

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Арифметика остатков на факультативе по математике»

Студент

ЭН 06.05.25
(подпись, дата)

Попова Элина Наилевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Мф 06.05.25
(подпись, дата)

Монахова О.А.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Ж 23.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой

Жев 2.06.25
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 5(отл) (протокол заседания ГЭК от 27.06.25 № 15)

Секретарь ГЭК

Ж - 27.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА I МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ».....	6
1.1 Методические рекомендации по организации факультативов при изучении математики	6
1.2 Анализ образовательной программы и учебников по рассматриваемому вопросу	9
1.3 Методические аспекты изучения ключевых понятий арифметики остатков в школе	15
ГЛАВА II ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКИ ОСТАТКОВ НА ФАКУЛЬТАТИВАХ ПО МАТЕМАТИКЕ В 8 КЛАССАХ ...	24
2.1 Программа факультативного курса «Арифметика остатков» для 8 классов	24
2.2 Технологическая карта факультативного занятия на тему «Деление с остатком и алгоритм Евклида»	31
2.3 Технологическая карта факультативного занятия на тему «Сравнение по модулю»	42
2.4 Технологическая карта факультативного занятия на тему: «Китайская теорема об остатках»	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	59
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	61
ПРИЛОЖЕНИЕ. ЗАДАЧИ ИЗ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА ПО АРИФМЕТИКЕ ОСТАТКОВ С РЕШЕНИЯМИ	64

ВВЕДЕНИЕ

Арифметика остатков является одним из ключевых разделов теории чисел, фундамент которой закладывается в школе при изучении деления с остатком, а дальнейшее развитие происходит в курсе алгебры через задачи на сравнения, чётность и свойства остатков. По школьной программе учащиеся знакомятся с простейшими случаями модулярной арифметики, например, при решении задач на периодичность или исследовании свойств чисел, но углублённые свойства арифметики остатков, такие как китайская теорема об остатках или теорема Эйлера обычно остаются за пределами стандартного курса. При этом, данные темы очень востребованы при решении олимпиадных задач, задач повышенной сложности из ЕГЭ, а также в современной информатике и алгоритмах шифрования. Углубленное изучение элементов арифметики остатков в школьном курсе математики могло бы не только расширить математический кругозор учащихся, но и развить навыки логического мышления, необходимые для дальнейшего изучения высшей математики.

Актуальность работы обусловлена необходимостью углублённого изучения элементов теории чисел на факультативных занятиях, поскольку стандартный курс математики не всегда обеспечивает достаточную подготовку для решения нестандартных задач. В частности, арифметика остатков находит применение в криптографии, информатике и других современных областях, что делает её изучение не только интересным, но и практически значимым для учащихся.

Проблема работы заключается в том, что задачи, связанные с арифметикой остатков, имеют практическую значимость, но в различных сборниках задач представлены задачи повышенного уровня сложности и отсутствует подборка простых задач, и задач с практическим содержанием для учеников, интересующихся математикой, но не занимающихся её углубленным изучением.

Цель работы – разработка учебной программы факультативного курса «Арифметика остатков» для учащихся 8 класса базового уровня обучения.

Задачи работы:

1. Провести анализ содержания школьных программ и учебников по математике в основной школе на степень проработанности темы «арифметика остатков».
2. Выделить методические рекомендации по изучению арифметики остатков в основной школе.
3. Составить программу факультативного курса по арифметике остатков для 8 класса.
4. Подготовить систему задач по арифметике остатков с решениями.
5. Создать технологические карты факультативных занятий по ключевым темам.

Объект исследования – процесс обучения арифметике остатков в основной школе.

Предмет исследования – методика обучения арифметики остатков на факультативных занятиях по алгебре.

Теоретическая значимость работы заключается в рассмотрении методических особенностей преподавания арифметики остатков, которые способствуют развитию понимания учениками школьного курса алгебры.

Практическая значимость работы заключается в разработке факультативов для учащихся 8 класса, направленных на углубленное изучение арифметики остатков.

Структура работы:

Во *введении* перечислены цели, основные задачи и актуальность работы по заданной теме.

Первая глава посвящена методическому содержанию изучения теории делимости в школе, а также анализ учебных программ.

Во *второй главе* продемонстрированы методические материалы для проведения факультативных занятий по арифметике остатков.

В *заключении* приведено обобщение рассмотренного материала и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 32 наименований.

В *Приложениях* представлены сведения о тематическом планировании элективного курса «Арифметика остатков» для 8 класса, а также технологические карты факультативных занятий по некоторым темам из курса.

ГЛАВА I МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ»

1.1 Методические рекомендации по организации факультативов при изучении математики

С 1 сентября 2013 г. в соответствии с Федеральным законом № 273 - ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» факультативы относятся к вариативной части учебного плана школы и являются продолжением образовательного процесса. Благодаря их работе у обучающихся появляется шанс расширить и укрепить имеющиеся знания по дисциплине. Это способствует развитию навыков самостоятельного поиска и практического применения информации. Кроме того, создаются условия для подготовки к дальнейшему обучению и осознанному определению будущей карьеры[32].

В рамках внеурочной деятельности применяются либо учебные планы, получившие одобрение Министерства просвещения РФ, либо индивидуально созданные педагогами методические разработки, прошедшие необходимую проверку.

Индивидуальная программа содержит в себе: вводную часть с описанием целей и задач дополнительного курса; перечень тем для изучения, ожидаемые результаты обучения в виде умений и навыков; рекомендованную литературу для преподавателя и учеников.

Основные подходы, организующие обучение школьников в рамках факультативных занятий: лекция, практическое занятие; математическое соревнование; самостоятельная работа и т.д.

Методами обучения служат лекции, практические работы, доклады, экскурсии, подготовка и заслушивание рефератов и т.д.

Средствами обучения являются учебные книги по математике, электронные образовательные ресурсы и т.д.

Во время составления рабочей программы факультативного курса по математике следует руководствоваться письмом Министерства образования и науки РФ от 28 октября 2015 г. № 08-1786 «О рабочих программах учебных предметов»[29], по которому программа курса внеурочной деятельности должна состоять из следующих элементов: а) личностные и метапредметные результаты освоения курса внеурочной деятельности; б) содержание курса внеурочной деятельности с указанием форм организации учебных занятий, основных видов учебной деятельности, в) календарно-тематическое планирование.

Самостоятельная работа школьников играет ключевую роль на факультативных занятиях. Преподаватели считают, что для поддержания устойчивого интереса к математике важно, чтобы уроки и дополнительные занятия были взаимосвязаны по содержанию. Одним из эффективных способов и целей факультативных курсов является знакомство обучающихся с новыми идеями и методами, а также их применение к задачам, которые сложнее решить с помощью "программных" методов.

Важно, чтобы образовательный процесс был организован как совместная исследовательская работа учеников. Математические знания, такие как правила, теоремы или свойства, не должны предоставляться в виде готовых формул, а должны быть открыты самими учащимися.

Этот процесс начинается с наблюдений, гипотез и размышлений о возможных решениях или содержании теорем и правил. Затем следует проверка, поиск логического обоснования выводов, обобщение и анализ практического применения. Исследовательский подход к изучению математики особенно эффективен для развития мышления на факультативных занятиях.

Интерес к математике, основанный на увлекательности, следует поддерживать и другими способами. Это включает использование историко-математических материалов для ознакомления с историей, настоящим и будущим науки, решение задач, возникающих в реальной жизни, и связь с практическими потребностями человека.

Невозможно ожидать от учеников успешного участия в сложной, многоступенчатой творческой работе без предварительной подготовки – к успеху необходимо готовиться заранее. Эффективны специализированные логические тренировки. Для овладения приемами научного анализа, преподаватель может давать школьникам задания на применение этих приемов, не указывая их напрямую: к примеру, произвести сравнение (найти сходства или различия) объектов или событий, сформулировать заключение на основе подобия, систематизировать сведения, детализировать что-либо, выполнить сортировку и тому подобное.

Благодаря подобным занятиям, представляющим собой логические задачи, основанные на учебном материале математики, образовательная деятельность школьников трансформируется в тренировку логического мышления. В результате достигается более глубокое понимание усвоенного материала, активно стимулируется интерес школьников к изучению математики. Обычно, значительный интерес у учеников вызывает изучение возможностей применения общих подходов к решению определенной задачи, решение группы схожих задач.

Таким образом, подводя итог, можно сформулировать ряд методических рекомендаций по проведению математических факультативов:

- 1) Добиваться содержательной взаимосвязи между учебными занятиями и факультативными уроками;
- 2) Придерживаться принципа целостности в тематике факультативов и различных областей математической науки;
- 3) Поощрять и развивать самостоятельность учащихся в работе;
- 4) Выстраивать образовательный процесс как совместную исследовательскую практику учеников;
- 5) Применять на факультативных уроках наборы основных задач по изучаемым темам;
- 6) Интегрировать в факультативные занятия исторические сведения о математике;

- 7) Добиваться того, чтобы занятия были увлекательными и вызывали интерес;
- 8) Организовывать изучение материала на основе проблемного подхода.

1.2 Анализ образовательной программы и учебников по рассматриваемому вопросу

Учебная программа по математике включает изучение теории делимости, охватывая такие разделы, как деление с остатком, определение делителей и кратных, действия с натуральными числами, признаки делимости, разложение чисел на простые множители, классификацию чисел на простые и составные, понятие общих делителей и кратных, а также решение различных математических текстовых задач.

Анализ учебной программы по математике для 5 класса даёт понять, что в пятом классе деление определяется как поиск числа x , удовлетворяющего условию $bх = a$, где a – делимое, b – делитель, а x – частное. Подчеркивается невозможность деления на ноль. Рассматриваются основное свойство частного, деление с остатком и письменное деление. Формулируется основное свойство частного: при умножении или делении делимого и делителя на одно и то же число частное не меняется.

Анализ учебной программы по математике 6 класса показывает, что в шестом классе изучение делимости и простых чисел увеличивается посредством введения целых чисел, включая положительные и отрицательные.

По учебнику Г.К. Муравина, в шестом классе изучаются следующие основные элементы теории делимости:

- Делимость натуральных чисел. Делители и кратные;
- Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное;
- Свойства делимости произведения, суммы и разности;
- Признаки делимости и т.п.

Курс завершает изучение раздела о натуральных числах, особое внимание уделяя: понятиям "делитель" и "кратное"; алгоритмам нахождения НОД и НОК; применению данных понятий в работе с дробями (сокращение и приведение к общему знаменателю).

Свойства делимости изучаются на практических примерах (для сумм, разностей и произведений) без доказательств.

Признаки делимости усваиваются через решение конкретных задач, которые развивают: способность к логическим умозаключениям; навыки доказательства математических действий; рассматриваются разные методы нахождения НОД и НОК для развития гибкости мышления.

Программа Муравина включает в себя такие факультативные разделы как "Множества", взаимосвязь НОД и НОК, которые носят развивающий характер, не входят в обязательную систему оценивания, расширяют математический кругозор обучающихся.

Рассмотрим учебный план по алгебре для 7 класса, опираясь на учебник «Алгебра, 7» авторов Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешковой и С.Б. Суворовой. В начале обучения проходит повторение операций с обыкновенными дробями и закрепление навыков работы с рациональными числами. Далее элементы теории чисел внедряются в изучение алгебраических выражений при рассмотрении операций деления одночленов и многочленов и в процессе разложения многочленов на множители (вынесение общего множителя, применение различных методов факторизации).

Принципы делимости применяются в работе с алгебраическими дробями в операциях приведения к общему знаменателю и при умножении и делении дробных выражений.

Анализ программы алгебры для 8 класса, по учебнику тех же авторов «Алгебра, 8», включает элементы теории делимости в первом полугодии при изучении темы "Алгебраические дроби". Основные аспекты рассматриваются в контексте операций с дробями (сложение и вычитание с разными

знаменателями, умножение и деление), а также решения квадратных уравнений и применения теоремы Безу.

Углубленное изучение сравнений, как и в 7 классе, представлено только в программах повышенного уровня (4 часа на обобщение материала).

Рассмотрим структуру алгебраического курса в 9 классе, опираясь на учебник "Алгебра, 9" под редакцией Ю.Н. Макарычева и соавторов. В данном учебнике теория делимости затрагивается в следующих разделах: "Квадратный трехчлен", "Разложение многочленов", "Деление многочленов".

Эти темы получают более детальную проработку в классах с углубленным изучением математики. Принципы делимости также опосредованно используются при повторении материала 7-8 классов, и при решении различных типов уравнений и неравенств.

Анализ алгебраической программы 10–11 классов проводился на основе учебника "Алгебра и начала математического анализа 10–11 класс" С.М. Никольского и др. (базовый и профильный уровни). Он показывает, что в 10 классе происходит систематизация знаний за 7-9 класс, более подробное изучение действительных чисел (включая задачи на делимость и сравнения), применение теории чисел при решении рациональных уравнений, работу со степенями, а также параллельно происходит подготовка к 19 заданию ЕГЭ

Таким образом, на основании анализа вышеперечисленных учебников, можно сделать следующие выводы:

- 1) Элементы теории чисел присутствуют в программе 5-11 классов, но:
 - практическая составляющая доминирует в 5-6 классах;
 - теоретические аспекты рассматриваются только в 10 классе.
- 2) Задания ГИА и ЕГЭ подтверждают необходимость знаний по теории делимости
- 3) Выявлен методический пробел в 7-9 классах, требующий:
 - включения специальных задач на делимость;
 - разработки соответствующих учебных материалов.

Несмотря на широкий ассортимент различных учебных материалов, затрагивающих основы теории чисел, были выбраны несколько пособий, подходящих как для использования на уроках, так и для проведения факультативных занятий по математике авторов Никольского С.М., Макарычева Ю.Н., Дорофеева Г.В. [1]-[3], [19].

Я считаю, что данные учебные пособия содержат четкое изложение теории, удачно отобранные задачи, а также достаточно оснащены методическими указаниями для преподавателей. Рассмотрим подробнее каждый учебник.

«Математика. 5 класс» и «Математика. 6 класс» под редакцией С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 256 с.: ил. – (МГУ – школе).

Вводный курс математики для пятиклассников включает основные положения теории чисел, с особым акцентом на раздел делимости. Методическая подача материала характеризуется:

1. Поэтапным введением понятий:
 - первичное определение делимости через базовые компоненты операции деления;
 - последовательное расширение понятийного аппарата (введение понятия "кратное");
 - системное изучение признаков делимости.
2. Дидактическими особенностями:
 - логически выстроенной системой упражнений;
 - дифференциацией заданий по уровню сложности (от элементарных к усложненным);
 - наличием заданий повышенной сложности для преуспевающих учащихся.
3. Методическими преимуществами:
 - доступностью изложения для определённой возрастной категории;
 - четкой структурой учебного материала;

- развивающим характером подобранных задач.

Такая организация учебного процесса позволяет эффективно формировать математические навыки у всех категорий учащихся, обеспечивая при этом возможности для совершенствования математических способностей у одаренных детей.

Также в данном разделе изучаются наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК). Введение этих понятий осуществляется через демонстрацию примеров с разложением чисел на простейшие множители. Представлен набор задач для закрепления материала.

В шестом классе значительно больше времени уделяется углублению и закреплению знаний по теме "Делимость чисел", которая является сквозной и встречается в разделах об отношениях, пропорциях, процентах, а также при изучении целых и рациональных чисел.

В учебнике встречается множество дополнительного материала, который способствует самостоятельному изучению предмета. Предоставленный набор задач можно использовать для организации самостоятельных и исследовательских проектов.

Рассмотрим учебники Макарычева Н.Г. [1]-[3]. Уникальность этих учебных пособий заключается в применении расширенного контента, а именно блока «Для тех, кто стремится к большему», что способствует интенсивному улучшению математических способностей одаренных учеников и раскрытию потенциала каждого заинтересованного в предмете школьника. С целью укрепления междисциплинарных связей, стимулирования креативности и активизации исследовательской деятельности предлагаются нестандартные задачи, задачи по моделированию и химические задачи на расчет процентной концентрации растворов.

Основные аспекты теории делимости освещены в рамках разделов, посвященных сложению и вычитанию алгебраических дробей с различными знаменателями, умножению и делению алгебраических дробей, а также квадратным уравнениям и теореме Безу. Теория делимости детально

рассматривается при изучении квадратного трехчлена, разложения многочлена на множители и деления многочлена на многочлен, особенно при углубленном изучении материала.

По учебнику Дорофеева Г.В.[19] в 6 классе программа построена таким образом, что в основе теории чисел делается акцент на изучение делимости чисел, логичная последовательность изложения и системное освоение признаков делимости. Второе включает в себя повторение базовых понятий (делимое, делитель, частное, остаток), введение определения делимости и изучение понятия "кратное".

Практическая составляющая заключается в тщательно подобранных заданиях с прогрессией сложности и в наличии специальных задач для одаренных учащихся (олимпиадного уровня).

Для более углубленного изучения можно взять темы на классификацию чисел (простые/составные), методику разложения на простые множители, задачи повышенной сложности (в формате олимпиад и ЕГЭ)

В 7 классе обучающимся даётся 1 академический час на краткое повторение темы, но стоит отметить, что учебник содержит обширный материал для самостоятельной работы и разнообразные задания для самоконтроля.

Проведя сравнительный анализ учебных пособий, мы можем сделать вывод, что наиболее эффективная методика представлена в учебнике Никольского, отличающаяся:

1) Полнотой охвата тем:

- признаки и свойства делимости;
- классификация чисел;
- НОД и НОК.

2) Развитием доказательного мышления:

- демонстрация методов доказательства;
- возможность обобщения частных примеров;

3) Практической направленностью:

- система разноуровневых заданий;
- формирование устойчивых навыков.

Данный учебный комплекс обеспечивает наиболее сбалансированный подход к изучению теории чисел в школьном курсе математики.

1.3 Методические аспекты изучения ключевых понятий арифметики остатков в школе

Арифметика остатков – это важный раздел математики, который погружает обучающихся в мир целочисленного деления и выступает как основа для изучения более сложных тем (таких как сравнения по модулю, теория чисел, криптография).

Главной целью изучения арифметики остатков является знакомство учащихся с ключевыми понятиями (деление с остатком, сравнения по модулю, полная система вычетов, решение линейных сравнений) и развить умение применять их на практике.

В процессе обучения очень важно сформировать у учеников навыки логического рассуждения и доказательства. Сперва свойства остатков и методы работы с ними разбираются на конкретных примерах, а после этого обобщаются в виде теоретических утверждений. Это позволяет учащимся овладеть базовыми приёмами математических доказательств, опираясь на уже известные факты и определения.

Изучение арифметики остатков не только развивает вычислительные навыки, но и подготавливает к более глубокому пониманию и освоению алгебры и дискретной математики.

Базовой темой для успешного освоения всех навыков работы с арифметикой остатков выступает тема «деление с остатком». Обучение делению с остатком должно быть постепенным, с опорой на наглядность, алгоритмизацию и практику. Важно избегать формального заучивания, а вместо этого формировать понимание принципов целочисленного деления.

Наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) – основные понятия теории чисел, которые тесно связаны с делением с остатком. Рассмотрим их свойства, методы вычисления и применение в задачах.

НОД двух чисел a и b – наибольшее число, которое делит и a , и b без остатка.

Для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел эффективен алгоритм Евклида.

Общая схема алгоритма Евклида:

Алгоритм Евклида для вычисления НОД (a, b):

1. **Вычислить r** – остаток от деления числа a на b , $a = bq + r$, $0 \leq r < b$.
2. **Если $r = 0$** , то b – искомое число.
3. **Если $r \neq 0$** , заменить пару чисел (a, b) парой (b, r) и перейти к шагу 1.

В ходе выполнения алгоритма деления возникает некий ненулевой остаток, что приводит к завершению процедуры. Наибольший общий делитель определяется как последний ненулевой остаток, полученный в результате применения алгоритма Евклида.

Пример. Найти НОД (270,186)

1. Применяем алгоритм Евклида:

$$270 = 186 \cdot 1 + 84$$

$$186 = 84 \cdot 2 + 18$$

$$84 = 18 \cdot 4 + 12$$

$$18 = 12 \cdot 1 + 6$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

$$\text{НОД} = 6$$

НОК двух и более натуральных чисел – это наименьшее натуральное число, которое делится нацело на каждое из этих чисел.

Формула для нахождения НОК через наибольший общий делитель (НОД) выглядит так: $\text{НОК}(a, b) = a \cdot b / \text{НОД}(a, b)$.

Свойства НОК:

1. $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(b, a)$

2. Если $a : b$, то $\text{НОК}(a, b) = a$

3. $\text{НОК}(a, 1) = a$

Пример. $\text{НОД}(12, 18) = 6 \Rightarrow \text{НОК}(12, 18) = (12 \cdot 18) / 6 = 36$

Кроме алгоритма Евклида, в школьной программе по математике иногда рассматривается принцип Дирихле, но при этом в учебнике алгебры Макарычева для 8 класса он не упоминается. Эту тему целесообразно изучить дополнительно.

Принцип Дирихле формулируется следующим образом: если множество из m элементов разбито на n подмножеств ($m > n$), то хотя бы в одном из них будет больше одного элемента. Данный принцип идеально прослеживается в задаче о кроликах: если m кроликов рассадить в n клеток и $m > n$, то как минимум в одной клетке окажется больше одного кролика.

В рамках изучения этой темы учащиеся должны:

- понимать сущность остатка от деления целого числа на натуральное;
- знать теорему о единственности неполного частного и остатка;
- уметь объяснять принцип Дирихле и применять его на практике;
- находить неполное частное и остаток при делении;
- использовать алгоритм Евклида для вычисления НОД двух чисел.

Принцип Дирихле также очень полезен при разбиении целых чисел на классы в зависимости от остатков от деления на заданное число n .

Арифметика остатков, которая предлагается для углублённого изучения в математических классах, опирается на свойства чисел, связанные с их остатками. Некоторые задачи на делимость решаются намного проще, если заменять числа их остатками. Основы этой теории были заложил Леонард Эйлером, а позже развил Карл Гаусс.

Класс вычетов определяется как множество всех целых чисел, дающих одинаковый остаток при делении на заданный модуль. Это ключевое понятие в арифметике остатков, которое позволяет систематизировать числа по их свойствам.

Определение: пусть m – положительное целое число, а a – произвольное целое число. Тогда классом вычетов для a по модулю m называется множество

всех целых чисел b , которые дают одинаковый остаток при делении на m , что записывается в виде $b \equiv a \pmod{m}$. Здесь $\equiv$ обозначает сравнение по модулю m , а $\pmod{m}$ – это операция взятия остатка от деления.

Пример: если $m = 7$ и $a = 3$, то класс вычетов 7 содержит все целые числа, дающие остаток 3 при делении на 7: $\{\dots -11, -4, 3, 10, 17, \dots\}$.

Итак, при делении на натуральное число b существует ровно b различных остатков – от 0 до $b - 1$, и потому всякое целое число a единственным образом представляется в виде $a = bq + r$.

В этом случае множество целых чисел разбивается на b так называемых классов по модулю b . Числа, принадлежащие одному классу, называют сравнимыми по модулю b .

Свойства отношения сравнения деления по модулю натуральных чисел:

Для любых целых чисел a, b, c и любого натурального числа n верно:

1) $a \equiv a \pmod{n}$

Рефлексивность следует непосредственно из определения: для любого целого числа a верно $a \equiv a \pmod{n}$, так как $(a - a) = 0$ делится на n .

2) Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $b \equiv a \pmod{n}$.

Симметричность означает, что если $a \equiv b \pmod{n}$, то и $b \equiv a \pmod{n}$.

Действительно, если a и b дают одинаковые остатки при делении на n , то это соотношение взаимно.

3) Если $a \equiv b \pmod{n}$, $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$.

Транзитивность показывает, что если $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$. Это свойство подтверждает логическую согласованность сравнений: равенство остатков передаётся от одного числа к другому.

Широко распространено применение малой теоремы Ферма при решении нестандартных математических задач.

Малая теорема Ферма гласит: если p – простое число, а a – целое число, не делящееся на p , то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Другими словами, a^{p-1} при делении на p дает остаток 1.

Рассмотрим подробнее классическое применение Малой теоремы Ферма в различных задачах:

1. Вычисление остатков от деления

Задача: Найдите остаток от деления 3^{102} на 101.

Решение: Так как 101 – простое число, то $3^{100} \equiv 1 \pmod{101}$.

$$\text{Отсюда } 3^{102} = 9 \cdot 3^{100} \equiv 9 \pmod{101}$$

2. Доказательство делимости

Задача: Докажите, что $a^{561} - a$ делится на 561 для любого целого a .

Решение: разложим 561 на множители: $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.

Необходимо и достаточно доказать делимость $a^{561} - a$ на 3, 7, 11.

Делимость на 3: по малой теореме Ферма $a^2 \equiv 3 \pmod{1}$, но тогда $a^{561} = (a^2)^{280} \cdot a \equiv 3 \pmod{a}$

Делимость на 11: по малой теореме Ферма $a^{10} \equiv 11 \pmod{1}$.

Тогда аналогичным образом случаю делимости на 3 легко получить, что $a^{561} \equiv 11 \pmod{a}$.

Теперь снова по малой теореме Ферма получаем, что $a^{16} \equiv 17 \pmod{1}$.

Аналогично случаю делимости на 3 легко проверить, что

$$a^{561} \equiv 17 \pmod{a}, \text{ так как } a^{561} = (a^{16})^{35} \cdot a.$$

3. Задачи на периодичность

Задача: Какой остаток даёт число 2202322023 при делении на 13?

Решение:

1) Применяем малую теорему Ферма

Для $p=13$ получаем:

$$a^{12} \equiv 1 \pmod{13}, \text{ если } a \not\equiv 0 \pmod{13}.$$

2) Разбиваем число на части, кратные 12

Мы хотим вычислить $2202322023 \pmod{13}$

Заметим, что $10^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ (по теореме Ферма, так как 10 и 13 взаимно просты).

Разложим число по степеням 10:

$$2202322023 = 2 \cdot 10^9 + 2 \cdot 10^8 + 0 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Но вычислять это напрямую сложно. Вместо этого воспользуемся методом последовательного деления (более простой способ).

3) Вычисляем остаток через деление в столбик

Будем делить 2202322023 на 13 и находить остаток.

$$2202322023 \div 13$$

$$13 \times 169409386 = 2202322018$$

4) Остаток: $2202322023 - 2202322018 = 5$.

5) Проверка: $2202322018 + 5 = 2202322023$

Ответ: остаток равен 5.

Замечания:

1. Малая теорема Ферма применима только для *простых* чисел p .
2. Если a делится на p , то теорема не работает. В этом случае $a^n \equiv 0 \pmod{p}$ для любого положительного целого n .

При решении задач необходимо владеть навыками сочетания малой теоремы Ферма с иными теоретическими положениями и характеристиками сравнений, в частности, с теоремой Эйлера, китайской теоремой об остатках, а также принципами сложения, вычитания и умножения по определённому модулю. Всё вышеперечисленное также может быть рассмотрено на факультативах по арифметике остатков.

В классах с углублённым изучением математики определение делимости не отличается от стандартного, но при этом оно вводится не сразу, а через анализ случаев, где деление в некоторых числовых множествах невозможно.

В начале происходит систематизация уже известных учащимся знаний о числовых множествах. В первую очередь рассматривается множество натуральных чисел, обозначаемое буквой N , которое:

- используются для счёта.
- на этом множестве всегда выполнимы сложение, умножение и возведение в степень.

- однако вычитание возможно не всегда: например, $3-5$ не имеет решения в N .

Далее изучается множество целых чисел Z , в котором:

- расширяют натуральные числа, включая ноль и отрицательные значения.

- позволяют свободно выполнять вычитание.

- тем не менее, деление остаётся ограниченным: $5:2$ не является целым числом.

Таким образом, ни в N , ни в Z деление не всегда возможно, что подводит к необходимости введения понятия делимости с остатком.

В специализированных классах больше внимания уделяется доказательствам:

- Свойств делимости.

а) Бесконечности множества простых чисел.

б) Единственности неполного частного q и остатка r в равенстве $a = bq + r$.

- Признаков делимости

Помимо стандартных (на 2, 5, 10), изучаются менее распространённые: на 8 (по трём последним цифрам), на 9 и 25 (по сумме цифр и двум последним цифрам соответственно), на 125 (по трём последним цифрам).

- НОД и НОК

Методы их нахождения остаются прежними – через каноническое разложение на простые множители, но с более строгим обоснованием.

Исходя из вышеперечисленных разборов основных понятий арифметики остатков, можно выделить следующие методические особенности обучения этим понятиям:

1. Мотивация и связь с реальностью:

- начать с практических примеров: использовать задачи, связанные с циклическими процессами (дни недели, часы, месяцы), чтобы проиллюстрировать понятие остатка. Это поможет учащимся увидеть практическое применение арифметики остатков.

- подчеркнуть важность темы: объяснить, как арифметика остатков используется в криптографии, информатике, программировании.

- использовать исторические примеры: рассказать о том, как арифметика остатков применялась в древности (например, для расчетов календаря).

2. Поэтапное введение понятий:

- начать с наглядных моделей: Круги, разделенные на сектора, числовые оси, таблицы – все это поможет визуализировать понятие остатка и операций с ним.

- постепенно переходить к абстрактным понятиям: после того как учащиеся освоят наглядные модели, можно вводить формальные определения сравнения по модулю и операций сложения, вычитания, умножения по модулю.

- использовать разнообразные задачи: предлагать задачи разного уровня сложности, начиная с простых примеров и постепенно увеличивая сложность. Включать задачи на нахождение остатка, задачи на делимость, задачи на применение свойств сравнений.

3. Активные методы обучения:

- организовать работу в малых группах для решения задач и обсуждения результатов. Это способствует развитию коммуникативных навыков и более глубокому пониманию материала.

- использовать игровые элементы, математические ребусы, викторины, чтобы сделать обучение более интересным и мотивирующим.

- предлагать учащимся самостоятельно исследовать свойства остатков и сравнений, формулировать гипотезы и выполнять их проверку.

4. Дифференцированный подход:

- предлагать обучающимся задачи разного уровня сложности, предоставлять дополнительную помощь тем, у кого задания вызывают трудности.

- комбинировать индивидуальную, парную и групповую работу, устные и письменные задания.

5. Контроль и оценка:

- регулярно проверять усвоение материала: использовать разнообразные формы контроля: устные опросы, тесты, самостоятельные работы.
- выявлять типичные ошибки и корректировать методику обучения.
- поощрять самостоятельность и творчество: оценивать не только правильность решения задач, но и оригинальность подходов, умение объяснять свои решения.

Использование данных методических приемов позволяет значительно повысить результативность и увлеченность школьников при изучении арифметики остатков. Необходимо учитывать, что основными условиями успеха являются визуализация материала, его применимость на практике и вовлечение учащихся в активную познавательную деятельность.

ГЛАВА II ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ АРИФМЕТИКИ ОСТАТКОВ НА ФАКУЛЬТАТИВАХ ПО МАТЕМАТИКЕ В 8 КЛАССАХ

2.1 Программа факультативного курса «Арифметика остатков» для 8 классов

Пояснительная записка

Курс "Арифметика остатков" разработан для восьмиклассников, желающих глубже понять темы, касающиеся деления с остатком, модульных сравнений и их использования при решении математических задач. Содержание данного курса выходит за пределы стандартной школьной программы и включает в себя темы, часто встречающиеся на математических олимпиадах различного уровня. Также навык школьников умения решать нестандартные задачи позволяет им в будущем успешно сдавать ОГЭ и ЕГЭ по математике профильного уровня и повышает общий уровень математической подготовки.

Данный курс предполагает дифференцированное обучение школьников, имеющих разный уровень знания предмета. Дифференцированное обучение будет учитывать индивидуальные способности учеников и даст возможность работать каждому в своём темпе.

Данный курс предоставляет возможность:

- упорядочить и расширить имеющиеся знания в данной области;
- развить логическое и алгоритмическое мышление;
- стимулировать долговременный интерес к математике.
- развивать умение решать нестандартные задачи
- понимать предмет в независимости от уровня подготовки

В основе предложенных технологических карт будет лежать модель внутри классной (внутри предметной) дифференциации Н.П. Гузика[16].

Николай Петрович предлагал разделять школьников по трём уровням знаний.

Уровневые программы по Н.П. Гузику:

«С» – базовый стандарт (обязателен для всех).

«В» – углублённое понимание + дополнительные сведения.

«А» – задачи на доказательство и творческие.

Дифференциация на практике позволит школьникам делать свободный выбор заданий при повторении, а также даст возможность соблюсти индивидуальный учёт знаний каждого по системе «зачёт/незачёт»

Цель курса

Рассмотрение школьниками основных тем по арифметике остатков и их использования для разрешения разноуровневых задач.

Задачи курса

1. Познакомить учащихся с основными понятиями теории сравнений;
2. Научить применять свойства остатков при решении практических заданий;
3. Изучить методы решения олимпиадных задач, связанных с делимостью;
4. Совершенствовать умения самостоятельно анализировать и решать задачи повышенной сложности;
5. Обеспечить подготовку учеников к участию в математических соревнованиях и олимпиадах;
6. Обеспечить понимание данного курса учеником любой подготовки.

Возраст обучающихся: программа разработана для учеников 8-го класса (возраст 14-15 лет). В группу могут вступить все заинтересованные лица, вне зависимости от их текущего уровня знаний.

Форма обучения - очная.

Форма проведения занятий - аудиторные

Режим занятий: 1 раз в неделю по 2 академических часа.

Формы организации занятий:

- 1) Лекции.
- 2) Практические занятия.
- 3) Самостоятельная работа.

Ожидаемые результаты:**Личностные и метапредметные:**

- умение ясно и логично излагать мысли;
- способность анализировать условие задачи и выбирать оптимальный метод решения;
- участие в дискуссиях и коллективном решении задач;
- применение полученных знаний в самостоятельной работе.

Предметные:**Обучающиеся должны знать:**

- основные понятия теории сравнений;
- свойства остатков и их применение;
- методы решения задач на делимость и сравнения по модулю.

Обучающиеся должны уметь:

- решать задачи на деление с остатком;
- применять признаки делимости и алгоритмы;
- использовать сравнения по модулю для доказательства утверждений;
- решать олимпиадные задачи, связанные с арифметикой остатков.

Формы контроля:

1. Текущий контроль (устные опросы, проверка домашних заданий).
2. Тематические проверочные работы.
3. Итоговый контроль (тестирование или контрольная работа)

**Учебно-тематический план факультативных занятий по арифметике
остатков**

№	Тема	Всего часов	Лекции	Практикум
1	Деление с остатком и алгоритм Евклида	4	1	3
2	Отношение сравнения по модулю	4	1	3

№	Тема	Всего часов	Лекции	Практикум
3	Линейные сравнения и их решение	4	1	3
4	Китайская теорема об остатках	4	2	2
5	Применение остатков в задачах на делимость	4	1	3
6	Остатки в степенях и периодах	4	1	3
7	Решение олимпиадных задач	4	0	4
8	Итоговое тестирование	2	–	2
Итого		30	7	23

Содержание тем факультативного курса:

1. **Деление с остатком и алгоритм Евклида.**
 - 1) Теорема о делении с остатком.
 - 2) Алгоритм Евклида и его применение.
 - 3) Решение задач на нахождение остатков с практическим содержанием.
2. **Отношение сравнения по модулю**
 - 1) Определение сравнения по модулю.
 - 2) Свойства сравнений по модулю.
 - 3) Решение задач с практическим содержанием.
3. **Линейные сравнения и их решения**
 - 1) Решение сравнений вида $ax \equiv b \pmod{m}$
 - 2) Обратные остатки.
4. **Китайская теорема об остатках**
 - 1) Формулировка и доказательство.
 - 2) Решение задач с практическим применением.
5. **Применение остатков в задачах на делимость**
 - 1) Признаки делимости.

2) Доказательство свойств чисел через остатки.

6. Остатки в степенях и периодах

1) Периодичность остатков степеней.

2) Теорема Эйлера и малая теорема Ферма.

7. Решение олимпиадных задач

1) Разбор задач региональных и всероссийских олимпиад.

Учебно-методическое обеспечение: [34] – [38].

Задачный материал к факультативам представлен в приложении. Он подобран из учебников с углубленным изучением алгебры и олимпиадных сборников. Все задачи структурированы по темам, к каждой теме прилагается 5-8 задач.

После того, как школьники освоят каждую тему факультативного курса, им будет предложена следующая контрольная работа:

Вариант 1)

1. Найдите наибольший общий делитель чисел 247 и 91, используя алгоритм Евклида. Запишите НОД в виде линейной комбинации:

$$\text{НОД}(247, 91) = 247 \cdot x + 91 \cdot y.$$

2. Решите сравнение: $17x \equiv 5 \pmod{23}$.

3. Найдите все целые числа x , удовлетворяющие сравнению:

$$6x \equiv 9 \pmod{15}.$$

4. Решите систему сравнений:
$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{9} \end{cases}$$

5. Докажите, что число $n^3 + 5n$ делится на 6 для любого целого n .

6. Найдите последнюю цифру числа 7^{2025} .

Критерии оценивания:

Задача 1 (НОД и алгоритм Евклида) – 1 балл.

Задача 2 (Сравнения по модулю) – 1 балл.

Задача 3 (Линейные сравнения) – 1 балл.

Задача 4 (Китайская теорема) – 3 балла.

Задача 5 (Делимость) – 2 балла.

Задача 6 (Степени и остатки) – 2 балла.

Максимальный балл: 10.

Для наглядной демонстрации того, как могут проходить факультативные занятия, были выбраны следующие темы курса: «Деление с остатком и алгоритм Евклида», «Сравнение по модулю» и «Китайская теорема об остатках».

«Деление с остатком и алгоритм Евклида» и «Сравнение по модулю» являются базовыми во всей модулярной арифметике и теории чисел, так как деление с остатком - это фундаментальная операция, которую должны уметь выполнять и понимать все ученики, и также в рамках факультативного курса школьники обязательно должны освоить операцию сравнение по модулю и его свойства для понимания остальных тем намеченной программы.

А тема «Китайская теорема об остатках» является одной из самых древнейших и красивых, и позволяет лучше всего показать школьникам как абстрактная математика решает практические задачи. Она является ключевым мостом между простыми остатками и серьёзной математикой. Также она несёт в себе исторический и культурный контекст, что должно увеличить мотивацию обучающихся к её изучению.

Особенностями занятий, представленных в технологических картах, являются дифференцированный подход к обучению и акцент на решении практических задач. Это позволит повысить мотивацию обучающихся к изучению тем курса и гарантировать усвоение каждым необходимого для него материала.

Новизна в проведении факультативного курса по разработанной программе заключается в ряде инновационных особенностей, отличающих его от традиционных программ, а именно в синтезе дифференциации, практической направленности и олимпиадной подготовки. Он не просто даёт знания, но и учит применять их в нестандартных ситуациях, развивает логическое мышление и делает математику доступной и интересной для всех учеников, независимо от уровня.

Этот курс – не «сухая теория», а инструмент для реального математического роста. Представленные материалы могут быть использованы не только учителем на уроках, но и учениками для самостоятельного изучения. Их можно адаптировать даже для онлайн-формата, добавив интерактивные модули.

Структура и логика уроков в представленных технологических картах выстроена следующим образом: уроки начинаются с реальной задачи, что мотивирует учеников углубиться в тему, после этого через проблемный вопрос идёт подводка к понятиям темы. Далее проходит закрепление темы групповой работой с дифференциацией по уровням. Школьники делятся на три группы («С», «В», «А») и получают задания разного уровня:

- «С» (база): Нахождение чисел, сравнимых по модулю 4.
- «В» (углубление): Решение линейных сравнений перебором.
- «А» (творчество): Использование обратного элемента для решения.

На каждом представленном уроке проходит проверка решений у доски с взаимоконтролем (ученики проверяют друг друга).

Этапы уроков соответствуют требованиям ФГОС (мотивация, актуализация знаний, открытие нового, применение, рефлексия).

Часто используемые методы и приёмы на занятиях это: проблемный метод, аналогии, практико-ориентированность.

Сильными сторонами уроков являются:

- интерактивность: ученики не пассивные слушатели, а исследователи.
- гибкость: учитель корректирует нагрузку (слабые ученики решают базовые задачи, сильные – доказывают теоремы).
- связь с реальностью: примеры из жизни повышают интерес.

Уроки эффективно сочетают теорию и практику, учитывают разные уровни подготовки и формируют универсальные учебные действия.

2.2 Технологическая карта факультативного занятия для 8 класса по теме «Деление с остатком и алгоритм Евклида»

Учитель: Попова Элина Наилевна

<p>Цели (задачи) урока</p> <p><u>Образовательные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Актуализировать знания о делении с остатком и понятии НОД. - Вывести алгоритм Евклида на конкретном примере. - Научить применять алгоритм для решения задач разного уровня сложности. <p><u>Развивающие:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Развивать умение анализировать, сравнивать и делать выводы. - Совершенствовать навыки работы в группе и публичного представления решений. - Формировать алгоритмическое мышление. <p><u>Воспитательные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Воспитывать аккуратность и точность в вычислениях. - Развивать умение аргументировать свою точку зрения. - Формировать положительное отношение к учебной деятельности. 	<p>Планируемые образовательные результаты</p> <p><u>Предметные результаты:</u></p> <p>Учащийся научится:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Формулировать алгоритм Евклида. - Находить НОД двух чисел с помощью алгоритма Евклида. - Применять алгоритм для решения практических задач (размен денег, планирование и др.). <p><u>Метапредметные результаты:</u></p> <p>Регулятивные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Умение ставить учебную задачу и планировать её решение. - Контроль и коррекция своих действий при выполнении алгоритма. - Оценка результатов своей деятельности. <p>Познавательные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Умение анализировать, сравнивать и обобщать информацию. - Построение логической цепи рассуждений. - Применение знаний в новых ситуациях. <p>Коммуникативные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Чётко формулировать и аргументировать свою точку зрения. - Публично представлять результаты своей работы. <p><u>Личностные результаты:</u></p> <p>Учащийся:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Осознает практическую значимость изучаемого материала. - Развивает интерес к математике через решение жизненных задач.
<p>Тип урока комбинированный</p>	<p>Оборудование компьютер, проектор, экран, раздаточный материал</p>
<p>Основные понятия деление с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида, наименьшее общее кратное</p>	<p>Домашнее задание задачи из приложения</p>

Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Используемые приёмы и методы	Формируемые УУД
Организационный	<p>Здравствуйте, ребята, сегодня мы с вами открываем курс факультативных занятий. И сегодняшняя тема будет базовой для всех остальных.</p> <p>За всё время занятий вас ждёт увлекательное путешествие в мир арифметики остатков. А наше математическое приключение мы начнём с путешествия в прошлое на волшебной машине времени!</p>		Создание эмоционального настроя.	<p><u>Личностные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - положительное отношение к учебной деятельности, - эмоциональный настрой на урок <p><u>Коммуникативные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Готовность к сотрудничеству, восприятие учебной информации
Мотивационный	<p>Пристегните ремни, мы взлетаем! И прилетели мы с вами в СССР, в 1961 год. Мы стоим с вами около метро и на следующие локации отправимся именно на нём!</p> <p>Стоимость проезда - 5 копеек; контроль при входе автоматический: в отверстие автомата нужно бросить пятак, а если у вас его нет, то обменять в разменной кассе ваши деньги на пятикопеечные монеты.</p> <p>Предположим, что у вас есть монета в 20 копеек. Сколько пятаков вы можете получить в кассе?</p> <p>Хорошо, а если у вас есть 19 копеек без пятаков?</p>	<p>Слушают учителя, отвечают на его вопросы.</p> <p>Конечно же 4.</p> <p>Тогда мы можем получить всего 3 пятака и еще 4 копейки сдачи.</p>	Проблемная ситуация, Эвристическая беседа.	<p><u>Личностные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - осознание практической значимости изучаемого материала <p><u>Познавательные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - анализ проблемной ситуации, актуализация имеющихся знаний <p><u>Регулятивные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - постановка учебной задачи, целеполагание

<p>Актуализация знаний</p>	<p>Всё верно! Вообразим теперь, что существуют монеты любого достоинства, то есть 1 копейка, 2 копейки, 3 копейки, 4 копейки и т. д., и вам нужно разменять a-копеечную монету так, чтобы получить наибольшее число b-копеечных.</p> <p>Спрашивается, как это сделать?</p> <p>Ясно, что если вам начнут отсчитывать b-копеечные монеты: $b, 2b, 3b$ и т.д., то в конце концов настанет момент, когда, получив несколько b-копеечных монет, вы уже не сможете получить следующую; вам дадут какое-то число b-копеечных монет и еще какой-то остаток, скажем r копеек. При этом r будет непременно меньше, чем b (не исключено, конечно, что $r=0$).</p> <p>Каким образом можно записать результат вашего обмена?</p> <p>Исходя из этого, сформулируйте понятие деления с остатком.</p> <p>Хорошо, а помните ли вы, что такое наибольший общий делитель двух чисел?</p>	<p>Устно выполняют деление с остатком.</p> <p>Результат такого размена можно записать следующим образом: $a = kb + r$, где $r < b$. В этой формуле числа a, b натуральные, то есть целые положительные, а k и r - целые неотрицательные.</p> <p>Говорят, что a делится на b не равное 0 с остатком r, если существуют единственные целые k и r такие, что: $a = k \times b + r$, где $0 \leq r < b$.</p> <p>Наибольший общий делитель (НОД) двух чисел – это самое большое число, на которое эти числа</p>	<p>Беседа, наглядный, частично-поисковый метод.</p>	<p><u>Познавательные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - структурирование знаний - умение формулировать определения <p><u>Коммуникативные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - четкое выражение мыслей - умение аргументировать свою точку зрения
-----------------------------------	---	--	---	--

	Да, всё верно. НОД чисел a и b совпадает с НОД чисел b и r , где r — остаток от деления a на b .	можно разделить без остатка.		
Формирование новых знаний и способов действий	<p>Всё вышеперечисленное нами вам уже должно было быть известно, а сейчас вам предстоит познакомиться с более широким применением деления с остатком, которое поможет упростить вам более сложные вычислительные процессы как в учёбе, так и в жизни.</p> <p>А именно мы с вами познакомимся с алгоритмом Евклида, который позволяет с помощью остатков от деления определять НОД чисел.</p> <p>Итак, вам даны любые 2 числа, например 1071 и 462.</p> <p>Нужно найти их наибольший общий делитель (НОД) — самое большое число, на которое делятся оба.</p> <p>Как это сделать?</p> <p>А легко ли раскладывать большие числа на множители?</p> <p>Тогда я вам предлагаю познакомиться с новым алгоритмом, который связан с делением чисел с остатком.</p> <p>Делим большее число на меньшее и находим остаток.</p>	<p>На уроке мы использовали алгоритм нахождения НОД через разложение этих чисел на простые множители.</p> <p>Нет, это трудно.</p> <p>$1071 \div 462 = 2$ (ост. 147) $\rightarrow$ НОД(1071,462) = НОД(462,147)</p>	Объяснительно-иллюстративный метод, алгоритмический разбор.	<p><u>Познавательные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - построение логической цепи рассуждений - анализ и синтез информации <p><u>Регулятивные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - планирование последовательности действий - контроль правильности выполнения алгоритма

	<p>Теперь заменяем числа: Большее число (1071) заменяем на меньшее (462). Меньшее число (462) заменяем на остаток. И снова повторяем деление.</p> <p>Снова заменяем числа: Большее на меньшее Меньшее на остаток. После этого делим ещё раз.</p> <p>Как только остаток стал равным нулю, НОД — это последний ненулевой остаток. Ребята, какой же в нашем случае последний ненулевой остаток?</p> <p>Правильно! Значит вам нужно запомнить, что для нахождения НОД с помощью деления с остатком, каждый раз мы должны делить предыдущий делитель на последний остаток, пока не дойдём до остатка 0. Ну а последний ненулевой остаток и будет наибольшим общим делителем обоих чисел.</p>	<p>$462 \div 147 = 3$ (ост. 21) $\rightarrow \text{НОД}(462, 147) = \text{НОД}(147, 21)$</p> <p>$147 \div 21 = 7$ (ост. 0) $\rightarrow$ $\text{НОД}(147, 21) = 21$</p> <p>Ответ: $\text{НОД}(1071, 462) = 21$</p>		
Формирование умений и навыков	<p>А сейчас вам предстоит помочь людям из прошлого решить бытовые вопросы с помощью алгоритма Евклида! Я приготовила задания трёх уровней сложности. «А» - самый высокий, а «С» - самый низкий.</p>	Решение группы «С»:	Групповая работа, дифференцированный подход, решение практических задач.	<u>Познавательные:</u> - применение знаний в новой ситуации - решение практико-ориентированных задач

	<p>Итак, задание для группы «С»: В прошлом не было готовых подарочных наборов в магазинах, и родители сами создавали их для детей. Помогите бабушке правильно это сделать!</p> <p>Задача 1: у мамы на праздник куплено 462 шоколадных конфет и 1 078 карамелек. Она хочет разложить их в одинаковые пакетики так, чтобы в каждом пакетике было одинаковое количество шоколадных и карамельных конфет, и ничего не осталось. Вопрос: Какое максимальное число наборов она может сделать?</p> <p>Отлично! А теперь вы становитесь дизайнерами и перед вами следующая задача: Задача 2: на фабрике есть два рулона ткани: 5,472 метра и 3,648 метра. Дизайнеру нужно нарезать их на одинаковые куски максимальной длины без остатка, чтобы сшить одинаковые платья. Вопрос: Какой длины будут куски ткани, и сколько их получится из каждого рулона?</p> <p>А пока вы решаете, мы с остальными группами вспомним что такое НОК? (наименьшее общее кратное) Правильно, а как его находить? Да, но есть ещё один способ нахождения НОК с помощью НОД, найденного нашим</p>	<p>1) $1\,078 \div 462 = 2$ (остаток 154) $\rightarrow$ $1\,078 = 462 \times 2 + 154$ 2) $462 \div 154 = 3$ (остаток 0) $\rightarrow 462 = 154 \times 3 + 0$ 3) Остаток равен 0, значит, НОД = 154. Ответ: Максимальное число наборов — 154. (В каждом подарке будет 3 конфеты и 7 шоколадок.)</p> <p>Решение группы «С»: 1) $5\,472 \div 3\,648 = 1$ (остаток 1 824) $\rightarrow$ $5\,472 = 3\,648 \times 1 + 1\,824$ 2) $3\,648 \div 1\,824 = 2$ (остаток 0) $\rightarrow 3\,648 = 1\,824 \times 2 + 0$ 3) остаток равен 0, значит, НОД = 1,824. Ответ: Длина каждого куска: 1 824 метра. (Из рулона 5 472 м — 3 куска, из рулона 3 648 м — 2 куска.)</p> <p>НОК — это самое маленькое число, делящееся на оба исходных числа без остатка.</p>		<p><u>Коммуникативные:</u> - умение работать в группе - учет разных мнений - публичное представление результатов</p> <p><u>Регулятивные:</u> - самоконтроль и коррекция - оценка правильности решения</p>
--	---	--	--	--

	<p>алгоритмом Евклида, и он считается самым быстрым!</p> <p>Чтобы найти НОК этим способом, вам просто необходимо воспользоваться формулой: $\text{НОК}(a,b) = \frac{ab}{\text{НОД}(a,b)}$</p> <p>Теперь группе «В» предстоит стать плиточниками и отправиться на автобусе делать ремонт в ванной у бабушки Тани.</p> <p>Задача 1: Автобус №54 приезжает каждые 894 секунд, автобус №105 - каждые 1503 секунд. Через какое минимальное время они снова приедут одновременно?</p> <p>Задача 2: требуется выложить пол банкетного зала размером 10 480 см × 5 680 см</p>	<p>Чтобы найти НОК двух чисел, нужно:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Разложить оба числа на простые множители. 2) Взять каждый множитель в наибольшей степени, где он встречается. 3) Перемножить их. <p>Записывают формулу себе.</p> <p>Решение группы «В»:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Найдём НОД с помощью алгоритма Евклида $1503 = 1 \times 894 + 609,$ $894 = 1 \times 609 + 285,$ $609 = 2 \times 285 + 39,$ $285 = 7 \times 39 + 12,$ $39 = 3 \times 12 + 3,$ $12 = 4 \times 3 + 0.$ Последний ненулевой остаток — 3. Следовательно, НОД (894, 1503) = 3. 2) $\text{НОК}(894, 1503) = (894 \times 1503) / 3 = 894 \times 501 = 447894$ <p>Ответ: Автобусы №54 и</p>		
--	--	---	--	--

	<p>квадратной плиткой наибольшего возможного размера, чтобы плитку не пришлось резать. Какова должна быть длина стороны плитки?</p> <p>А группе «А» выпала возможность попробовать себя в роли фотографа и оператора станка, вперёд за дело! В цифровой камере вашего смартфона используется специальный алгоритм сжатия фотографий, который работает с двумя ключевыми параметрами: Шаг сжатия по горизонтали: $n^2 - 1$ пикселей Шаг сжатия по вертикали: $n + 2$ пикселей</p>	<p>№105 снова приедут одновременно через 447894 секунды.</p> <p>Решение группы «В»: 1. Найдем НОД(10 480, 5 680) с помощью алгоритма Евклида: а) $10\,480 \div 5\,680 = 1$ (остаток 4 800) б) $5\,680 \div 4\,800 = 1$ (остаток 880) в) $4\,800 \div 880 = 5$ (остаток 400) г) $880 \div 400 = 2$ (остаток 80) е) $400 \div 80 = 5$ (остаток 0) Ответ: максимальный размер плитки: 80 см.</p> <p>Решение группы «А»: 1. Пусть $a=n^2-1, b=n+2$. 2. Разделим a на b: $n^2-1 = (n+2)(n-2) + 3$ (Потому что $(n+2)(n-2) = n^2-4$, а остаток $n^2-1-(n^2-4) = 3$) 3. Теперь НОД (a, b) = НОД($n + 2, 3$). 4. Осталось найти НОД ($n + 2, 3$).</p>		
--	--	---	--	--

	<p>Где n – коэффициент, постоянный для каждой модели смартфона Инженеры утверждают, что эти параметры взаимно просты, поэтому алгоритм обеспечивает максимально равномерное сжатие без искажений. Проверьте, для всех ли значения параметра n сжатие будет без искажений.</p> <p>А за это время наверняка ребята из группы «С» уже справились со своим заданием и готовы показать решение на доске. Учитель вместе с классом проверяет решения. В то время, пока проходил разбор задач группы «С», ребята из группы «В» и «А»,</p>	<p>Когда НОД равен 1, а когда 3? - Число 3 — простое, поэтому НОД $(n + 2, 3)$ может быть либо 1, либо 3. - Если $n+2$ делится на 3, то НОД=3. Это происходит, когда n даёт остаток 1 при делении на 3 (например, $n=1,4,7,\dots$). - Во всех остальных случаях НОД=1 и искажений не будет. Ответ: Не для всех.</p> <p>Показывают получившееся решение, анализируют его, проверяют правильность решения.</p>		
--	--	--	--	--

	<p>наверняка уже имеют решения своих задач. Сначала к доске выйдут ребята из группы «В», покажут своё решение, а мы вместе проанализируем его и проверим правильность.</p> <p>После этого также познакомимся с решением задач группы «А».</p>			
Рефлексия	<p>Ребята, вы все молодцы, все отлично справились со своей задачей и помогли своим предкам! а сейчас мы возвращаемся обратно в 2025 год. А я хочу задать вам пару вопросов:</p> <p>1) Что нового вы узнали на сегодняшнем занятии?</p> <p>2) Где вы сможете применять алгоритм Евклида?</p> <p>3) Какие ошибки вы допускали при решении задач?</p> <p>Оцените свой уровень активности на уроке пальцем вверх, вниз или посередине.</p>	<p>Возможные ответы учеников:</p> <p>1) Научился(ась) находить НОД с помощью алгоритма Евклида.</p> <p>2) В планировании в жизни, связанных с автобусами, ремонтом квартиры, в творческих поделках, в оптимизации работы.</p> <p>3) Забывал(а) заменять числа на каждом шаге, путал(а) остаток и частное, останавливался(ась), когда остаток был 1, но не доводил до 0.</p>	Беседа, самооценка.	<p><u>Личностные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - самооценка учебной деятельности - осознание своих достижений и трудностей <p><u>Регулятивные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - оценка результатов деятельности - выявление причин ошибок <p><u>Коммуникативные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - умение выражать свое мнение - аргументация своей позиции
Домашнее задание	<p>А теперь каждая группа получит своё домашнее задание по уровню сложности.</p> <p>С) Задача 2: на фабрике есть станки двух типов:</p> <p>Тип 1- производит детали циклами по 38 минут</p>	Предполагаемые решения задач представлены в приложении.	Дифференциация по уровню сложности, творческое задание (для группы «А»)	<p><u>Познавательные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - самостоятельное применение знаний - творческое решение задач <p><u>Регулятивные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - планирование

	<p>Тип 2 - по 53 минуты</p> <p>Через какое минимальное время оба станка одновременно закончат циклы, если они стартовали вместе?</p> <p>В) В спортивном зале есть три вида мячей: 54 футбольных, 72 баскетбольных и 90 волейбольных. Тренер хочет сложить их в одинаковые комплекты так, чтобы в каждом комплекте были все три вида мячей, и мячи не оставались. Какое наибольшее количество комплектов можно составить? Сколько мячей каждого вида будет в комплекте?</p> <p>А) Докажи, что если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $\text{НОД}(a + b, a - b)$ равен 1 или 2.</p>			самостоятельной работы - выбор оптимального способа решения
--	--	--	--	--

2.3 Технологическая карта урока факультативного занятия по теме «Отношение сравнения по модулю» для 8 класса

Учитель: Попова Элина Наилевна

<p>Цели (задачи) урока</p> <p><u>Образовательные:</u></p> <ul style="list-style-type: none">- Познакомить учащихся с понятием сравнения чисел по модулю и его основными свойствами.- Научить применять модульную арифметику для решения практических задач.- Развить навыки логического мышления через решение задач на сравнения и доказательство простых свойств. <p><u>Воспитательные:</u></p> <ul style="list-style-type: none">- Воспитать интерес к математике через нестандартные задачи и прикладные применения.- Сформировать уважение к логике и точности в рассуждениях.- Развить умение работать в команде при решении задач. <p><u>Развивающие:</u></p> <ul style="list-style-type: none">- Развить абстрактное и алгоритмическое мышление.- Улучшить навыки решения нестандартных задач.- Стимулировать творческий подход к математике.	<p>Планируемые образовательные результаты</p> <p><u>Предметные результаты:</u></p> <p>Учащиеся будут знать и понимать:</p> <ul style="list-style-type: none">- Определение сравнения чисел по модулю и его основные свойства.- Применение модульной арифметики в задачах на делимость и периодичность. <p>Учащиеся смогут:</p> <ul style="list-style-type: none">- Вычислять остатки от деления и применять их для решения задач.- Определять, сравнимы ли числа по заданному модулю.- Решать простые уравнения в сравнениях. <p><u>Метапредметные результаты:</u></p> <p>Регулятивные УУД (универсальные учебные действия):</p> <ul style="list-style-type: none">- Планировать свои действия при решении задач на модульные сравнения.- Оценивать правильность выполнения заданий и корректировать решение при необходимости. <p>Познавательные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none">- Анализировать условия задач и выбирать оптимальный метод решения.- Устанавливать причинно-следственные связи (например, почему дни недели цикличны с периодом 7).- Применять модульную арифметику в нестандартных ситуациях. <p>Коммуникативные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none">- Работать в группе при решении задач, аргументировать свою точку зрения.- Обсуждать возможные подходы к решению и выбирать наиболее рациональные.
--	--

	<u>Личностные результаты:</u> - Развитие интереса к математике через необычные и прикладные задачи. - Осознание практической значимости модульной арифметики.
Тип урока комбинированный	Оборудование компьютер, проектор, наглядный материал (часы, календарь)
Основные понятия делимость, сравнение по модулю, свойства сравнений, уравнение в сравнениях.	Домашнее задание задачи из приложения

Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Используемые приёмы, методы	Формируемые УУД
Организационный	Где бы мы ни были – дома, в школе, в транспорте или в магазине, мы постоянно складываем, умножаем и делим целые числа. Но порой, как вы уже знаете, деление не выполняется нацело, и тогда возникает остаток, который часто играет ключевую роль.	Слушают учителя, настраиваются на урок.		<u>Личностные УУД:</u> - Осознание практической значимости темы. <u>Регулятивные УУД:</u> - Настрой на учебную деятельность.
Мотивационный	Давайте рассмотрим следующую задачу: Время пути поезда из города А в город Б п часов. Он выходит из А в 10 часов утра. Во сколько поезд прибудет в Б, если п: а) 78 часов, б) 54 часа, в) 30 часов г) 126 часов. Сравните результаты. Итак, мы с вами увидели, что время прибытия поезда зависит не от общего количества часов в пути (78, 54, 30 и т. д.), а зависит от остатка при делении на 24. Можно ли сказать, что всеперечисленные числа «эквивалентны» в каком-то смысле? Как бы вы это назвали?» (Учитель может намекнуть на термин «сравнимы по модулю».) Какая же, как вы думаете, у нас будет цель сегодняшнего факультативного занятия?	Вспомнив, что в сутках 24 часа, поделим число 78 на 24: $78 = 3 \times 24 + 6$ Следовательно, поезд едет из А в Б трое суток и 6 часов. А это значит, что он прибудет в город Б в 16 часов. Все числа имеют одинаковый остаток от деления на 24. Отвечают на вопрос учителя: Познакомиться с понятием "сравнения по модулю" и научиться применять его для решения задач, связанных с периодическими	Проблемный метод, эвристическая беседа.	<u>Познавательные УУД:</u> - Выдвижение гипотез. <u>Регулятивные УУД:</u> - Целеполагание. <u>Коммуникативные УУД:</u> - Умение аргументировать свою точку зрения в дискуссии.

		процессами (временем, датами, шифрованием и др.).		
Актуализация знаний	<p>Отлично, тогда давайте выполним некоторые элементарные вещи, которые вы и так прекрасно знаете, и сможете применять в наших дальнейших рассуждениях.</p> <p>Выполните следующее задание: Найдите остатки от деления чисел 14, 26, 38, 50 на 12. Что вы заметили?</p> <p>Да, всё верно, а как мы с вами можем связать это с задачей про поезд? Аналогично, если бы поезд шёл 14, 26, 38 или 50 часов, время прибытия тоже определялось бы остатком от деления на 24. В обоих случаях важную роль играет именно остаток от деления на некоторый модуль (в первом случае – 24, во втором – 12).</p> <p>- Какой же вывод вы можете сделать исходя из всего этого?</p>	<p>Найдём остатки от деления чисел на 12: $14 \div 12 = 1$ (остаток 2), $26 \div 12 = 2$ (остаток 2), $38 \div 12 = 3$ (остаток 2), $50 \div 12 = 4$ (остаток 2), Все числа (14, 26, 38, 50) при делении на 12 дают одинаковый остаток – 2. В задаче с поездом время прибытия определялось остатком от деления общего времени пути на 24 ($78 \div 24 = 3$ с остатком 6 - 16:00).</p> <p>Делают вывод: Числа с одинаковыми остатками при делении на заданное число ведут себя одинаково в задачах, где важен только остаток.</p>	Фронтальный опрос, метод подводящего диалога.	<p><u>Познавательные УУД:</u> - Анализ и сравнение остатков - Построение логических выводов</p> <p><u>Коммуникативные УУД:</u> - Участие в фронтальном опросе, формулировка ответов.</p>

<p>Формирование новых знаний и способов действий</p>	<p>-Да, всё действительно так, и эта идея лежит в основе сравнения по модулю. Давайте запишем с вами определение сравнения по модулю, показанное на слайде. Также давайте разберём следующие свойства сравнимости данные нам на слайде.</p> <p>Замечательно, далее нам с вами предстоит разделить на 3 группы. Первая группа (группа «С») будет самостоятельно определять числа сравнимые по модулю 4: 10, 14, 17, 21.</p> <p>Второй и третьей группе («В» и «А») предстоит ознакомиться с некоторыми операциями со сравнением по модулю, данными на слайде.</p> <p>Также есть критерий сравнимости: целые числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда разность $(a - b)$ делится на m.</p> <p>А теперь я предлагаю группе «В» попробовать решить следующую задачу: когда вы пошли в школу, на часах было ровно восемь. Когда вы ложились спать, часы показывали десять, а $10 - 8 = 2$. Но разве прошло два часа с того</p>	<p>Записывают: «Числа a и b сравнимы по модулю m ($a \equiv b \pmod{m}$), если они дают одинаковый остаток при делении на m»</p> <p>Записывают свойства и вникают в них: 1) $a \equiv a \pmod{n}$ 2) если $a \equiv b \pmod{n}$, то $b \equiv a \pmod{n}$ 3) если $a \equiv b \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$</p> <p>Знакомятся с дополнительными свойствами и записывают их себе: 1) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. 2) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a - c \equiv b - d \pmod{m}$. Решение задачи представлено в приложении.</p>	<p>Групповая работа, метод аналогий, исследовательский метод.</p>	<p><u>Познавательные УУД:</u> - Усвоение нового понятия (сравнение по модулю) и его свойств. - Моделирование аналогий</p> <p><u>Регулятивные УУД:</u> - Планирование решения задач в группах.</p> <p><u>Коммуникативные УУД:</u> - Сотрудничество в группах, распределение ролей.</p>
---	---	---	---	---

	<p>момента, как вы ушли в школу?</p> <p>Группа «А» Папа с сыном играют в такую игру: каждый пишет на бумажке число, не говоря его другому, потом они открывают эти числа, и если сумма чётная, выигрывает папа, а если нечётная, то сын.</p> <p>Честная ли это игра? Тот же вопрос, если вместо суммы чисел берётся их произведение.</p> <p>А пока две группы занимаются задачами, давайте проверим, что вышло у группы «С» (Учитель вызывает одного ученика к доске для демонстрации решения)</p>	Решение задачи представлено в приложении.		
Формирование умений и навыков	<p>Отлично, а теперь я предлагаю вам решить 1 задачу из жизни.</p> <p>Задача: В 2023 г. 1 января приходится на воскресенье. А каким днем недели будет 1 января 2027 г.?</p> <p>А после того, как будет получен ответ, необходимо будет его также показать на доске.</p> <p>Вернёмся к группам "А" и "В". Продемонстрируйте, пожалуйста, решения, которые у вас получились на доске.</p> <p>А теперь давайте посмотрим, как справились со своим заданием ребята из группы «С». Один человек должен будет показать на доске решение задачи, а ребята из группы «А» и «В» проверят правильность решения.</p>	<p>Решение задачи группы «С» в приложении.</p> <p>Решение задач представлено в приложении.</p>	Дифференцированный подход, практико-ориентированная задача, метод взаимопроверки.	<p><u>Познавательные УУД:</u></p> <p>- Применение знаний в новой ситуации.</p> <p><u>Регулятивные УУД:</u></p> <p>- Контроль и коррекция решений (проверка у доски).</p> <p><u>Коммуникативные УУД:</u></p> <p>- Презентация результатов группы, аргументация выбранного метода.</p>
Рефлексия	Молодцы, ребята, вы все прекрасно	Отвечают на вопросы	Приём	<u>Личностные УУД:</u>

	<p>справились со своими задачами! На сегодня наше занятие заканчивается, и я хочу задать вам пару вопросов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Что нового вы узнали на занятии? 2. Где может пригодиться сравнение по модулю? <p>Оцените свою работу на занятии по десяти бальной шкале и покажите количество пальцев, соответствующих вашей оценке.</p> <p>Замечательно! Но вы ещё даже не подозреваете, как широко ещё может применяться сравнение по модулю, и именно это вам предстоит узнать на следующих занятиях!</p>	<p>учителя, анализируя урок и свою работу на нём.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) На сегодняшнем уроке мы узнали, что такое сравнение по модулю и научились его применять при решении разных задач. 2) Сравнение по модулю может пригодиться нам для любых расчётов, связанных с временем, календарём, для решения задач, связанных с остатками, для шифрования чего-либо. <p>Поднимают руки и показывают количество пальцев, соответствующее их самооценки на уроке.</p>	«микрофон», самооценка.	<p>- Самооценка</p> <p><u>Познавательные УУД:</u></p> <p>- Структурирование знаний</p> <p><u>Коммуникативные УУД:</u></p> <p>- Формулирование выводов, выражение своего мнения.</p>
Домашнее задание	<p>А теперь запишите домашнее задание, каждый может выбрать свой уровень сложности.</p> <p>«С» - Маша разделила число на 4 и получила остаток 2. Какое из этих чисел могла использовать Маша?</p> <p>Варианты: 6, 9, 10, 4</p> <p>«В» - На столе в ряд лежат 1000 конфет. Сначала Коля съел девятую конфету слева, после чего съедая каждую седьмую конфету,</p>	<p>Фиксируют себе домашнее задание.</p> <p>Предполагаемое решение данных задач учениками представлено в приложении.</p>	Дифференцированный подход, творческое задание.	<p><u>Познавательные УУД:</u></p> <p>- Творческое применение знаний.</p> <p><u>Регулятивные УУД:</u></p> <p>- Выбор стратегии решения.</p> <p><u>Личностные УУД:</u></p> <p>- Ответственность за выполнение</p>

	<p>двигаясь вправо. После этого Миша съел седьмую слева из оставшихся конфет, а затем съедал каждую девятую из них, также двигаясь вправо. Сколько конфет после этого осталось?</p> <p>«А» - Покажите, что записанное обычным образом (в десятичной системе) целое положительное число сравнимо по модулю 9 с суммой своих цифр. Как из этого вывести признаки делимости на 9 и на 3? (Они говорят, что число делится на 9 (на 3) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9 (на 3).)</p>			дифференцированног о задания.
--	--	--	--	----------------------------------

2.4 Технологическая карта факультативного занятия для 8 класса по теме «Китайская теорема об остатках»

Учитель: Попова Элина Наилевна

<p>Цели (задачи) урока</p> <p><u>Образовательные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Ввести понятие КТО и её условия применимости (взаимно простые модули). - Разобрать алгоритм решения систем сравнений - Научить применять КТО в типовых задачах (подсчёт предметов, шифрование). <p><u>Развивающие:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Развивать умение анализировать условия задач. - Тренировать вычислительные навыки (работа с остатками). - Совершенствовать коммуникативные компетенции через групповую работу. <p><u>Воспитательные:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Поощрять сотрудничество при решении задач в группах. - Формировать ответственное отношение к учебной деятельности. - Стимулировать интерес к математике через исторические примеры. 	<p>Планируемые образовательные результаты</p> <p><u>Предметные результаты:</u></p> <p>Учащиеся научатся:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Формулировать условия применимости КТО. - Решать системы сравнений. - Применять алгоритм КТО для нахождения наименьшего положительного решения. - Учащиеся получают возможность научиться: - Использовать КТО в нестандартных задачах. - Связывать тему с другими разделами математики. <p><u>Метапредметные результаты:</u></p> <p>Познавательные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Умение структурировать знания. - Развитие логического мышления. - Применение знаково-символических средств. <p>Регулятивные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Планирование решения задач. - Контроль и коррекция. - Оценка своих действий. <p>Коммуникативные УУД:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Умение работать в группе. - Аргументированное представление решений у доски. <p><u>Личностные результаты:</u></p> <p>Мотивация к обучению:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Осознание практической пользы математики.
<p>Тип урока комбинированный</p>	<p>Оборудование: компьютер, проектор, экран</p>
<p>Основные понятия: сравнение по модулю, система сравнений, китайская теорема об остатках, взаимно-простые числа, обратный элемент по модулю, наименьшее положительное решение.</p>	<p>Домашнее задание: задачи из приложения</p>

Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность учеников	Используемые приёмы, методы	Формируемые УУД
Организационный	Здравствуйте, ребята, мы продолжаем с вами наше путешествие по миру арифметики остатков и сегодня наша остановка будет в Китае!	Слушают учителя, настраиваются на урок.	Эмоциональный вход.	<u>Личностные УУД:</u> - Мотивация к учебной деятельности. - Готовность к сотрудничеству. <u>Коммуникативные УУД:</u> - Восприятие речи учителя, настрой на диалог.
Мотивационный	Давным-давно, во времена больших войн, военачальникам Китая было сложно посчитать численность своего войска из-за огромной его численности. И тогда они нашли вывели свой метод как с помощью остатков можно быстро посчитать число солдат. Для этого они осуществляли последовательные перестроения солдат - сначала в ряды по 7 человек, затем по 11 и далее, каждый раз запоминая, сколько бойцов не хватило до полного ряда. В итоге, опираясь только на эти данные о неполных рядах, они определяли точное количество военнослужащих с помощью китайской теоремы об остатках.	Слушают учителя, заинтересовываются темой.	Приём «Историческая загадка».	<u>Личностные УУД:</u> - Формирование познавательного интереса. - Осознание практической значимости математики. <u>Познавательные УУД:</u> - Постановка проблемы: "Как быстро посчитать большое количество солдат?"

				<u>Регулятивные УУД:</u> - Принятие учебной цели (понимание, что предстоит изучить).
Актуализация знаний	<p>Перед тем как вы узнаете больше про необычную китайскую теорему об остатках, я хочу задать вам несколько вопросов по пройденным темам.</p> <p>1. Что такое сравнение по модулю?</p> <p>2. Как решить линейное сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$?</p> <p>3. Что такое взаимно простые числа?</p> <p>Решите задачу: Генерал решил построить солдат в колонну по 4, но при этом солдат Морозов остался лишним.</p> <p>Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. Но опять Морозов остался лишним. Когда и в колонне по 6 Морозов оказался лишним, генерал назначил ему наряд вне очереди, а после этого в колонне по 7 Морозов нашел себе место и никого лишнего не было.</p> <p>Какое наименьшее число солдат могло быть у генерала?</p>	<p>1) Два целых числа a и b называются с равными по модулю m (где m — натуральное число), если они дают одинаковые остатки при делении на m. Обозначается: $a \equiv b \pmod{m}$</p> <p>2) 1. Проверить разрешимость: Сравнение имеет решение тогда и только тогда, когда НОД (a, m) делит b.</p> <p>2. Найти частное решение:</p> <p>Если НОД (a, m) = 1, решение единственно (по модулю m).</p> <p>Используют:</p> <p>Метод перебора (для небольших m).</p> <p>Расширенный алгоритм Евклида (для нахождения обратного элемента a^{-1}).</p>	Метод подводящего диалога, проблемное задание.	<u>Познавательные УУД:</u> - Анализ ранее изученного (сравнения по модулю, взаимно простые числа). - Логические действия (попытка решить систему сравнений). <u>Регулятивные УУД:</u> - Выявление затруднений (осознание, что система сложна без алгоритма). <u>Коммуникативные УУД:</u> - Учебный диалог (ответы на вопросы учителя, обсуждение решений).

		<p>3. Записать общее решение: Если x_0 - частное решение, то все решения имеют вид: $x \equiv x_0 \pmod{m}$</p> <p>3) Два числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1</p> <p>Последнее задание вызывает трудность, и ученики задаются вопросом: «Как это решать?»</p>		
Формирование новых знаний и способов действий	<p>Так, ну, из системы нам должно быть ясно, что вам нужно найти число, которое при делении на 4 даёт остаток 1, и при делении на 5 и 6 даёт остаток 1, а при делении на 7 – остаток 0. Как же это сделать эффективно?</p> <p>Для решения подобных систем вам необходимо знать следующее: Если нужно найти число x, которое: При делении на m_1 даёт остаток a_1, При делении на m_2 даёт остаток a_2, ... При делении на m_k даёт остаток a_k, А также все числа $m_1, m_2, \dots, m_k$ попарно взаимно просты (не имеют общих делителей, кроме 1), то такая система имеет единственное решение по модулю $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.</p>	Обсуждают систему, предлагают варианты.	Метод объяснения, алгоритмизация, приём "Пошаговый разбор", работа у доски.	<p><u>Познавательные УУД:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Знаково-символические действия. - Логические рассуждения. - Структурирование знаний. <p><u>Регулятивные УУД:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Планирование. - Контроль. <p><u>Коммуникативные УУД:</u></p>

	<p>А это значит, что существует число x, удовлетворяющее всем условиям сразу, а все остальные решения получаются прибавлением M, $2M$, $3M$ и т.д.</p> <p>Запишите себе пошаговый алгоритм решения таких систем:</p> <p>1) Вычисляем общий модуль M Умножаем все m_i: $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$</p> <p>2) Для каждого m_i находим M_i $M_i = M / m_i$ (Это произведение всех модулей, кроме текущего.)</p> <p>3) Находим обратный элемент y_i Число y_i — это решение уравнения: $M_i \cdot y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ (То есть y_i - такое число, что $M_i \cdot y_i$ при делении на m_i даёт остаток 1.)</p> <p>4) Собираем решение: $x = a_1 \cdot M_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot M_2 \cdot y_2 + \dots + a_k \cdot M_k \cdot y_k$</p> <p>И получаем итоговый ответ: $x \pmod{M}$ (Мы взяли от деления на M, чтобы получить наименьшее положительное решение.) Это и есть алгоритм решения системы сравнений по Китайской теореме остатков. Да, по началу выглядит сложновато, но скоро для вас всё станет элементарно. А теперь всё же попробуйте решить данную систему. (Вызывает ученика из группы «В» к доске).</p>	<p>Записывают алгоритм, анализируют его.</p> <p>Решение:</p> <p>1) Математически это можно записать как систему сравнений: $N \equiv 1 \pmod{4}$ $N \equiv 1 \pmod{5}$ $N \equiv 1 \pmod{6}$ $N \equiv 0 \pmod{7}$, где N - общее количество солдат.</p> <p>2) Найдём НОК чисел 4, 5, 6: НОК (4,5,6) = 60 Таким образом, первые три условия эквивалентны: $N \equiv 1 \pmod{60}$</p> <p>3) Теперь имеем систему из двух сравнений: $N \equiv 1 \pmod{60}$ $N \equiv 0 \pmod{7}$ $N = 60k + 1$, где k - целое число</p> <p>Подставим во второе сравнение: $60k + 1 \equiv 0 \pmod{7}$, $60 \equiv 4 \pmod{7}$ (так как $7 \times 8 = 56$, $60 - 56 = 4$) Таким образом: $4k + 1 \equiv 0 \pmod{7}$, $4k \equiv -1 \equiv 6 \pmod{7}$</p>		- Аргументация.
--	---	---	--	-----------------

		<p>4) Найдем обратный элемент к 4 по модулю 7: $4 \times 2 = 8 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow$ обратный элемент 2 Умножаем обе части на 2: $k \equiv 6 \times 2 \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7}$ Таким образом, $k = 7m + 5$, где m - целое число 5) Подставляем обратно в N: $N = 60(7m + 5) + 1 =$ $420m + 300 + 1 = 420m + 301$ Ответ: наименьшее решение при $m = 0$: $N = 301$</p>		
Формирование умений и навыков	<p>А теперь давайте разделимся на привычные нам группы и у каждой группы будет своя задача. Группа «С» получает следующую задачу: У Ани есть несколько карандашей. Когда она пытается разложить их: - по 4 карандаша в коробку - остаётся 1 лишний; - по 7 карандашей в коробку - остаётся 4 лишние. Какое наименьшее количество карандашей может быть у Ани?</p>	<p>Решение: 1) Нам нужно найти число карандашей x, которое: 1. При делении на 4 даёт остаток 1: $x \equiv 1 \pmod{4}$ 2. При делении на 7 даёт остаток 4: $x \equiv 4 \pmod{7}$ 2) Числа 4 и 7 - взаимно простые (их наибольший общий делитель равен 1), значит, теорема применима. Решение будет единственным по модулю $4 \times 7 = 28$. 3) Находим общий модуль: $M = 4 \times 7 = 28$</p>	Дифференцированный подход, групповая работа.	<p><u>Познавательные УУД:</u> - Моделирование. - Применение алгоритма. <u>Регулятивные УУД:</u> - Коррекция. Оценка. - <u>Коммуникативные УУД:</u> - Сотрудничество. - Презентация результатов.</p>

	<p>Отлично, предлагаю вам всем самим составить модель следующей задачи и один из вас решит её у доски.</p> <p>Задача: Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 дает остаток 1.</p> <p>А сейчас каждый из вас самостоятельно попробует решить представленную задачу на слайде (предполагается, что кто-то может</p>	<p>1. Для первого условия ($x \equiv 1 \pmod{4}$): $M_1 = 28 \div 4 = 7$</p> <p>Находим $y_1 : 7 \times y_1 \equiv 1 \pmod{4}$</p> <p>$7 \equiv 3 \pmod{4}$, поэтому решаем $3 \times y_1 \equiv 1 \pmod{4}$</p> <p>Подходит $y_1 = 3$ $(3 \times 3 = 9 \equiv 1 \pmod{4})$</p> <p>2. Для второго условия ($x \equiv 4 \pmod{7}$): $M_2 = 28 \div 7 = 4$</p> <p>Находим $y_2 :$ $4 \times y_2 \equiv 1 \pmod{7}$</p> <p>Подходит $y_2 = 2$ $(4 \times 2 = 8 \equiv 1 \pmod{7})$</p> <p>3. Собираем решение: $x = 1 \times 7 \times 3 + 4 \times 4 \times 2 = 21 + 32 = 53$</p> <p>Находим остаток от деления на 28: $53 \div 28 = 1$ с остатком 25 ($x \equiv 25 \pmod{28}$)</p> <p>Ответ: Наименьшее количество карандашей - 25.</p> <p>Решение задачи представлено в приложении.</p>		
--	---	--	--	--

	<p>только составить модель, а кто-то решит полностью).</p> <p>Задача: Робот считает шаги. Когда он считает до 3, то сбивается и начинает сначала. Когда считает до 5 - останавливается на 4 шаге. Когда считает до 7 - останавливается на 6. Сколько шагов сделал робот, если их меньше 100?</p> <p>Учитель контролирует самостоятельную работу и по истечении времени вызывает к доске ученика для демонстрации решения.</p> <p>После того, как каждая группа решит свою задачу, одному человеку из группы необходимо будет продемонстрировать своё решение на доске, а мы его вместе обсудим и проверим правильность.</p>	<p>Решение:</p> <p>Из условия можно предположить, что когда робот сбивается и начинает сначала - может означать остаток 0, следовательно:</p> $x \equiv 0 \pmod{3}$ $x \equiv 4 \pmod{5}$ $x \equiv 6 \pmod{7}$ $x = 3k \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow 3k \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow k \equiv 3 \pmod{5}$ $\Rightarrow k = 5m + 3 \Rightarrow x = 15m + 9$ $15m + 9 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 15m \equiv -3 \pmod{7} \Rightarrow m \equiv 4 \pmod{7}$ $\Rightarrow m = 7n + 4$ $\Rightarrow x = 105n + 69$ <p>При $n=0$: $x=69 < 100$</p> <p>Проверяем:</p> $69 \div 3 = 23 + 0$ $69 \div 5 = 13 + 4$ $69 \div 7 = 9 + 6$ <p>Ответ: Робот сделал 69 шагов.</p>		
Рефлексия	<p>Что ж, наше занятие подходит к концу, вы все огромные молодцы, что усвоили эту тему,</p>	<p>1) Остаток от деления, сравнение по модулю,</p>	<p>Приём «микрофон»,</p>	<p><u>Личностные УУД:</u> - Самооценка.</p>

	<p>потому что далеко не каждому это дано, мало кто в принципе знает о существовании изученной вами теоремы. А у меня возникло к вам несколько вопросов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. В чём суть КТО? 2. Где она применяется? 3. Какие возникли трудности? <p>Оцените свою работу на уроке показав на лице эмоцию, ассоциирующуюся с ней.</p>	<p>НОК.</p> <ol style="list-style-type: none"> 2) При решении задач с системами сравнений. 3) Сложно было понять обратные числа, не взаимно простые модули, сложные условия. 	самооценка.	<p>- Осознание трудностей.</p> <p><u>Регулятивные УУД:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Оценка результатов. <p><u>Коммуникативные УУД:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Умение сформулировать мнение.
Домашнее задание	<p>На дом вы так же получите дифференцированные задания.</p> <p>А)Петя, Вася и Иван каждый на своей карточке написал наугад по одной цифре и передали карточки Маше так, чтобы она не видела написанных цифр. Маша случайным образом перемешала карточки и выложила их в ряд на стол. Найти вероятность того, что на столе можно увидеть трехзначное число, кратное 5 и имеющее при делении на 7 остаток 3.</p> <p>В)Число x при делении на 2 даёт остаток 1, на 3 - остаток 2, а на 5 - остаток 4. Найди все такие числа меньше 50.</p> <p>С)У Маши есть несколько конфет. Если разложить их по 4 конфеты в пакетик, останется 1 лишняя. Если разложить по 7 конфет в пакетик, останется 3. Сколько конфет у Маши?</p>	Решения данных задач представлены в приложении.	Дифференцированный метод творческого применения знаний.	<p><u>Познавательные УУД:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Самостоятельное применение знаний. <p><u>Регулятивные УУД:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Организация времени. <p><u>Личностные УУД:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Ответственность.

Заключение

В выпускной квалификационной работе были рассмотрены методические аспекты изучения арифметики остатков в школьном курсе математики, разработана программа факультативного курса для учащихся 8 класса, направленная на углубленное изучение этой темы, а также составлены технологические карты по ключевым темам, обеспечивающие дифференцированный подход к обучению.

Основные выводы работы:

Актуальность темы обусловлена её значимостью не только в рамках школьной программы, но и в олимпиадной математике, криптографии, информатике и других современных областях. Однако в стандартном курсе алгебры арифметика остатков рассматривается фрагментарно, что создаёт пробел в знаниях учащихся.

Анализ учебных программ показал, что элементы теории чисел присутствуют в 5–11 классах, но их изучение носит эпизодический характер и не формирует системного понимания. В частности, в 7–9 классах отсутствует целостный подход к изучению сравнений по модулю, малой теоремы Ферма и других ключевых концепций.

Методические особенности изучения арифметики остатков включают:

1. Постепенное введение понятий через наглядные примеры (часы, календари).
2. Акцент на доказательствах и логических рассуждениях.
3. Применение активных методов обучения (групповая работа, исследовательские задания).
4. Дифференцированный подход с учётом уровня подготовки учащихся.

Практическая значимость работы заключается в разработке:

- 1) Программы факультативного курса, включающей тематическое планирование и технологические карты.
- 2) Системы задач разного уровня сложности с решениями.

3) Методических рекомендаций для учителей по организации занятий.

Перспективы дальнейшей работы:

- апробация разработанного курса в школьной практике.

- расширение тематики за счёт включения дополнительных разделов (криптография, алгоритмы).

- создание цифровых образовательных ресурсов для дистанционного изучения темы.

Системное изучение арифметики остатков на факультативных занятиях способствует развитию математического мышления, повышает интерес учащихся к предмету и готовит их к решению нестандартных задач, включая олимпиадные и конкурсные задания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций/Ю.Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С.А. Теляковского.- 21-е изд. - М. : Просвещение, 2020. - 256 с.
2. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций/Ю.Н. Макарычев [и др.]. - М.: Просвещение, 2019. - 301 с.
3. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций/Ю.Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С.А. Теляковского. - 23-е изд. - М. : Просвещение, 2022. - 271 с.
4. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями: учебное пособие / Н.Д. Золотарёва [и др.] ; под ред. М.В. Федотова. - М. : Изд-во Московского университета, 2011. - 538 с.
5. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / С.М. Никольский [и др.]. - 10-е изд. - М. : Просвещение, 2022. - 431 с.
6. Алфутова Н.Б., Устинова А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ: учебно-методическое пособие. - М. : МЦНМО, 2018. - 256 с.
7. Аменицкий Н.Н., Сахаров И.П. Забавная арифметика : учебно-методическое пособие. - М. : Наука, 2016. - 384 с.
8. Бухштаб А.А. Теория чисел : учебник. - 6-е изд. - М. : Лань, 2019. – 384 с.
9. Велетень О.С. Формирование универсальных учебных действий обучающихся 6 класса в процессе изучения темы «Признаки делимости»// Педагогическое образование в России. - 2013. - № 5. - С. 16-19.
10. Виленкин Н.Я. [и др.] Математика. 8 класс. - М. : Просвещение, 2023.
11. Виноградов И.М. Основы теории чисел: учебник. - 11-е изд. - М.: Лань, 2009. - 176 с.

12. Волкова Т.С. Задачи элементарной теории чисел в содержании профессиональной подготовки современного учителя математики // Вестник ТГПУ. - 2015. - № 7. - С. 85-88.
13. Волкова Т.С. Исследование умений будущих учителей математики решать задачи по элементарной теории чисел // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова. - 2014. - Т. 20. - С. 118-121.
14. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. - Киров: Аса, 2020.
15. Глухова О.Ю. Делимость чисел в элективных курсах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. - 2015. - № 7-2. - С. 58-61.
16. Гузик Н.П. Уровневая дифференциация обучения. – М.: Народное образование, 1994. - 125 с.
17. Деза Е.И., Котова Л.В. Сборник задач по теории чисел (112 задач с подробными решениями) : учебное пособие. - М. : ЛИБРОКОМ, 2012. - 224 с.
18. Дерезин С.В., Коннова Е.Г. Математика. Подготовка к ЕГЭ : задание 21 профильного уровня. Задачи и решения: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф. Лысенко. - Ростов-на-Дону : Легион, 2015. - 80 с.
19. Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф. Математика. 6 класс. – 11 - е изд. - М. : Просвещение, 2010. - 303 с. - (Академический школьный учебник).
20. Егоров А.А. Элементы теории чисел: учебное пособие для вузов. – 3 - е изд. - М. :Физматлит, 2020. - 256 с.
21. Егоров А.А. Факультативный курс "Теория чисел": методическое пособие для учителей. - М. : Просвещение, 2021. - 144 с.
22. Жафяров А.Ж. Алгоритм и принципы изучения темы «Делимость целых чисел» на компетентной основе // Сибирский педагогический журнал. - 2013. - № 5. - С. 134-143.
23. Математика. 5 класс. Математика. 6 класс/под ред.С.М. Никольского [и др.]. - 14-е изд. - М. : Просвещение, 2015. - 256 с.
24. Математическая шкатулка: пособие для учащихся / Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С. - 5-е изд. - М. : Просвещение, 1988. - 157 с.

25. Михелович Ш.Х. Теория чисел. - М. : Высшая школа, 1967. - 336 с.
26. Муравин Г.К., Муравина О.В. Математика. 6 класс : учебник для общеобразовательных организаций. - 6-е изд. - М.: Дрофа, 2020. - 319 с.
26. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций. - 10-е изд. - М. : Просвещение, 2022. - 431 с.
28. Олимпиадные задачи по теории чисел (сборники задач Всероссийской олимпиады школьников).
29. Письмо Министерства образования и науки РФ от 28.10.2015 № 08 - 1786 "О рабочих программах учебных предметов".
30. Сергеев И.Н. Математика. Задачи с решениями. - М. : Бином, 2022. — 360 с.
31. Сластенин В.А., Исаев И.Ф., Шиянов Е.Н. Педагогика : учебное пособие / под ред. В.А. Сластенина. - М. : Академия, 2007. - 576 с.
32. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ "Об образовании в Российской Федерации".
33. Феоктистов И.Е. Делимость чисел // Математика в школе. - 2009. - № 8. - С. 47-58.
34. Фомин Д.В. Математические кружки: теория чисел. - СПб. : Лань, 2022. - 208 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ
ЗАДАЧИ ИЗ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА ПО АРИФМЕТИКЕ
ОСТАТКОВ С РЕШЕНИЯМИ.

1) Деление с остатком. Основные свойства

Задача 1.

На фабрике есть два рулона ткани: 5,472 метра и 3,648 метра. Дизайнеру нужно нарезать их на одинаковые куски максимальной длины без остатка, чтобы сшить одинаковые платья. Вопрос: какой длины будут куски ткани, и сколько их получится из каждого рулона?

Решение:

$$1) 5\,472 \div 3\,648 = 1 (\text{остаток } 1\,824) \rightarrow 5\,472 = 3\,648 \times 1 + 1\,824$$

$$2) 3\,648 \div 1\,824 = 2 (\text{остаток } 0) \rightarrow 3\,648 = 1\,824 \times 2 + 0$$

$$3) \text{ Остаток равен } 0, \text{ значит, НОД} = 1,824.$$

Ответ: Длина каждого куска: 1 824 метра.

(Из рулона 5 472 м — 3 куска, из рулона 3 648 м — 2 куска.)

Задача 2.

В спортивном зале есть три вида мячей: 54 футбольных, 72 баскетбольных и 90 волейбольных. Тренер хочет сложить их в одинаковые комплекты так, чтобы в каждом комплекте были все три вида мячей, и мячи не оставались. Какое наибольшее количество комплектов можно составить? Сколько мячей каждого вида будет в комплекте?

Решение:

Найдем НОД трех чисел:

Сначала НОД (54, 72):

$$72 \div 54 = 1 (\text{остаток } 18)$$

$$54 \div 18 = 3 (\text{остаток } 0)$$

$$\text{НОД} = 18$$

Теперь НОД (18, 90):

$$90 \div 18 = 5 \text{ (остаток 0)}$$

$$\text{НОД} = 18$$

Количество комплектов: 18

В каждом комплекте:

$$\text{Футбольных: } 54 \div 18 = 3$$

$$\text{Баскетбольных: } 72 \div 18 = 4$$

$$\text{Волейбольных: } 90 \div 18 = 5$$

Ответ: 18 комплектов по 3 футбольных, 4 баскетбольных и 5 волейбольных мячей.

Задача 3 («Введение в теорию чисел» - Айерлэнд К., Роузен М.)

Докажи, что если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $\text{НОД}(a + b, a - b)$ равен 1 или 2.

Решение:

Пусть $d = \text{НОД}$

$$(a + b, a - b)$$

$$d = \text{НОД}(a + b, a - b)$$

Требуется доказать, что d может быть только 1 или 2.

Так как d - общий делитель $(a+b)(a+b)$ и $(a-b)(a-b)$, то:

$$d \text{ делит } (a+b)(a+b)$$

$$d \text{ делит } (a-b)(a-b)$$

Следовательно, d делит и их:

$$\text{Сумму: } (a+b) + (a-b) = 2a(a+b) + (a-b) = 2a$$

$$\text{Разность: } (a+b) - (a-b) = 2b(a+b) - (a-b) = 2b$$

Таким образом: d делит $2a$ и $2b$

$$\text{По условию, } \text{НОД}(a, b) = 1$$

Из предыдущего шага: d - общий делитель $2a$ и $2b$, значит:

$$d \leq \text{НОД}(2a, 2b) = 2\text{НОД}(a, b) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$d \leq \text{НОД}(2a, 2b) = 2\text{НОД}(a, b) = 2 \cdot 1 = 2$$

Поэтому d может быть только 1 или 2 (так как делители числа 2 — это 1 и 2)

Задача 4.

У мамы на праздник куплено 462 шоколадных конфет и 1 078 карамелек. Она хочет разложить их в одинаковые пакетики так, чтобы в каждом пакете было одинаковое количество шоколадных и карамельных конфет, и ничего не осталось. Вопрос: Какое максимальное число наборов она может сделать?

Решение:

1) $1\,078 \div 462 = 2$ (остаток 154) $\rightarrow 1\,078 = 462 \times 2 + 154$

2) $462 \div 154 = 3$ (остаток 0) $\rightarrow 462 = 154 \times 3 + 0$

3) Остаток равен 0, значит, НОД = 154.

Ответ: Максимальное число наборов — 154.

(В каждом подарке будет 3 конфеты и 7 шоколадок.)

Задача 5. (Планирование автобусов)

Автобус №54 приезжает каждые 894 секунд, автобус №105 - каждые 1503 секунд. Через какое минимальное время они снова приедут одновременно?

1) Найдем НОД с помощью алгоритма Евклида

$$1503 = 1 \times 894 + 609,$$

$$894 = 1 \times 609 + 285,$$

$$609 = 2 \times 285 + 39,$$

$$285 = 7 \times 39 + 12,$$

$$39 = 3 \times 12 + 3,$$

$$12 = 4 \times 3 + 0.$$

Последний ненулевой остаток — 3.

Следовательно, НОД (894, 1503) = 3.

2) $\text{НОК}(894, 1503) = (894 \times 1503) / 3 = 894 \times 501 = 447894$

Ответ: Автобусы №54 и №105 снова приедут одновременно через 447894 секунды.

Задача 6.

Требуется выложить пол банкетного зала размером 10 480 см × 5 680 см квадратной плиткой наибольшего возможного размера, чтобы плитку не пришлось резать. Какова должна быть длина стороны плитки?

Решение:

1. Найдем НОД (10 480, 5 680) с помощью алгоритма Евклида:

a) $10\,480 \div 5\,680 = 1$ (остаток 4 800)

b) $5\,680 \div 4\,800 = 1$ (остаток 880)

c) $4\,800 \div 880 = 5$ (остаток 400)

d) $880 \div 400 = 2$ (остаток 80)

e) $400 \div 80 = 5$ (остаток 0)

2. Последний ненулевой остаток: 80

Ответ: максимальный размер плитки: 80 см.

2) Сравнения по модулю

Задача 1. (Часы)

Когда вы пошли в школу, на часах было ровно восемь. Когда вы ложились спать, часы показывали десять, а $10-8=2$. Но разве прошло два часа с того момента, как вы ушли в школу?

Решение:

1) Часы работают по модулю 12 (поскольку 12-часовой формат).

Если время переваливает за 12, то отсчёт начинается заново:

$$13 \equiv 1 \pmod{12},$$

$$22 \equiv 10 \pmod{12} \text{ и т. д.}$$

2) Условие:

$$\text{Пошли в школу: } t_1 \equiv 8 \pmod{12} \text{ (8:00).}$$

$$\text{Легли спать: } t_2 \equiv 10 \pmod{12} \text{ (10:00).}$$

$$\text{Разница: } t_2 - t_1 \equiv 10 - 8 \equiv 2 \pmod{12}.$$

Но реальная разница во времени может быть не 2 часа, а $2+12k$ часов, где $k \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{3) } t_2 - t_1 \equiv 2 \pmod{12} \Rightarrow \Delta t = 2 + 12k, k \in \mathbb{Z}.$$

Если $k=1$: $\Delta t=14$ часов (если 8:00 утра $\rightarrow$ 10:00 вечера).

Так как вы пошли в школу утром (8:00), а легли спать вечером (10:00), то прошло 14 часов ($k=1$).

Вывод: Простое вычитание $10 -$

$8 = 2$ даёт **наименьший неотрицательный остаток** по модулю 12, но не учитывает количество полных 12-часовых циклов.

Ответ: между событиями был переход через 12:00 $\Rightarrow$ прошло **14 часов**.

Задача 2. (Календарь)

В 2023 г. 1 января приходится на воскресенье. А каким днем недели будет 1 января 2027 г.?

Решение:

1) Если бы число дней в году делилось на 7, то 1 января приходилось бы на один и тот же день недели, скажем на воскресенье, как в 2023 г, но в нём 365 дней, а в високосном 2024 г. 366 дней.

2) Деля 366 на 7, получаем 52 полные недели и ещё 2 дня в остатке. Значит, 2024 г. начнётся не с воскресенья, а со вторника. В 2025 г. 365 дней, и остаток от деления на 7, будет равен 1, что приведёт к «сдвигу» нового года ещё на один день недели: то же самое произойдёт в 2026 и 2027 гг. Значит, 1 января 2027 г. будет пятница.

Задача 3. (реальная математика)

На столе в ряд лежат 1000 конфет. Сначала Коля съел девятую конфету слева, после чего съедал каждую седьмую конфету, двигаясь вправо. После этого Миша съел седьмую слева из оставшихся конфет, а затем съедал каждую девятую из них, также двигаясь вправо. Сколько конфет после этого осталось?

Решение:

Коля начал с девятой конфеты слева, значит, из $1000 - 8 = 992$ конфет он съедал по одной конфете из каждых семи (первую из каждой "семёрки").

Т. к. $992 \equiv 5 \pmod{7}$, то Коля съел 142 конфеты. После этого осталось $992 - 142 + 8 = 858$ конфет.

Миша начал с седьмой конфеты слева, то есть из 852 конфет он съедал по одной конфете из каждых девяти (первую из каждой "девятки").

Т. к. $852 \equiv 6 \pmod{9}$, то Миша съел 95 конфет. Значит, осталось 763 конфеты.

Ответ: 763 конфеты.

Задача 4:

Покажите, что записанное обычным образом (в десятичной системе) целое положительное число сравнимо по модулю 9 с суммой своих цифр. Как из этого вывести признаки делимости на 9 и на 3?

Решение:

1. Любое число можно разложить по цифрам:

Например, $345 = 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5$.

2. Степени 10 дают остаток 1 при делении на 9 и на 3:

$10 \equiv 1 \pmod{9}$ (потому что $10 - 1 = 9$),

$10 \equiv 1 \pmod{3}$ (потому что $10 - 1 = 9$ делится на 3).

Тогда $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{9}$ и $\pmod{3}$

3. Число сравнимо с суммой цифр по модулю 9 и 3:

$345 = 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \equiv 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 = 12 \pmod{9}$ (аналогично для любого числа).

4. Признаки делимости:

На 9: если сумма цифр делится на 9, то и само число делится на 9.

На 3: если сумма цифр делится на 3, то и само число делится на 3.

Ответ: чтобы проверить делимость на 9 или 3, достаточно сложить цифры числа и проверить делимость суммы.

Задача 5. («Занимательная математика» (Я. И. Перельман, Б. А. Кордемский))

Папа с сыном играют в такую игру: каждый пишет на бумажке число, не говоря его другому, потом они открывают эти числа, и если сумма чётная, выигрывает папа, а если нечётная, то сын.

Честная ли это игра? Тот же вопрос, если вместо суммы чисел берётся их произведение.

Решение:

Обозначения:

Чётное число $\equiv 0 \pmod{2}$

Нечётное число $\equiv 1 \pmod{2}$

Случай 1: Сумма чисел

Выигрыш определяется чётностью суммы $a + b$, где:

a – число папы (0 или 1),

b – число сына (0 или 1).

Возможные комбинации:

1. $a=0, b=0: 0+0=0$ (чётное) $\rightarrow$ победа папы.
2. $a=0, b=1: 0+1=1$ (нечётное) $\rightarrow$ победа сына.
3. $a=1, b=0: 1+0=1$ (нечётное) $\rightarrow$ победа сына.
4. $a=1, b=1: 1+1=0$ (чётное) $\rightarrow$ победа папы.

Вероятности (если выборы независимы и равновероятны):

Папа выигрывает в случаях 1 и 4 $\rightarrow$ вероятность $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Сын выигрывает в случаях 2 и 3 $\rightarrow$ вероятность $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Вывод:

Игра **честная**, так как шансы равны.

Случай 2: Произведение чисел

Выигрыш определяется чётностью произведения $a \cdot b$.

Возможные комбинации:

1. $a=0, b=0: 0 \cdot 0=0$ (чётное) $\rightarrow$ победа папы.
2. $a=0, b=1: 0 \cdot 1=0$ (чётное) $\rightarrow$ победа папы.
3. $a=1, b=0: 1 \cdot 0=0$ (чётное) $\rightarrow$ победа папы.
4. $a=1, b=1: 1 \cdot 1=1$ (нечётное) $\rightarrow$ победа сына.

Вероятности:

- Папа выигрывает в случаях 1, 2, 3 $\rightarrow$ вероятность $\frac{3}{4}$.

- Сын выигрывает только в случае 4 $\rightarrow$ вероятность $\frac{1}{4}$.

Вывод:

Игра **нечестная**, так как папа выигрывает в 3 раза чаще.

Ответ:

Для суммы чисел: игра честная (вероятности 50% на 50%).

Для произведения чисел: игра нечестная (папа выигрывает с вероятностью 75%, сын – 25%).

Задача 6.

Маша разделила число на 4 и получила остаток 2. Какое из этих чисел могла использовать Маша?

Варианты: 6, 9, 10, 4

Решение:

Проверим каждое число:

$$6 : 4 = 1 \text{ (остаток 2)} \text{—подходит.}$$

$$9 : 4 = 2 \text{ (остаток 1)} \text{— не подходит.}$$

$$10 : 4 = 2 \text{ (остаток 2)} \text{— подходит.}$$

$$14 : 4 = 3 \text{ (остаток 2)} \text{—не подходит.}$$

Ответ: подходят числа 6, 10, 14.

3) Линейные сравнения и их решения**Задача 1(Алферов А.П. и др. "Основы криптографии").**

Для шифрования числа x используют формулу $y=(x^2+3)(mod 10)$. Какие числа от 0 до 9 могут быть результатом?

Решение:

Вычислим удля всех $x \in \{0,1,\dots,9\}$:

$$0^2 + 3 \equiv 3, \quad 1^2 + 3 \equiv 4, \quad 2^2 + 3 \equiv 7, \quad 3^2 + 3 \equiv 2, \quad 4^2 + 3 \equiv 9, \quad 5^2 + 3 \equiv 8, \\ 6^2 + 3 \equiv 9, \quad 7^2 + 3 \equiv 2, \quad 8^2 + 3 \equiv 7, \quad 9^2 + 3 \equiv 4.$$

Ответ: Возможные y : $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$.

Задача 2. (Олимпиадные задачи по математике" (Г. В. Дорофеев, Е. А. Седова)

На парте лежат книги, которые необходимо упаковать. Если их связать в одинаковые пачки по 4, по 5 или по 6 книг, то каждый раз

останется одна лишняя книга, а если связать по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Какое наименьшее количество книг может быть на парте?

Решение: при связывании книг в пачки по 4, по 5 или по 6 книг, каждый раз остается одна книга, тогда число всех книг можно записать в виде $60n + 1$. Если же книги связать в пачку по 7 книг, то лишних книг не останется, т.е. $60n + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

Значение n	Остаток
1	5
2	2
3	6
4	3
5	0

Следовательно, наименьшее количество книг, лежащих на парте равно 301.

Ответ: 301

Задача 3. (сайт «Малый мехмат МГУ)

Докажите, что среди любых 6 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

Решение:

- 1) При делении на 5 возможны остатки: 0, 1, 2, 3, 4.
- 2) Если у нас 6 чисел, то по принципу Дирихле хотя бы два числа дадут одинаковый остаток при делении на 5 (так как остатков всего 5).
- 3) Пусть $a \equiv r \pmod{5}$ и $b \equiv r \pmod{5}$.
- 4) Тогда $a - b \equiv 0 \pmod{5}$.

Ответ: Доказано.

Задача 4.

В шифре умножения каждая буква умножается на 3 по модулю 26 ($A=0, B=1, \dots, Z=25$). Как расшифровать букву "G" (6), закодированную этим методом?

Решение:

Уравнение для расшифровки: $3x \equiv 6 \pmod{26}$

Упрощаем: $x \equiv 2 \pmod{26/\text{НОД}(3,26)} \Rightarrow x \equiv 2 \pmod{26}$

Ответ: Буква C (так как $C=2$).

Задача 5. Вы заняли 1000 рублей и должны вернуть сумму через 3 месяца, кратную 250 рублям. Сколько вариантов выплаты? Решение:

Уравнение: $250x \equiv 1000 \pmod{250}$

Упрощаем: $0 \equiv 0 \pmod{250}$

Это означает, что подходит любое x , но с ограничением, что минимальный платёж: $1000 \div 250 = 4$ месяца.

Ответ: можно выплатить: 4 платежа по 250 руб., или 1 платёж 1000 руб.

4) Китайская теорема об остатках

Задача 1.

Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 3 дает остаток 2, а при делении на 5 дает остаток 1.

Решение:

1) Запишем условия:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3}, \\ x \equiv 1 \pmod{5}, \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

Пусть $x = 3k+2$

где k – некоторое целое число.

2) Подставим это выражение во второе условие:

$$3k+2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$3k+2-1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$3k+1 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$3k \equiv -1 \pmod{5}$$

$$3k \equiv 4 \pmod{5}$$

$$(\text{таккак } -1 \equiv 4 \pmod{5})$$

$$3) \text{ Решим сравнение } 3k \equiv 4 \pmod{5}$$

Нам нужно найти обратный элемент к 3 по модулю 5. Обратный элемент y к 3 по модулю 5 удовлетворяет условию:

$$3y \equiv 1 \pmod{5}$$

Проверим значения y :

$$3 \times 1 = 3 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$3 \times 2 = 6 \equiv 1 \pmod{5}$$

Таким образом, обратный элемент к 3 по модулю 5 равен 2.

$$4) \text{ Умножим обе части сравнения } 3k \equiv 4 \pmod{5} \text{ на } 2:$$

$$k \equiv 4 \times 2 \pmod{5}$$

$$k \equiv 8 \pmod{5}$$

$$k \equiv 3 \pmod{5}$$

Значит, $k = 5m+3$ для некоторого целого числа m .

$$5) \text{ Подставим } k \text{ обратно в выражение для } x:$$

$$x = 3k+2$$

$$x = 3(5m+3) + 2$$

$$x = 15m+9+2 \quad x = 15m+11$$

$$x = 15m+11 \quad x = 15m+11$$

Наименьшее натуральное число x получается при $m=0$:

$$x=11$$

Ответ: 11

Задача 2.

У Ани есть несколько карандашей. Когда она пытается разложить их:

- по 4 карандаша в коробку - остаётся 1 лишний;
- по 7 карандашей в коробку - остаётся 4 лишний.

Какое наименьшее количество карандашей может быть у Ани?

Решение: 1) Нам нужно найти число карандашей x , которое:

При делении на 4 даёт остаток 1: $x \equiv 1 \pmod{4}$

При делении на 7 даёт остаток 4: $x \equiv 4 \pmod{7}$

2) Числа 4 и 7 - взаимно простые, значит, теорема применима. Решение будет единственным по модулю $4 \times 7 = 28$.

3) Находим общий модуль: $M = 4 \times 7 = 28$

Для первого условия ($x \equiv 1 \pmod{4}$): $M_1 = 28 \div 4 = 7$

Находим $y_1 : 7 \times y_1 \equiv 1 \pmod{4}$

$7 \equiv 3 \pmod{4}$, поэтому решаем $3 \times y_1 \equiv 1 \pmod{4}$

Подходит $y_1 = 3$ ($3 \times 3 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$)

Для второго условия ($x \equiv 4 \pmod{7}$): $M_2 = 28 \div 7 = 4$

Находим $y_2 : 4 \times y_2 \equiv 1 \pmod{7}$

Подходит $y_2 = 2$ ($4 \times 2 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$)

Собираем решение: $x = 1 \times 7 \times 3 + 4 \times 4 \times 2 = 21 + 32 = 53$

Находим остаток от деления на 28: $53 \div 28 = 1$ с остатком 25 ($x \equiv 25 \pmod{28}$)

Ответ: Наименьшее количество карандашей - 25.

Задача 3.

Генерал решил построить солдат в колонну по 4, но при этом солдат Морозов остался лишним. Тогда генерал построил солдат в колонну по 5. Но опять Морозов остался лишним. Когда и в колонне по 6 Морозов оказался лишним, генерал назначил ему наряд вне очереди, а после этого в колонне по 7 Морозов нашел себе место и никого лишнего не было. Какое наименьшее число солдат могло быть у генерала?

Решение: 1) Запишем условия математически:

$$x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$x \equiv 1 \pmod{6}$$

$$x \equiv 0 \pmod{7}$$

2) Заметим, что первые три условия можно объединить: $x-1$ должно делиться на 4, 5 и 6.

$$\text{НОК}(4,5,6) = 60, \text{ поэтому } x-1 = 60k \Rightarrow x = 60k + 1$$

3) Подставим в последнее условие: $60k + 1 \equiv 0 \pmod{7}$

$$60 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 4k + 1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow 4k \equiv 6 \pmod{7}$$

4) Найдем обратный к 4 по модулю 7: $4 \cdot 2 = 8 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow k \equiv 6 \cdot 2 \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow k = 7m + 5$

5) Подставим обратно:

$$x = 60 \cdot (7m + 5) + 1 = 420m + 301$$

Ответ: Наименьшее решение при $m=0$: $x = 301$

Задача 5.

Робот считает шаги. Когда он считает до 3, то сбивается и начинает сначала. Когда считает до 5 - останавливается на 4 шаге. Когда считает до 7 - останавливается на 6. Сколько шагов сделал робот, если их меньше 100?

Решение:

Из условия можно предположить, что когда робот сбивается и начинает сначала - может означать остаток 0, следовательно:

$$x \equiv 0 \pmod{3}$$

$$x \equiv 4 \pmod{5}$$

$$x \equiv 6 \pmod{7}$$

$$x = 3k \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow 3k \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow k \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow k = 5m + 3 \Rightarrow x = 15m + 9$$

$$15m + 9 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 15m \equiv -3 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow m \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow m = 7n + 4 \Rightarrow x = 105n + 69$$

$$\text{При } n=0: x=69 < 100$$

Проверяем:

$$69 \div 3 = 23 + 0$$

$$69 \div 5 = 13 + 4$$

$$69 \div 7 = 9 + 6$$

Ответ: Робот сделал 69 шагов.

5) Применение остатков в задачах на делимость

Задача 1. (Алгебра. 9 класс. Учебник. Углубленный уровень - Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и др.)

Докажите, что:

а) $13^n + 5$ кратно 6;

б) $7^{2n} - 1$ кратно 24;

в) $15^n + 6$ кратно 7.

Доказательство:

а) $13^n + 5 \equiv 1^n + 5 \pmod{6} \equiv 0 \pmod{6}$, значит, $13^n + 5$ кратно 6.

б) $7^{2n} - 1 = 49^n - 1 \equiv 1^n - 1 \pmod{24} \equiv 0 \pmod{24}$, значит, $7^{2n} - 1$ кратно 24.

в) $15^n + 6 \equiv 1^n + 6 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}$, значит, $15^n + 6$ кратно 7.

Задача 2. (Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях. Учебник (профильный уровень) - Мордкович А.Г., Семенов П.В.)

а) на 3 числа $A = 13^{16} - 2^{25} \cdot 5^{15}$.

Решение: $13 \equiv 1 \pmod{3}$, $2 \equiv -1 \pmod{3}$, $5 \equiv -1 \pmod{3}$, значит

$A \equiv 1^{16} - (-1)^{25} (-1)^{15} = 1 - 1 = 0$, т.е. искомый остаток равен нулю, и A делится на 3.

Ответ: 0

б) 17^{63} на 14.

Решение:

$17 \equiv 3 \pmod{14}$,

$17^2 = 17 \cdot 17 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{14}$,

$17^3 = 17^2 \cdot 17 \equiv 9 \cdot 3 \equiv 13 \pmod{14}$,

$17^4 = 17^3 \cdot 17 \equiv 13 \cdot 3 \equiv 11 \pmod{14}$,

$17^5 = 17^4 \cdot 17 \equiv 11 \cdot 3 \equiv 5 \pmod{14}$,

$17^6 = 17^5 \cdot 17 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{14}$,

$17^7 = 17^6 \cdot 17 \equiv 1 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{14}$ и т.д.

Период повторения разных остатков равен 6, следовательно

$17^{63} = 17^{6 \cdot 10 + 3} \equiv 17^3 \equiv 13 \pmod{14}$, и остаток равен 13.

Ответ:13

Задача 3.

Докажите, что сумма $84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90$ делится и на 7, и на 87.

Доказательство: $84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90 \equiv 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \equiv 21 \equiv 0 \pmod{7}$, что и требовалось доказать.

$84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90 \equiv -3 + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 \equiv 0 \pmod{87}$, ч.т.д.

б) Остатки в степенях и периодах

Задача 4. (малая теорема Ферма)

Докажите, что $17^{48} - 1$ делится на 35.

Решение:

1) Разложим 35: $35 = 5 \times 7$.

2) Докажем делимость на 5: По малой теореме Ферма: $17^4 \equiv 1 \pmod{5}$ (так как 5 простое и 17 не делится на 5).

Тогда $17^{48} = (17^4)^{12} \equiv 1^{12} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 17^{48} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$.

3) Докажем делимость на 7: $17 \equiv 3 \pmod{7}$.

По малой теореме Ферма: $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

$17^{48} = (3^6)^8 \equiv 1^8 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 17^{48} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

4) Так как $17^{48} - 1$ делится и на 5, и на 7, и $(5, 7) = 1$, то оно делится на 35.

Ответ: Доказано.

Задача 5.

Докажите, что если $x^2 + y^2 : 7$, то $x : 7$ и $y : 7$

Решение:

1) Рассмотрим возможные остатки при делении на 7.

Любое целое число при делении на 7 даёт остаток от 0 до 6. Рассмотрим квадраты этих остатков по модулю 7:

$$0^2 \equiv 0 \pmod{7},$$

$$1^2 \equiv 1 \pmod{7},$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$3^2 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$4^2 \equiv 2 \pmod{7},$$

$$5^2 \equiv 4 \pmod{7},$$

$$6^2 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Таким образом, квадраты чисел по модулю 7 могут давать только остатки: 0, 1, 2, 4.

2) Анализируем условие $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{7}$

Это означает, что сумма двух квадратов должна делиться на 7.

Рассмотрим возможные комбинации остатков x^2 и y^2 :

Если $x^2 \equiv 0 \pmod{7}$, то $y^2 \equiv 0 \pmod{7}$ (так как $0 + 0 = 0$ - единственная комбинация, дающая 0).

Другие комбинации:

$1+6 \equiv 0$ – но 6 не является квадратом по модулю 7,

$2+5 \equiv 0$ – 5 не является квадратом,

$4+3 \equiv 0$ – 3 не является квадратом.

Следовательно единственная возможность: $x^2 \equiv 0 \pmod{7}$ и $y^2 \equiv 0 \pmod{7}$.

3) Докажем, что если $x^2 \equiv 0 \pmod{7}$, то $x \equiv 0 \pmod{7}$.

Это следует из того, что 7 – простое число, и если x^2 делится на 7, то x делится на 7 (по свойству простых чисел: если $\frac{p}{ab}$, то $\frac{p}{a}$ или $\frac{p}{b}$).

Из $x^2 \equiv 0 \pmod{7}$ следует $x \equiv 0 \pmod{7}$,

из $y^2 \equiv 0 \pmod{7}$ следует $y \equiv 0 \pmod{7}$.

Ответ: Если $x^2 + y^2$ делится на 7, то x и y оба делятся на 7.

Другими словами, уравнение $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{7}$ имеет решения только при $x \equiv 0 \pmod{7}$ и $y \equiv 0 \pmod{7}$.

Задача 7. («Математические кружки» (Н. Б. Васильев, С. А. Генкин))

Глядя в таблицу умножения по модулю 3, найдите в ней доказательство такого утверждения: если произведение двух целых чисел делится на 3, то одно из них делится на 3. Верно ли аналогичное утверждение для 4,5,6,7,10?

Решение:

Интересующее нас утверждение можно переформулировать так: если оба сомножителя не делятся на 3, то и произведение не делится на 3. Другими словами, нас интересует произведение ненулевых остатков, так что на первую строку и первый столбец (не считая тех, что с множителями, то есть в квадратной части таблицы) не смотрим. А в остальных четырёх клеточках только 1 и 2, нулей нет. Для $n = 4$ есть нуль $2 \cdot 2$, для $n = 6$ нули тоже есть (скажем, $2 \cdot 3$), для $n = 10$ тоже (скажем, $2 \cdot 5$). А для $n = 5$ и $n = 7$, как можно убедиться, посмотрев на таблицы, нулей нет

Задача 8. («Введение в теорию чисел» (И. М. Виноградов, А. А. Бухштаб))

Покажите, что записанное обычным образом (в десятичной системе) целое положительное число сравнимо по модулю 9 с суммой своих цифр. Как из этого вывести признаки делимости на 9 и на 3? (Они говорят, что число делится на 9 (на 3) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9 (на 3).)

Решение:

Числа 10, 100, 1000, ... все сравнимы с 1 по модулю 9 (потому что $100 \dots 0 - 1 = 99 \dots 9$ делится на 9).

Можно ещё заметить, что $10 \equiv 1 \pmod{9}$ и потому $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{9}$.

Поэтому, скажем, $2357 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 1 \equiv 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \equiv 2 + 3 + 5 + 7 \pmod{9}$, и вообще любое число сравнимо со своей суммой цифр по модулю 9, так что если одно делится на 9, то и другое тоже. Сравнимость по модулю 9 влечёт за собой сравнимость по модулю 3, так что для 3 годится то же рассуждение.

7) Решение олимпиадных задач

Задача 1. (Сборник олимпиадных задач по математике» (Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго)

Может ли сумма квадратов двух нечетных чисел быть квадратом четного числа?

Решение: По условию числа k, p – нечетно, тогда

$$k = 2n + 1, k^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1, k^2 \equiv 1 \pmod{4}; p^2 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Получим, $k^2 + p^2 \equiv 2 \pmod{4}$, значит, квадратом быть не может, т.к. остаток может быть 0 или 1.

Ответ: не может.

Задача 2. («Введение в теорию чисел» (И. М. Виноградов, А. А. Бухштаб, Н. Н. Воробьев)

1.6. Найдите наименьшие неотрицательные остатки для $6^k + 1 \pmod{17}$ при $k=1,2,3,4,5$.

Решение: $6^1 + 1 = 7, 6^2 + 1 \equiv 2 + 1 = 3 \pmod{17}$.. Дальше проще считать сразу «в остатках», учитывая предыдущие найденные остатки для степеней шестёрки, перемножая нужные из них и затем добавляя к результату 1: $6^3 + 1 \equiv 6 \cdot 2 + 1 = 13, 6^4 + 1 \equiv 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5, 6^5 + 1 \equiv 6 \cdot 4 + 1 \equiv 7 + 1 = 8$.

Задача 3. («Задачи по теории чисел» (В. Н. Серпинский, И. М. Виноградов, В. В. Прасолов)

Докажите, что число $a^3 + b^3 + 4$ не является точным кубом натурального числа.

Доказательство:

Остаток x при делении на 9	Остаток x^3 при делении на 9
0	0
1	1
2	8
3	0
4	1

5	8
6	0
7	1
8	8

Кубы натуральных чисел дают остатки 0, 1, 8 при делении на 9. Сумма двух кубов натуральных чисел дает остатки 0, 1, 2, 7, 8 при делении на 9.

А сумма двух кубов, увеличенная на 4, дает остатки, 4, 5, 6, 2, 3 при делении на 9. Среди остатков нет ни 0, ни 1, ни 8. Значит, данная сумма не может быть точным квадратом.

Ответ: 3, 5, 7, 8, 13

Задача 4.

Найдите последнюю цифру числа 7^{2025} .

Решение:

1) Последняя цифра степеней 7 повторяется циклически:

$$7^1 \rightarrow 7,$$

$$7^2 \rightarrow 9,$$

$$7^3 \rightarrow 3,$$

$$7^4 \rightarrow 1,$$

$$7^5 \rightarrow 7 \text{ (цикл длины 4)}.$$

2) Найдем остаток $2025 \div 4$:

$2025 = 4 \times 506 + 1$, значит, степень 7^{2025} оканчивается так же, как 7^1 .

Ответ: 7

Задача 5.

Докажите, что $7^{2014} + 9^{2014} : 10$

Решение: Найдем несколько первых степеней семёрки по модулю 10:

$$7^1 = 7, \quad 7^2 = 49 \equiv 9, \quad 7^3 = 7 \cdot 49 \equiv 7 \cdot 9 \equiv 3, \quad 7^4 \equiv 7 \cdot 3 \equiv 1.$$

Так как $2014 = 4 \cdot 503 + 2$, то $7^{2014} = (7^4)^{503} \cdot 7^2 \equiv 1^{503} \cdot 9 \equiv 9 \pmod{10}$.

Аналогично для степеней девятки: $9^2 = 81 \equiv 1$, $\Rightarrow 9^{2014} = (9^2)^{1007} \equiv 1^{1007} \equiv 1$. Следовательно, $7^{2014} + 9^{2014} \equiv 9 + 1 \equiv 0 \pmod{10}$.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-
математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое
образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024г.
Паньженский В. И.

Задание

По ВКР студента Поповой Элины Наилевны

Тема работы «Арифметика остатков на факультативе по математике».

Утверждена приказом по Университету от «25.12» 2024г. № 1350/0

Срок сдачи студентом законченной работы «6» мая 2025_г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов:	Сроки выполнения этапов	Примечания
1.	Анализ научно-методической литературы по теме (теория чисел, модулярная арифметика, школьные программы).	Сентябрь 2024 г.	Выполнено
2.	Изучение ФГОС и примерных программ по математике для 5–11 классов.	Октябрь 2024 г.	Выполнено
3.	Определение структуры работы, формулировка целей и задач.	Октябрь 2024 г.	Выполнено
4.	Анализ учебников (5–11 классы) на наличие элементов арифметики остатков.	Ноябрь 2024 г.	Выполнено
5.	Исследование методических подходов к преподаванию темы (деление с остатком, НОД/НОК, сравнения по модулю).	Ноябрь 2024 г.	Выполнено
6.	Составление программы факультативного курса (30 часов).	Январь 2025 г.	Выполнено
7.	Подбор и систематизация задач (базовые, олимпиадные, прикладные).	Февраль 2025 г.	Выполнено
8.	Разработка технологических карт для ключевых занятий.	Март 2025 г.	Выполнено
9.	Оформление работы.	Апрель 2025 г.	Выполнено
10.	Подготовка к защите.	Май 2025 г.	Выполнено

Дата выдачи задания «28» 10 2024г.

Руководитель Мож Мокеева О.А
(подпись)

Задание принял к исполнению В. Полюхов Е.Н.
(подпись)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН очной
формы обучения
Поповой Элины Наилевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Попова Элина Наилевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «*Арифметика остатков на факультативе по математике*», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



ПОДПИСЬ
12.05.25

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 12.05.25

ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  О.А.Монахова

ПОДПИСЬ И.О.Ф.

ПРОТОКОЛ

Проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Арифметика остатков на факультативе по математике»

Студентки 4 курса Поповой Элины Наилевны

Направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»

Профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Монахова О. А.



СПРАВКА

о результатах проверки текстового документа
на наличие заимствований

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования "Пензенский государственный
университет"

ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНА В СИСТЕМЕ АНТИПЛАГИАТ.ВУЗ

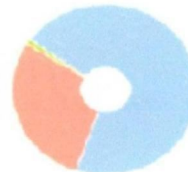
Автор работы: Попова Элина Наилевна
Самоцитирование
рассчитано для: Попова Элина Наилевна
Название работы: Арифметика остатков на факультативе по математике
Тип работы: Выпускная квалификационная работа
Подразделение: направление подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование" профиль подготовки "Математика"

РЕЗУЛЬТАТЫ

■ ОТЧЕТ О ПРОВЕРКЕ КОРРЕКТИРОВАЛСЯ: НИЖЕ ПРЕДСТАВЛЕНЫ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ ДО КОРРЕКТИРОВКИ

СОВПАДЕНИЯ	29.42%
ОРИГИНАЛЬНОСТЬ	70.08%
ЦИТИРОВАНИЯ	0.51%
САМОЦИТИРОВАНИЯ	0%

ДАТА ПОСЛЕДНЕЙ ПРОВЕРКИ: 12.05.2025



Структура документа: Проверенные разделы: основная часть с.4-24, 25-62, 63-64, 80-84, содержание с.1, приложение с.68-79, введение с.2-4, 24-25, выводы с.63, 79-80
Модули поиска: Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте; Переводные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте; Переводные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте; Переводные заимствования; СМИ России и СНГ; Шаблонные фразы; Коллекция НБУ; Кольцо вузов; Перефразирования по коллекции IEEE; IEEE; Публикации eLIBRARY; Переводные заимствования по коллекции Гарант: аналитика; ИПС Адилет; Цитирование; Патенты СССР, РФ, СНГ; Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте; СПС ГАРАНТ: аналитика; Диссертации НББ; Публикации РГБ; Медицина; Публикации РГБ (переводы и перефразирования); Сводная коллекция ЭБС; Публикации eLIBRARY (переводы и перефразирования); Кольцо вузов (переводы и перефраз...

Руководитель ВКР

12.05.25

дата, подпись

О. А. Монахова

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Арифметика остатков на факультативе по математике»
студентки Поповой Элины Наилевны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

В рамках представленной работы были рассмотрены методические аспекты изучения арифметики остатков в школьном курсе математики, разработана программа факультативного курса для учащихся 8 класса, направленная на углубленное изучение этой темы, а также составлены технологические карты по ключевым темам, обеспечивающие дифференцированный подход к обучению.

Факультативный курс, включает основные идеи и понятия, встречающиеся в нестандартных задачах по арифметике остатков с примерами для каждого раздела; содержание курса с календарно-тематическим планированием; задачный материал к каждому тематическому разделу. Задачный материал разделен на уровни сложности: базовый, средний и повышенный.

Работа Поповой Э.Н. заслуживает оценки «хорошо» и может быть использована в учебном процессе учителем при подготовке обучающихся.

Руководитель ВКР:
Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,
доцент, кандидат физико-математических наук

