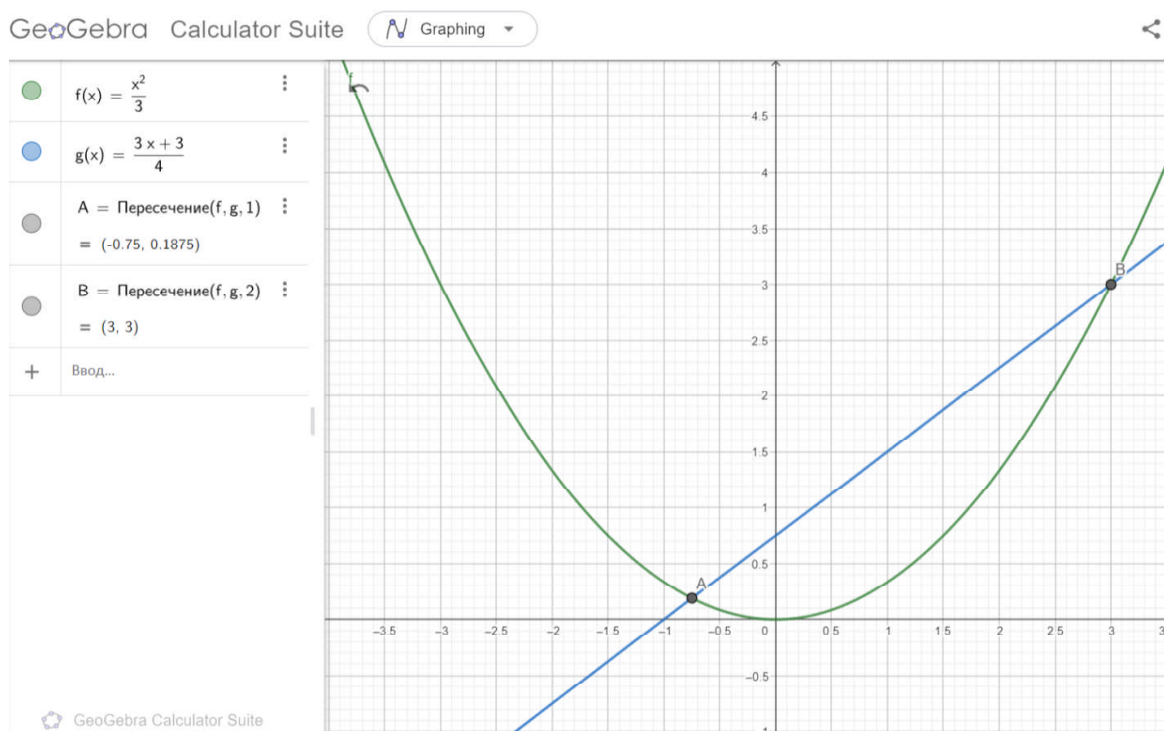
- Учащиеся должны понимать, что монотонность функции может быть использована для упрощения анализа неравенств, особенно в задачах с показательными и логарифмическими функциями, которые всегда монотонны.

- Важно научить учащихся учитывать монотонность функций при решении неравенств с параметрами, где монотонность может зависеть от значения параметра.

5. Графический метод.

Графический метод заключается в построении графиков функций, входящих в неравенство, и определении областей, где выполняется заданное условие. Этот метод особенно полезен при решении сложных неравенств, где аналитическое решение затруднено.

Пример. Решить неравенство $\frac{x^2}{3} < \frac{3x+3}{4}$.



Решение.

1. Переписать неравенство в виде двух функций.

- Левая часть: $y_1 = \frac{x^2}{3}$.
- Правая часть: $y_2 = \frac{3x+3}{4}$.
- $y_1 < y_2$.

2. Построить графики функций y_1 и y_2 .

- График $y_1 = \frac{x^2}{3}$

Это парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы находится в точке $(0, 0)$.

Парабола симметрична относительно оси y .

- График $y_2 = \frac{3x+3}{4}$

Это прямая.

Точка пересечения с осью y – $(0, \frac{3}{4})$.

3. Найти абсциссы точек пересечения графиков: $-0,75$ и 3 .

4. Определить интервалы, где $y_1 < y_2$.

На графике видно, что y_1 (парабола) находится ниже y_2 (прямой) между точками пересечения $x = -0,75$ и $x = 3$.

Следовательно, решение неравенства $x \in (-0,75; 3)$.

Методические аспекты.

- Необходимо научить учеников строить графики и анализировать их.
- В дальнейшем, учащиеся должны уметь использовать графический метод для решения неравенств повышенной сложности.
- Важно дать понять, что графический метод имеет много плюсов и особенно полезен, когда аналитически решить задачу будет затруднительно, а на графики функции будут четко показывать ответ.
- Также следует показать, что задачи с параметрами тоже можно решать графическим методом и продемонстрировать как будет меняться график функции в зависимости от параметра.

Функционально-графические методы решения неравенств помогают как находить решения, так и наглядно демонстрировать решение. При решении сложных неравенств они особенно полезны, так как основаны на использовании помимо графиков функций, еще и на свойствах функций. В школе очень важно

уделять им особое внимание, чтобы ученики могли их использовать при решении как уравнений, так и неравенств.

1.3 Методика изучения функционально-графических методов при решении неравенств

При изучении функционально-графического метода необходимо использовать систематический подход, то есть совмещать как теоретическую базу, так и практическое применение.

Основные этапы и приемы, которые необходимо учитывать и применять при внедрении функционально-графического метода в обучение школьников.

1. Введение основных понятий.

На начальном этапе важно познакомить учащихся с основными понятиями, связанными с функционально-графическими методами. Это включает в себя:

- **Функция и ее свойства.** Учащиеся должны понимать, что такое функция, как она задается (аналитически, таблично, графически), и какие свойства она может иметь (монотонность, ограниченность, непрерывность, четность, периодичность).
- **График функции.** Учащиеся должны уметь строить графики основных элементарных функций (линейных, квадратичных, показательных, логарифмических, тригонометрических) и понимать, как свойства функции отражаются на их графиках.
- **Неравенство и его решение.** Ученики должны понимать, что решение неравенства – это значения переменной, при которых неравенство обращается в верное.

2. Введение и изучение основных свойств.

После изучения понятий, перечисленных выше, важно изучить и свойства функций, которые могут понадобиться при решении неравенств (монотонность, четность (нечетность), ограниченность, непрерывность, периодичность)

3. Изучение и применение графического метода.

Необходимо научить обучающихся следующему.

- Строить графики основных элементарных функций и использовать программы, которые могут помочь им в этом (GeoGebra, Математический конструктор).

- Анализировать графики нескольких функций и их расположение по отношению друг к другу, и как от этого будет зависеть решение неравенства.

- Использовать графический метод для решения неравенств повышенной сложности.

4. Комбинирование нескольких методов.

Необходимо донести до учащихся, что останавливаться на решении неравенств только функционально-графическим методом не стоит, его можно применять в совокупности с другими, например, с аналитическим. Ученикам важно научиться объединять следующие подходы для лучшего решения неравенств:

- Использование метода интервалов;
- Применение свойств функций для упрощения неравенств.

5. Практические задания.

Чтобы лучше усваивался материал, нужно давать ученикам разные практические задания и задачи, которые затрагивают все стороны функционально-графического метода:

- Задачи на построение графиков;
- Задания на решение неравенств;
- Задачи повышенной сложности.

6. Использование современных технологий.

Современные технологии, например, графические калькуляторы и компьютерные программы, делают изучение графиков намного проще. Ученикам стоит освоить следующие инструменты, чтобы уметь строить графики и разбираться в неравенствах:

- Программы для построения графиков (GeoGebra, Математические конструктор и др.);
- Интерактивные задания.

Изучение функционально-графических методов для решения неравенств в школе должно быть системным. Нужно сочетать теорию с практикой. Ученикам важно учиться использовать свойства функций, строить графики, видеть, как они сочетаются, и применять разные методы для нахождения решений. Современные технологии могут сделать обучение проще и интереснее для школьников.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ НА ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ

2.1 Программа курса по функционально- графическим методам решения неравенств

Пояснительная записка.

Актуальность курса. Функционально-графические методы решения неравенств помогают лучше понять математику в целом. Они развивают аналитическое мышление, навыки работы с данными и умение разбираться с разными видами функций. При подготовке учащихся к государственным экзаменам (ЕГЭ и ОГЭ) по математике важно учитывать специфику этих экзаменов. В частности, задания на неравенства требуют не только знания стандартных методов, но и умения применять нестандартные подходы, так как функционально-графический метод. В школьной программе этим методам уделяется недостаточно внимания, что создает пробел в подготовке учащихся к экзаменам и решению нестандартных задач. Курс направлен на устранение этого пробела и формирование у школьников целостного подхода к решению неравенств.

Цель курса. Формирование у учащихся применять функционально-графические методы для решения неравенств различного типа, развитие навыков анализа и визуализации математических задач.

Задачи курса.

1. Изучить теоретические основы функционально-графического метода.
2. Научить применять свойства функций (монотонность, ограниченность, непрерывность и т. д.) для решения неравенств.
3. Разработать алгоритмы визуализации решений с помощью графиков.
4. Развить умение комбинировать графические и аналитические методы.

5. Отработать навыки решения задач повышенной сложности, включая задания с параметрами (ОГЭ, ЕГЭ, олимпиады)

Структура и содержание курса.

Курс рассчитан на 18 часов и включает теоретические занятия, практикумы и итоговую диагностику.

Целевая аудитория: учащиеся 9 классов.

Содержание курса.

Курс разделен на три модуля.

1. Теоретический модуль (6 часов).

- История развития понятия функции.
- Свойств элементарных функций и их графики.
- Геометрические преобразования графиков: сдвиги, растяжения, отражения.

- Методы анализа функций: область определения, множество значений, монотонность и др.

2. Практический модуль (8 часов).

- Решение линейных, квадратных и дробно-рациональных неравенств с использованием графиков.
- Работа с неравенствами, содержащими модуль и параметры.
- Применение метода интервалов в комбинации с анализом свойств функций.

3. Проектно-исследовательский модуль (4 часа).

- Самостоятельная разработка задач учащимися.
- Исследование взаимосвязи свойств функций и графических решений.
- Защита мини-проектов на тему «нестандартные приемы решения неравенств».

Формы и методы обучения:

- Лекции с использованием мультимедийных презентаций (например, визуализация графиков в GeoGebra или Математическом конструкторе).

- Семинары с разбором типовых экзаменационных задач.
- Практикумы по построению графиков и анализу их свойств.
- Групповая работа над проектами, включая создание интерактивных материалов.

Материально-техническое обеспечение.

- Программное обеспечение: GeoGebra, Excel для анализа данных.
- Дидактические материалы: карточки с заданиями, шаблоны графиков, сборники задач.
- Печатные пособия: методички по функционально-графическим методам.

Рассмотрим более подробно используемые формы обучения:

1. Лекции с использованием мультимедийных презентаций.

Цель: донести теоретический материал в наглядной форме, активизировать визуальное восприятие учащихся.

Структура и примеры.

- Визуализация графиков в GeoGebra.
 - На лекции демонстрируется, как строить графики функций (например, $y=|x^2-3x+2|$) и анализировать их свойства.
 - Пример. Изучение монотонности функции $y=kx+b$ через анимацию изменения графика при варьировании коэффициента k функция либо возрастает, либо убывает, либо постоянна.
- Интерактивные элементы.
 - Учащиеся участвуют в построении графиков в реальном времени, задавая значения параметров (например, a в функции $y = ax^2+bx+c$).
 - Используется презентация со слайдами с пошаговым алгоритмом «Как определить область значений функции по графику?».

Преимущества.

- + Повышает вовлеченность за счет динамической визуализации.

+ Упрощает понимание абстрактных понятий (например, асимптот или точек разрыва).

Инструменты: GeoGebra, PowerPoint, интерактивные доски.

2. Семинары с разбором типовых экзаменационных задач.

Цель: отработать навыки решения задач ЕГЭ/ОГЭ, научить анализировать условия и выбирать оптимальные методы решения.

Структура и примеры.

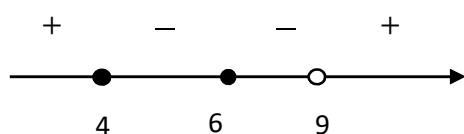
- Разбор задачи из ОГЭ.

Условие. Решить неравенство $\frac{(x-6)^2(x-4)}{x-9} \geq 0$.

Алгоритм.

1. Найти точки в которых числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю: $x=6$, $x=4$; $x \neq 9$

2. Построить таблицу знаков



3. Записать ответ $x \in [-\infty, -4] \cup (9, +\infty) \cup \{2\}$.

Методика.

- Можно предложить обсудить решить неравенство в группах, после чего коллективно обсудить его с проговариванием каждого шага.

- Либо предложить работу в парах, решить неравенство и после чего осуществить взаимопроверку.

3. Практикумы по построению графиков и анализу их свойств.

Цель: усвоить и закрепить навыки построения графиков, и использовать их для решения самих неравенств.

Этапы.

1. Построение графиков самостоятельно.

Ученики рисуют графики функций (например, $y = \frac{x-3}{x^2-4}$) в тетради, отмечая ключевые точки.

2. Использование программ.

В Математическом конструкторе или GeoGebra можно строить различные функции, например, с модулем $y = ||x|-5|$.

3. Сравнение нескольких графиков.

Можно предложить задание: построить графики функций $y = \sqrt{x^2 - 1}$ $y = 5 - x$.
х. Посмотреть какими свойствами обладают данные функции.

4. Групповая работа над проектами учащихся.

Цель: развить «мягкие навыки» (softskills), навыки командной работы и креативного мышления.

Проекты, которые можно предложить ученикам.

1. Создание интерактивного пособия.

- группа из 3-4 человек делает презентацию в Prezi или видео на тему
Графическое решение неравенств с параметрами.

Требования:

- объясните, как параметр a влияет на решение неравенства

$$x^2 - ax + 4 > 0;$$

-добавьте анимацию изменения графика при разных значениях a .

2. Исследовательский проект.

Тема 6. «Как свойства функций помогают решать олимпиадные задачи?».

Учащиеся анализируют задачи из Всероссийской олимпиады.

Результат. Отчет с пошаговым решением и презентация.

Этапы работы.

1. Планирование: распределите роли (аналитик, дизайнер, программист).

2. Реализация: соберите данные, постройте графики, напишите текст.

3. Защита: публичное выступление с демонстрацией материалов.

Инструменты для проектов:

- Canva, Google Презентация для визуализации.
- GeoGebra, Математический конструктор – для создания интерактивных моделей.

- Padlet – для совместного обсуждения идей.

Итоговая эффективность методов

Метод	Ключевые навыки	Пример результата
Лекции	Анализ графиков, понимание ОДЗ	Умение строить функции
Семинары	Решение задач по алгоритмам	Верный ответ на задачу из ОГЭ
Практикумы	Работа с ПО, интерпретация графиков	График с асимптотами
Групповая работа	Командная работа креативность	Интерактивная модель неравенства

Каждый метод дополняет друг друга, формирую у учащихся системное понимание функционально-графических методов и их применения в реальных задачах.

Рекомендации.

1. Интеграция теории и практики.

Каждое занятие должно включать следующее.

- Краткую теоретическую часть с примерами.
- Практические задания для отработки навыков.
- Интерактивные элементы (работа в парах, дискуссии)

2. Использование технологий.

- Применение графических калькуляторов и программ для визуализации
- Демонстрация анимаций графиков для анализа поведения функций.

3. Дифференцированный подход.

- Задания разного уровня сложности (базовый, продвинутый, олимпиадный)
- Индивидуальные консультации для учащихся с трудностями.

Материально-технические и учебные средства обучения:

- аудиовизуальные (мультимедийные презентации), которые будут применяться при рассмотрении новых тем на лекционных занятиях;
- дидактические материелы (карточки с заданиями в соответствии с индивидуальными особенностями обучающихся), необходимые для проведения практических занятий, а также контрольной работы;
- печатные средства (рекомендуемые учебно-методически пособия) необходимые для составления системной линии задач, выступающих в роли домашней работы, а также для написания планов заданий;
- электронные образовательные ресурсы(GeoGebra), которые необходимы для изучения графического метода решения предложенных задач на практических занятиях, а также при написании проектов обучающимися.

В процессе разработки плана элективного курса выполняется учет возможности включить иллюстративный материал, интерактивные, мультимедийные модели, использовать информационную компьютерную базу, чтобы организовать у школьников самостоятельную работу в процессе выполнения повтора теоретических материалов, проведения тестирования с целью выполнения контроля, проверки знаний.

Специфика работы, осуществляемая учителем, подлежит определению степени подготовки учеников, их особенностей, мотивацией.

По той причине в программе отображены варианты заданий, решаемых при наличии разных умений, знаний. В соответствии с темой занятия педагог является информатором, консультантом, наблюдателем, экспертом или исполняет роль активного участника выполняемого учебного процесса.

Длительность элективного курса – 18 часов для 9 классов с требуемой математической подготовкой.

Элективный курс под названием «функционально-графические методы решения неравенств» находится в соответствии с современными целями образования, положениями концепции, относящейся к профильной школе.

Преподавание его осуществляется в виде углубленного изучения вопросов по программе основного курса. Тогда как углубление выполняется по обучению приемам, методам, чтобы решать математические задачи, где имеется потребность применять высокую логическую, операционную культуру по развитию творческого, алгоритмического, научного теоретического мышления, обучения школьников решению задач, относящихся к задачам с повышенной сложностью.

Умения, получаемые учениками после изучения курса.

- описание реальных ситуаций через математические модели;
- анализ, выбор оптимальных способов, чтобы решать неравенства;
- отстаивать мнения касательно выбора способа, чтобы решать нестандартные задачи, где имеется параметр;
- использовать свойства функций, чтобы построить графики, решить неравенства;
- отстаивать мнение касательно выбора способа, чтобы решать нестандартные задачи, где имеется параметр;
- использовать свойства функций, чтобы построить графики, решить неравенства;
- осуществлять построение, чтение графиков функций;
- осуществлять логическое мышление, рассуждение, выдвижение гипотез, формирование выводов, обосновывая результаты, которые были получены;
- взаимодействовать с разными источниками данных.

Результат обучения – улучшение математической культуры, умений выполнения исследовательской деятельности, применения полученных знаний, чтобы решать практические задачи.

Ожидаемые результаты.

По окончании курса учащиеся:

- 1) Смогут применять функционально-графические методы для решения неравенств;

2) Научатся строить и анализировать графики элементарных и сложных функций;

3) Овладеют навыками работы с цифровыми инструментами для визуализации задач;

4) Улучшат результаты выполнения заданий ОГЭ/ЕГЭ, связанные с неравенствами.

Критерии оценки эффективности курса.

1. Результаты итоговой диагностики.

2. Анализ выполнения заданий до и после прохождения курса.

3. Отзывы учащихся о полезности и сложности материала.

Программа элективного курса по функционально-графическим методам решения неравенств направлена на формирование у учащихся глубокого понимания взаимосвязи алгебраических и графических подходов. Она способствует развитию критического мышления и готовит школьников к успешной сдаче экзаменов. Реализация курса требует сочетания традиционных и инновационных методик, а также учета индивидуальных особенностей учащихся.

Тематическое планирование элективного курса

«Функционально-графические методы решения неравенств для 9 класса».

Объем 18 часов

Модуль 1. Теоретические основы (6 часов)

Цель: Изучить базовые понятия, свойства функций и методы их анализа.

№	Тема занятия	Форма занятия
1	История развития понятия функции. Графический способ задания	Лекция+ дискуссия
2	Кусочно-заданные функции	Семинар
3	Свойства элементарных функций	Лекция+ практикум
4	Геометрические преобразования графиков	Практикум
5	Функция с модулями	Семинар
6	Метод интервалов: теория и алгоритмы	Лекция

Модуль 2. Практикум (8 часов)

Цель: Отработать навыки решения неравенств с использованием функционально-графических методов.

№	Тема занятия	Форма занятия
7	Решение линейных и квадратных неравенств	Семинар
8	Дробно-рациональные неравенства	Семинар
9	Неравенства с модулями	Практикум
10	Решение линейных и квадратных неравенств	Семинар
11	Неравенства с параметрами	Лекция+ практикум
12	Системы неравенств	Практикум
13	Графический метод в задачах ОГЭ	Семинар
14	Комбинация неравенств	Практикум

Модуль 3. Проектно-исследовательская работа (4 часа)

Цель: Закрепить знания через самостоятельную работу и творческие проекты.

№	Тема занятия	Форма занятия
15	Разработка проектов	Групповая работа
16	Создание интерактивных материалов	Практикум
17	Промежуточная защита проектов	Защита+ обсуждение
18	Итоговая защита и рефлексия	Защита + тестирование

2.2 Методические материалы к элективному курсу

2.2.1 Дидактические задания к занятию

Тема. «Понятие о кусочно-заданных функциях».

Задача 1. Построение графика функции и анализ ее свойств по построенному графику.

Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x > 0 \\ x + 1, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$

Задания.

1. Построить график данной функции.
2. Найти область определения и множество значений функции.
3. Определить, есть ли у функции точки разрыва. Если таковы имеются, указать, в каких точках происходит разрыв.

Задача 2. Вычислить значение функции в заданных точках.

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x < -1, \\ x^2 - 1, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Требуется найти значения функции в точках:

- а) $g(-2)$;
- б) $g(0)$;
- в) $g(1)$;
- г) $g(4)$.

Задача 3. Аквалангист исследует подводный каньон. Его движение описывается функцией:

$$y = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 2, & -4 \leq x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 4 \\ \frac{x}{2} - 2, & 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

Прямая $y = K$ задает траекторию медузы, плывущей горизонтально. Определите, при каких значениях K медуза пересечется с аквалангистом только один раз.

Варианты:

а) $K \in [0, 1]$. б) $K \in (1, 2)$. в) $K \in [2, 3)$. г) $K \in [2, 3]$.

Творческое задание.

Требуется придумать кусочно-заданную функцию, которая будет обладать свойствами:

1. Функция будет иметь разрыв в точке $x=3$.
2. Функция будет включать три или более «кусков».

Пример такой функции:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ 2x, & \text{если } 1 < x < 3, \\ 5, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$$

Тема «Свойства элементарных функций. Определение элементарных функций».

Прикладные задачи на применение свойств элементарных функций.

Задача 1. Интернет-провайдер предлагает трафик: абонентская плата – 300 руб./месяц, за каждый гигабайт сверх лимита – 50 руб.

Задания:.

1. Записать функцию $H(g)$, в которой g – гигабайты, превышающие лимит.
2. Построить график данной функции и определить сколько заплатит человек, израсходовав 20 лишних Гб.
3. Предложить новый тариф с платой 600 руб./месяц и 60 руб./ГБ. Сравнить графики и сказать, чем они будут отличаться, а в чем сходны.

Задача 2. Камень бросили вверх с начальной скоростью 20 м/с. Высота, достигнутая камнем, $h(t)$ (в метрах) описывается функцией: $h(t) = 20t - 5t^2$.

Задания.

1. Найти время, через которое камень достигнет своей максимальной высоты.
2. Определить эту максимальную высоту.
3. Через сколько секунд мяч упадет на землю?

Задача 3 Дан прямоугольный треугольник с катетами 9 см и 12 см. В него вписан прямоугольник так, что одна его вершина совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а остальные вершины лежат на сторонах треугольника (по одной на каждой стороне).

Задания.

1. Найдите отношения длин сторон прямоугольника (большой к меньшей) при условии, что этот прямоугольник имеет наибольшую площадь из всех возможных.
2. Определить, какую часть площади треугольника составляет площадь этого прямоугольника.
3. Обобщить результаты для прямоугольного треугольника с произвольными катетами – a и b .

Задача 4. Один курьер доставляет посылку из офиса в дом клиента. В первый день он выезжает из офиса в 8 утра и прибывает в дом клиента в 8 вечера. На следующий день он выезжает из дома клиента в 8 утра и возвращается в офис к 8 вечера. Скорость движения курьера может быть непостоянной: он может делать остановки, менять маршрут и даже временно возвращаться назад.

Докажите, что существует такой момент времени (час, минута, секунда), в которой и в первый, и во второй день курьер находился на одинаковом расстоянии от офиса.

Решение.

1. Определим функции расстояния.

- В первый день: $d_1(t)$ – расстояние от офиса до курьера в момент времени t ($8:00 \leq t \leq 20:00$).

- Во второй день: $d_2(t)$ – расстояние от офиса до курьера в момент времени t ($8:00 \leq t \leq 20:00$).

2. Граничные условия.

- В первый день: $d_1(8:00) = 0$ (курьер в офисе), $d_1(20:00) = S$ (полное расстояние до дома клиента).

- Во второй день: $d_2(8:00) = S$ (курьер у клиента), $d_2(20:00) = 0$ (курьер вернулся в офис).

3. Рассмотрим разность функций.

4. Определим $f(t) = d_1(t) - d_2(t)$.

5. Анализ функции $f(t)$:

- $f(8:00) = d_1(8:00) - d_2(8:00) = 0 - S = -S$;

- $f(20:00) = d_1(20:00) - d_2(20:00) = S - 0 = S$.

6. применение теоремы о промежуточном значении.

- Функция $f(t)$ непрерывна (так как движение курьера непрерывно).

- На промежутке $[8:00, 20:00]$ функция $f(t)$ меняется от $-S$ до S .

- Следовательно, существует момент t_0 , при котором $f(t_0) = 0$, то есть $d_1(t_0) = d_2(t_0)$.

Ответ: существует момент времени t_0 , когда курьер в оба дня находился на одинаковом расстоянии от офиса.

Тема «Обобщенный метод интервалов»

1. Решить неравенство

$$\frac{(x-2)^2(x+4)}{x-1} \leq 0.$$

Решение.

1) Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(x-2)^2(x+4)}{x-1}$ и найдём значения x , при которых $f(x) \leq 0$.

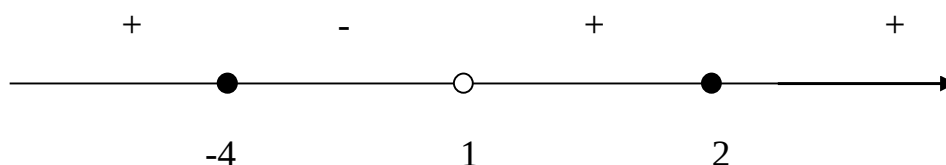
2) Найдём область определения функции $f(x)$.

$D(f)$: $x \neq 1$, следовательно, $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

3) Найдём нули функции:

$$f(x) = 0, \text{ при } x=2 \text{ и } x=-4.$$

4) Точки $x=-4$, $x=1$, $x=2$ делят числовую прямую на промежутки, в каждом из которых функция $f(x)$ непрерывна и сохраняет постоянный знак.



Для определения знаков, в полученных промежутках используем следующие правила:

а) так как внутри рассматриваемого промежутка знак неравенства не меняется, то для определения знака функции $f(x)$ выбирается какая-либо “удобная” точка внутри этого промежутка и вычисляется значение функции в этой точке.

б) если точки неравенства (т.е. корни числителя или корни знаменателя или корни числителя и знаменателя в совокупности) имеют нечётную кратность, то при переходе через эту точку знак неравенства меняется, если указанные точки имеют чётную кратность, то при переходе через неё знак неравенства не меняется. (Для исключения ошибок желательно определить знак функции $f(x)$ в каждом из промежутков в “удобной” точке.)

Пусть $x > 2$, тогда $f(5) > 0$ (“5” – удобная точка промежутка $[2; +\infty)$).

Пусть $1 < x < 2$, тогда $f(1,5) > 0$.

Пусть $-4 < x < 1$, тогда $f(0) < 0$.

Пусть $x < -4$, тогда $f(-5) > 0$.

5) Таким образом, $f(x) \leq 0$ при $x \in [-4; 1) \cup \{2\}$. Ответ: $[-4; 1) \cup \{2\}$.

2. Решить неравенство $(x^2 - 9)\sqrt{x + 2} \geq 0$.

1) Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x + 2}$.

2) $D(f): x+2 \geq 0; x \geq -2; D(f)=[-2; +\infty).$

3) Найдём нули функции.

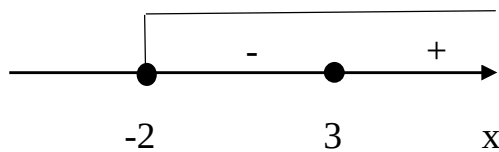
$f(x)=0$, если $(x^2 - 9)\sqrt{x+2}=0$. Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

$$x^2 - 9 = 0 \text{ или } \sqrt{x+2}=0,$$

$$\begin{cases} x=3, \\ x=-3, \end{cases} \quad x=-2.$$

Число (-3) не является корнем, т.к. при этом подкоренное выражение отрицательно.

4) На числовую прямую наносим область определения функции $D(f)=[-2; +\infty)$ и нуль функции $x=3$, который разбивает область определения на два промежутка, в каждом из которых функция непрерывна и сохраняет постоянный знак.



Определяем знак функции в каждом промежутке, пользуясь правилом “удобной” точки.

Если $x > 3$, $f(5) > 0$.

Если $-2 < x < 3$, $f(0) < 0$.

5) Таким образом, $f(x) \geq 0$ при $x \in [3; +\infty) \cup \{-2\}$.

Ответ: $[3; +\infty) \cup \{-2\}$.

Из анализа полученного ответа следует, что особое внимание следует уделить концам промежутков и границам области определения. Такие точки могут как принадлежать множеству решений неравенства, так и не принадлежать, что надо дополнительно выяснять, подставляя их значения в неравенство.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} > 1$.

Решение.

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} > 1 \quad \text{или} \quad \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} - 1 > 0.$$

1) Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} - 1$

$$2) D(f): \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \end{cases}; D(f)=[-2;3]$$

$$3) \text{ Нули } f(x): \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} - 1=0,$$

$$\sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} + 1;$$

$$x+2 = 3-x+2\sqrt{3-x}+1;$$

$$\sqrt{3-x} = x-1;$$

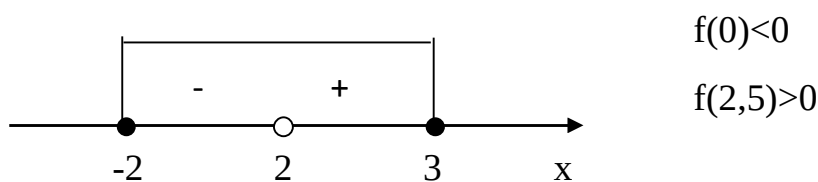
$$x^2 - x - 2 = 0; \begin{cases} x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Проверка: $x = -1; \sqrt{1} - \sqrt{4} = 1$ равенство неверное,

$x = 2; \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1$ равенство верное.

Следовательно, уравнение имеет единственный корень $x=2$.

4) Наносим область определения и нули функции на числовую прямую и определяем знак функции на каждом из промежутков с помощью удобной точки.



Проверим знак функции на границах области определения: $f(-2) < 0$, $f(3) > 0$, следовательно, $f(x) > 0$, при $x \in (2; 3]$. Следует обратить внимание на то, что $x=3$ является решением неравенства, хотя неравенство является строгим.

Ответ: $(2;3]$.

Тема «Геометрическая интерпретация решения неравенства».

Таблица для заполнения:

Множество точек на оси (геометрическая иллюстрация)	Ответ для неравенства $f(x) \geq 0$
	$x \in (-\infty, -1) \cup [2, 5) \cup \{7\}$
	$x \in [-3, 0] \cup (4, \infty)$
	$x \in \{-5\} \cup [1, 3) \cup (3, 6]$
	$x \in (-\infty, -2) \cup \{0\} \cup (2, 4]$

Задание 1. Заполните таблицу.

1. Для каждого графика определите, при каких x выполняется $f(x) \geq 0$.
2. Запишите ответ в виде объединения интервалов и точек.

Задание 2. Составьте дробно-рациональное неравенство.

Для каждого ответа из таблицы придумайте пример дробно-рационального неравенства, решением которого будет указанное множество точек.

Пример для первой строки. Неравенство:

$$\frac{(x-2)(x-7)^2}{(x+1)(x-5)} \geq 0.$$

Ответ: $x \in (-\infty, -1) \cup [2, 5) \cup \{7\}$.

Задание 3. Обсуждение.

1. Однозначность восстановления ответа по графику. Всегда ли по геометрической иллюстрации можно точно определить ответ?

Пример. Если на графике есть выколота точка, как это отражается в ответе?

2. Однозначность восстановления неравенства по ответу.

Можно ли по записи $x \in [-3, 0] \cup (4, \infty)$ однозначно восстановить исходное неравенство? Почему? Приведите примеры разных неравенств с одинаковым решением.

3. Сложность восстановления.

Почему для ответа $x \in \{-5\} \cup [1, 3) \cup (3, 6]$ нужно учитывать кратность корней и знаки множителей? (Задание из ОГЭ).

Задание 4. Решите неравенство $2x^2 - 3x > 0$.

1. Разложим выражение на множители:

$$2x^2 - 3x = x(2x - 3).$$

Таким образом, неравенство принимает вид:

$$x(2x - 3) > 0.$$

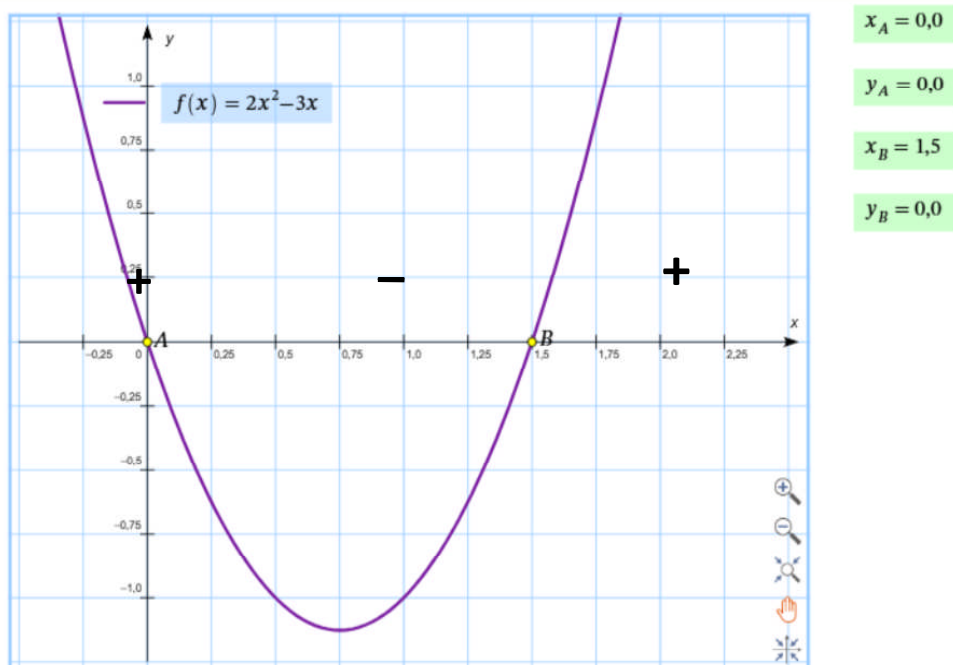
2. Найдем корни уравнения $x(2x - 3) = 0$:

- $x = 0$
- $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$

3. Разобьем числовую прямую на интервалы.

- Интервал 1: $x < 0$.
- Интервал 2: $0 < x < \frac{3}{2}$.
- Интервал 3: $x > \frac{3}{2}$.

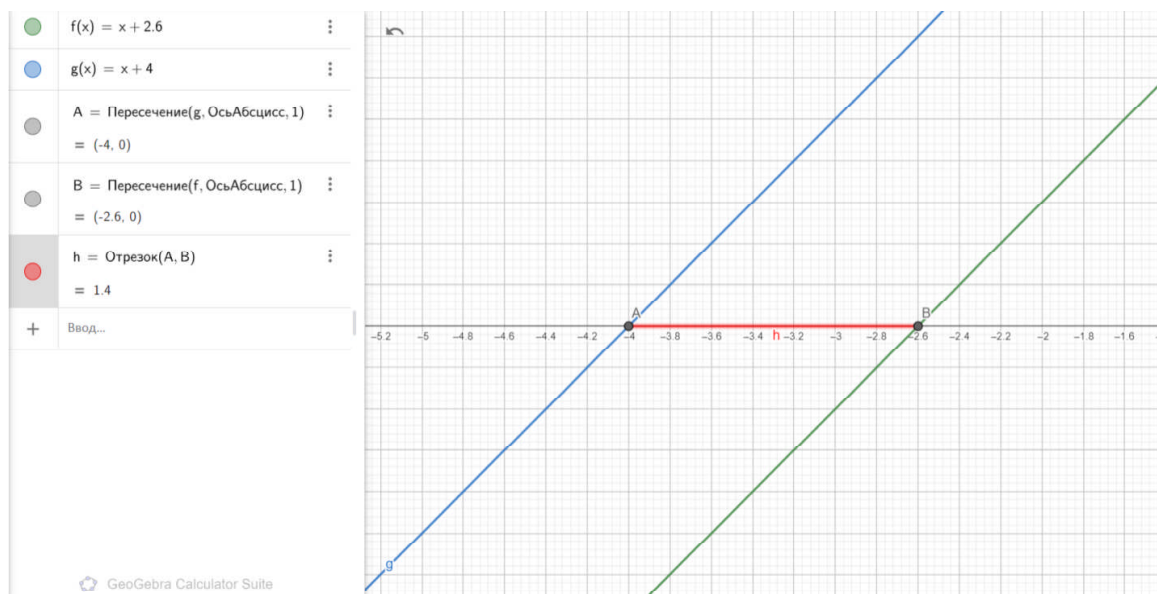
4. Определим знак выражения $x(2x - 3)$ на каждом интервале:



Таким образом, ответ: $x \in [-\infty, 0] \cup (1, 5, +\infty)$.

Задание 5. (Открытый банк заданий ФИПИ [10]).

Решить систему неравенств: $\begin{cases} x + 2,6 \leq 0, \\ x + 4 > 0. \end{cases}$



1. Решим первое неравенство $x + 2,6 \leq 0$:

$$x + 2,6 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2,6.$$

2. Решим второе неравенство $x + 4 > 0$:

$$x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4.$$

3. Найдём пересечение решений:

$$-4 < x \leq -2,6.$$

Ответ: $x \in [-4; -2,6)$.

2.2.2 Конспекты занятий

1. Конспект занятия для 9 класса по теме: «Кусочно-заданные функции».

Цель:

- познакомить учащихся с понятием кусочно-заданных функций;
 - научить строить графики таких функций и решать задачи с их применением;
 - развить навыки анализа и интерпретации кусочных функций.
1. Организационный момент (2 мин).
- Приветствие, проверка готовности класса.

- Краткое объяснение темы и её значимости (примеры из реальной жизни: тарифы, оплата услуг, температурные графики).

2. Теоретическая часть (15 мин).

Форма: Объяснение с презентацией и интерактивной демонстрацией в GeoGebra.

Основные понятия.

1. Определение.

- Кусочно-заданная функция – это функция, которая определяется разными формулами на разных промежутках.

- Общий вид:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{если } x \in D_1, \\ f_2(x), & \text{если } x \in D_2, \\ \dots & \\ f_n(x), & \text{если } x \in D_n. \end{cases}$$

2. Пример.

- Модуль числа (кусочно-линейная функция):

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0, \\ x, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

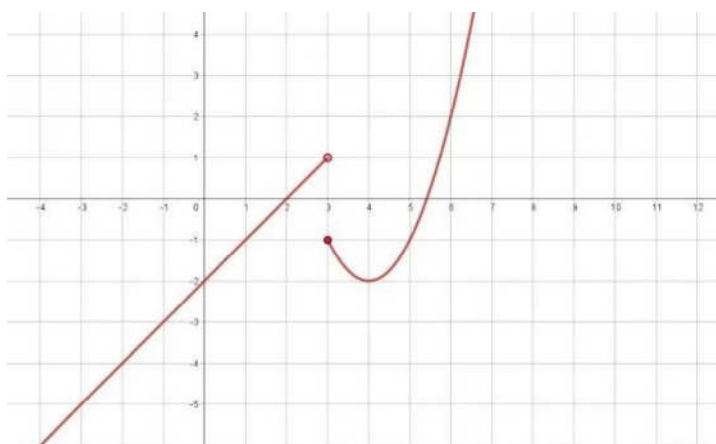
3. Как строить график?

- Определить, на какие части делится область определения.
- Построить каждую часть отдельно.
- Проверить, есть ли точки "склейки" (где меняется формула).

Демонстрация.

- Построение графика функции в GeoGebra (например, кусочно-линейной функции с разными наклонами).

$$y = \begin{cases} x^2 - 8x + 14, & \text{при } x \geq 3, \\ x - 2, & \text{при } x < 3. \end{cases}$$



3. Практическая часть (20 мин).

Форма: Работа в парах + дифференцированные задания.

Задания.

1. Базовый уровень.

- Построить график функции:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \leq 2, \\ 5 - x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

2. Продвинутый уровень.

- Найти значение функции в точках $x = -1, 0, 3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0, \\ 2x + 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

3. Олимпиадный уровень.

- При каком значении параметра a функция непрерывна?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{если } x \leq 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Инструменты.

- Графические калькуляторы, GeoGebra для проверки.
- Карточки с подсказками для учащихся, испытывающих трудности.

4. Интерактивный элемент (10 мин).

Дискуссия.

- Обсуждение в группах: «Где в жизни встречаются кусочно-заданные функции?».

- Примеры.

- Тарифы на электроэнергию (разные цены в зависимости от потребления).
- Зарплата продавца (оклад + процент от продаж).
- Температура воды при нагреве (разные фазы нагрева).

5. Итоги и рефлексия (5 мин).

- Проверка решений, разбор ошибок.
- Вопросы для рефлексии:
 - Какие трудности возникли при построении графиков?
 - Где ещё могут пригодиться кусочные функции?
- Домашнее задание.
 - Построить графики двух кусочно-заданных функций.
 - Придумать свой пример из жизни и описать его математически.

6. Дополнительные материалы.

Методические заметки.

- Для слабоуспевающих – упор на простые линейные кусочные функции.
- Для мотивированных – задачи с параметрами и исследование непрерывности.

Результат. Учащиеся научатся строить и анализировать кусочно-заданные функции, применять их в практических задачах.

2. Конспект занятия для 9 класса по теме «Решение линейных и квадратных неравенств».

Цель:

- систематизировать методы решения линейных и квадратных неравенств;
- научить учащихся выбирать оптимальный способ решения;
- развить навыки графической интерпретации неравенств.

1. Организационный момент (2 мин).

- Приветствие, мотивация: «Зачем уметь решать неравенства?» (примеры: расчет бюджета, планирование времени, физические законы).

- Оглашение плана занятия.

2. Теоретическая часть (15 мин).

Форма. Объяснение с презентацией и интерактивной демонстрацией в GeoGebra.

Ключевые понятия.

1. Линейные неравенства (вида $ax+b>0$):

- Алгоритм решения.

- 1) Перенести все члены в одну сторону.

- 2) Разделить на коэффициент a (если $a<0$, знак неравенства меняется!).

- Пример: $3x-6\leq 0 \rightarrow x\leq 2$

2. Квадратные неравенства (вида $ax^2+bx+c\geq 0$):

- Алгоритм решения:

- 1) Найти корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

- 2) Построить схематично параболу (ветви вверх при $a>0$, вниз при $a<0$).

- 3) Выбрать промежутки, где парабола выше/ниже оси x в зависимости от знака неравенства.

- Пример. $x^2-5x+6>0$.

- Корни: $x=2$, $x=3$.

- Решение: $x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$ (т.к. парабола ветвями вверх).

Визуализация:

- анимация в GeoGebra: изменение коэффициентов и их влияние на график и решение.

3. Практическая часть (20 мин)

Форма. Индивидуальная работа + обсуждение в парах.

Дифференцированные задания.

- 1) Базовый уровень:

- Решить неравенство: $4x-8<0$.
- Решить неравенство: $x^2-9\leq 0$.

2) Продвинутый уровень:

- Решить систему: $\begin{cases} 2x + 1 > 3, \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0. \end{cases}$
- Найти область определения функции: $y=x^2-4$.

3) Олимпиадный уровень.

- При каких a неравенство $x^2+ax+1>0$ верно для всех x ?

Инструменты.

- Таблицы-подсказки с алгоритмами.
- Проверка решений через **GeoGebra**.

4. Интерактивный элемент (10 мин).

Игра «Верю – не верю».

1. «Неравенство $x^2+1<0$ не имеет решений» (верно).
2. «Решением $-2x\geq 6$ является $x\geq -3$ » (неверно, $x\leq -3$).
3. «Неравенство $(x-1)(x+2)>0$ имеет решение $x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$ » (верно).

Обсуждение. Почему ответы именно такие?

5. Итоги и рефлексия (5 мин).

- Проверка решений через проектор.
- Вопросы.
 - Какой метод показался самым удобным?
 - Где можно допустить ошибки?
- Домашнее задание.
 - Решить 3 неравенства (линейное, квадратное, система).
 - Творческое задание: придумать задачу с неравенством из реальной жизни.

6. Дополнительные материалы

- Памятка с алгоритмами решения.

Методические заметки.

- Для слабых учеников – акцент на простые неравенства с пошаговой проверкой.

- Для сильных – задачи с параметрами и исследование решений.

Результат.

Учащиеся смогут уверенно решать линейные и квадратные неравенства, выбирая оптимальный метод (аналитический или графический).

Памятка «Решение линейных и квадратных неравенств»

1. Линейные неравенства вида $ax + b > 0$.

Алгоритм

1. Перенеси свободный член в правую часть неравенства: $ax > -b$.
2. Раздели обе части на a .
 - Если $a > 0$, знак сохраняется: $x > -\frac{b}{a}$.
 - Если $a < 0$, знак меняется на противоположный: $x < -\frac{b}{a}$.

Пример. $-2x + 6 \leq 0 \rightarrow -2x \leq -6 \rightarrow x \geq 3$ (знак поменялся!).

2. Квадратные неравенства вида $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Алгоритм

1. Найди корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Построй схему параболы.
 - **Ветви вверх**, если $a > 0$.
 - **Ветви вниз**, если $a < 0$.
3. Определи промежутки.
 - Для знака неравенства > 0 – где парабола **выше** оси x .
 - Для знака неравенства < 0 – где парабола **ниже** оси x .

Пример. $x^2 - 5x + 6 > 0 \rightarrow$ Корни: $x = 2$, $x = 3$. Парабола ветвями вверх $\rightarrow$ решение: $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

3. Частые ошибки.

- Забываешь менять знак при делении неравенства на отрицательное число.
- Путаеть интервалы для $>$ и $<$ в квадратных неравенствах.
- Не проверяешь строгость неравенства ($\geq$ и $>$).

2.3 Результаты апробации элективного курса

Элективный курс «Функционально-графические методы решения неравенств» был апробирован на базе ГАОУ Многопрофильная гимназия №13 г. Пензы. В эксперименте приняли участие 24 учащихся 9 класса, разделённых на контрольную и экспериментальную группы (по 12 человек в каждой).

Методы оценки эффективности курса.

1. Диагностические работы (входная, промежуточная и итоговая).
2. Анкетирование учащихся (мотивация, удовлетворённость занятиями).
3. Наблюдение за активностью на уроках (участие в дискуссиях, выполнение проектов).
4. Сравнительный анализ результатов контрольной и экспериментальной групп.

Этапы работы с учащимися.

1. Подготовительный этап.

Цель. Сформировать программу курса, адаптировать методические материалы под уровень учащихся, провести входную диагностику.

Действия.

- 1) Разработка программы.

- Курс разбит на 3 модуля:
 - *теоретический* (свойства функций, графические преобразования);
 - *практический* (решение неравенств);
 - *проектный* (создание интерактивных материалов в GeoGebra).

Для каждого модуля подготовлены:

- конспекты занятий с примерами;
- практикумы с заданиями разного уровня сложности.

- 2) Входная диагностика:

- Учащиеся выполнили тест из 10 заданий:

- пять задач на базовые свойства функций (например, найти область определения функции $y=\frac{1}{x-2}$);

- три задачи на построение графиков (линейная, квадратичная функции);

- две задачи на решение неравенств методом интервалов.

- Результаты.

Высокий уровень – выполнены 9-10 заданий.

Средний уровень – выполнены 6-8 задания.

Низкий уровень – выполнены менее 6 заданий.

Результаты проведенной диагностики представлены на Рисунке 2.

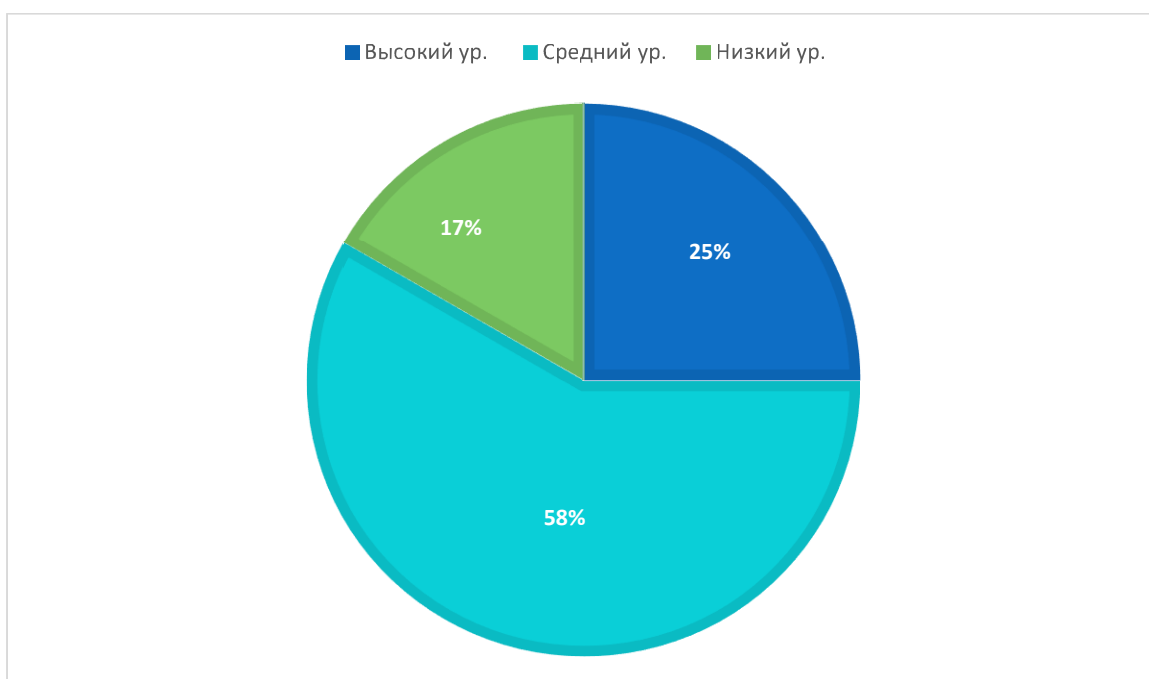


Рисунок 2 – Диаграмма результатов входной диагностики

Анализ результатов показал, что высокий уровень имеют 6 учащихся, данные учащиеся справились со всеми предложенными заданиями, причем выполнили их строго по заданию, т.е. применяли функционально-графический способ решения, средний уровень у 14 учащихся, данные ученики допускали ошибки в решениях, также хотелось бы отметить, что в решениях данных учащихся преобладал в основном аналитический способ решения неравенств, а

не тот, с помощью которого необходимо было выполнить решение, у 4 учащихся низкий уровень, эти учащиеся выполнили менее 6 заданий.

Таким образом, начальная диагностика показала, что большинство учащихся не обладают должным уровнем умений применять функционально-графический способ решения неравенств.

3) Формирование групп.

- Учащиеся случайным образом распределены на экспериментальную (12 человек) и контрольную (12 человек) группы.

- Уровень начальной подготовки групп был статистически сопоставим (Представлен на Рисунке 3).

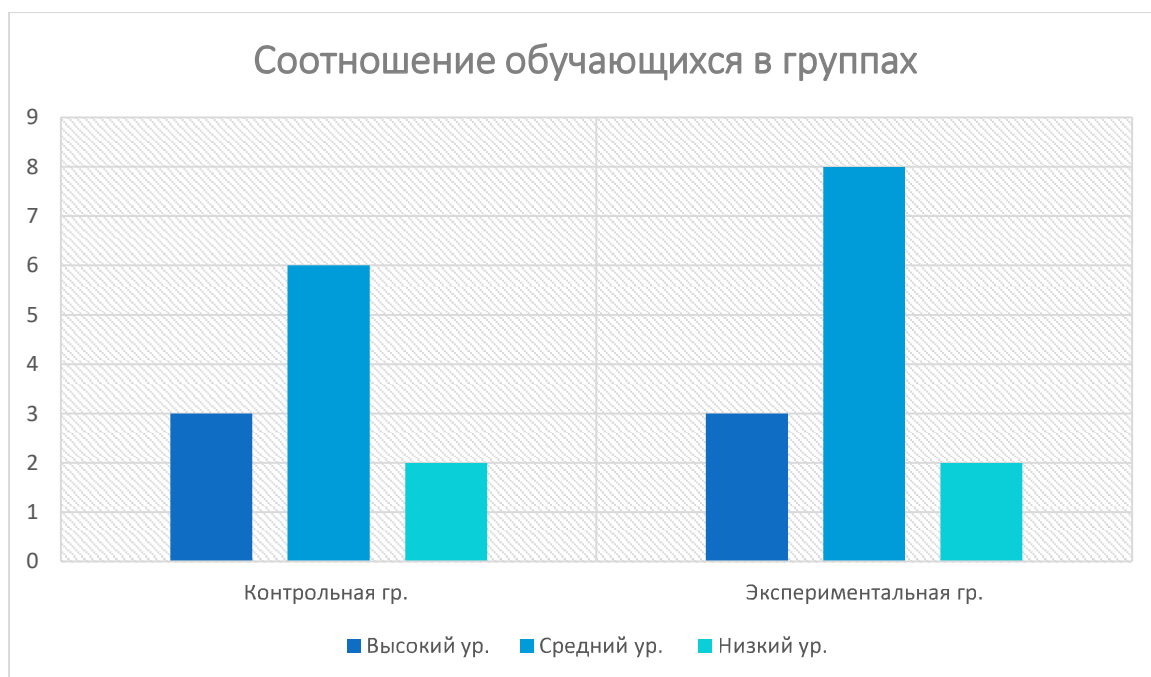


Рисунок 3 – Диаграмма соотношения обучающихся в КГ и ЭГ

2. Проведение занятий.

Цель. Реализовать программу курса, используя активные методы обучения.

Формы работы:

- лекции с интерактивными элементами (20% времени);
- семинары (30% времени);
- практикумы (40% времени);

- проектная деятельность (10% времени).

3. Диагностика и обратная связь.

Цель. Оценить прогресс учащихся, скорректировать программу.

Применялись следующие методы.

1) Промежуточное тестирование (после каждого модуля).

Экспериментальная группа: 75% справились с заданиями на «отлично».

Контрольная группа: 45% выполнили работу удовлетворительно.

2) Анкетирование.

○ Вопросы:

«Какие темы вызвали наибольшие трудности?»;

- *«Как вы оцениваете полезность цифровых инструментов (GeoGebra, Математический конструктор)?»*

○ Ответы:

- 70% отметили сложность задач с модулями;
- 90% оценили GeoGebra как «очень полезный» инструмент.

3) Наблюдение.

○ Фиксировались такие показатели:

- Активность на уроках (количество вопросов, участие в дискуссиях);
- Качество выполнения домашних работ.

○ Выводы.

- Учащиеся экспериментальной группы чаще предлагали нестандартные решения.

4. Итоговая оценка

Цель. Определить эффективность курса, сравнить результаты групп.

Инструменты.

1) Итоговый тест.

Результаты (представлены на Рисунке 4):

■ Высокий ур. ■ Средний ур. ■ Низкий ур.

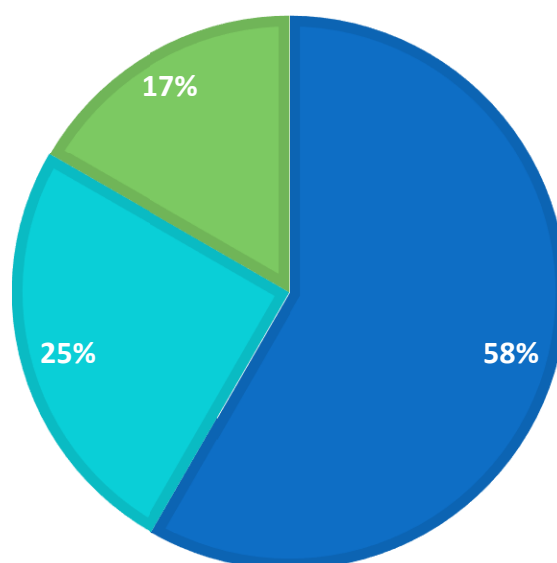


Рисунок 4 – Диаграмма результатов итоговой диагностики

- экспериментальная группа: 83% успешно справились;
- контрольная группа: 35% выполнили задания на «хорошо» и «отлично».

2) Сравнительный анализ.

- Динамика роста среднего балла:

Группа	Входной тест	Итоговый тест
Экспериментальная	3.2	4.5
Контрольная	3.1	3.4

3) Качественные результаты.

- Учащиеся экспериментальной группы:

- Научились строить сложные графики;
- Активно использовали функционально-графические методы в нестандартных задачах.

5. Рефлексия и корректировка.

Цель. Устранить выявленные проблемы, улучшить программу.

Итоги.

Сложные темы:

- Задачи с параметрами и модулями потребовали дополнительных консультаций;

- Введены дополнительные тренажёры с пошаговыми решениями.

Технические трудности.

- Нехватка компьютеров компенсирована групповой работой (2-3 ученика на устройство).

Рекомендации:

- Добавить модуль «Решение олимпиадных задач»;

- Внедрить онлайн-платформу для автоматической проверки заданий.

Результаты повторной диагностики показали поднятие уровня у учащихся экспериментальной группы у 11 человек.

Таким образом, можно сказать, что проведенный элективный курс показал свою эффективность, уровень умений применять функционально- графический способ решения неравенств повысился у большинства учащихся, что согласуется с исследованиями Петрова [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённое исследование в рамках выпускной квалификационной работы было направлено на изучение функционально-графических методов решения неравенств и разработку методических рекомендаций для их применения в школьном курсе математики. В ходе работы были достигнуты следующие результаты.

1. Систематизированы теоретические основы функционально-графических методов, включая ключевые свойства функций (монотонность, периодичность, ограниченность) и их роль в решении неравенств. Показано, что использование графической интерпретации не только упрощает процесс решения, но и способствует глубокому пониманию взаимосвязи алгебраических и геометрических аспектов математики.

2. Разработана программа элективного курса для учащихся 9 классов, направленная на формирование навыков решения неравенств с использованием функционально-графических методов. Курс включает теоретические занятия, практикумы и проектную деятельность, что обеспечивает комплексный подход к обучению. Особый акцент сделан на интеграцию современных технологий (GeoGebra, Математический конструктор, интерактивные задания), которые повышают наглядность и вовлечённость учащихся [19].

3. Апробация курса в ГАОУ Многопрофильной гимназии №13 г. Пензы подтвердила его результативность. Сравнительный анализ контрольной и экспериментальной групп показал значительный рост уровня знаний учащихся: средний балл в экспериментальной группе повысился с 3.2 до 4.5, тогда как в контрольной группе динамика была минимальной (с 3.1 до 3.4). Учащиеся освоили построение графиков, анализ свойств функций и применение этих навыков в нестандартных задачах, включая задания с параметрами.

4. Работа демонстрирует, что функционально-графические методы:
- способствуют развитию критического мышления и математической интуиции;
 - позволяют эффективно готовить учащихся к экзаменам (ОГЭ, ЕГЭ), где требуются нестандартные подходы;
 - учат комбинировать аналитические и графические методы, что особенно важно в условиях профильного обучения.
5. Для дальнейшего развития темы рекомендуется:
- расширить курс заданиями олимпиадного уровня;
 - внедрить онлайн-платформы для автоматизированной проверки решений;
 - провести долгосрочные исследования влияния функционально-графических методов на успеваемость в старших классах.

Данная работа вносит вклад в совершенствование методики преподавания математики, предлагая структурированный подход к обучению решению неравенств. Разработанные материалы могут быть использованы для углублённой подготовки учащихся, а также адаптированы для других тем школьного курса. Результаты исследования подтверждают, что функционально-графические методы не только обогащают инструментарий учащихся, но и открывают новые возможности для творческого освоения математики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) основного общего образования. URL: <https://fgos.ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 10.04.2025).
2. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для 10-11 классов. М. : Просвещение, 2019. 384 с.
3. Булин-Соколова Е. И. Цифровые образовательные ресурсы в преподавании математики. СПб. : Питер, 2020. 144 с.
4. Виленкин Н. Я. и др. Алгебра и математический анализ. 11 класс. М. : Мнемозина, 2018. 288 с.
5. Глейзер Г. Д. История математики в школе. М. : Просвещение, 2019. 295 с.
6. Далингер В. А. Графические методы решения уравнений и неравенств. Омск : ОмГПУ, 2017. 120 с.
7. Иванов А. В. Применение графических методов при решении неравенств в школьном курсе. Математика в школе. 2022. № 5. С. 12-18.
8. Кузнецов А. В. Методы решения неравенств: учебное пособие для студентов педагогических вузов. М. : Просвещение, 2018. 215 с.
9. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. М. : Мнемозина, 2020. 399 с.
10. Открытый банк заданий ОГЭ/ЕГЭ ФИПИ. URL: <https://fipi.ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 10.04.2025).
11. Официальный сайт GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org>. Заглавие с экрана (дата обращения: 10.04.2025)

12. Петрова С. М. Эффективность элективных курсов в подготовке к ЕГЭ. Современное образование. 2021. № 3. С. 45-52.
13. Потапов М. К. Неравенства. М. : Наука, 2020. 256 с.
14. Саранцев Г. И. Методика обучения математике: теория и практика. М. : Академия, 2020. 320 с.
15. Сканави М. И. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. М. : АСТ, 2021. 608 с.
16. Смирнова И. М. Графические методы в школьном курсе математики: теория и практика. СПб. : Лань, 2019. 180 с.
17. Ткачева М. В. Элективные курсы по математике: методика преподавания и практика. М. : Бином, 2020. 165 с.
18. Фридман Л. М. Теоретические основы методики обучения математике. М. : Либроком, 2016. 248 с.
19. Холодная М. А., Гельфман Э. Г. Обучение математике с использованием GeoGebra. М. : Бином, 2021. 180 с.
20. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике: решение задач повышенной сложности. М. : Дрофа, 2017. 240 с.
21. Яценко И. В. Подготовка к ЕГЭ по математике: функционально-графические методы. М. : Экзамен, 2021. 192 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ» ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024 г.
Гав. Лановенский В.И.

Задание

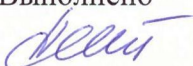
По ВКР студента Карнычевой Анастасии Александровны

Тема работы «Функционально-графические методы решения неравенств»

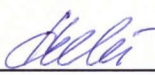
Утверждена приказом по Университету от «25.12» 2024 г. № 1350/0

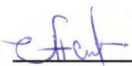
Срок сдачи студентом законченной работы «6.05» 2025г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов:	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение научной литературы по теме исследования.	Октябрь 2024	Выполнено 
2.	Изучение теоретической базы функционально-графического метода.	Ноябрь – Декабрь 2024	Выполнено 
3.	Разработка элективного курса «Решение неравенств функционально-графическим методом».	Январь – Февраль 2025	Выполнено 
4.	Разработка дидактических заданий, конспектов уроков, памятки.	Март – Апрель 2025	Выполнено 
5.	Оформление текста работы.	Май 2025	Выполнено 
6.	Подготовка речи и презентации.	Июнь 2025	Выполнено 

Дата выдачи задания «28» 10 2024.

Руководитель  Никитина О. Г.
(подпись) (ФИО)

Задание принял  Карнычева А. А.
к исполнению (подпись) (ФИО)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН очной
формы обучения
Карнычевой Анастасии
Александровны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Карнычева Анастасия Александровна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Функционально-графические методы решения неравенств» выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


подпись
11.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 11.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  Ольга Геннадьевна Никитина

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Функционально-графические методы решения неравенств»

студентки 4 курса Анастасии Александровны Карнычевой
(И. О. Фамилия)

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»

Руководитель ВКР Ольга Геннадьевна Никитина
(И. О. Фамилия)

Отчет о проверке

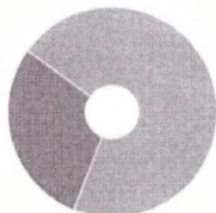
Автор: Карнычева Анастасия Александровна

Название документа: ВКР Карнычевой Анастасии

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
29,17%

Оригинальность:
70,83%

Цитирования:
0%

Самоцитирования:
0%

1 «Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

1 Проверено: 97,24% текста документа, исключено из проверки: 2,76% текста документа. Разделы, отключенные пользователем: Титульный лист, Библиография, Приложение

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 114

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 11.05.2025 15:15:53

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 59

Символов в тексте: 64457

Слов в тексте: 8471

Число предложений: 1035

Комментарий: не указано

11.05.25
дд.мм.гггг.

подпись

Ольга Геннадьевна Никитина
И. О. Ф. Руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Функционально-графические методы решения неравенств»
студентки Карнычевой Анастасии Александровны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Карнычевой Анастасии Александровны посвящена функционально-графическим методам решения неравенств.

Актуальность темы исследования обусловлена тем, что неравенства — ключевой раздел математики, но многие ученики испытывают трудности при их решении, особенно если задачи выходят за рамки стандартных и требуют нетривиального подхода и глубокого понимания зависимости между величинами. Одним из действенных подходов в решении таких задач являются функционально-графический метод. Основанный на свойствах функций и их графических представлений, он позволяет не только упростить вычисления, но и углубить понимание взаимосвязи между алгебраическими и геометрическими представлениями математических объектов.

Цель работы состоит в изучении функционально-графических методов решения неравенств и разработке методических рекомендаций по их использованию на элективных курсах по математике.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения и списка литературы.

Основная часть состоит из двух глав. Первая глава посвящена теоретическим основам функционально-графических методов решения неравенств.

Во второй главе рассматриваются методические аспекты обучения функционально-графическим методам решения неравенств на элективном курсе. Разработаны методические материалы к элективному курсу, дидактические задания к занятиям на различные темы и конспекты двух занятий. Здесь также приводятся результаты апробации элективного курса.

Работа Карнычевой А.А. является самостоятельным исследованием. Практическая значимость исследования в том, что результаты работы могут быть использованы при проведении элективных курсов по математике.

Выпускная квалификационная работа Карнычевой Анастасии Александровны заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна, доцент кафедры
«Математическое образование», к.ф.-м.н. 