МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

Курсовая работа
по дисциплине «Дифференциальное и интегральное исчисления»
на тему «Теорема Штольца»

Направление подготовки – 01.03.01 Математика
Профиль подготовки – Вычислительная математика и компьютерные науки

Выполнил студент: _____ Симакова Е.А.
Группа: 19ВМ1

Руководитель:
к. ф.-м. н., доцент _____ Хорошева Э.А.

Работа защищена с оценкой _____
Преподаватель _____
Дата защиты _____

2020

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Зав. кафедрой МСМ
_____ Смирнов Ю. Г.

ЗАДАНИЕ
на курсовую работу по дисциплине
«Дифференциальное и интегральное исчисления»
Тема: «Теорема Штольца»

а) Изучить литературу по теме курсовой работы.

б) Изложить реферативно изученный по теме теоретический материал.

в) Самостоятельно придумать и решить задачи по теме курсовой работы.

Руководитель работы, доцент Хорошева Э.А.

Оглавление

Введение **4**
Глава I. Теоретическая часть **5**
§1. Числовые последовательности 5
§2. Теорема Штольца 6
§3. Замечание к теореме Штольца 9
§4. Примеры применения теоремы Штольца 11
Глава II. Практическая часть **13**
Заключение **19**
Список литературы **20**

Введение

Одним из основополагающих разделов курса математического анализа является раздел, изучающий теорию предела последовательности и предела функции. Данная теория является значимой для изучения многих других разделов математического анализа, а также других дисциплин математики.

Целью данной курсовой работы является рассмотрение и доказательство теоремы Штольца. В теоретической части я расскажу о таких темах, как числовая последовательность, теорема Штольца и её доказательство, а также примеры её применения. В практической части я рассмотрю задачи, которые решаются с помощью применения данной теоремы.

Глава I. Теоретическая часть

§1. Числовые последовательности

Представим себе натуральный ряд:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, \tag{1.1}$$

в котором числа расположены в порядке возрастания, так что большее число n следует за меньшим числом (или меньшее число предшествует большему n). Если теперь заменить в ряде (1), по какому-нибудь закону, каждое натуральное число n некоторым вещественным числом x_n, то получится числовая последовательность:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \tag{1.2}$$

члены или элементы которой x_n занумерованы всеми натуральными числами и расположены в порядке возрастания номеров.

Сокращенно последовательность (1.2) будем обозначать символом $\{x_n\}$.

Введем понятие арифметических операций над числовыми последовательностями. Пусть даны произвольные последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ *Суммой* этих последовательностей назовем последовательность $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots$ (или $\{x_n + y_n\}$), *разностью* – последовательность $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n, \ldots$ (или $\{x_n - y_n\}$), *произведением* – последовательность $x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots$ (или $\{x_n \cdot y_n\}$), *частным* – последовательность $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots$ $\left(\text{или } \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}\right)$.

Замечание. При определении частного $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ нужно требовать, чтобы все элементы y_n последовательности $\{y_n\}$ были отличны от нуля. Однако если у последовательности $\{y_n\}$ обращается в нуль лишь конечное число элементов, то частное $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ можно определить с того номера, начиная с которого все элементы y_n отличны от нуля.

§2. Теорема Штольца

Во многих случаях для исследования сходимости частного $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ оказывается полезной теорема Штольца.

Теорема Штольца. Пусть $\{y_n\}$ – возрастающая бесконечно большая последовательность, и пусть последовательность $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ сходится и имеет предел a. Тогда последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится и имеет предел a. Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Доказательство. Поскольку последовательность $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ сходится и имеет пределом число a, то последовательность $\{\alpha_n\}$, где $\alpha_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a$, бесконечно малая. Пусть $\bar{N}$ – любой фиксированный номер и $n > \bar{N}$. Используя выражение для α_n, рассмотрим серию неравенств:

$$x_{\bar{N}+1} - x_{\bar{N}} = a(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + \alpha_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}),$$
$$x_{\bar{N}+2} - x_{\bar{N}+1} = a(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \alpha_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n-1} - x_{n-2} = a(y_{n-1} - y_{n-2}) + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}),$$
$$x_n - x_{n-1} = a(y_n - y_{n-1}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1}).$$

Складывая эти равенства, найдем

$$x_n - x_{\bar{N}} = ay_n - ay_{\bar{N}} + \alpha_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + \alpha_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \cdots$$
$$\ldots + \alpha_{n-1}(y_{n-1} - y_{n-2}) + \alpha_n(y_n - y_{n-1}).$$

Так как $\{y_n\}$ – возрастающая бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера, ее элементы положительны. Будем считать, что при $n \geq \bar{N}$ $y_n > 0$.

Тогда из последнего равенства получим

$$\frac{x_n}{y_n} - a = \frac{x_{\bar{N}} - a y_{\bar{N}}}{y_n} + \\ + \frac{\alpha_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + \alpha_{\bar{N}+2}(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \ldots + \alpha_n(y_n - y_{n-1})}{y_n}.$$

Поскольку последовательность $\{y_n\}$ возрастающая, то разности $y_{k+1} - y_k$, $k = \bar{N}, \bar{N}+1, \ldots, n-1$, положительны. Поэтому из последнего соотношения имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| \le \left|\frac{x_{\bar{N}} - a y_{\bar{N}}}{y_n}\right| + \frac{|\alpha_{\bar{N}+1}|(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + |\alpha_{\bar{N}+2}|(y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \ldots + |\alpha_n|(y_n - y_{n-1})}{y_n}. \quad (2)$$

Докажем теперь, что последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится и имеет предел a. Для этого достаточно доказать, что для любого положительного ε можно указать номер N такой, что при $n \ge N$ выполняется неравенство $\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \varepsilon$.

Во-первых, по данному $\varepsilon > 0$ выберем номер $\bar{N}$ так, чтобы при $n \ge \bar{N}$ выполнялось неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ (это возможно, поскольку последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая). Далее, выберем номер $N \ge \bar{N}$ так, чтобы при $n \ge N$ выполнялось неравенство $\left|\frac{x_{\bar{N}} - a y_{\bar{N}}}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Такой выбор номера N возможен, поскольку $x_{\bar{N}} - a y_{\bar{N}}$ фиксировано, а последовательность $\{y_n\}$ бесконечно большая, и поэтому последовательность $\left\{\frac{x_{\bar{N}} - a y_{\bar{N}}}{y_n}\right\}$ бесконечно малая.

Пусть теперь $n \ge N$.

Из неравенства (2) имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + (y_{\bar{N}+2} - y_{\bar{N}+1}) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}{y_n}.$$

Или

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{(y_n - y_{\bar{N}})}{y_n}.$$

Так как при $n \ge N$ $y_n - y_{\bar{N}} \le y_n$ и $y_n > 0$, то $\frac{(y_n - y_{\bar{N}})}{y_n} \le 1$.

Поэтому при $n \geq N$ из последнего неравенства имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - a\right| < \varepsilon.$$

Теорема Штольца доказана.

§3. Замечание к теореме Штольца

Если $\{y_n\}$ – возрастающая бесконечно большая последовательность, а последовательность $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$ также бесконечно большая и стремится к бесконечности определенного знака, то последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ бесконечно большая.

В самом деле, пусть

$$\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\} = A_n.$$

Последовательность $\{A_n\}$ бесконечно большая. Имеем при $n \geq \bar{N}$

$$x_{\bar{N}+1} - x_{\bar{N}} = A_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n - x_{n-1} = A_n(y_n - y_{n-1}).$$

Складывая эти равенства, найдем

$$x_n - x_{\bar{N}} = A_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1}).$$

Отсюда

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{A_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1})}{y_n} + \frac{x_{\bar{N}}}{y_n}.$$

Из этого соотношения имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| \geq \left|\frac{A_{\bar{N}+1}(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + \ldots + A_n(y_n - y_{n-1})}{y_n}\right| - \left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right|. \qquad (3)$$

Будем для определенности считать, что при $n \geq \bar{N}$ элементы последовательностей $\{y_n\}$ и $\{A_n\}$ положительны. Выберем, далее, по заданному положительному A номер $\bar{N}$ так, чтобы при $n \geq \bar{N}$ выполнялось неравенство $A_n > 4A$, затем такое $N \geq \bar{N}$, что при $n \geq \bar{N}$

$$\left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right| < A, \quad \left|\frac{y_{\bar{N}}}{y_n}\right| < \frac{1}{2}.$$

Возможность выбора такого N обеспечивается тем, что последовательности $\{y_n\}$ и $\{A_n\}$ бесконечно большие и их члены, начиная с некоторого номера, положительны. Очевидно, при $n \geq N$ из неравенства (3) имеем

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\,\frac{(y_{\bar{N}+1} - y_{\bar{N}}) + \ldots + (y_n - y_{n-1})}{y_n} - \left|\frac{x_{\bar{N}}}{y_n}\right|,$$

или

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > 4A\left(1 - \frac{y_{\bar{N}}}{y_n}\right) - A > A.$$

Таким образом, последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ бесконечно большая.

§4. Примеры применения теоремы Штольца

Пример 1.

Докажем, что если последовательность $\{a_n\}$ сходится и имеет предел a, то последовательность $\left\{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right\}$ средних арифметических значений элементов последовательности $\{a_n\}$ сходится к тому же самому пределу a.

В самом деле, если положить $a_1 + a_2+\ldots+a_n = x_n$, а $y_n = n$, то $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a_n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует, то по теореме Штольца

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2+\ldots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Пример 2.

Рассмотрим теперь последовательность $\{a_n\}$, где

$$a_n = \frac{1^k + 2^k+\ldots n^k}{n^{k+1}}$$

и k – целое положительное число.

Обозначим $1^k + 2^k+\ldots n^k$ через x_n, а n^{k+1} через y_n. Тогда последовательность $\{a_n\}$ приобретает вид $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$. Исследуем сходимость последовательности $\left\{\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right\}$. Имеем

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{n^k}{(k+1)n^k - \frac{(k+1)}{2} n^{k-1}+\ldots+(-1)^{k+1}}.$$

Поделив числитель и знаменатель последнего выражения на n^k, получим

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{k+1+\frac{1}{n}[\ldots]},$$

где в знаменателе в квадратных скобках опущено выражение, предел которого при $n \to \infty$ равен $\left[-\frac{(k+1)k}{2}\right]$. Из последней формулы находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Следовательно, по теореме Штольца имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\dots n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

Пример 3.

Рассмотрим последовательность $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$, $a>1$. Полагая $a_n=x_n$ и $y_n=n$ и исследуя последовательность $\left\{\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}\right\}$, находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}(a^n-a^{n-1})=\lim_{n\to\infty}a^n(1-\frac{1}{a})=+\infty.$$

Поэтому имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=+\infty.$$

Глава II. Практическая часть

Задание №1

Используя только теорему Штольца, докажите, что:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3} = \frac{4}{3}$.

Решение:

1) Обозначим $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = x_n$, тогда $n^3 = y_n$.

Теперь предел будет выглядеть так $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

Для того, чтобы найти, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$, необходимо найти, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

Получается, что $x_n - x_{n-1} = (1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2) - (1^2 + 3^2 + \ldots + (2(n-1)-1)^2) = (1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2) - (1^2 + 3^2 + \ldots + (2n - -3)^2)$.

В последовательности $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2$, предпоследний член равен $(2n-3)^2$, следовательно, после сокращения подобных слагаемых $x_n - x_{n-1} = (2n-1)^2$.

Получается, что $y_n - y_{n-1} = n^3 - (n-1)^3 = (n-(n-1))(n^2 + n(n-1) + +(n-1)^2) = n^2 + n^2 - n + n^2 - 2n + 1 = 3n^2 - 3n + 1$.

Теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-4n+1}{3n^2-3n+1}$.

2) Воспользуемся теоремой Штольца еще раз.

Обозначим $4n^2 - 4n + 1 = x_n$, тогда $3n^2 - 3n + 1 = y_n$.

Теперь предел будет выглядеть так $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

$x_n - x_{n-1} = 4n^2 - 4n + 1 - (4(n-1)^2 - 4(\mathrm{n}-1) + 1) = 4n^2 - 4n + 1 - - 4n^2 + 8n - 4 + 4n - 4 - 1 = 8n - 8.$

$y_n - y_{n-1} = 3n^2 - 3n + 1 - (3(n-1)^2 - 3(\mathrm{n}-1) + 1) = 3n^2 - 3n + 1 - - 3n^2 + 6n - 3 + 3n - 3 - 1 = 6n - 6.$

Теперь $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-8}{6n-6}$.

3) Применим теорему Штольца в последний раз.

Обозначим $8n-8=x_n$, тогда $6n-6=y_n$.

Теперь предел будет выглядеть так $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$.

$x_n-x_{n-1}=8n-8-(8(n-1)-8)=8n-8-8n+8+8=8.$

$y_n-y_{n-1}=6n-6-(6(n-1)-6)=6n-6-6n+6+6=6.$

Теперь $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$. Что и требовалось доказать.

Стоит отметить, что если не использовать исключительно теорему Штольца, в конце шага 1) видно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n+1}{3n^2-3n+1}=\frac{4}{3}$, если и числитель, и знаменатель дроби разделить на наибольшую из имеющихся степеней – n^2.

Задание №2

Используя только теорему Штольца, докажите, что:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{n^4}=1.$

Решение:

1) Обозначим $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=x_n$, тогда $n^4=y_n$.

Теперь предел будет выглядеть так $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$.

Для того, чтобы найти, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$, необходимо найти, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$.

Получается, что $x_n-x_{n-1}=(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-\big((n-1+1)(n-$

$-1+2)(n-1+3)(n-1+4)\big)=(n^2+3n+2)(n^2+7n+12)-$

$-\big(n(n^2+3n+2)(n+3)\big)=n^4+7n^3+12n^2+3n^3+21n^2+36n+2n^2+$

$+14n+24-n^4-6n^3-11n^2-6n=4n^3+24n^2+44n+24.$

Получается, что $y_n - y_{n-1} = n^4 - (n-1)^4 = (n^2 - (n-1)^2)(n^2 + (n-1)^2) =$
$= (n^2 - n^2 + 2n - 1)(n^2 + n^2 - 2n + 1) = (2n-1)(2n^2 - 2n + 1) = 4n^3 -$
$-6n^2 + 4n - 1.$

Теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3+24n^2+44n+24}{4n^3-6n^2+4n-1}$.

2) Воспользуемся теоремой Штольца еще раз.

Обозначим $4n^3 + 24n^2 + 44n + 24 = x_n$, тогда $4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = y_n$.

Теперь предел будет выглядеть так $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

$x_n - x_{n-1} = 4n^3 + 24n^2 + 44n + 24 - (4(n-1)^3 + 24(n-1)^2 + 44(\mathrm{n}-1) +$
$+24) = 4n^3 + 24n^2 + 44n + 24 - 4n^3 + 12n^2 - 12n + 4 - 24n^2 + 48n - 24 -$
$-44n + 44 - 24 = 12n^2 + 36n + 24.$

$y_n - y_{n-1} = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 - (4(n-1)^3 - 6(n-1)^2 + 4(\mathrm{n}-1) - 1) =$
$= 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 - 4n^3 + 12n^2 - 12n + 4 + 6n^2 - 12n + 6 - 4n + 4 +$
$+1 = 12n^2 - 24n + 14.$

Теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n^2+36n+24}{12n^2-24n+14}$.

3) Воспользуемся теоремой Штольца третий раз.

Обозначим $12n^2 + 36n + 24 = x_n$, тогда $12n^2 - 24n + 14 = y_n$.

Теперь предел будет выглядеть так $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

$x_n - x_{n-1} = 12n^2 + 36n + 24 - (12(n-1)^2 + 36(\mathrm{n}-1) + 24) = 12n^2 +$
$+36n + 24 - 12n^2 + 24n - 12 - 36n + 36 - 24 = 24n + 24.$

$y_n - y_{n-1} = 12n^2 - 24n + 14 - (12(n-1)^2 - 24(\mathrm{n}-1) + 14) = 12n^2 -$
$-24n + 14 - 12n^2 + 24n - 12 + 24n - 24 - 14 = 24n - 36.$

Теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{24n+24}{24n-36}$.

4) Применим теорему Штольца в последний раз.

Обозначим $24n + 24 = x_n$, тогда $24n - 36 = y_n$.

Теперь предел будет выглядеть так $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

$x_n - x_{n-1} = 24n + 24 - (24(n-1) + 24) = 24n + 24 - 24n + 24 - 24 = 24.$

$y_n - y_{n-1} = 24n - 36 - (24(n-1) - 36) = 24n - 36 - 24n + 24 + 36 = 24.$

Теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{24}{24} = 1$. Что и требовалось доказать.

Задание №3

Используя теорему Штольца, найдите предел:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{n}$.

Решение:

Обозначим $5^n = x_n$, тогда $n = y_n$.

Теперь предел будет выглядеть так $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

Для того, чтобы найти, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$, необходимо найти, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

Получается, что $x_n - x_{n-1} = 5^n - 5^{n-1} = 5^n\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{5}5^n$.

Получается, что $y_n - y_{n-1} = n - (n-1) = 1$.

Теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{4}{5}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{1} = \infty$.

Стоит отметить, что пределы вида $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n}$ всегда равны ∞.

Проверим это на еще одном пределе.

Задание №4

Используя теорему Штольца, докажите, что:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6^{n-2}}{n-2} = \infty.$

Решение:

Обозначим $6^{n-2} = x_n$, тогда $n-2 = y_n$.

Теперь предел будет выглядеть так $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

Для того, чтобы найти, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$, необходимо найти, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

Получается, что $x_n - x_{n-1} = 6^{n-2} - 6^{n-3} = 6^{n-2}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}6^{n-2}$.

Получается, что $y_n - y_{n-1} = n - 2 - (n - 1 - 2) = 1$.

Теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{5}{6}\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6^{n-2}}{1} = \infty$.

Что и требовалось доказать.

Задание №5

Используя теорему Штольца, докажите, что:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$

Решение:

1) Обозначим $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = x_n$, тогда $\ln n = y_n$.

Теперь предел будет выглядеть так $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

Для того, чтобы найти, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$, необходимо найти, чему равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

Получается, что $x_n - x_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$.

В последовательности $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$, предпоследний член равен $\frac{1}{n-1}$, следовательно, после сокращения подобных слагаемых

$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n}$.

Получается, что $y_n - y_{n-1} = \ln n - \ln(n-1) = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$.

Теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)}$.

2) Воспользуемся теперь правилом Лопиталя. Нам необходимо найти производные числителя и знаменателя предела. Предел отношения производных будет равен исходному пределу.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{(n-1)-n}{(n-1)^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n-1)}} = 1$$

Что и требовалось доказать.

Заключение

Теорема Штольца – это важное утверждение математического анализа, необходимое в некоторых случаях, для исследования сходимости частного $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

В теоретической части курсовой работы я раскрыла такие темы, как числовая последовательность, теорема Штольца, её доказательство и примеры её применения.

В практической части курсовой работы я рассмотрела задачи по данной теории.

Рассмотренные задачи показывают, что данная теорема в достаточной мере облегчает процесс нахождения пределов неопределённых выражений $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ типа $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Список используемой литературы

1. Архипов Г. И. Лекции по математическому анализу: учеб. для вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков; под ред. В. А. Садовничего. – 5-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2005. – 558 с.
3. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб.: Для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 648 с.
4. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: Учебник. Часть 1. – 10-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 448 с.