

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Методические аспекты изучения функций с использованием электронных
образовательных ресурсов»**

Студент

 11.05.26

Учайкина Ксения Николаевна

(подпись, дата)

(ФИО полностью)

Руководитель

 11.05.26

Журавлева Е.Г.

(подпись, дата)

(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

 15.06.26

Журавлева Е.Г.

(подпись, дата)

(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И. о. заведующего кафедрой

 01.06.26

Паньженский В.И.

(подпись, дата)

(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 26.06.26 № 19)

Секретарь ГЭК

 26.06.26

Журавлева Е.Г.

(подпись, дата)

(фамилия, инициалы)

Пенза 2026

Оглавление

Введение.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФУНКЦИЙ.....	5
1.1 Цифровые технологии как часть современной методики преподавания математики.....	5
1.2 Возможности использования электронных образовательных ресурсов при изучении функций	10
1.3 Содержание темы «Функция» в курсе алгебры 7-9 классов	17
ГЛАВА 2 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ (GEOGEBRA И DESMOS) ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФУНКЦИЙ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ.....	23
2.1 Повышение наглядности обучения через использование цифровых средств визуализации.....	23
2.2 Конспект урока по теме: «Изучение линейной функции и ее графика с использованием цифровых технологий».....	34
2.3 Конспект урока по теме: «Изучение графиков функций $y = ax^2$ и $y = a(x - m)^2$ с использованием цифровых технологий».....	47
2.4 Конспект урока по теме: «Изучение графика функции $y = \frac{1}{x+a} + b$ с применением цифрового инструмента Desmos».....	62
Заключение.....	69
Список использованных источников.....	71
Приложение 1	74
Приложение 2	80

Введение

Современное общество переживает период цифровой трансформации, которая охватывает все сферы жизнедеятельности, включая систему образования. Внедрение цифровых технологий в учебный процесс, предусмотренное федеральным проектом «Цифровая образовательная среда» и требованиями Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС), требует от учителя не только технической грамотности, но и пересмотра традиционных методик преподавания.

Тема «Функции» представляет собой один из наиболее сложных и значимых разделов школьного курса алгебры. Овладение знаниями по этой теме требует от учащихся сформированного абстрактного мышления, умения устанавливать связи между аналитической, графической и табличной формами представления зависимости. Однако у значительной части школьников наблюдаются типичные затруднения: формальное понимание определения, неспособность к динамическому восприятию преобразований и другие. Эти проблемы усугубляются ограниченностью традиционных средств обучения — статичные изображения в учебниках и рисунки на доске не позволяют учащемуся наблюдать процесс изменения графика при изменении коэффициентов в формулах. В связи с этим, необходимость формирования у учащихся осознанного и гибкого представления о функциях требует активного внедрения в учебный процесс электронных образовательных ресурсов (ЭОР).

Цель работы — разработать материалы по изучению функций с применением электронных образовательных ресурсов.

Объектом в работе будет являться процесс обучения математике в 7–9 классах школы.

Предмет — методика изучения темы «Функции» в основной школе с применением цифровых технологий.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Рассмотреть цифровые технологии в качестве инструмента современной методики преподавания математики.
2. Проанализировать возможности электронных образовательных ресурсов при изучении функций.
3. Изучить содержание функциональной линии в курсе алгебры 7–9 классов.
4. Обосновать значение динамической визуализации для повышения наглядности обучения и преодоления абстрактности функциональных понятий.
5. Охарактеризовать инструменты динамической визуализации GeoGebra и Desmos.
6. Разработать конспекты уроков с использованием цифровых технологий.

Практическая значимость работы состоит в том, что данный материал может быть использован учителями математики при подготовке к урокам, а также студентами во время прохождения педагогической практики.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников и приложений.

Первая глава посвящена теоретическим основам использования ЭОР при изучении функций: анализу цифровизации образования, возможностям динамической визуализации, а также содержанию функциональной линии в современных учебниках.

Во второй главе описываются методические рекомендации по работе с такими программами, как GeoGebra и Desmos, а также конспекты трех уроков.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФУНКЦИЙ

1.1 Цифровые технологии как часть современной методики преподавания математики

В настоящее время общество претерпевает изменения во многих сферах жизнедеятельности под влиянием процессов цифровизации. Эти изменения затрагивают фундаментальные основы социальной организации, включая систему образования. Так, образовательная система вынуждена адаптироваться к новым реалиям, ища способы внедрения цифровых технологий в учебный процесс. В частности, все это затрагивает и математическое образование в школах, что приводит к внесению коррективов в традиционные методики преподавания, среди которых: обновление подходов к подаче материала, внедрение цифровых инструментов, адаптация учебных программ и развитие новых форм взаимодействия между участниками образовательного процесса.

В таких условиях, очевидно, цифровые технологии, а именно электронные образовательные ресурсы (ЭОР), являются не только элементом методической системы учителя, но и ее дополнительным инструментом. Важно отметить, что внедрение цифровых технологий направленно не на замену, а на дополнение классических методик обучения. Их основная задача — способствовать достижению образовательных целей, установленных в Федеральном государственном образовательном стандарте (ФГОС), так как это открывает новые возможности для оптимизации взаимодействия между педагогом и учеником, расширения образовательных перспектив и повышения эффективности образовательного процесса в целом [1].

Стоит выделить, что ФГОС указывает на необходимость широкого использования новых образовательных технологий для вовлечения каждого

ученика в активный познавательный процесс [1]. Стандарт устанавливает конкретные методические требования к современному уроку, включая обоснованный выбор форм и средств обучения, специальную работу по мотивации учащихся, создание соответствующих эстетических условий, что достигается посредством применения цифровых технологий. Это направляет на мысль о том, что роль электронных средств заключается не в механической замене классических подходов, а в их методически обоснованном усилении для достижения обозначенных образовательных целей.

Вместе с тем, активная цифровизация образования, ставшая ответом на вызовы времени, соответствует и государственной политике в этой сфере. Так, инструментом реализации государственной стратегии по модернизации образования выступает проект «Цифровая образовательная среда» (ЦОС) — федеральная программа в рамках национального проекта «Образование». Под ЦОС понимается открытое цифровое пространство, объединяющее всех участников образовательного процесса и включающее информационные ресурсы, технологические средства и педагогические технологии для выполнения требований ФГОС [19]. Так, среди конкретных элементов ЦОС можно выделить официальный сайт школы, электронный журнал, корпоративный портал педагогов и многое другое. Данный проект нацелен на обеспечение высокого качества и доступности образования всех видов и уровней, и кроме того, на формирование у учащихся ценности саморазвития. При этом ЦОС не предполагает отмены традиционной классно-урочной системы, а дополняет ее цифровыми инструментами, подтверждая очевидность тренда: технологическое оснащение классов растет, цифровые устройства становятся для учеников более доступными, смещая фокус с вопроса наличия техники на проблему ее методически грамотного использования [14].

Из вышеописанного можно сделать вывод о том, что электронные технологии становятся значимым элементом методической системы учителя. Так, основатель психологической педагогики Лев Семенович Выготский в

своей работе, посвященной инструментальному методу в психологии отмечал, что включение орудия в деятельность не просто перестраивает всю структуру поведения, но и порождает новые функции, связанные с использованием применяемого орудия, что способно придать новый вид протеканию психических процессов. В настоящее время к таким орудиям можно отнести электронные образовательные ресурсы (ЭОР) [22]. В общем смысле под ЭОР понимают совокупность средств программного, информационного, технического и организационного обеспечения, электронных изданий, размещаемых на различных физических носителях и/или в сети [23]. Однако для учителя более практичным является определение через функциональное назначение, определяющее ЭОР как цифровой инструмент, специально созданный или адаптированный для решения конкретных учебно-методических задач, позволяющий реализовывать ключевые дидактические принципы, среди которых принцип наглядности, доступности, научности и другие [23].

Систематизация ЭОР в контексте преподавания математики наиболее эффективно осуществляется по их ведущей методической функции. Эта классификация соответствует типам электронных учебных модулей, принятых в крупнейших государственных хранилищах, таких как Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов (ФЦИОР) и Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов, которые являются основными источниками ЭОР, соответствующих ФГОС [7]. Можно выделить следующие основные типы:

1. Визуализаторы и интерактивные модели (информационные ЭОР). В эту группу относятся ресурсы, представляющие абстрактные математические объекты (графики функций, геометрические фигуры) в наглядной и часто динамичной форме, иллюстрируя факты, понятия и закономерности [23]. Их потенциал заключается в реализации принципа наглядности и преодоления ключевой трудности — абстрактности математических понятий. Например, математическая

модель, показывающая, как изменение коэффициента k в уравнении $y = kx + b$ влияет на угол наклона прямой, делает эту зависимость непосредственной и наблюдаемой, формируя устойчивый зрительный образ и поддерживая связь между алгебраической и графической моделями.

2. Конструкторы, симуляторы и тренажеры (практические ЭОР). Эти ресурсы (такие как GeoGebra, «1С: Математический конструктор») предоставляют среду для активных учебных действий по заданному алгоритму или для самостоятельного исследования [23]. Их ключевое достоинство — работа с динамикой и вариативностью, что соответствует принципам интерактивности и практической ориентированности. Ученик может не пассивно наблюдать, а активно участвовать в процессе, изменяя параметры функции и мгновенно наблюдая трансформацию её графика. Такой подход приближает деятельность к исследовательской, а модульность ресурсов позволяет выстраивать индивидуальные образовательные траектории.
3. Контролирующие и диагностические системы (контролирующие ЭОР). Эти инструменты предназначены для повторения, закрепления и оценки знаний с автоматизированной проверкой [23]. Их ценность для математики — в возможности оперативно выявлять типовые ошибки в вычислениях или логике решения, обеспечивая мгновенную обратную связь. Это экономит время учителя на рутинной проверке и позволяет сконцентрироваться на анализе причин затруднений, реализуя принцип доступности через адаптацию последующих заданий к уровню ученика.

Для повышения эффективности ЭОР, их часто интегрируют с современными педагогическими технологиями. По этой причине они редко существуют изолированно. Например, интегративная модель может стать как основой для исследовательской деятельности в проблемном обучении, так и

коммуникативной практикой при обсуждении гипотез в группах [23]. А игровые элементы в тренажерах позволят повысить мотивацию, делая процесс отработки навыков более увлекательным.

Среди преимуществ использования ЭОР можно выделить:

1. Повышение эффективности обучения, реализуемое через применение более наглядных учебных материалов, автоматизацию рутинных процессов контроля знаний и возможность индивидуализации образовательного процесса.
2. Развитие познавательной активности, что осуществляется посредством интерактивности образовательного процесса, организации дистанционного обучения, активизации самостоятельной работы учащихся.
3. Методическое совершенствование, которое достигается благодаря автоматизации проверки заданий, возможности визуализации сложных процессов, новым формам представления учебного материала.

Однако можно выделить и недостатки внедрения ЭОР:

1. Технические ограничения, включающие требование специального оборудования, возможные сбои с работе систем и необходимость постоянного доступа к интернету.
2. Педагогические риски, подразумевающие сложность контроля самостоятельной работы, снижение живого общения между педагогом и учеником, риск формального освоения материала.
3. Организационные проблемы, содержащие дополнительные финансовые затраты на оборудование, сложность адаптации некоторых категорий учащихся, необходимость переподготовки педагогических кадров.

Стоит отметить также и условие эффективного применения ЭОР. Оно заключается в объединении комплексного подхода (сочетание традиционных и

цифровых методов обучения, грамотная интеграция ЭОР в учебный процесс, постоянный мониторинг эффективности применения) и методического обеспечения (подготовка педагогов к работе с ЭОР, разработка качественных образовательных материалов, создание системы технической поддержки).

Таким образом, все вышеперечисленное позволяет сделать вывод о том, что цифровая трансформация современного образования представляет собой не просто технологическое обновление, а глубокий методический процесс, требующий переосмысления традиционных подходов к преподаванию математики. Электронные образовательные ресурсы выступают не в роли замены классических методик, а в качестве их эффективного дополнения и усиления, что полностью соответствует требованиям ФГОС и стратегическим ориентирам государственной политики в сфере образования (проект «Цифровая образовательная среда»).

1.2 Возможности использования электронных образовательных ресурсов при изучении функций

Потенциал ЭОР в обучении математики выходит за рамки банальной помощи в вычислениях или автоматической проверки ответов. Многообразие цифровых инструментов позволяет качественно изменять сам характер познавательной деятельности [7]. Однако учителю важно понимать, что для решения конкретной методической задачи необходимо уметь осуществлять обоснованный выбор того или иного образовательного ресурса. При подборе цифрового инструмента, необходимо опираться на следующие критерии:

1. Научность. Важно обращать внимание на точность содержания ресурса и отсутствия в его материалах логических или иных ошибок либо упрощений, искажающих суть понятий [22].
2. Интерактивность и наглядность. Данный критерий предполагает возможность активного взаимодействия между субъектами учебного

процесса, например, при обмене информацией. А также позволяет преобразовывать абстрактные понятия в доступные образы, что способствует формированию чётких представлений и понятий [14].

3. Удобство интерфейса и доступность. Рабочее пространство выбранного цифрового инструмента должно быть интуитивно понятным учащимся и не требовать длительного освоения. Кроме того, важно, чтобы установка не была сложной, а работа ресурса могла осуществляться на различных устройствах (компьютер, планшет, телефон).
4. Соответствие конкретной учебной задаче. Бессмысленно использовать ЭОР только ради самого факта применения информационных технологий. Его выбор должен обуславливаться конкретной дидактической целью: введение нового понятия, отработка навыка, исследование свойства, контроль усвоения. Например, для демонстрации влияния коэффициента k на график линейной функции более эффективен динамический конструктор.
5. Адаптивность. Целесообразно использовать ресурс, который позволяет учитывать индивидуальные особенности учащихся: уровень подготовки, темп работы, типичные ошибки. Адаптивные системы могут предлагать задания разного уровня сложности и подстраивать траекторию обучения.

При подготовке к уроку, учителю стоит не только опираться на перечисленные критерии, но и заранее продумывать методику интеграции ЭОР в различные этапы урока. Чтобы использовать информационные технологии наиболее эффективно, стоит обращать внимание на конкретный этап урока:

1. На этапе актуализации знаний следует подбирать такие цифровые инструменты, которые позволят быстро повторить ранее изученный материал, например, с помощью интерактивных тестов или заданий на соответствие.

2. На этапе объяснения нового материала техника позволяет предусмотреть способы наглядной демонстрации динамических моделей, иллюстрирующих, например, зависимость между величинами, преобразования графиков, влияние параметров.
3. На этапе закрепления компьютерные системы можно использовать для организации индивидуальной работы с тренажёрами, где каждый учащийся может выполнить необходимое количество заданий в своём темпе и получить мгновенную обратную связь.
4. На этапе контроля информационные технологии способны обеспечить проведение автоматизированных проверочных работ с последующим анализом типичных ошибок.

Важно подчеркнуть, что на сегодняшний день существует ряд российских цифровых образовательных платформ, более подробное рассмотрение которых позволит в большей степени сформировать представление о тех возможностях, которые становятся доступными учителю математики и обучающимся. Можно выделить следующие российские цифровые образовательные платформы:

1. Платформа «Учи.ру». Здесь учащиеся имеют возможность обучаться в игровой форме через ряд интерактивных заданий с привлекательным дизайном. Все упражнения данной платформы необходимо выполнять последовательно, то есть нельзя перейти на следующую тему или вопрос без выполнения текущего упражнения. Существует специальная система наград и поощрений, которая мотивирует учащихся и создает позитивный эмоциональный фон. Кроме того, встроенная статистика по выполненным заданиям позволяет отслеживать свой прогресс. Для педагогов платформа предоставляет автоматизированную систему проверки работ, что существенно экономит время на оценивание [18].
2. Интерактивная тетрадь Skysmart. Учителя формируют задания в электронном формате и отправляют ученикам специальную ссылку

для доступа к материалам, а учащиеся выполняют их сразу после того, как получают доступ от своего учителя. Проверка также производится автоматически, что облегчает работу учителя и избавляет от однообразной бумажной волокиты, а также оставляет ему больше времени для подготовки к следующим урокам. Особенность платформы заключается в её образовательной глубине: она способствует более эффективному погружению учащихся в изучаемый материал. Такой подход приносит пользу как обучающимся, так и преподавателям, поскольку повышает качество усвоения знаний и оптимизирует процесс обучения [17].

3. СберКласс. Относительно новая цифровая образовательная платформа, которая позволяет педагогам создавать персонализированные учебные маршруты для каждого учащегося. Платформа автоматизирует рутинные процессы, освобождая время учителя для творческой работы. Данный сервис сочетает в себе два формата обучения, он позволяет заниматься не только в онлайн режиме, но и предусматривает вариант оффлайн образования в школе или дома. В СберКлассе возможно выполнять не только индивидуальные задания, но и парные проекты, заниматься групповыми активностями. Такой подход способствует развитию важных навыков, среди которых: коммуникативные компетенции, лидерские качества, командные взаимодействия. Учебный материал структурирован в виде модульных блоков, что помогает учащимся лучше выявлять ключевые идеи и закономерности, которые часто теряются при традиционном поурочном подходе. Отличительной особенностью является постоянное обновление заданий, благодаря чему обеспечивается честность и эффективность образовательного процесса, ведь учащиеся не могут списать или найти ответы в интернете [16].

4. «ЯКласс». Популярная среди педагогов и учащихся образовательная платформа отличается тем, что её учебные материалы разрабатываются опытными специалистами в строгом соответствии с ФГОС и актуальными методическими рекомендациями. Автоматизированная система позволяет не проверять горы тетрадей, а просто выслать задания каждому ученику, которые появятся в их личных кабинетах, доступные для прохождения. Платформа самостоятельно проверяет все выполненные работы и формирует детальную статистику успеваемости каждого ученика. Учителю предоставляется выбор между готовыми заданиями и созданием собственных образовательных материалов. Кроме того, система построена таким образом, что учащиеся могут не только выполнять проверочные работы, но и анализировать свои ошибки, а при повторном прохождении заданий у них есть шанс исправить недочёты и улучшить результаты [24].

Благодаря разнообразию функционала описанных образовательных платформ, учитель способен организовывать свои уроки наиболее интересно и эффективно для своих учеников.

Отдельно стоит затронуть специфику применения ЭОР при изучении разделов темы «Функции». В настоящий момент в методике преподавания математики сложились две основные трактовки понятия функции: генетическая (классическая), трактующая функцию как зависимость одной переменной от другой, и логическая (теоретико-множественная), определяющая функцию как специальное отношение между двумя множествами. В современной школьной практике ведущим является генетический подход с элементами логического [22]. Это означает, что при изучении функций акцент делается на динамике и наглядности, а также связи с реальными процессами, что открывает широкие возможности для применения ЭОР.

В теории и практике обучения сложилась определённая методическая схема изучения функций, состоящая из пяти ключевых этапов [14]:

1. Мотивация введения, заключающая в себе решение практических задач, приводящих к формуле нового вида.
2. Формулировка определения, предусматривающая выделение характерных признаков, введение терминологии.
3. Построение графика, включающее формирование графического образа.
4. Исследование свойств, содержащее анализ основных характеристик функции с опорой на график и формулу.
5. Применение, подразумевающее решение задач на использование изученных свойств.

ЭОР способны обеспечить методическую поддержку на каждом из этих этапов, одновременно помогая педагогу преодолеть типичные познавательные трудности учащихся, к числу которых относятся: формальное понимание определения (ученики воспринимают функцию как абстрактное правило), разрыв между аналитическим и графическим представлением (отсутствие умения устанавливать взаимно-однозначное соответствие между формулой и графиком), сложности динамического восприятия преобразований графиков (невозможность отследить процесс преобразования графика по статичному изображению в учебнике), инерционность мышления и неправомерное обобщение свойств (попытка переноса свойств одной функции на другую), трудности в исследовании (неосмысленное следование шаблонному алгоритму без получения комплексного представления о поведении функции) [14].

Более подробно стоит рассмотреть специфику применения различных типов ЭОР для разрешения некоторых трудностей, возникающих при изучении функций. На этапе введения понятия функции возникает проблема преодоления его абстрактности. Учащимся, зачастую, трудно принять, что функция представляет собой не просто формулу, а модель зависимости между

величинами в реальном мире. Здесь применимы цифровые макеты и визуализаторы, показывающие зависимость величин в реальном времени.

Например, при введении понятия функциональной зависимости можно использовать интерактивную модель, где учащийся изменяет значение одной величины (например, сторону квадрата) и мгновенно наблюдает, как меняется другая величина (площадь). Такой подход, реализующий генетическую трактовку функции, позволяет учащимся «увидеть» функциональную зависимость, а не просто заучить определение.

Кроме того, здесь полезно использовать адаптивные задания на распознавание функциональной зависимости среди различных соответствий. Учащимся предлагаются различные ситуации (таблицы, графики, описания), по которым они должны определить, является ли данная зависимость функцией. Мгновенная обратная связь способна обеспечить своевременную коррекцию неверных представлений.

Частой проблемой для учеников является невозможность установить связь между формулой и её графическим образом. Правила сдвигов и растяжений обычно заучиваются ими формально, без понимания геометрической причины. Эффективным вариантом решения этой проблемы являются динамические конструкторы, такие как GeoGebra и Desmos. Эти инструменты позволяют не только строить графики функций по формуле, но и мгновенно изменять параметры с помощью ползунков. Учащийся самостоятельно может изменять, например, коэффициент k линейной функции $y = kx + b$ и в реальном времени наблюдать изменение угла наклона прямой.

Помимо всего перечисленного, ЭОР позволяют сравнивать несколько графиков одновременно, что помогает выявить общие закономерности и частные различия, а также формировать умение переходить от одной формы представления функции к другой (благодаря выполнению упражнений на построение графика по заданной формуле, на составление таблицы значений по графику и других).

Из всего вышеописанного можно сделать вывод о том, что потенциал электронных образовательных ресурсов значительно превосходит простую помощь в вычислениях и проверке ответов. Цифровые инструменты позволяют организовать исследовательскую работу на занятии, что значительно эффективнее механического заучивания правил. Однако, чтобы добиться хороших результатов после внедрения информационных технологий в структуру урока, важно грамотно выбирать цифровые инструменты, учитывая такие критерии, как научность, интерактивность, наглядность, удобство интерфейса, доступность и адаптивность. Необходимо заранее планировать интеграцию ЭОР в разные этапы урока. Российские платформы («Учи.ру», Skysmart, СберКласс, «ЯКласс») предоставляют широкие возможности для организации обучения. Вместе с тем, при изучении функций ЭОР помогают преодолеть типичные трудности: формальное понимание определений, разрыв между аналитическим и графическим представлением, сложности восприятия преобразований графиков. А динамические конструкторы (GeoGebra, Desmos), интерактивные модели и адаптивные тренажёры становятся отличными помощниками, выступая в качестве инструментов для формирования целостного представления о функциональных зависимостях.

1.3 Содержание темы «Функция» в курсе алгебры 7-9 классов

Изучение функций занимает важное место в школьной программе, поскольку позволяет устанавливать закономерности изменения различных величин в зависимости от других величин, что имеет существенное образовательное и практическое значение [15]. Вопрос о включении темы «Функция» в школьный курс алгебры поднимался ещё в XIX веке такими известными деятелями науки, как М.В. Остроградский и В.П. Шереметьевский, что в итоге привело к формированию классической системы математического образования, где функциональная идея стала одной из определяющих [22].

Благодаря изучению функций в современной школе осуществляются:

1. Ознакомление учащихся с идеями связи, изменчивости, непрерывности.
2. Развитие способности видеть и анализировать зависимости между изменениями различных объектов.
3. Формирование умения работать с абстрактным материалом.

Согласно требованиям ФГОС после изучения функциональной линии в основной школе учащиеся на базовом уровне должны:

- уметь оперировать понятиями: функция, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, промежутки возрастания, убывания, наибольшее и наименьшее значения функции;
- уметь оперировать понятиями: прямая пропорциональность, линейная функция, квадратичная функция, обратная пропорциональность, парабола, гипербола;
- уметь строить графики функций;
- использовать графики для определения свойств процессов и зависимостей, для решения задач из других учебных предметов и реальной жизни;
- уметь выражать формулами зависимости между величинами [2].

Одними из наиболее широко используемых в российской школе являются учебники по алгебре под редакцией Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой. Далее будет рассмотрено, как в учебниках этих авторов на протяжении 7-9 классов выстраивается изучение функционально-графической линии.

В 7 классе учащиеся впервые знакомятся с понятием функции на систематическом уровне. Изучение начинается с темы «Числовые промежутки», которая выполняет пропедевтическую функцию. Этот материал является инструментальной основой для дальнейшего изучения свойств функций. На этом этапе вводятся понятия отрезка, интервала, полуинтервала и

другие понятия. Далее в теме «Что такое функция» вводится центральное понятие. Авторы используют индуктивный подход: сначала на четырёх конкретных примерах (площадь квадрата от стороны, путь автомобиля от времени и другие) демонстрируется зависимость между переменными величинами [2]. В каждом примере выделяются независимая и зависимая переменные. Лишь после этого формулируется общее определение: зависимость одной переменной от другой, при которой каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной, называется функцией. Здесь же вводятся основные термины: аргумент, функция (как зависимая переменная), значения функции, область определения и рассматриваются три способа задания функции: аналитический, графический и табличный. Затем отрабатываются практические навыки (составление таблиц значений функции, нахождение области определения, решение обратной задачи — отыскание аргумента по известному значению функции) и вводится понятие графика функции (с подробным алгоритмом построения).

Далее авторы учебника разбивают изучение линейной функции на две темы. Сначала рассматривается понятие прямой пропорциональности (как функции вида $y = kx + b$, где $k \neq 0$, x — независимая переменная) и её графика. Приводятся содержательные примеры (зависимость массы от объёма, пути от времени, стоимости от массы) [2]. Строится график «по точкам», после чего делается обобщение: графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат. Рассматривается зависимость расположения графика от знака коэффициента k . Затем изучается тема «Линейная функция и её график», что расширяет класс изучаемых функций до вида $y = kx + b$ (k и b — некоторые числа, x — независимая переменная). Введение осуществляется через практические задачи. Приводится сравнение с прямой пропорциональностью: показывается, что график линейной функции можно получить сдвигом графика прямой пропорциональности вдоль оси Oy .

Вводится понятие углового коэффициента, рассматриваются условия параллельности и пересечения графиков [2].

Следовательно, к концу 7 класса учащиеся овладевают первоначальными функциональными понятиями, умеют строить и читать графики линейной функции и прямой пропорциональности.

В 8 классе происходит расширение и углубление знаний о функциях. Этой теме посвящена глава пятая, которая начинается с повторения и систематизации уже известного материала. Вводится новая символика (например, $f(x)$, $D(y)$, $E(y)$), а также функция обратной пропорциональности и ее график (гипербола), приводятся примеры явлений, которые могут быть описаны прямой и обратной пропорциональностью. Рассматриваются такие функции, как $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$. Описываются способы нахождения области определения функции, заданной формулой, с учётом ограничений (деление на ноль, извлечение квадратного корня). Далее вводятся новые характеристики функций. На примере графика температуры воздуха и графика функции, заданной на отрезке, рассматриваются: нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения. Даются строгие определения возрастающей и убывающей функций, вводится понятие промежутков монотонности. После чего полученные знания систематизируются при перечислении и доказательстве (аналитически) свойств для каждой функции отдельно [3].

В результате, к концу 8 класса учащиеся знакомятся с новыми видами функций и учатся исследовать функции по их графикам, выявляя нули, промежутки знакопостоянства и монотонности.

В 9 классе изучение функций продолжается и завершается знакомством с квадратичной функцией и обобщением знаний о свойствах функций. Этой теме посвящена вторая глава учебника. Изучение начинается с темы «Свойства чётности и нечётности функций», в которой вводятся новые характеристики. Даются определения чётной и нечётной функций. Приводятся примеры: $y = x^2$

— чётная функция, $y = x^3$ — нечётная функция. Отмечается, что линейная функция не обладает ни чётностью, ни нечётностью. Далее в учебнике приводится обобщающая таблица, в которой систематизированы все изученные функции: $f(x) = kx, k > 0$; $f(x) = kx + b, k < 0, b > 0$; $f(x) = \frac{k}{x}, k > 0$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x^3$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = |x|$. Для каждой функции указаны: область определения, множество значений, нули, промежутки знакопостоянства, промежутки монотонности, наибольшее и наименьшее значения, чётность или нечётность [4].

После этого изучается тема «Функция $y = ax^2$, её график и свойства». Дается определение для квадратичной функции ($y = ax^2 + bx + c$; a, b, c — некоторые числа, x — независимая переменная, $a \neq 0$) и рассматривается пример зависимости пути от времени при равноускоренном движении. Детально исследуется влияние коэффициента a на форму и расположение графика функции $y = ax^2$: растяжение и сжатие относительно оси Ox , симметричное отражение относительно Oy . Формулируются свойства этой функции, вводится понятие параболы, вершины параболы (в данном случае — начало координат) и оси симметрии. Затем обзревается тема «Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$ » На конкретных примерах показывается, как с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy (на несколько единиц вверх или вниз) и вдоль оси Ox (на несколько единиц вправо или влево) можно получить графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$ из графика $y = ax^2$. Затем рассматривается общий случай $y = a(x - m)^2 + n$ — парабола с вершиной в точке (m, n) . В заключительном пункте аналитически показывается, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола, которую можно получить из функции $y = ax^2$ и описывается алгоритм построения графика квадратичной функции с приведением примеров [4].

В результате чего, можно сделать вывод о том, что к концу 9 класса учащиеся овладевают полной системой функциональных понятий, предусмотренных программой основной школы: знают основные виды

функций (линейную, обратную пропорциональность, квадратичную, степенные с натуральным показателем, функцию квадратного корня, функцию модуля), умеют строить их графики, исследовать свойства, выполнять простейшие преобразования графиков (параллельный перенос, растяжение/сжатие, симметрию).

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что изучение функций в учебниках Ю.Н. Макарычева происходит последовательно и системно: в 7 классе закладываются базовые понятия (функция, график, линейная функция), в 8 классе вводятся новые виды функций (обратная пропорциональность, квадратный корень, модуль) и их свойства (нули, промежутки знакопостоянства, монотонность), в 9 классе завершается знакомство с квадратичной функцией и её преобразованиями, а также вводится понятие чётности/нечётности. Такой подход обеспечивает формирование у учащихся целостной системы знаний об основных видах функций, умений строить и исследовать их графики, а также выполнять простейшие преобразования. Всё это создаёт необходимую базу для успешного продолжения обучения в старшей школе и подготовки к государственной итоговой аттестации.

ГЛАВА 2 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНСТРУМЕНТОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ (GEOGEBRA И DESMOS) ПРИ ИЗУЧЕНИИ ФУНКЦИЙ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

2.1 Повышение наглядности обучения через использование цифровых средств визуализации

Как было отмечено в первой главе, изучение функций осложняется рядом объективных трудностей, центральное место среди которых занимает абстрактность функциональных понятий. У учеников, привыкших мыслить наглядными образами, возникают трудности. Поскольку понятие функции представляет собой математическую абстракцию высокого порядка, его освоение требует от учащихся способности оперировать неочевидными взаимосвязями между элементами [7]. Школьникам трудно мыслить такими категориями, как «зависимость», «аргумент», «значение функции» без динамической визуализации. Ограниченность традиционных средств обучения не решают проблему — статичные изображения в учебнике и рисунки на доске создают образ застывшего, неподвижного объекта. Ученики сталкиваются с невозможностью наблюдения преобразований графика функции при изменении коэффициентов, что ограничивает представления о поведении функции при варьировании аргумента.

Большую роль играет динамическая наглядность в формировании представлений о функции, ее графике и различных преобразованиях. На определенном этапе обучения, у учащихся появляется возможность привлекать к процессу мышления визуальные образы, которые становятся своеобразными «проводниками» в рассуждениях. Они способны «смягчить» жесткую логику и абстрактность многих учебных понятий, благоприятствуя одновременно с этим углублению и расширению представлений о них. Их активное и целенаправленное использование строится на формировании устойчивых,

типовых наглядных образов основных учебных понятий, среди которых: функция — график, линейная функция — прямая, квадратичная функция — парабола и другие [9].

Вопрос повышения эффективности обучения школьников на уроках математики через принцип наглядности неоднократно поднимался в отечественной педагогике. Так, профессор В.А. Далингер подчеркивал, что решение данной проблемы заключается в разработке специального методического обеспечения, способного задействовать визуальное мышление учащихся [8]. Это позволило бы добиться более продуктивного освоения математических понятий и увеличить развивающий потенциал дисциплины. По мнению профессора, задействование наглядных образов в обучении может превратиться из вспомогательного иллюстративного инструмента в ведущее методическое средство, непосредственно стимулирующее математическое развитие учащихся. В этом случае особое значение приобретает язык образов, поскольку именно он выступает главным демонстративным материалом в процессе обучения и помогает осознанно работать с понятиями и логическими выводами, способствуя при этом их закреплению и «оживлению» в памяти учеников [9].

Этот вопрос волнует педагогов и в настоящее время. Так, известный ученый и педагог А.Г. Мордкович призывает сократить использование жёстких моделей, шире применять графические иллюстрации и включать больше правдоподобных рассуждений в учебный процесс. Ещё 15–20 лет назад реализация этих идей могла быть весьма трудоёмкой, но сегодня технологии развились настолько, что создание визуальных образов математических объектов осуществляется в специальных программах за считанные секунды.

Стоит также отдельно выделить основные способы влияния визуализации на понимание функций:

1. Наглядное представление зависимостей. Построение графиков функций даёт возможность наглядно отследить, каким образом

изменение аргумента влияет на значения функции. А также выявить экстремумы, асимптоты и иные свойства.

2. Связь аналитического и графического представлений. Визуальные средства создают мост между различными формами представления функций. К примеру, по графику можно попытаться восстановить аналитическое выражение функции, и наоборот — по аналитической формуле построить график. Это помогает лучше понять взаимосвязь между формулами и их графическими интерпретациями.
3. Развитие математической интуиции. Благодаря наглядности учащиеся быстрее учатся распознавать ключевые характеристики функций (область определения и значений, промежутки монотонности, экстремумы и другое) и применять эти знания на практике.
4. Гармонизация рационального и образного мышления. Визуализация задействует зрительное восприятие, которое является одним из базовых каналов получения информации для человека, и помогает сбалансировать логическое и наглядно-образное мышление. Ни для кого не секрет, что обычно основной упор в математическом образовании делается на развитие аналитических навыков. А поскольку современная психофизиология подтверждает, что больший объем информации усваивается через зрительное восприятие, то игнорировать визуализацию как педагогический инструмент было бы неправильно.
5. Применение интерактивных инструментов. Современные программные средства не ограничиваются простым построением графиков. Они также дают возможность экспериментировать с параметрами функций и наблюдать за динамикой изменений в реальном времени. Такой подход заметно углубляет понимание изучаемого материала [22].

Особо важным является вклад динамической визуализации в решение одной из наиболее устойчивых проблем, фиксируемых в педагогической практике — преодоление разрыва между аналитическим и графическим представлением функции. Мир формул и мир графиков часто существуют для учащихся как два отдельных мира, между которыми не выстраивается связь. Динамические конструкторы предоставляют возможность для организации «перекодирования» информации. Ученик может:

- ввести формулу и мгновенно получить её график (переход от аналитического к графическому представлению);
- изменяя график мышью, наблюдать, как меняется формула (обратный переход);
- построить таблицу значений по графику или по формуле, видя, как числовые данные соотносятся с геометрическим образом.

С этим способна справиться, например, такая программа, как GeoGebra (или другие подобные системы). Происходит переход от пассивного запоминания к активному исследованию, от статичного образа — к динамической модели. А также преодолевается разрыв между формулой и графиком в пользу их органичного единства. Именно эта возможность делает интерактивные конструкторы незаменимым инструментом в изучении функций.

Эффективная визуализация функциональных зависимостей требует применения специализированных цифровых инструментов, которые способны обеспечить динамическое и интерактивное представление математических объектов. Среди широкого спектра существующих программных средств для построения графиков функций и работы с ними особенно выделяются две цифровые платформы: GeoGebra и Desmos. Обе они бесплатны, доступны в веб- версиях и на мобильных устройствах, активно применяются в мировой образовательной практике и поддерживают русскоязычный интерфейс. При

этом каждый из них имеет собственную специфику и оптимальные сценарии применения.

Для начала будет рассмотрена такая универсальная образовательная среда, как GeoGebra. Она является бесплатной кроссплатформенной программой для всех уровней образования и включает инструменты для решения задач из различных дисциплин, включая алгебру, геометрию, статистику и другие. Данная мощная и универсальная платформа изначально задумывалась как инструмент для изучения геометрии. Но со временем функционал расширился: теперь GeoGebra объединяет геометрическое, алгебраическое и числовое представления в рамках единой среды.

Интерфейс программы по своей структуре напоминает графический редактор и содержит следующие основные элементы: полоса меню (служит для изменения настроек), панель инструментов (включает инструменты для создания объектов, при этом дополнительные инструменты открываются после щелчка по треугольнику в правом нижнем углу соответствующей кнопки), панель объектов (отображает введенные переменные и функции), кнопки «Отменить» и «Повторить», строка ввода (основной инструмент при работе в программе, предназначенный для ввода команд и формул, а также задания значений переменных).

GeoGebra предоставляет следующие возможности, значимые для изучения функций:

1. Построение графиков функций. Программа поддерживает построение: графиков функций вида $y = f(x)$, параметрически заданных кривых в декартовой системе координат; конические сечения (окружности, эллипсы, параболы, гиперболы) по различным параметрам.
2. Ползунки (слайдеры), являющиеся ценным инструментом для наглядного изучения функций. Благодаря им пользователь может добавить ползунок для любого параметра и в реальном времени наблюдать, как изменение его значения влияет на форму и положение

графика. Дополнительно ползунки можно анимировать, чтобы визуализировать процесс трансформации функции.

3. Динамическая связь между представлениями. GeoGebra реализует принцип двойного представления объектов: каждое выражение в окне алгебры будет соответствовать объекту в графическом окне, и наоборот. Например, при изменении уравнения все связанные с ним объекты (график, координаты) будут автоматически обновляться.
4. Инструменты для исследования функций. Встроенный язык команд позволяет: вычислять корни и экстремумы, находить интегралы и производные, создавать составные функции.
5. Геометрические построения. Программа даёт возможность создавать конструкции из точек, лучей, векторов, отрезков и прямых. Можно строить перпендикулярные и параллельные прямые, серединные перпендикуляры и биссектрисы углов, окружности и касательные, а также измерять углы, длины отрезков и площади многоугольников.
6. Таблицы и статистика. GeoGebra позволяет создавать и редактировать таблицы значений функций, связывать их с алгебраическими и геометрическими объектами. Доступны вычисления математического ожидания, дисперсии и коэффициента корреляции, а также аппроксимация множества точек кривой заданного вида.
7. Анимация и динамичность. Программа поддерживает анимацию, а также создание геометрических мест точек (локусов), зависящих от положения другой точки.
8. Создание интерактивных учебных материалов. В данной среде можно разрабатывать обучающие ресурсы. Поддерживается пошаговое построение с сохранением истории действий.

GeoGebra проявляет себя особенно эффективно в ситуациях, когда требуется исследовать влияние нескольких параметров на график функции, связать функциональную зависимость с геометрическими построениями,

создать интерактивный рабочий лист для самостоятельной работы учащихся или работать с функциями, выходящими за рамки школьной программы (например, параметрическими).

Не меньшим функционалом обладает бесплатный графический онлайн-калькулятор Desmos. В последние годы он стал крайне популярен у учителей и учащихся во всём мире. Его главными преимуществами стали простота, скорость работы и интуитивно понятный интерфейс. В отличие от GeoGebra, Desmos изначально разрабатывался именно как инструмент для построения графиков функций. И благодаря такой специализации он максимально эффективно решает свою основную задачу.

Интерфейс Desmos представляет собой интуитивно понятную веб- среду для построения графиков и математических вычислений. Его структура напоминает сочетание графического калькулятора и редактора формул и включает следующие основные элементы: строка выражений (позволяет вводить математические выражения, функции, уравнения и неравенства), графическая область (здесь строятся графики введённых функций), панель инструментов (виртуальная клавиатура), меню настроек (отвечает за настройку параметров графической области, включение/выключение отображения осей, сетки и других элементов интерфейса), кнопка «Добавить элемент» (дает быстрый доступ к созданию таблиц, добавлению текстовых заметок и другое), панель управления анимацией (дает возможность запускать автоматическую анимацию изменения параметра).

Desmos предоставляет следующие возможности, значимые для изучения функций:

1. Быстрое построение графиков. Для того, чтобы график появился на экране почти моментально, достаточно просто ввести формулу. Сервис Desmos даёт возможность визуализировать функции в декартовой, полярной и параметрической системах координат, а также создавать трёхмерные графики. На одном экране допускается

размещать сколько угодно графиков, при этом для каждого можно выбрать индивидуальный цвет. Поддерживается построение кусочно-заданных функций и графиков, включающих параметры.

2. Ползунки для управления параметрами. Desmos, как и GeoGebra, позволяет создавать ползунки для параметров. При этом реализация максимально упрощена: достаточно задать формулу с параметром, и система автоматически предложит создать соответствующие ползунки.
3. Анализ графика и особые точки. Если кликнуть на кривую, станут видны максимумы, минимумы и точки пересечения. При перемещении курсора вдоль линии графика отображаются актуальные координаты. Такой функционал существенно облегчает изучение свойств функций.
4. Таблицы значений. Предусмотрена возможность формировать таблицы для ввода и отображения данных, строить на их основе графики, а также находить формулы, которые аппроксимируют имеющиеся табличные значения.
5. Сохранение и публикация результатов. Пользователи с учётной записью могут сохранять свои проекты, создавать постоянные ссылки для публикации или передачи другим людям. Есть функция экспорта графиков в форматах PNG и SVG.

Desmos показывает наибольшую эффективность, когда требуется быстро построить и проанализировать график функции, продемонстрировать влияние параметров на график, организовать фронтальную работу с классом при наличии интерактивной доски или проектора, предложить учащимся инструмент для самостоятельных исследований, не требующий специального обучения.

Наличие рассмотренных инструментов динамической визуализации, само по себе не гарантирует повышения качества обучения. Не последнюю роль в

достижении успеха в этом вопросе играет методически грамотное использование этих средств на различных этапах урока и во внеурочной деятельности. Поэтому необходимо опираться на практические рекомендации по организации работы с GeoGebra и Desmos при изучении функций.

Одним из наиболее эффективных инструментов для анализа влияния параметров на вид и свойства функции являются ползунки (слайдеры): они преобразуют статичный график в динамическую модель, позволяя учащемуся отслеживать изменения в режиме реального времени.

Как создать ползунки в GeoGebra:

1. Сформировать ползунок: либо через инструмент «Ползунок» на панели, либо командой в строке ввода.
2. Ввести формулу функции, подставив имя созданного ползунка (например, $y = 2x + b$, где b — имя заданного ползунка).
3. Переместить ползунок — график автоматически перестроится.

Как создать ползунки в Desmos:

1. Записать формулу функции, обозначив параметры буквами (к примеру, $y = ax^2 + 2x + 1$).
2. После ввода формулы программа автоматически предложит создать ползунки для каждого параметра (нажать «Добавить ползунок»).
3. Задать диапазон и шаг изменения параметра (скажем, для a — от -5 до 5 с шагом $0,5$).
4. При желании включить анимацию: для этого нужно нажать кнопку воспроизведения рядом с ползунком.

Рекомендуется вводить параметры постепенно, то есть на начальном этапе изучения новой функции лучше использовать один ползунок (например, задать только для k в функции $y=kx+b$). И лишь после этого постепенно добавлять остальные параметры (то есть после k только для b , затем оба одновременно). Кроме того, можно и самим учащимся предлагать типовые

задания, связанные, например, с определением влияния коэффициента a на направление ветвей параболы и формулированием соответствующего правила.

Учителю в процессе использования цифровых инструментов необходимо следить за тем, чтобы обучаемые не просто наблюдали за происходящим, но и фиксировали свои выводы. Это можно делать в тетрадях или на рабочем листе, заполняя таблицу. Также важно давать учащимся шанс самим предсказать, что произойдет с графиком при изменении параметра. Педагог может задавать следующие вопросы: «Как вы думаете, что случится с прямой $y = kx + b$, если мы увеличим k ? А если уменьшим?».

Программы GeoGebra и Desmos предоставляют отличную возможность для организации на уроке подлинно исследовательской деятельности, когда учащиеся самостоятельно «открывают» математические закономерности. Она может состоять из следующих этапов:

1. Постановка проблемы. Учитель формулирует вопрос или задачу, требующую исследования. Например: «Как зависит расположение графика квадратичной функции $y = a(x - m)^2 + n$ от параметров a , m , n ?».
2. Выдвижение гипотез. Учащиеся высказывают предположения о том, как каждый параметр может влиять на график. Гипотезы фиксируются на доске или в тетради.
3. Экспериментальная проверка. Учащиеся (индивидуально или в парах) работают с динамической моделью, изменяя параметры с помощью ползунков и наблюдая за изменениями графика. Результаты экспериментов фиксируются в виде таблицы или кратких записей.
4. Формулировка выводов. На основе проведённых экспериментов учащиеся формулируют правила или закономерности. Например: «Параметр m отвечает за сдвиг параболы вдоль оси Ox : если $m > 0$, сдвиг вправо; если $m < 0$, сдвиг влево».

5. Обсуждение и обобщение. Учитель организует обсуждение полученных выводов, корректирует неточные формулировки, помогает сформулировать окончательные правила.

Удобно использовать на уроке цифровые инструменты, когда нужно провести сравнение графиков (при изучении преобразований, при решении систем уравнений графическим способом, при нахождении точек пересечения). Педагог может предложить ученикам рассмотреть графики $y = x^2$ и $y = x^2 + 3$. В Desmos для этого достаточно ввести формулы в разные строки. Тогда каждый график автоматически окрасится в свой цвет, а при необходимости любой из них можно временно скрыть. В GeoGebra действие выполняется аналогично. После построения полезно дать задание найти точки пересечения графиков: в Desmos для этого достаточно кликнуть по точке пересечения, и программа покажет её координаты, а в GeoGebra используется инструмент «Пересечение» или соответствующая команда.

Чтобы учащиеся не просто смотрели на экран, а активно анализировали, можно предложить им самостоятельно построить таблицу значений изучаемой функции. В Desmos это делается через кнопку «+» и выбор «Таблица», а в GeoGebra используется инструмент «Таблица» или команда с указанием шага. Важно, чтобы на каждом этапе учащиеся фиксировали свои наблюдения в тетради, а не ограничивались визуальным восприятием.

Выбор формы работы с электронными образовательными ресурсами во многом зависит от этапа урока, поставленных целей, технического оснащения класса и уровня подготовленности учащихся. Фронтальную демонстрацию лучше всего использовать при введении нового понятия, когда важно показать динамику процесса, или при ограниченном времени. Также целесообразно пользоваться при наличии всего одного компьютера с проектором. В таком формате педагог комментирует происходящее на экране, задаёт вопросы учащимся, а те отвечают с мест. Например, демонстрируя, как изменение

коэффициента k в формуле $y = kx + b$ влияет на угол наклона прямой, учитель может спрашивать: «Что происходит при $k = 0$? При $k > 0$? При $k < 0$?».

Еще одна форма из форм работы, парная, эффективна при выполнении исследовательских заданий, где важны обсуждение и взаимопомощь, а также при ограниченном количестве компьютеров. Пары получают задание, после чего приступают к работе с моделью, обсуждают результаты и формулируют выводы. В конце представители от пар представляют их классу. В качестве примера можно привести такое задание: «В парах исследуйте, как параметры m и n влияют на график функции $y = a(x - m)^2 + n$. Сначала зафиксируйте $a = 1$, $m = 0$, изменяйте n от -5 до 5. Запишите, что происходит с графиком. Затем зафиксируйте $a = 1$, $n = 0$, изменяйте m от -5 до 5. Также запишите как изменился график. Подготовьте краткое сообщение на основе полученных данных».

Также при выполнении индивидуальных исследовательских или тренировочных заданий, или при организации дистанционного обучения проводится персональная работа. Учащиеся используют модели, подготовленные учителем заранее. Или самостоятельно вводят функции, выполняют задания, фиксируют результаты и отправляют их учителю на проверку.

Регулярное использование описанных рекомендаций помогает превратить программы GeoGebra и Desmos из простых инструментов построения графиков в эффективное средство для исследовательской работы. Это углубляет понимание функциональных зависимостей и способствует развитию математического мышления у учащихся.

2.2 Конспект урока по теме: «Изучение линейной функции и ее графика с использованием цифровых технологий»

Предмет: алгебра.

Класс: 7.

Тип урока: открытие нового знания.

Тема: «Линейная функция и её график».

Цели: формирование понятия линейной функции и её графика; развитие умений анализировать влияние коэффициентов k и b на расположение и наклон прямой; воспитание внимательности и аккуратности при построении графиков, формирование интереса к изучению функциональных зависимостей.

Предметные результаты: знать определение линейной функции, её формулу $y = kx + b$; понимать, как коэффициенты k и b влияют на расположение графика;

Метапредметные (УУД):

- познавательные: анализировать, сравнивать графики, делать выводы;
- регулятивные: ставить цель, планировать свои действия, оценивать результат;
- коммуникативные: выражать свои мысли, слушать других, работать в паре.

Личностные результаты: формирование интереса к изучению функций, формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками и учителем в процессе образовательной деятельности.

Основные термины, понятия: линейная функция, независимая переменная (аргумент), зависимая переменная (функция), коэффициент k (угловой коэффициент), коэффициент b (свободный член), график функции, прямая.

Формы работы: фронтальная, индивидуальная.

Ресурсы: учебник «Алгебра. 7 класс» под ред. Ю.Н. Макарычева.

Технические средства: компьютер с проектором, доступ в интернет, программа Desmos, интерактивная доска (или обычная доска с маркером/мелом), раздаточный материал.

Структура занятия:

1. Организационный момент.
2. Актуализация опорных знаний.
3. Постановка учебной проблемы
4. Формулирование проблемы, планирование деятельности
5. Открытие нового знания.
6. Первичная проверка понимания.
7. Рефлексия учебной деятельности.

Ход занятия

1. Организационный момент.

Учитель: «Здравствуйте, ребята! Присаживайтесь. Проверьте свою готовность к уроку: на партах должны лежать тетрадь, дневник, пенал с ручкой и карандашом, линейка. В начале урока хочу обратиться к словам Галилео Галилея о том, что книга природы написана на языке математики. И именно с помощью функций мы можем «прочитать» процессы движения и изменения — то, что лежит в основе всего живого и неживого вокруг».

Деятельность учащихся:

- Встают, приветствуют учителя.
- Проверяют наличие необходимых предметов.
- Настраиваются на работу, слушают учителя.

2. Актуализация опорных знаний.

Учитель: «Ребята, прежде чем переходить к новой теме, давайте вспомним, что мы изучали на прошлом уроке. Посмотрите на слайд. Вам необходимо выполнить первое задание — заполнить пропуски в предложениях. Отвечаем устно по поднятой руке».

Содержание задания:

1) Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида _____, где x — _____ переменная, k — _____ число.

2) Число k в формуле $y = kx$ называется _____.

3) Графиком прямой пропорциональности является _____, проходящая через _____.

Ученики (отвечают с места по очереди): «Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где x – независимая переменная, k – не равное нулю число. Число k называется коэффициентом прямой пропорциональности. Графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат».

Учитель: «Совершенно верно! А теперь давайте проверим, как хорошо вы умеете определять функцию по её графику. На слайде – несколько графиков и формулы. Ваша задача – установить соответствие: для каждого графика выбрать подходящую формулу. Работаем устно, отвечаем по поднятой руке».

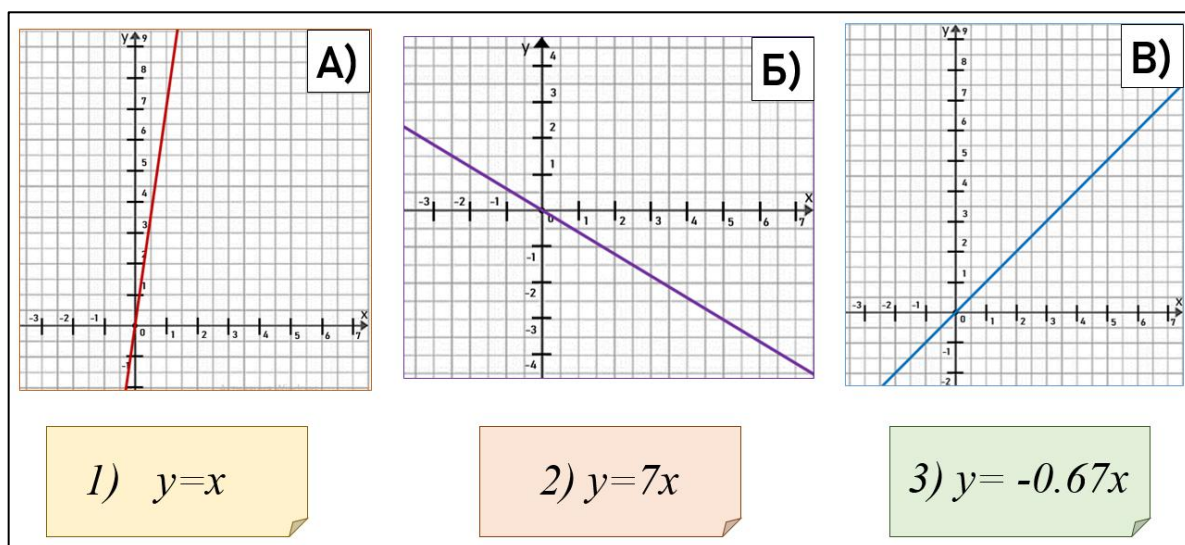


Рисунок 1

Ученики: «График первой функции под буквой В, потому что он проходит через точки (1;1), (2;2) и так далее. Графику под буквой Б соответствует третья функция. Он лежит во второй и четвертой координатных четвертях, значит коэффициент k должен быть меньше нуля, поэтому нам подходит формула, в которой $k = -0,67$. Значит график второй функции соответствует график под буквой А».

3. Постановка учебной проблемы.

Учитель: «Ребята, вы хорошо справились с заданиями. А сейчас давайте рассмотрим несколько задач и ответим на вопросы по ним. Итак, задача первая. Два посёлка А и Б расположены на расстоянии 7 километров друг от друга. Дед Вася выходит на прогулку из посёлка Б и идёт со скоростью 2 км/ч в направлении, противоположном посёлку А. Первый вопрос: сколько километров пройдёт Вася за t часов?».

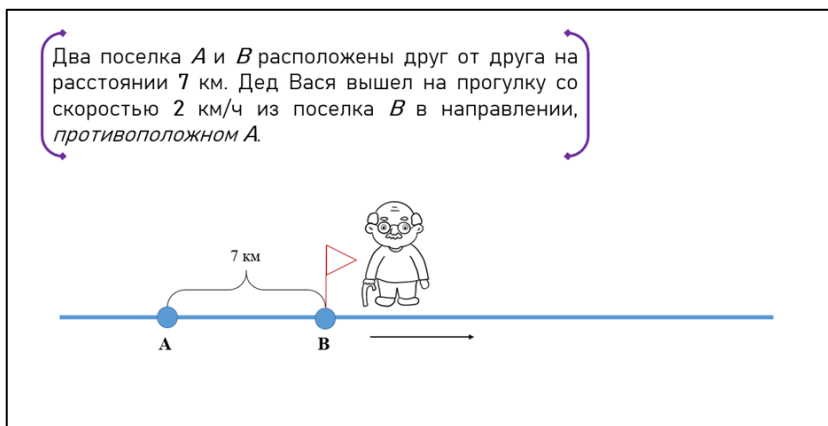


Рисунок 2

Ученик: «Он будет идти t часов со скоростью 2 км/ч, значит всего он пройдёт $2t$ км».

Учитель (записывает на доске ответ ученика): «Верно! А На каком расстоянии от посёлка А будет находиться дед Вася через t часов?».

Ученик: «Нужно к пройденному пути добавить расстояние между посёлками. Получим расстояние, равное $2t + 7$ ».

Учитель (записывает на доске ответ ученика и формулу): «Молодцы. А теперь давайте обозначим буквой s расстояние, на котором будет находиться Вася от посёлка А через t часов. Обратите внимание, что это расстояние будет зависеть от того, сколько времени будет потрачено на дорогу. Давайте запишем эту зависимость в виде формулы: $s(t) = 2t + 7$, где $t \geq 0$ ».

Ученики:

- Слушают учителя.
- Записывают формулу в тетрадь.

Учитель: «Теперь переходим ко второй задаче. Маруся купила карандаши по 2 р. за штуку и тетрадь за 11 р. Сколько денег она потратит на покупку x карандашей?».

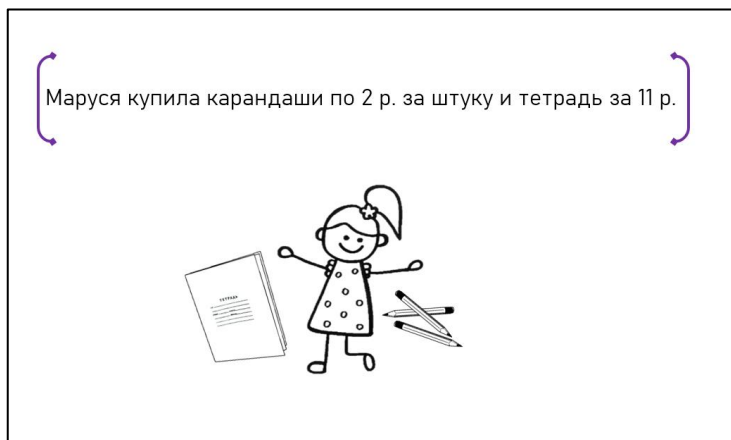


Рисунок 3

Ученик: «На покупку x карандашей она потратит $2x$ рублей».

Учитель: «Хорошо. А сколько денег она потратит на всю покупку?».

Ученик: «На всю покупку она потратит $2x + 11$ рублей».

Учитель (записывает ответы учеников и получившуюся формулу): «Умницы. Давайте обозначим буквой y общую сумму покупки. Можно заметить, что эта сумма зависит от количества купленных карандашей. Давайте запишем эту зависимость в виде формулы: $y(x) = 2x + 11$, где x – натуральное число».

Ученики:

- Слушают объяснения учителя.
- Записывают вторую формулу в тетрадь.

4. Формулирование проблемы, планирование деятельности.

Учитель: «Посмотрите, пожалуйста, на эти две формулы. На что они похожи?».

Ученики: «Они похожи на прямую пропорциональность. Но в этих формулах есть дополнительное слагаемое».

Учитель: «Верно заметили. Давайте обозначим это слагаемое буквой b . Как тогда записать наши формулы в общем виде?».

Ученики: «Формула вида: $y = kx + b$ ».

Учитель (фиксирует информацию на доске): «Чем будет являться переменная x здесь? А переменные k и b ?».

Ученики (делают записи в тетради): « x - независимая переменная, k и b – числа».

Учитель: «Правильно! Функции такого вида называют линейными функциями. Итак, как вы думаете, какова тема нашего сегодняшнего урока?».

Ученики (записывают тему в тетрадь): «Линейная функция и её график».

Учитель: «Давайте определим цели нашего занятия».

Ученики: «Узнать, что такое линейная функция. Понять, что является её графиком. Научиться строить этот график и изучить его».

Учитель обобщает и записывает цели на доске или показывает на слайде, проговаривает.

Этап 5. Открытие нового знания.

Учитель: «Итак, мы уже выяснили, что функции, заданные формулами $y = 2t + 7$ и $y = 2x + 11$ имеют вид $y = kx + b$. Теперь выясним, что представляет собой график линейной функции. Сначала сравним две функции. Давайте составим таблицу значений для некоторых x . У вас на партах лежат распечатанные таблицы. Первый вариант ищет значения x для функции $y = 2t + 7$, а второй – для $y = 2x + 11$ ».

x	-3	-1	0	1	2
$2x + 7$					
$2x + 11$					

Рисунок 4

Учитель наблюдает за тем, как ученики заполняют таблицу по вариантам, при необходимости дает разъяснения.

Учитель: «Хорошо, я вижу, что вы уже закончили. Проверьте себя, сравнив полученные значения с таблицей на слайде. У всех получились верные

значения? Отлично. Теперь перепишите значения аргумента для второй функции, которую вы не заполняли».

x	-3	-1	0	1	2
$2x + 7$	1	5	7	9	11
$2x + 11$	5	9	11	13	15

Рисунок 5

Учитель: «Сравните значения аргументов. Что можно заметить?».

Ученики: «Каждое значение переменной x второй функции ровно на 4 больше значения первой».

Учитель: «Да, это так, молодцы. Теперь начертите с своих тетрадьх систему координат и постройте в ней график функции $y = 2t + 7$ ».

Учитель наблюдает за работой учеников, помогает при затруднениях.

Учитель: «Хорошо, вижу, что все справились. Что является графиком первой функции? Как вы думаете, как будет выглядеть график второй функции? Давайте я построю оба графика в специальной программе, и мы с вами проверим ваши догадки».

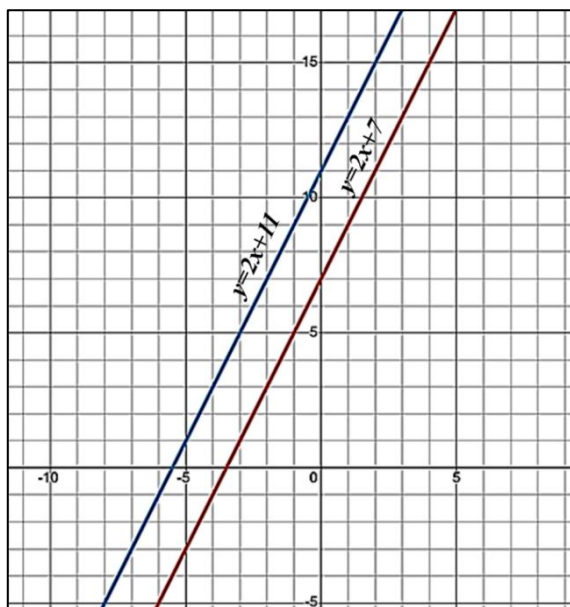


Рисунок 6

Учитель: «Посмотрите внимательно на них. Какую особенность можно выделить?».

Ученики: «Графики функций параллельны. Если график функции $y = 2x + 7$ поднять на 4 единицы вверх, то он совпадет с графиком функции $y = 2x + 11$ ».

Учитель: «Правильно. Если график функции $y = 2x + 7$ поднять вверх на 4 единицы (вдоль оси y), то каждая точка $(x_0; y_0)$ этого графика перейдёт в точку $(x_0; y_0 + 4)$, и мы получим график $y = 2x + 11$ ».

Учитель фиксирует точки и демонстрирует параллельный перенос графика функции при помощи параметра.

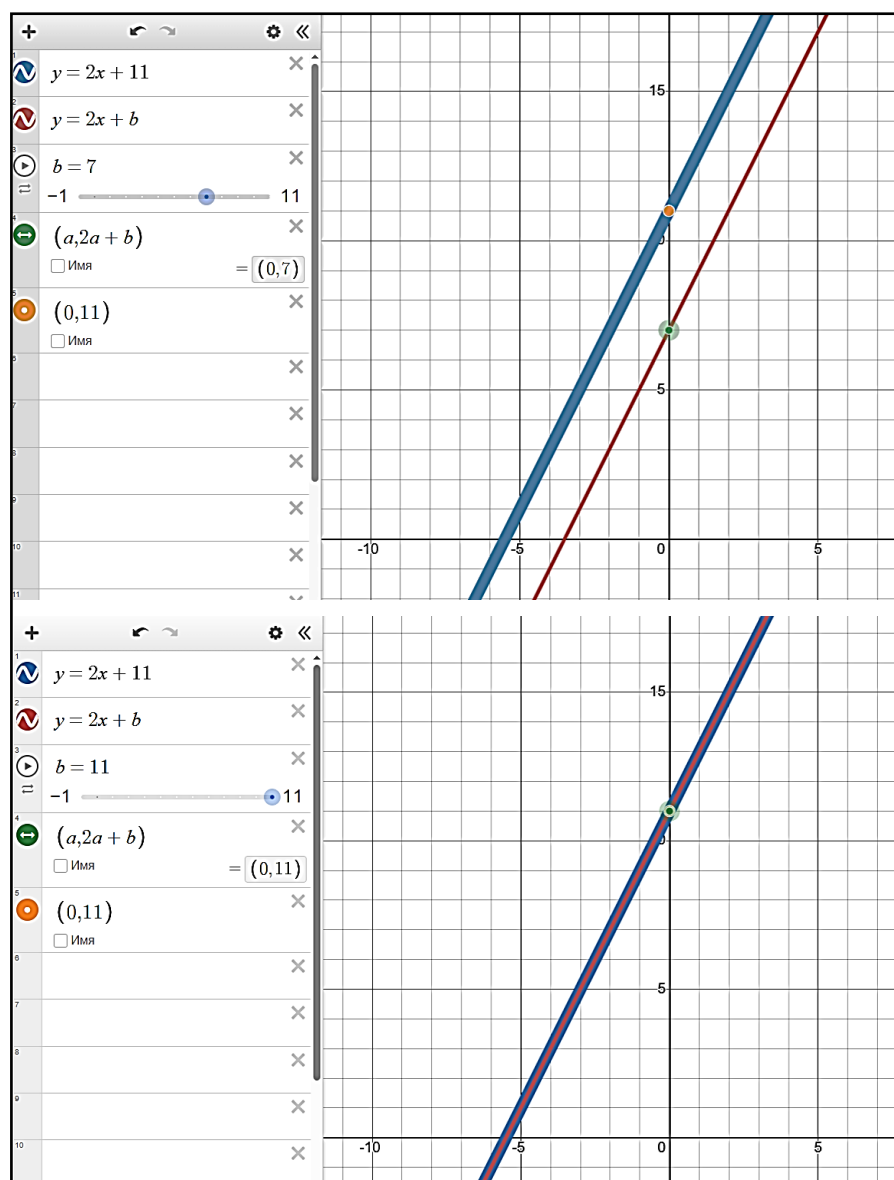


Рисунок 7

Учитель: «Теперь, при помощи линейки, аккуратно постройте график функции $y = 2x + 11$, параллельно перенеся график $y = 2x + 7$ на 4 единицы вверх».

Учитель наблюдает за выполнением задания.

Учитель: «В нашем примере коэффициент b положительный. Как вы думаете, что произойдет с графиком, если коэффициент b будет принимать отрицательное значение?»

Ученики: «График сдвинулся бы вниз».

Учитель хвалит за догадку и предлагает проверить ее, перетаскивая ползунок параметра в сторону отрицательного значения, в результате чего дети могут увидеть, как график опускается вниз. Затем учитель предлагает школьникам предположить, каким образом будет располагаться график при $b = 0$, также демонстрируя все преобразования в программе. Выясняется, что полученная функция является прямой пропорциональностью.

Делается вывод о том, что прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции. Действительно, при $b = 0$ формула $y = kx + b$ принимает вид $y = kx$, а этой формулой при $k \neq 0$ задаётся прямая пропорциональность.

Учитель: «Как относительно графика прямой пропорциональности располагаются остальные графики?».

Ученики: «Они ему параллельны».

Учитель фиксирует это вместе с детьми, а затем подводит учеников к выводу о том, что коэффициент b в формуле $y = kx + b$ отвечает за сдвиг по оси ординат. Ученики записывают вместе с учителем вывод: коэффициент b показывает, на сколько единиц график сдвинут вверх или вниз относительно прямой $y = kx$. Если $b > 0$ – сдвиг вверх, если $b < 0$ – сдвиг вниз.

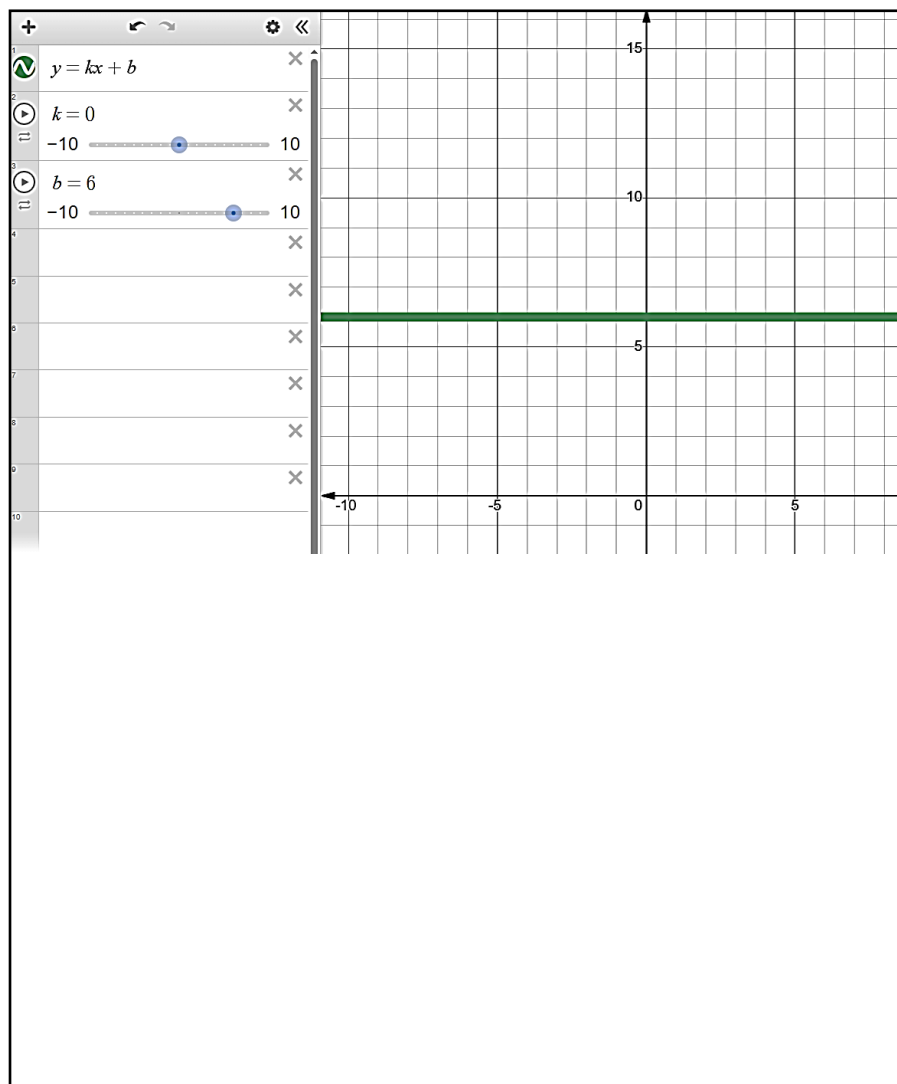
Учитель: «Мы знаем, что график линейной функции – прямая. Тогда координаты скольких точек достаточно найти, чтобы построить график?».

Ученики: «Координаты двух точек».

Учитель: «Да, верно. Обратите внимание на то, что рассмотренные нами прямые параллельны между собой и наклонены к оси абсцисс под одинаковыми углами. С чем это связано, как вы думаете?».

Ученики: «Это связано с тем, что у них одинаковый коэффициент k ».

Далее учитель вместе с учениками рассматривает изменение угла наклона в зависимости от изменения коэффициента k , которому дается специальное название – угловой коэффициент. Формулируется и фиксируется правило, что если $k > 0$, то угол наклона прямой $y = kx + b$ к оси x острый; если $k < 0$, то этот угол тупой. При $k = 0$ функция принимает вид $y = b$. В этом случае графиком функции $y = kx + b$ является прямая, параллельная оси x при $b \neq 0$ или сама ось x при $b = 0$. Также опытным путем выявляется, что когда угловые коэффициенты различны, то прямые пересекаются, а если одинаковы, то параллельны.



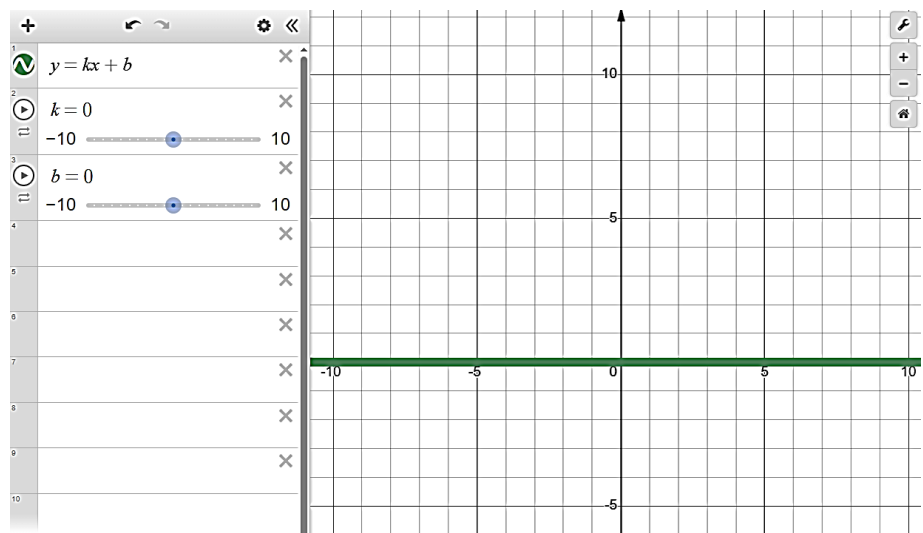


Рисунок 8

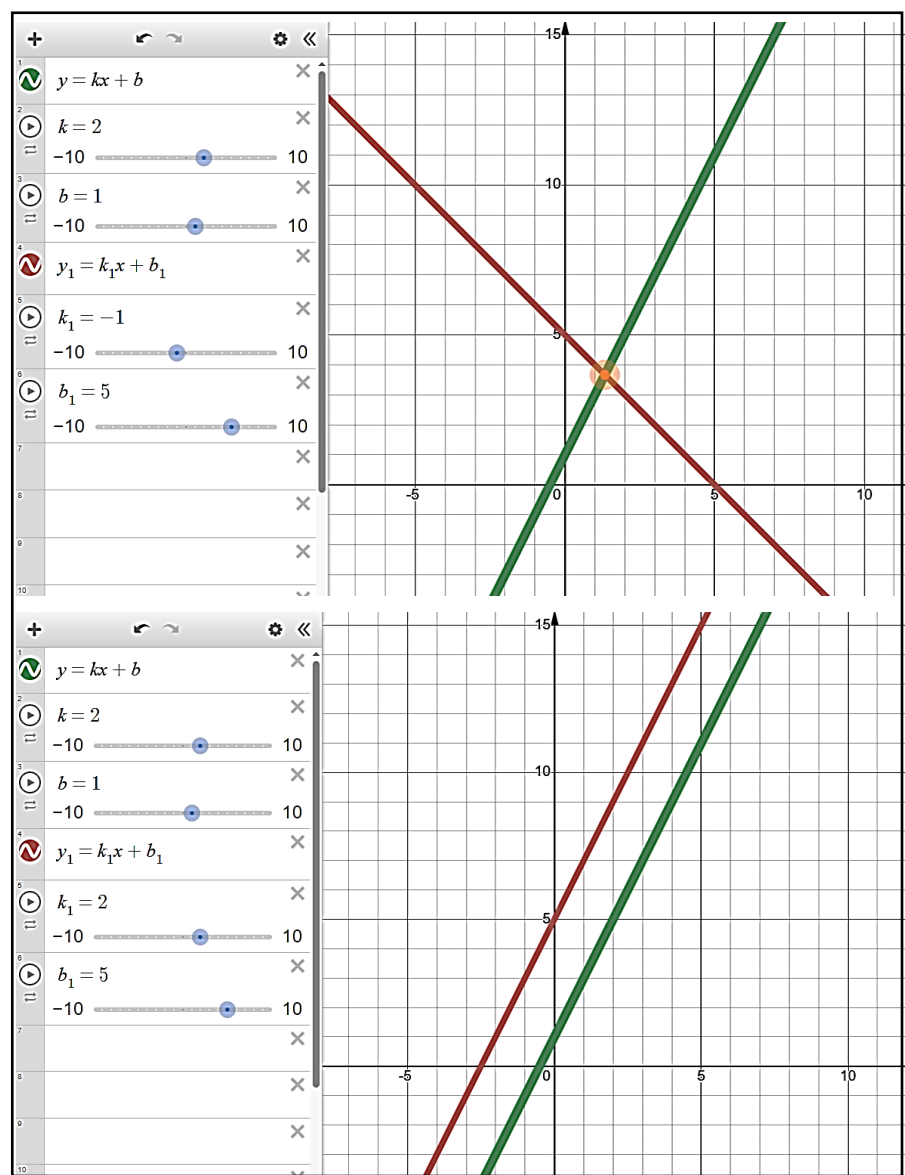


Рисунок 9

6. Первичная проверка понимания.

Учитель: «Молодцы. А теперь давайте выполним следующие задания».

Содержание заданий представлено ниже.

Задание 1 (Устно). Какая из функций является линейной? Назовите.

a) $y = 5x + 6$

b) $y = \frac{(5x+1)}{4}$

c) $y = 2x$

d) $y = -\frac{x}{2} - 7$

e) $y = 3x^2 + 1$

Ответ: a, b, c, d.

Задание 2. Не выполняя построения, определите, пересекаются ли графики $y=3x-1$ и $y=3x+4$? Почему?»

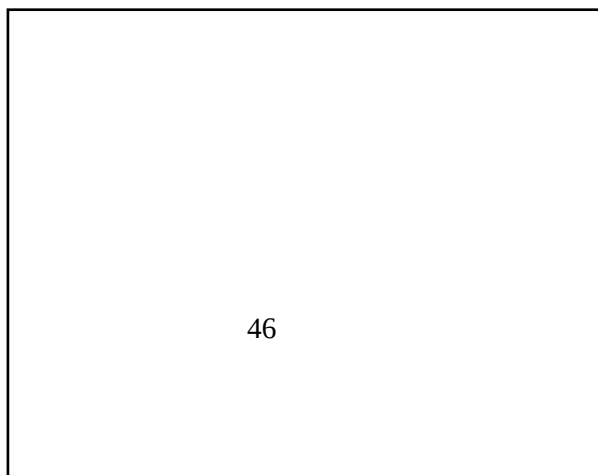
Ответ: Нет, не пересекаются, угловые коэффициенты одинаковы ($k=3$), значит, прямые параллельны.

Задание 3. Дана функция $y = \frac{1}{5}x$. Занесите данные о преобразованиях этой функции в зависимости от изменения коэффициента b в таблицу. Затем постройте один из приведенных в таблице графиков.

Формула	b	Пересечение с осью y	Сдвиг
$y = \frac{1}{5}x + 4$			
$y = \frac{1}{5}x - 1,5$			
$y = \frac{1}{5}x + 2$			

Рисунок 10

Ответ:



Формула	b	Пересечение с осью y	Сдвиг
$y = \frac{1}{5}x + 4$	4	(0;4)	Вверх на 4
$y = \frac{1}{5}x - 1,5$	-1,5	(0;-1,5)	Вниз на 1,5
$y = \frac{1}{5}x + 2$	2	(0;2)	Вверх на 2

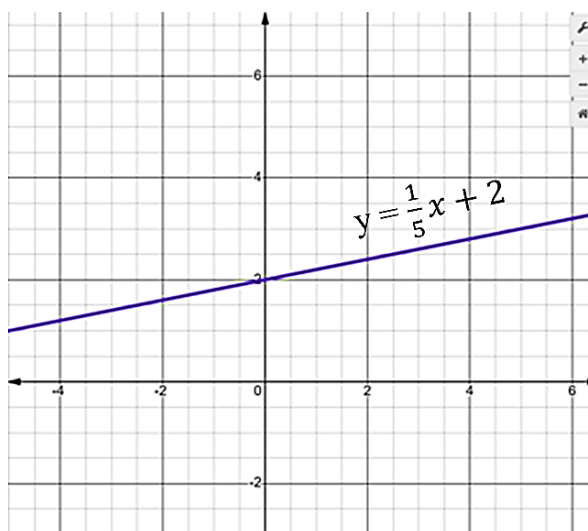


Рисунок 11

8. Рефлексия учебной деятельности.

Учитель: «Теперь оцените свою работу на уроке. Я раздам вам небольшие листочки. Вам необходимо закончить предложения, которые в них вписаны».

Я сегодня научился _____

Мне больше всего понравилось _____

Мне показалось сложным _____

Рисунок 12

Домашнее задание: №313, №319 (а,б).

2.3 Конспект урока по теме: «Изучение графиков функций $y = ax^2$ и $y = a(x - m)^2$ с использованием цифровых технологий»

Предмет: алгебра.

Класс: 9.

Тип урока: открытие нового знания.

Тема: «Графики функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2$ ».

Цели: формирование понятия о преобразованиях графика квадратичной функции; развитие умений анализировать влияние коэффициентов на расположение и форму параболы; воспитание внимательности и аккуратности при построении графиков, формирование интереса к исследованию функциональных зависимостей.

Предметные результаты: знать, как коэффициенты влияют на график квадратичной функции; уметь строить графики функций $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$.

Метапредметные (УУД):

- познавательные: строить логические рассуждения, умозаключения; структурировать знания, осознанно и произвольно строить речевое высказывание в устной и письменной форме; осуществлять анализ, синтез, сравнение и классификацию математических объектов;
- регулятивные: формулировать цель, составлять план действий, оценивать результат;
- коммуникативные: выражать свои мысли, слушать других, работать в паре.

Личностные результаты: формирование интереса к изучению функций, формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками и учителем в процессе образовательной деятельности.

Основные термины, понятия: квадратичная функция, парабола, вершина параболы, параллельный перенос.

Формы работы: фронтальная, индивидуальная.

Ресурсы: учебник «Алгебра. 9 класс» под ред. Ю.Н. Макарычева.

Технические средства: компьютер с проектором, доступ в интернет, программа Desmos, интерактивная доска (или обычная доска с маркером/мелом), раздаточный материал.

Структура занятия:

1. Организационный момент.
2. Актуализация опорных знаний.
3. Постановка учебной проблемы
4. Формулирование проблемы, планирование деятельности
5. Открытие нового знания.
6. Первичная проверка понимания.
7. Рефлексия учебной деятельности.

Ход занятия

1. *Организационный момент.*

Учитель: «Здравствуйте, ребята! Присаживайтесь. Проверьте готовы ли вы к уроку: на партах должны лежать тетрадь, дневник, пенал с ручкой и карандашом, линейка. Сегодня урок хочу начать со слов о том, что функции – это математические портреты устойчивых закономерностей, познаваемых человеком».

Деятельность учащихся: приветствуют, проверяют готовность, слушают

2. *Актуализация опорных знаний.*

Учитель: «Мы с вами уже знакомы с квадратичной функцией. Давайте проверим, насколько хорошо вы изучили эту тему. Проведём игру «Верю – не верю». Я буду говорить утверждения, а вы поднимаете руку, если согласны, или показываете большой палец вниз, если не согласны. В случае несогласия нужно объяснить причину».

Содержание задания:

1. Квадратичная функция задаётся формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. (Верю).

2. График функции $y = x^2$ называется гиперболой.
(Не верю – это парабола).
3. График функции $y = x^2$ симметричен относительно оси x .
(Не верю – относительно оси y).
4. Вершина параболы $y = x^2$ находится в точке $(0;0)$.
(Верю).
5. Область определения квадратичной функции – все числа.
(Верю).
6. Если $a > 0$, ветви параболы направлены вниз.
(Не верю – вверх).
7. Область значения при любом a $E(y) = [0; +\infty)$.
(Не верю, так как при $a > 0$ $E(y) = [0; +\infty)$, а при $a < 0$ $E(y) = (-\infty; 0]$).

Учитель: «Вы молодцы. Сейчас посмотрите на слайд, тут представлены три графика и три формулы. Ваша задача подобрать для каждой формулы ее график».

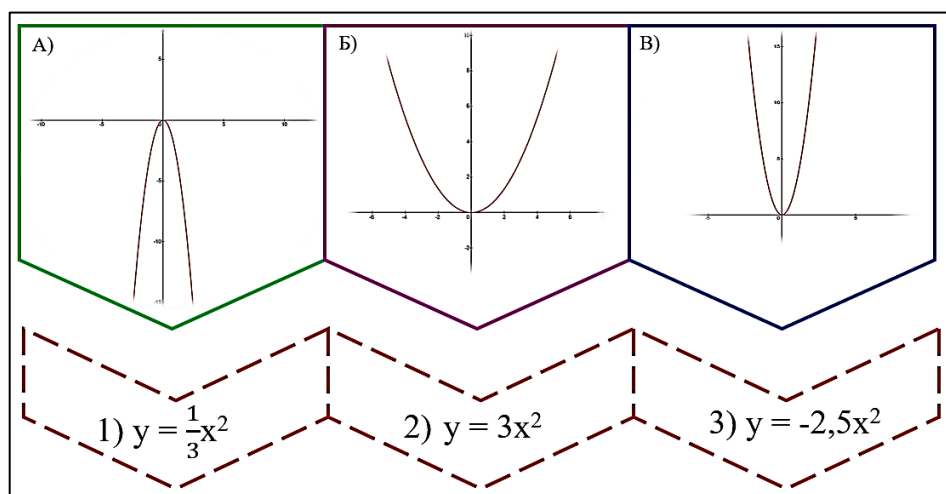


Рисунок 13

Ученики: (по одному) «Так как в первой функции коэффициент a меньше нуля, но больше единицы, то график должен быть широким с ветвями вверх, то есть таким, как под буквой Б. В третьей формуле a меньше нуля, значит подходит график под буквой А с ветвями вниз. И второй формуле соответствует график под буквой В».

Учитель: «Замечательно. Давайте Теперь посмотрим на график первой функции. Назовите нули функции, промежутки возрастания и убывания функции, наибольшее или наименьшее значение».

Ученики: «Функция равна нулю при $x = 0$. Убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Наименьшее значение функции в точке $(0; 0)$. Наибольшего значения нет».

Далее учитель дает аналогичное задание для третьей функции.

3. Постановка учебной проблемы.

Учитель: «Ребята, мы с вами уже хорошо изучили квадратичную функцию $y = ax^2$. Мы знаем на что влияет коэффициент a и с легкостью можем представить график функции и найти вершину параболы. В какой точке она будет располагаться?».

Ученики (уверенно): «В точке $(0; 0)$ ».

Учитель: «Верно. А как вы думаете, где будут находиться вершины графиков функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x + m)^2$? Как их графики будут выглядеть? Каким образом это можно определить?»

Ученики выдвигают различные гипотезы, которые учитель фиксирует на доске.

Учитель: «Видите, мнения разделились. Мы пока не знаем точного правила, как влияют на положение параболы коэффициенты m и n . И сегодня нам с вами предстоит это выяснить».

4. Формулирование проблемы, планирование деятельности.

Учитель: «Давайте сформулируем тему и цель урока».

Ученики: «Тема урока графики функций $y = ax^2$ и $y = a(x - m)^2$. Цель урока: изучить функции $y = ax^2$ и $y = a(x - m)^2$ и научиться строить их графики».

Учитель: «Все верно. Приступим».

5. Открытие нового знания.

Учитель: «Давайте проведем небольшое исследование. У вас на партах лежат распечатанные таблицы. Каждому ряду нужно будет записать в таблице значения одной из функций. Первый ряд выполняет задание для функции $y = \frac{1}{4}x^2$, второй ряд – для $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$, третий ряд – для $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$. Всем понятно, что нужно делать? Хорошо, тогда приступайте».

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$y = \frac{1}{4}x^2$							
$y = \frac{1}{4}x^2 + 2$							
$y = \frac{1}{4}x^2 - 2$							

Рисунок 14

Учитель следит за выполнением задания.

Учитель: «Итак, я вижу, что все уже закончили, давайте проверим себя. Внимание на слайд. У всех так получилось?».

<table><tr><th>x</th><th>-4</th><th>-2</th><th>-1</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>4</th></tr><tr><td>$y = \frac{1}{4}x^2$</td><td>4</td><td>1</td><td>0,25</td><td>0</td><td>0,25</td><td>1</td><td>4</td></tr></table>	x	-4	-2	-1	0	1	2	4	$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	0,25	0	0,25	1	4	1 ряд
x	-4	-2	-1	0	1	2	4										
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	0,25	0	0,25	1	4										
<table><tr><th>x</th><th>-4</th><th>-2</th><th>-1</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>4</th></tr><tr><td>$y = \frac{1}{4}x^2 + 2$</td><td>6</td><td>3</td><td>2,25</td><td>0</td><td>2,25</td><td>3</td><td>6</td></tr></table>	x	-4	-2	-1	0	1	2	4	$y = \frac{1}{4}x^2 + 2$	6	3	2,25	0	2,25	3	6	2 ряд
x	-4	-2	-1	0	1	2	4										
$y = \frac{1}{4}x^2 + 2$	6	3	2,25	0	2,25	3	6										
<table><tr><th>x</th><th>-4</th><th>-2</th><th>-1</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>4</th></tr><tr><td>$y = \frac{1}{4}x^2 - 2$</td><td>2</td><td>-1</td><td>-1,75</td><td>0</td><td>-1,75</td><td>-1</td><td>2</td></tr></table>	x	-4	-2	-1	0	1	2	4	$y = \frac{1}{4}x^2 - 2$	2	-1	-1,75	0	-1,75	-1	2	3 ряд
x	-4	-2	-1	0	1	2	4										
$y = \frac{1}{4}x^2 - 2$	2	-1	-1,75	0	-1,75	-1	2										

Рисунок 15

Учитель: «Отлично. Давайте внимательнее посмотрим на значения аргументов. Какую особенность можно заметить?».

Ученики: «Каждое значение переменной x второй функции ровно на 2 больше значения первой, а значения третьей – на 2 меньше первой».

Учитель: «Да, это так, молодцы. Какой вид будут иметь графики этих функций?».

Ученики: «Вид параболы».

Учитель: «Перепишите себе значения остальных функций. Отлично. Теперь начертите в своих тетрадях систему координат и постройте в ней график той функции, значения которой вы искали изначально».

Учитель наблюдает за работой учеников, помогает при затруднениях. Изображает систему координат на доске, если она не была подготовлена заранее. После того, как дети заканчивают с выполнением задания в тетради, учитель по очереди вызывает по одному человеку с каждого ряда, чтобы тот нарисовал на доске получившийся график. В итоге на доске в одной системе координат построены три параболы. После этого учитель предлагает проверить правильность построения при помощи программы Desmos.

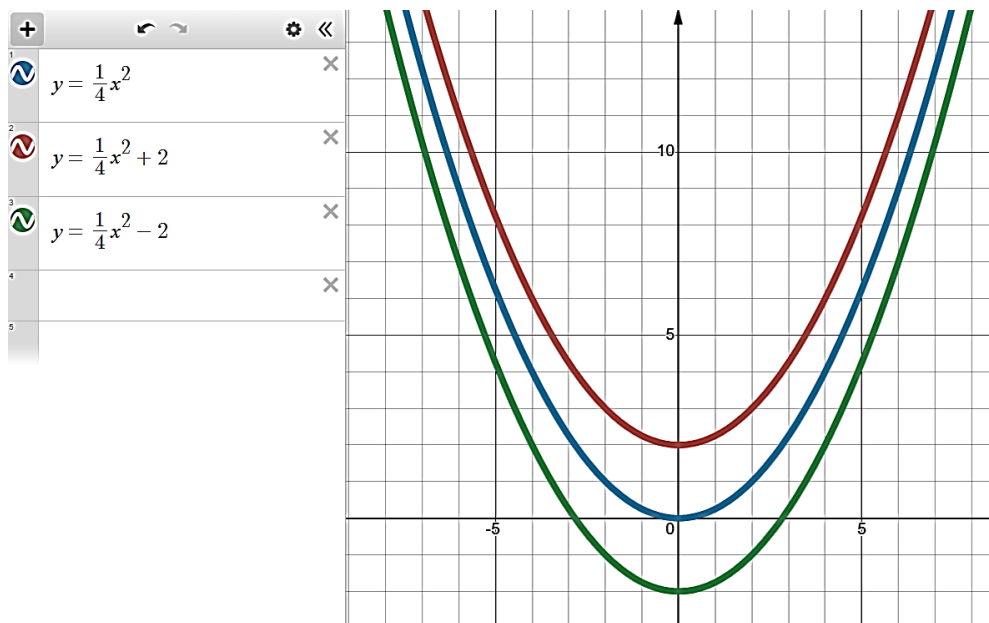


Рисунок 16

Учитель: «Посмотрите, правильно ли у нас получилось все построить? Замечательно. Скажите, какие выводы можно сделать, глядя на эти параболы?».

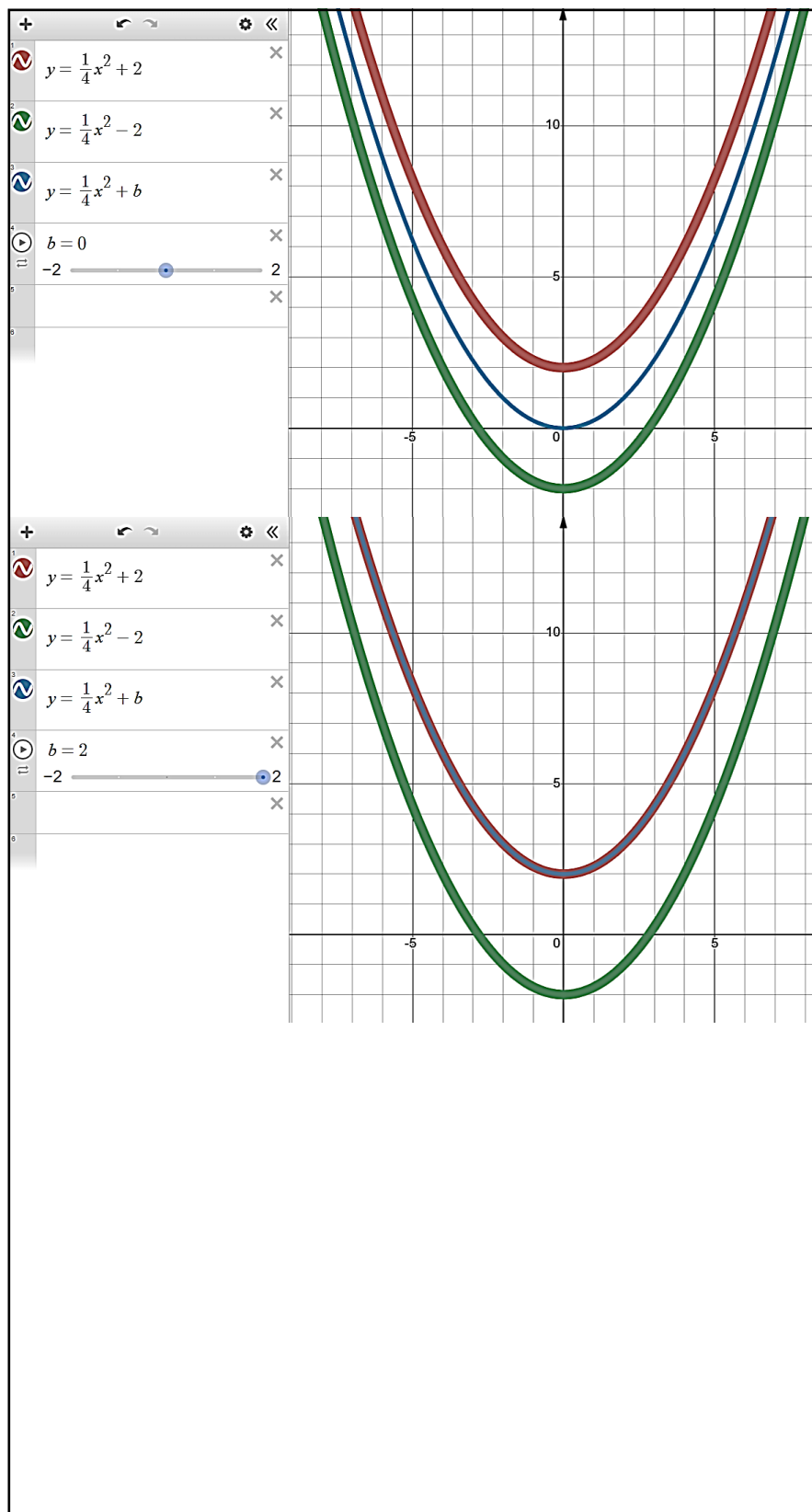
Ученики: «Эти параболы одинаковой формы. Но одна выше, другая ниже».

Учитель: «Да, это так. Что можно сказать про расположение синей и зеленой параболы относительно красной?»

Ученики: «Если красную параболу поднять на 2 единицы по оси y , то она совпадет с синей, а если опустить на 2 единицы – совпадет с зеленой».

Учитель (демонстрирует перемещение графиков при помощи программы): «Вы правы. Если график функции $y = \frac{1}{4}x^2$ поднять вверх на 2 единицы (вдоль оси y), то каждая точка $(x_0; y_0)$ перейдет в точку $(x_0; y_0+2)$, и мы

получим график $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$, а если опустить на 2 единицы вниз, то каждая точка $(x_0; y_0)$ перейдёт в точку $(x_0; y_0 - 2)$, и мы получим график $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$. Теперь вы сможете определить координаты вершины каждой параболы. Назовем их».



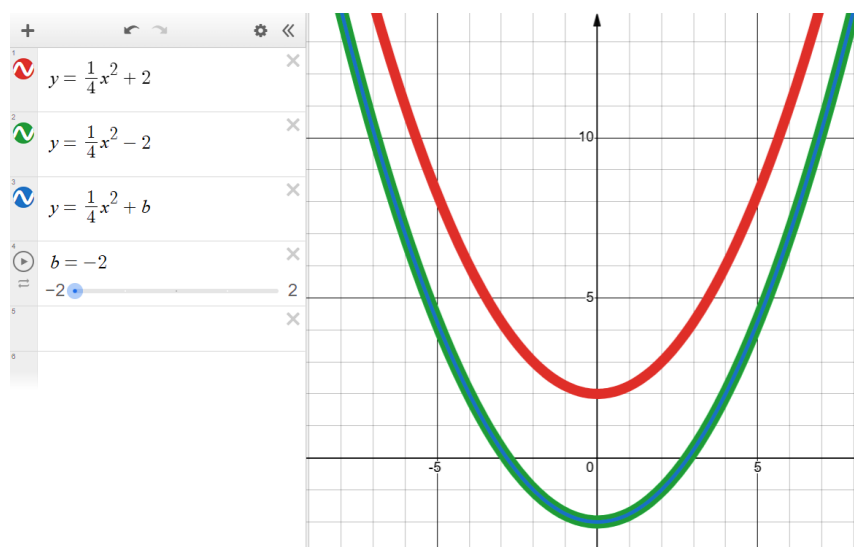


Рисунок 17

Обучающиеся называют координаты вершин. После учитель также обращает внимание на гипотезы, которые ранее предлагали ученики и комментирует их. Обращает внимание на подтвердившиеся гипотезы, или на ключевые ошибки в них, если ни одна из гипотез не подтвердилась. Далее формулирует совместно с учениками правило: график функции $y = ax^2 + n$ можно получить из графика $y = ax^2$ параллельным переносом вдоль оси y на n единиц вверх, если $n > 0$, и на n единиц вниз при $n < 0$.

Учитель: «Давайте проведем следующее исследование. Сейчас я вам раздам распечатанные таблицы. Каждому ряду нужно будет ее заполнить. Первый ряд выполняет задание для функции $y = 2x^2$, второй ряд – для $y = 2(x + 4)^2$, третий ряд – для $y = 2(x - 4)^2$ ».

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$y=2x^2$							
x	-6	-5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2
$y=2(x+4)^2$							
x	2	3	3,5	4	4,5	5	6
$y=2(x-4)^2$							

Рисунок 18

Учитель следит за выполнением задания.

Учитель: «Итак, я вижу, что все уже закончили, давайте проверим себя. Внимание на слайд. У всех так получилось?».

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	1 ряд
$y=2x^2$	8	2	0,5	0	0,5	2	8	
x	-6	-5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2	2 ряд
$y=2(x+4)^2$	8	2	0,5	0	0,5	2	8	
x	2	3	3,5	4	4,5	5	6	3 ряд
$y=2(x-4)^2$	8	2	0,5	0	0,5	2	8	

Рисунок 19

Учитель: «Хорошо. Давайте внимательнее посмотрим на значения функций и значения аргументов. Какую особенность можно заметить?».

Ученики: «Все значения функций одинаковые. Значения аргументов второй функции на 4 единицы меньше, чем первой, а значения третьей - на 4 больше, чем первой».

Учитель: «Вы правильно ответили, умницы. Какой вид будут иметь графики этих функций?»

Ученики: «Вид параболы».

Учитель: «Отлично. Теперь начертите с своих тетрадях систему координат и постройте в ней график функции в зависимости от того, на каком ряду вы сидите».

Учитель наблюдает за работой учеников, помогает при затруднениях. После того, как дети заканчивают с выполнением задания в тетради, учитель по очереди вызывает по одному человеку с каждого ряда, чтобы тот нарисовал на доске получившийся график. В итоге на доске в одной системе координат построены три параболы. После этого учитель предлагает проверить правильность построения при помощи программы Desmos.

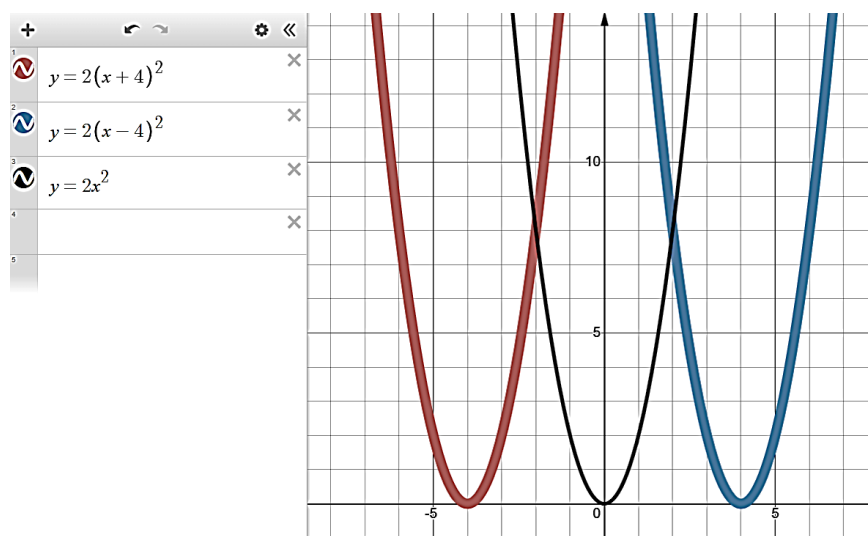


Рисунок 20

Учитель: «Посмотрите, правильно ли у нас получилось все построить? Замечательно. Скажите, какие выводы можно сделать, глядя на эти параболы?»

Ученики: «Эти параболы одинаковой формы. Но одна правее, а другая левее».

Учитель: «Да, это так. Что можно сказать про расположение синей и красной параболы относительно черной?»

Ученики: «Если черную параболу перенести на 2 влево единицы по оси x , то она совпадет с красной, а если перенести вправо на 2 единицы – совпадет с синей».

Учитель (демонстрирует перемещение графиков при помощи программы): «Вы правы. Если график функции $y = 2x^2$ перенести влево на 4 единицы (вдоль оси x), то каждая точка $(x_0; y_0)$ перейдёт в точку $(x_0 - 2; y_0)$, и мы получим график $y = 2(x + 4)^2$, а если перенести на 2 единицы вправо, то каждая точка $(x_0; y_0)$ перейдёт в точку $(x_0 + 2; y_0)$, и мы получим график $y = 2(x - 4)^2$. Теперь вы сможете определить координаты вершины каждой параболы. Назовем их».

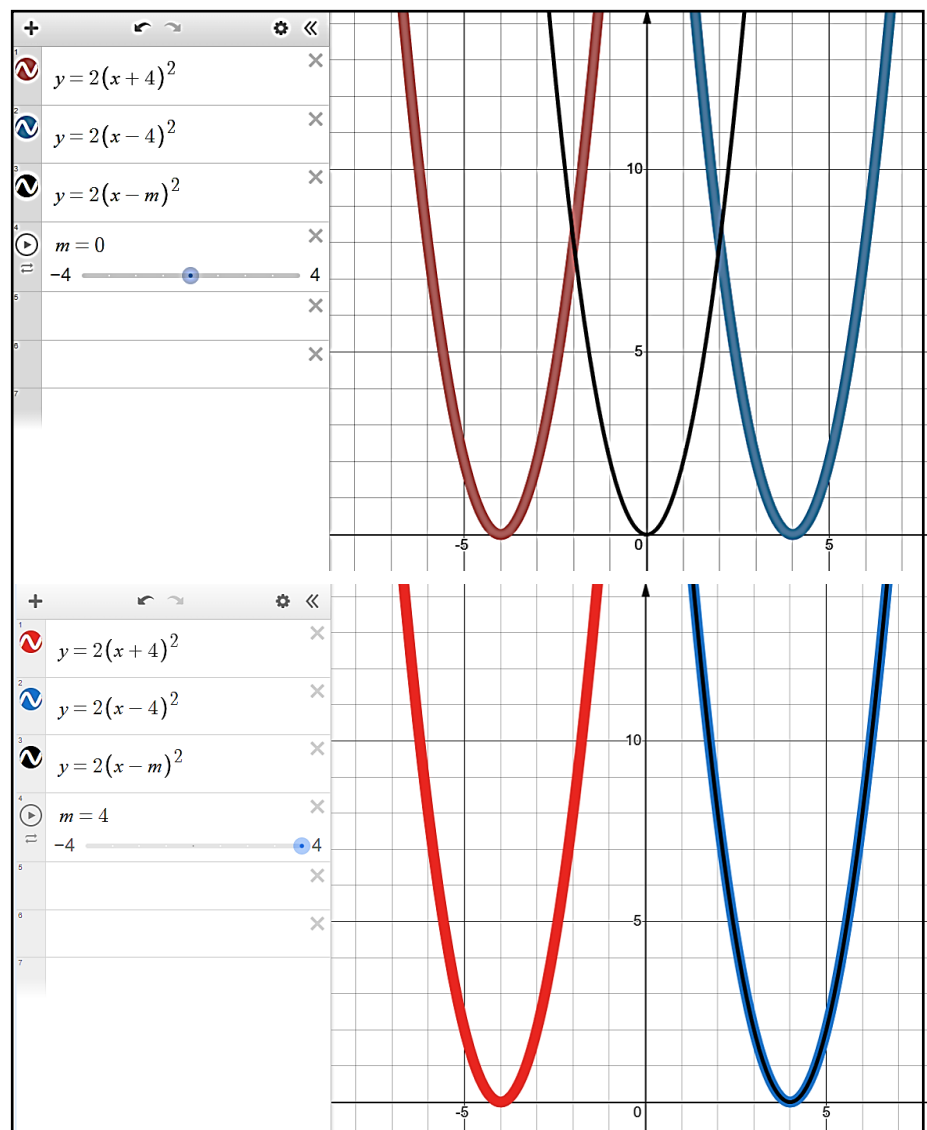


Рисунок 21

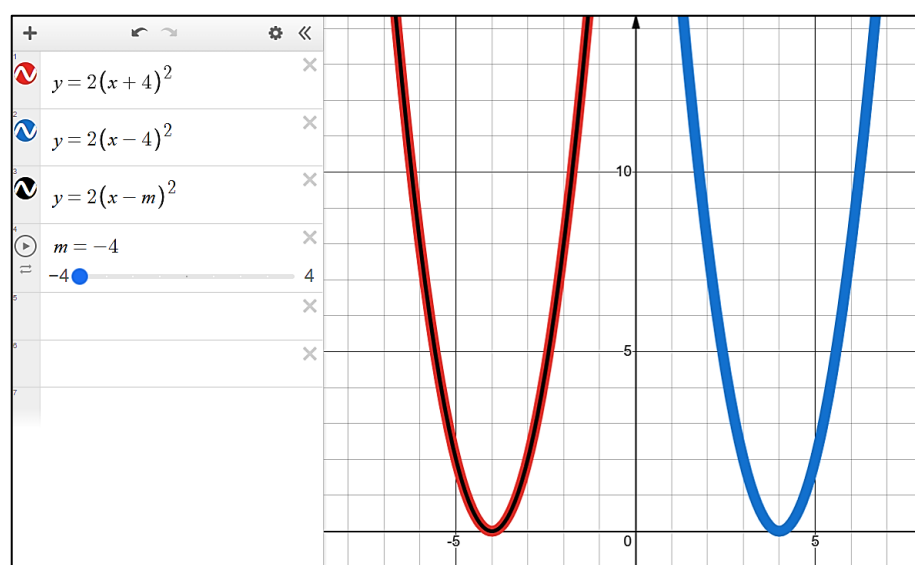


Рисунок 22

Обучающиеся называют координаты вершин. После учитель также обращает внимание на гипотезы, которые ранее предлагали ученики и комментирует их. Обращает внимание на подтвердившиеся гипотезы, или на ключевые ошибки в них, если ни одна из гипотез не подтвердилась. Далее формулирует совместно с учениками правило: график функции $y = a(x - m)^2$ можно получить из графика $y = ax^2$ параллельным переносом вдоль оси x на m единиц вправо, если $m > 0$, и на m единиц влево при $m < 0$.

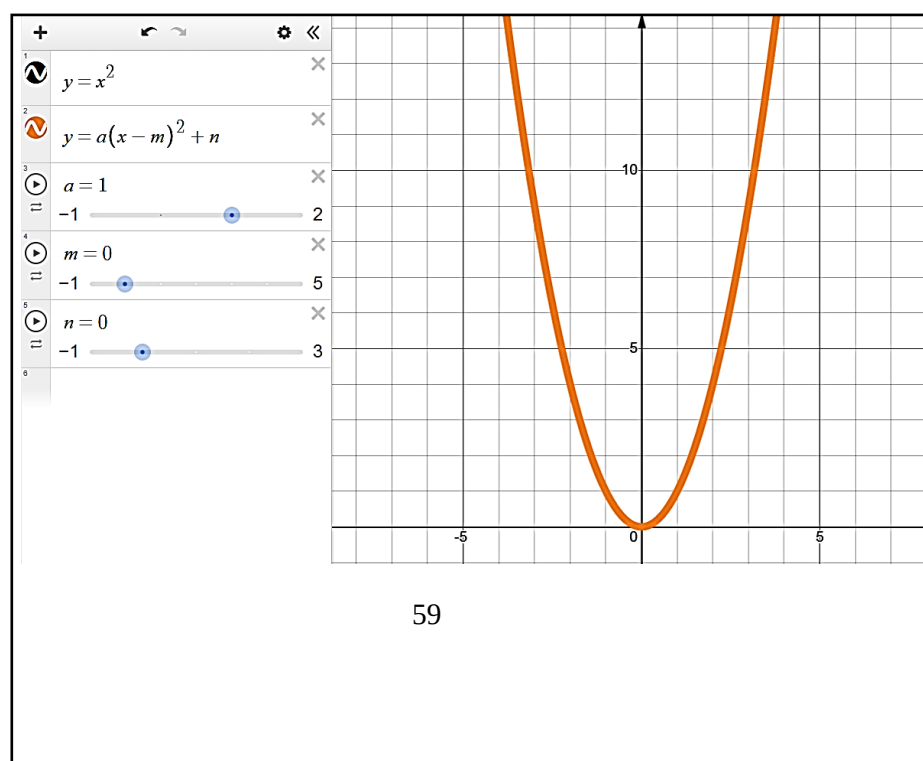
Учитель: «Теперь, зная о том, как влияют коэффициенты n и m на график квадратичной функции, мы можем построить график функции $y = a(x - m)^2 + n$. Давайте разберем алгоритм построения этого графика на примере функции $y = -2(x - 5)^2 + 3$ ».

Затем педагог совместно с обучающимися обсуждает алгоритм, фиксируя шаги.

Вид функции	Вершина	Преобразование
1. $y = x^2$	(0; 0)	-
2. $y = 2x^2$	(0; 0)	Сжатие к оси ординат в два раза
3. $y = -2x^2$	(0; 0)	Отражение относительно оси абсцисс
4. $y = -2(x - 5)^2$	(5; 0)	Сдвиг вправо по оси абсцисс на 5 единиц
5. $y = -2(x - 5)^2 + 3$	(5; 3)	Сдвиг вверх по оси ординат на 3 единицы

Рисунок 23

Все преобразования учитель иллюстрирует при помощи программы.



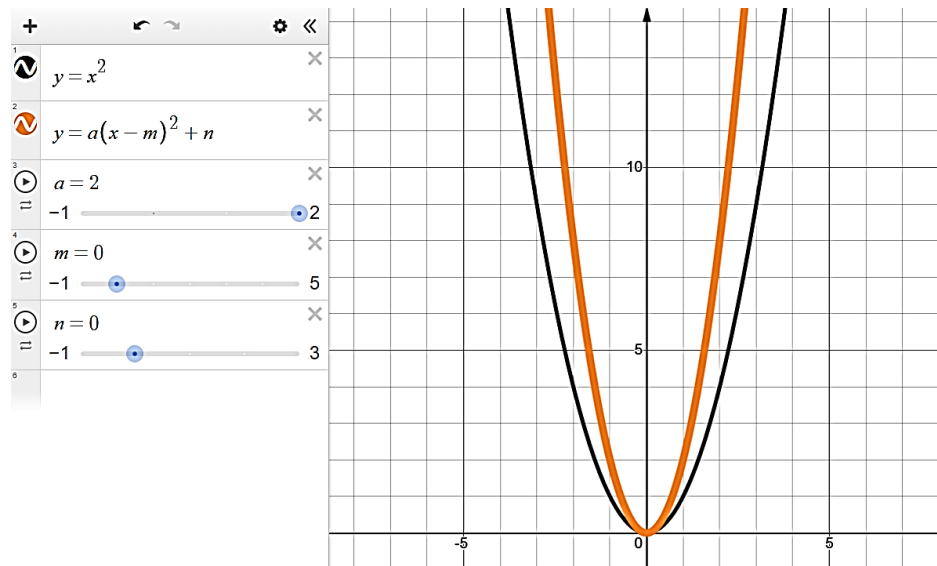
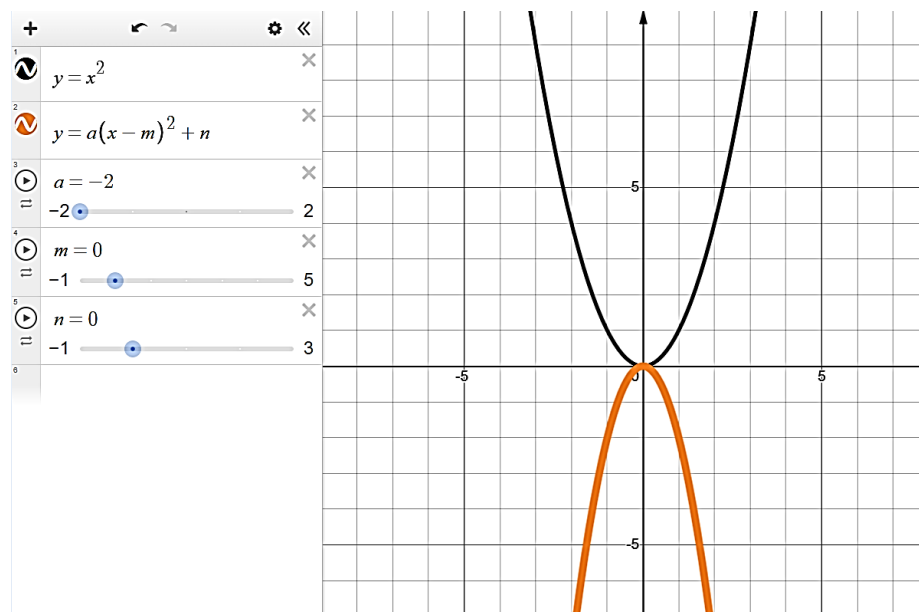
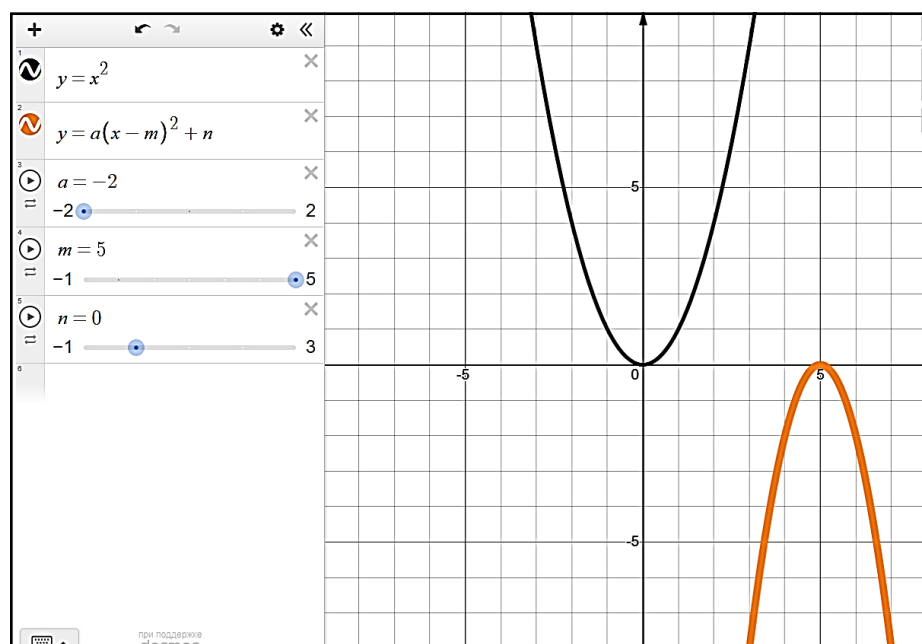


Рисунок 24



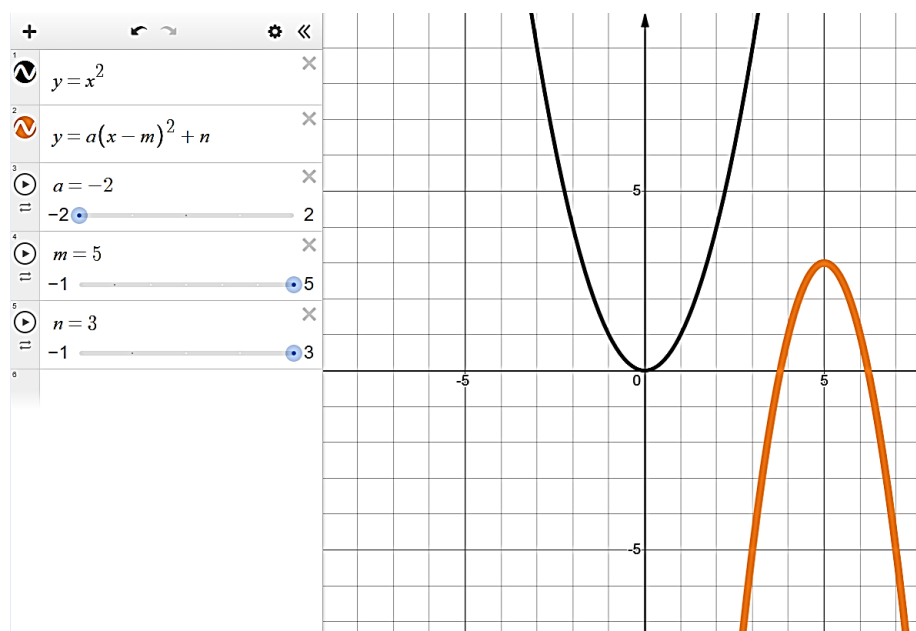


Рисунок 25

6. Первичная проверка понимания.

Учитель: «Ребята, давайте проверим на сколько хорошо вы поняли сегодняшний материал. Давайте выполним следующие задания».

Содержания заданий:

Задание 1 (устно). Для каждой функции укажите направление ветвей и координаты вершины:

- 1) $y = 8x^2 + 4$;
- 2) $y = -4,3(x - 2,5)^2$;
- 3) $y = 0,5(x + 3)^2 - 1$.

Ответ: 1) Ветви вверх, (0; 4). 2) Ветви вниз, (2,5; 0). 3) Ветви вверх, (-3; -1).

Задание 2. Найдите формулу параболы, которая получена из $y = x^2$ сдвигом на 2 единицы влево и на 3 единицы вниз и выпишите ее.

Ответ: $y = (x+2)^2 - 3$.

Задание 3. Постройте график функции $y = 2,5(x - 1)^2 + 1,5$.

Ответ:

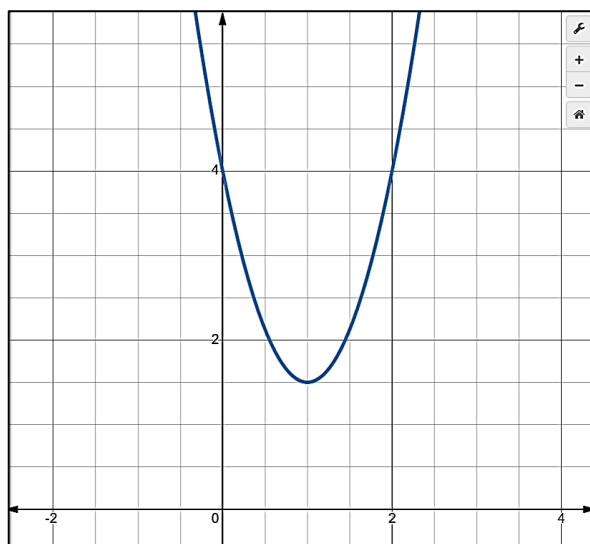


Рисунок 26

8. Рефлексия учебной деятельности.

Учитель: «Теперь оцените свою работу на уроке. Я раздам вам небольшие листочки. Вам необходимо закончить предложения».

<p><i>Сегодня я узнал</i></p> <hr/> <hr/> <p><i>Мне было трудно</i></p> <hr/> <hr/> <p><i>«Теперь я умею...»</i></p> <hr/> <hr/>
--

Рисунок 27

Домашнее задание.

Задание 1. Построить в одной системе координат графики функций: $y = 2x^2$, $y = 2x^2 - 1$, $y = 2(x + 1)^2$

Задание 2. Для функции $y = -0,5(x - 2)^2 + 4$ указать координаты вершины, ось симметрии, направление ветвей.

2.4 Конспект урока по теме: «Изучение графика функции $y = \frac{1}{x+a} + b$ с применением цифрового инструмента Desmos»

Предмет: алгебра.

Класс: 8 (дополнительное занятие) или 9–11 (подготовка к экзаменам).

Тип урока: открытие нового знания (исследовательская работа в группах).

Тема: «Изучение графика функции $y = \frac{1}{x+a} + b$ с применением цифрового инструмента Desmos».

Цели: формирование понятия о преобразованиях графика гиперболы; развитие умений анализировать влияние параметров a и b на расположение асимптот и центра гиперболы; воспитание внимательности, аккуратности при построении графиков, формирование интереса к исследовательской деятельности и подготовке к экзаменам.

Предметные результаты: знать, как коэффициенты a и b влияют на график функции; уметь строить график данной функции.

Метапредметные (УУД):

- познавательные: строить логические рассуждения, анализировать, сравнивать, обобщать; структурировать знания, осознанно строить речевое высказывание;
- регулятивные: формулировать цель, планировать действия в группе, оценивать результат;
- коммуникативные: выражать свои мысли, слушать других, работать в паре/группе, представлять результаты исследования.

Личностные результаты: формирование интереса к изучению функций; формирование коммуникативной компетентности при работе в группах; развитие ответственности.

Основные термины, понятия: гипербола, асимптота (вертикальная, горизонтальная).

Формы работы: фронтальная, групповая, индивидуальная.

Ресурсы: учебник «Алгебра. 8 класс» под ред. Ю.Н. Макарычева, сборник «ОГЭ 2026. Математика. Типовые экзаменационные варианты» под ред. И.В. Ященко, сборник «ЕГЭ 2026. Математика. Типовые экзаменационные варианты» под ред. И.В. Ященко.

Технические средства: компьютер с проектором и доступом в интернет, раздаточный материал, компьютеры (ноутбуки, планшеты) для учеников.

Структура занятия:

1. Организационный момент.
2. Актуализация опорных знаний.
3. Постановка учебной проблемы
4. Формулирование проблемы, планирование деятельности
5. Открытие нового знания.
6. Первичная проверка понимания.
7. Рефлексия учебной деятельности.

Ход занятия

1. *Организационный момент.*

Учитель: «Здравствуйте, ребята. Вы уже знакомы с гиперболой вида $y = \frac{1}{x}$. Но в экзаменационных заданиях (и в жизни) часто встречаются более сложные ее виды, с которыми мы сегодня с вами и познакомимся».

Деятельность учащихся: приветствуют, проверяют готовность, слушают учителя.

2. *Актуализация опорных знаний.*

Учитель: «Давайте с вами проверим свои знания о гиперболе. Сейчас я буду называть утверждения. ваша задача — решить верное оно или нет. Вы должны записать в тетради номер утверждения и галочку рядом, если оно верное, крестик – если неверное».

Содержание задания:

1. Функция определена для любых значений аргумента, кроме нуля (верно).
2. Значением функции может быть любое число (неверно).
3. Функция обращается в ноль в точке (0; 0) (неверно).
4. Функция при $k > 0$ принимает отрицательные значения на промежутке $(-\infty; 0)$ (верно).

5. При $k < 0$ функция принимает положительные значения на промежутке $(0; +\infty)$ (верно).
6. При $k > 0$ функция возрастает (неверно).
7. Асимптотами гиперболы являются ее координатные оси (верно).
8. При $k < 0$ функция убывает (неверно).

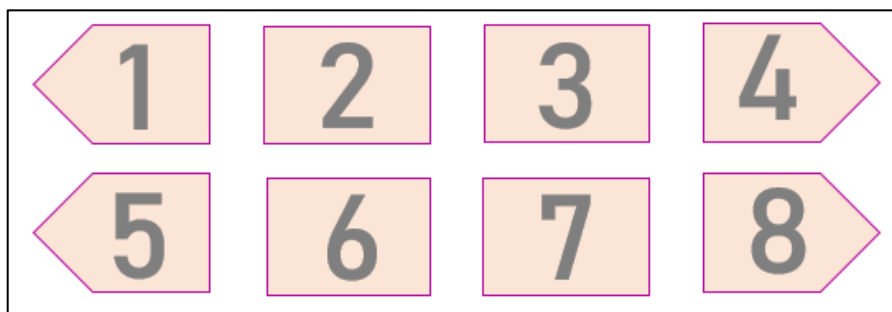


Рисунок 28

Учитель: «Теперь обменяйтесь тетрадами с соседом по парте. Проверьте друг друга, сверяясь с доской».

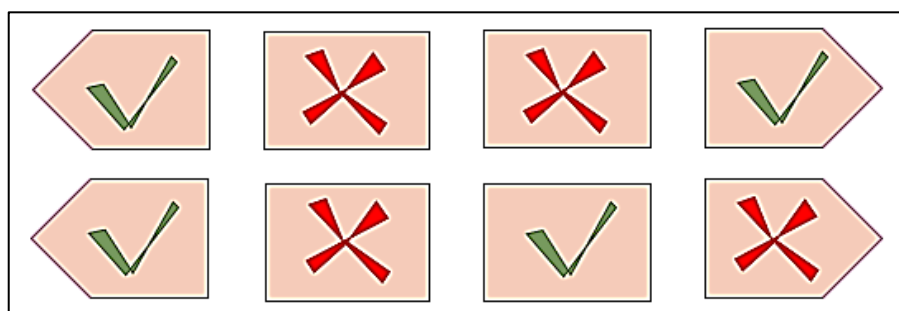


Рисунок 29

3. Постановка учебной проблемы

Учитель: «Хорошо. Теперь обратите внимание на этот слайд. Здесь представлено несколько примеров функций из экзаменационных задач, с которыми вы еще не сталкивались».

$y = \frac{1}{x+1}$	$y = \frac{1}{x} - 4$	$y = -\frac{1}{x+2}$
$y = \frac{1}{x-3}$	$y = \frac{1}{x} + 4$	$y = -\frac{1}{x} + 2$

Рисунок 30

4. Формулирование проблемы, планирование деятельности

Учитель: «Ребята, посмотрите на них и скажите, что в них общего?».

Ученик: «У них одинаковый числитель. То есть коэффициент k в каждой формуле равен единице».

Учитель: «Верно. Давайте теперь сравним функции $y = \frac{1}{x+1}$ и $y = \frac{1}{x}$. Чем они отличаются?».

Ученик: «Знаменатель функции $y = \frac{1}{x+1}$ на единицу больше знаменателя функции $y = \frac{1}{x}$ ».

Учитель: «Хорошо. А есть ли здесь другие подобные функции? Назовите их».

Ученик: «Да, это функции $y = -\frac{1}{x+2}$ и $y = \frac{1}{x-3}$ ».

Далее учитель просит учеников составить формулу для этих функций в общем виде. Затем записывает ее на доске: $y = \frac{1}{x+a}$. После предлагает ученикам предположить, чем могут отличаться графики функций $y = \frac{1}{x+a}$ и $y = \frac{1}{x}$. Фиксирует основные гипотезы.

Учитель: «Молодцы. Теперь давайте сравним функции $y = \frac{1}{x} - 5$ и $y = \frac{1}{x}$. Чем они отличаются?».

Ученики: «Они отличаются тем, что значения функции $y = \frac{1}{x} - 5$ на пять меньше значений второй функции».

Учитель хвалит ответившего за верный ответ и просит назвать функции, подобные $y = \frac{1}{x} - 5$. После совместно с обучающимися составляет и записывает на доске формулу этих функций в общем виде: $y = \frac{1}{x} + b$. Затем предлагает ученикам предположить, чем могут отличаться графики функций $y = \frac{1}{x+a}$ и $y = \frac{1}{x}$. Фиксирует основные гипотезы.

Учитель: «Можем ли мы объединить две формулы $y = \frac{1}{x+a}$ и $y = \frac{1}{x} + b$ в одну универсальную? Как она будет выглядеть?».

Ученики: «Да, можем. Это будет формула вида: $y = \frac{1}{x+a} + b$ ».

Далее совместно с учениками формулируются тема и цель урока. Цель урока: узнать, как влияют значения a и b на график $y = \frac{1}{x+a} + b$ и научиться его строить.

Учитель: «Сегодня я предлагаю вам разделиться на 6 групп и провести исследование в специальной программе Desmos. У вас на партах лежат листы, в которых указана функция, которую вы будете рассматривать. А также шаги работы. Ваша задача — объединиться в группы в зависимости от указанной функции на вашем рабочем листе. На выполнение отводится 7-8 минут. После каждая группа должна выступить, кратко рассказав об итогах работы за 2-3 минуты».

5. Открытие нового знания.

Ученики приступают к выполнению задания, следуя шагам из листов.

Учитель наблюдает за работой групп, отвечает на вопросы (например, как добавить ползунок, как ввести асимптоту), следит за заполнением таблиц. При необходимости направляет рассуждения.

После того, как ученики закончат работу с листом, педагог начнет вызывать группы по очереди. Ученики рассказывают о том, что узнали, показывают построенный график (могут дать свои листы одноклассникам, чтобы те детальнее рассмотрели график).

По ходу выступлений учитель задает обучающимся вопросы или дает разъяснения при необходимости. В процессе происходит заполнение таблицы учителем совместно с учениками.

Вид преобразования	Формула	Вертикальная асимптота	Горизонтальная асимптота	Центр
-	$y = \frac{1}{x}$	$x = 0$	$y = 0$	$(0; 0)$
Сдвиг по вертикали	$y = \frac{1}{x} + b$	$x = 0$	$y = b$	$(0; b)$
Сдвиг по горизонтали	$y = \frac{1}{x + a}$	$x = -a$	$y = 0$	$(-a; 0)$
Сдвиг по вертикали и горизонтали	$y = \frac{1}{x + a} + b$	$x = -a$	$y = b$	$(-a; b)$

Рисунок 31

6. Первичная проверка понимания.

Учитель хвалит за проделанную работу и предлагает проверить свои знания путем выполнения заданий.

Задание «Найди пару». Нужно каждой функции подобрать ее описание.

1) $y = \frac{1}{x+4} - 2$	А) сдвиг влево на 3, вверх на 1.
2) $y = \frac{1}{x-3} + 1$	Б) Центр в точке (2; -4).
3) $y = \frac{1}{x-2} - 4$	В) Асимптоты: $x = -4$, $y = -2$.

Рисунок 32

Ответы: 1 – В, 2 – А, 3 – Б.

Задание «Заполнить пропуски».

Для функции $y = \frac{1}{x+5} - 3$:

- Вертикальная асимптота $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

- Горизонтальная асимптота $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Центр гиперболы - точка ($\underline{\hspace{1cm}}$; $\underline{\hspace{1cm}}$).
- График получен сдвигом $y = \frac{1}{x}$ на $\underline{\hspace{2cm}}$ единиц влево и на $\underline{\hspace{2cm}}$

единиц вниз.

Ответ: $x = -5$, $y = -3$, центр $(-5; -3)$, сдвиг на 5 влево и на 3 вниз.

Задание на построение. Ученикам необходимо построить график и изобразить его асимптоты. Функция $y = \frac{1}{x-2} + 3,5$.

9. Рефлексия учебной деятельности.

Учитель использует прием «Цветные стикеры». Педагог просит поднять зелёный стикер, если ученику всё понятно, и он может объяснить тему соседу; жёлтый – если есть небольшие вопросы; красный – если ничего не понял.

Домашнее задание:

Задание «Заполнить пропуски».

Для функции $y = -\frac{1}{x-2} + 4$

- Вертикальная асимптота $x = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Горизонтальная асимптота $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
- Центр гиперболы - точка ($\underline{\hspace{1cm}}$; $\underline{\hspace{1cm}}$).
- График получен сдвигом $y = \frac{1}{x}$ на $\underline{\hspace{2cm}}$ единиц влево и на $\underline{\hspace{2cm}}$

единиц вниз.

Задание на построение. Ученикам необходимо построить график и изобразить его асимптоты. Функция $y = -\frac{1}{x-1,5} + 2$

Заключение

В данной работе были рассмотрены методические аспекты изучения функций в основной школе с использованием электронных образовательных ресурсов. Цель исследования, заключающаяся в разработке материалов по изучению функций с применением ЭОР, была достигнута. В ходе работы были решены все поставленные задачи.

В первой главе были рассмотрены теоретические основы использования цифровых технологий в обучении математике. Установлено, что электронные образовательные ресурсы выступают не заменой, а эффективным дополнением классических методик, позволяя реализовать принципы наглядности, интерактивности и индивидуализации. Выделены критерии отбора цифровых инструментов (научность, интерактивность, доступность, адаптивность) и основные типы ЭОР (визуализаторы, конструкторы, тренажёры). Кроме того, было подробно изучено содержание функциональной линии в курсе алгебры 7-9 классов на примере учебников Ю.Н. Макарычева.

Во второй главе показано, почему динамическая визуализация помогает сделать изучение функций более наглядным и понятным. Также в главе описаны возможности программ GeoGebra и Desmos и даны рекомендации, как использовать их на разных этапах урока — от объяснения нового материала до самостоятельной работы учащихся.

Ключевым результатом практической части стали три подробных конспекта уроков с использованием ЭОР:

1. «Изучение линейной функции и ее графика с использованием цифровых технологий»
2. «Изучение графиков функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x-m)^2$ с использованием цифровых технологий».
3. «Изучение графика функции $y = \frac{1}{x+a} + b$ с применением цифрового инструмента Desmos».

Таким образом, все поставленные задачи были решены, цель исследования достигнута. Предложенные конспекты уроков могут быть полезны учителям в их повседневной работе.

Список использованных источников

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования : утвержден приказом Минобрнауки России от 17.12.2010 № 1897 (ред. от 11.12.2020). М. : Просвещение, 2021. 61 с.
2. Алгебра. 7 класс : базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова ; под ред. С.А. Теляковского. 15-е изд., стер. М. : Просвещение, 2023. 255 с.
3. Алгебра. 8 класс : базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова ; под ред. С.А. Теляковского. 17-е изд., стер. М. : Просвещение, 2023. 319 с.
4. Алгебра. 9 класс : базовый уровень : учебник / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова ; под ред. С.А. Теляковского. 4-е изд., стер. М. : Просвещение, 2017. 287 с.
5. Аркави А. О визуализации в обучении математике // Математика в школе. 2006. № 7. С. 19–22.
6. Введение понятия функции в курсе алгебры 7 класса. URL: <https://studfile.net/preview/7209468/page:25/> (дата обращения: 12.05.2026).
7. Визуализация функциональных зависимостей в программах динамической геометрии. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vizualizatsiya-funktsionalnyh-zavisimostey-v-programmah-dinamicheskoy-geometrii> (дата обращения: 12.05.2026).
8. Далингер В.А. Наглядность в обучении математике: поиск новых решений // Вестник Омского государственного педагогического университета. 2015. № 2. С. 45–50.
9. Зинченко В.П. Визуальное мышление и наглядность // Вопросы психологии. 1985. № 3. С. 34–44.

10. Использование электронных образовательных ресурсов нового поколения в учебном процессе : научно-методические материалы / Г.А. Бордовский [и др.]. СПб. : Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2007. 31 с.
11. Использование электронных образовательных ресурсов при изучении математики. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-elektronnyh-obrazovatelnyh-resursov-pri-izuchenii-matematiki/viewer> (дата обращения: 12.05.2026).
12. Методика и технология обучения математике : учеб. пособие / Н.Л. Стефанова [и др.]. М. : Дрофа, 2019. 318 с.
13. Методика преподавания математики в средней школе : учебное пособие / А.Я. Блох [и др.] ; сост. А.Я. Блох. М. : Просвещение, 1987. 416 с.
14. Покровский В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия : учеб.-метод. пособие / Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. Владимир : Изд-во ВлГУ, 2014. 143 с.
15. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие. М. : Просвещение, 2015. 305 с.
16. СберКласс : образовательная платформа. URL: <https://sberclass.ru> (дата обращения: 30.05.2026).
17. Skysmart : интерактивная тетрадь. URL: <https://skysmart.ru> (дата обращения: 30.05.2026).
18. Учи.ру : образовательная платформа. URL: <https://uchi.ru> (дата обращения: 30.05.2026).
19. Цифровая образовательная среда как одно из условий реализации ФГОС. URL: <https://nsportal.ru/shkola/administirovanie-shkoly/library/2023/01/07/tsifrovaya-obrazovatel'naya-sreda-kak-odno-iz> (дата обращения: 12.05.2026).

20. Цифровая образовательная среда: педагогический взгляд. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/tsifrovaya-obrazovatel'naya-sreda-pedagogicheskiy-vzglyad/viewer> (дата обращения: 12.05.2026).
21. Цифровая трансформация в образовании: вызовы современного общества / О.А. Шумская, И.Г. Придворева, Е.Г. Татарникова // Молодой ученый. 2021. № 7 (349). С. 76–77. URL: <https://moluch.ru/archive/349/78631/> (дата обращения: 12.05.2026).
22. Цифровые технологии в образовательном пространстве / О.И. Ваганова [и др.] // Балтийский гуманитарный журнал. 2020. № 2. С. 53–56.
23. Электронные учебно-методические материалы для использования на уроках математики. URL: https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/elektronnie_uchebnometodicheskie_materiali_dlya_ispo_182453.html (дата обращения: 12.05.2026).
24. ЯКласс : образовательная платформа. URL: <https://www.yaklass.ru> (дата обращения: 30.05.2026).

Ваша функция:

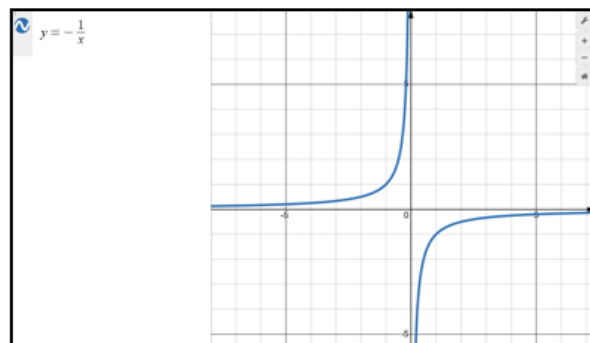
$$y = -\frac{1}{x+2}$$

Задача:

Провести исследование в программе Desmos, заполнить таблицу, сформулировать выводы о том, куда и на сколько сдвигается гипербола $y = \frac{1}{x}$.

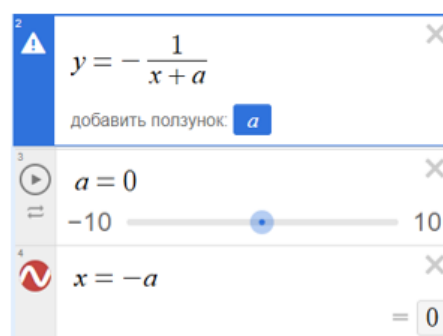
Шаг 1.

- Откройте в браузере сайт www.desmos.com/calculator.
- В первой строке введите $y = -1/x$.
- Далее вам будет необходимо задать параметр, меняя который вы сможете наблюдать преобразования графика.



Шаг 2.

- Во второй строке введите $y = -1/x + a$
- В нижней части строки появится фраза «Добавить ползунок». Кликните на нее.
- На следующей строке появится параметр и его ползунок. Теперь значения параметра a будут подставляться в формулу вашей функции.
- На четвертой строке введите $x = -a$. Это будет вертикальная асимптота.



Шаг 3.

- Перемещайте ползунок влево, пока параметр не примет значение 2.
- Продолжайте двигать ползунок вправо, затем влево.
- Зафиксируйте ваши наблюдения в таблице.

Вопрос	Ваш ответ
Куда сместился график?	
На сколько единиц?	
Что случилось с вертикальной асимптотой?	
В какой точке находится центр гиперболы (точка пересечения асимптот)?	

Шаг 4.

- Изобразите график $y = \frac{1}{x}$, а также вашей функции на обратной стороне листа.
- Подготовьте небольшое выступление от группы на 2-3 минуты

Ваша функция:

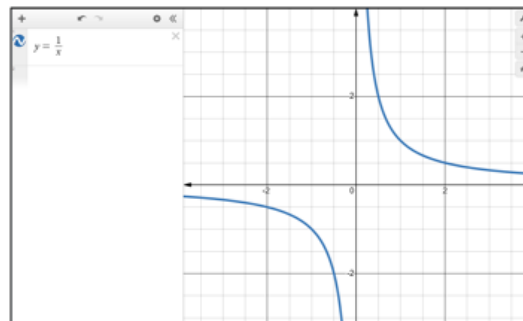
$$y = \frac{1}{x - 8}$$

Задача:

Провести исследование в программе Desmos, заполнить таблицу, сформулировать выводы о том, куда и на сколько сдвигается гипербола $y = \frac{1}{x}$.

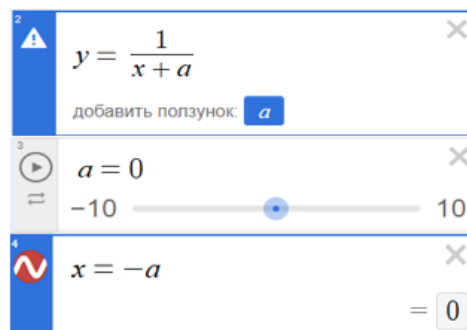
Шаг 1.

- Откройте в браузере сайт www.desmos.com/calculator.
- В первой строке введите $y=1/x$.
- Далее вам будет необходимо задать параметр, меняя который вы сможете наблюдать преобразования графика.



Шаг 2.

- Во второй строке введите $y=1/(x+a)$
- В нижней части строки появится фраза «Добавить ползунок». Кликните на нее.
- На следующей строке появится параметр и его ползунок. Теперь значения параметра a будут подставляться в формулу вашей функции.
- На четвертой строке введите $x=-a$. Это будет вертикальная асимптота.



Шаг 3.

- Перемещайте ползунок влево, пока параметр не примет значение -8 .
- Продолжайте двигать ползунок вправо, затем влево.
- Зафиксируйте ваши наблюдения в таблице.

Вопрос	Ваш ответ
Куда сместился график?	
На сколько единиц?	
Что случилось с вертикальной асимптотой?	
В какой точке находится центр гиперболы (точка пересечения асимптот)?	

Шаг 4.

- Изобразите график $y = \frac{1}{x}$, а также вашей функции на обратной стороне листа.
- Подготовьте небольшое выступление от группы на 2-3 минуты

Ваша функция:

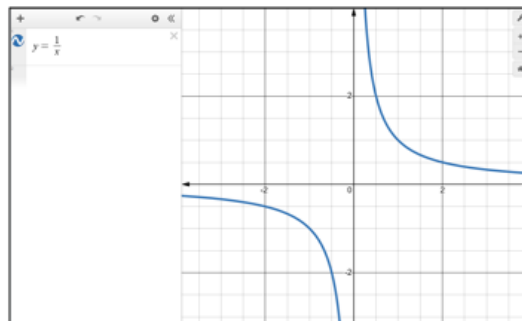
$$y = \frac{1}{x+1}$$

Задача:

Провести исследование в программе Desmos, заполнить таблицу, сформулировать выводы о том, куда и на сколько сдвигается гипербола $y = \frac{1}{x}$.

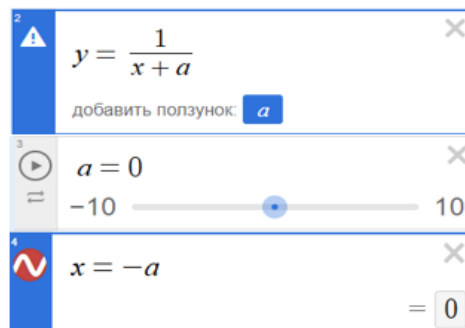
Шаг 1.

- Откройте в браузере сайт www.desmos.com/calculator.
- В первой строке введите $y=1/x$.
- Далее вам будет необходимо задать параметр, меняя который вы сможете наблюдать преобразования графика.



Шаг 2.

- Во второй строке введите $y=1/x+a$
- В нижней части строки появятся фраза «Добавить ползунок». Кликните на нее.
- На следующей строке появится параметр и его ползунок. Теперь значения параметра a будут подставляться в формулу вашей функции.
- На четвертой строке введите $x=-a$. Это будет вертикальная асимптота.



Шаг 3.

- Перемещайте ползунок вправо, пока параметр не примет значение 1.
- Продолжайте двигать ползунок вправо, затем влево.
- Зафиксируйте ваши наблюдения в таблице.

Вопрос	Ваш ответ
Куда сместился график?	
На сколько единиц?	
Что случилось с вертикальной асимптотой?	
В какой точке находится центр гиперболы (точка пересечения асимптот)?	

Шаг 4.

- Изобразите график $y = \frac{1}{x}$, а также вашей функции на обратной стороне листа.
- Подготовьте небольшое выступление от группы на 2-3 минуты

Ваша функция:

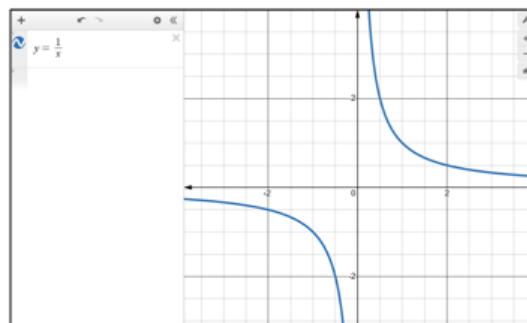
$$y = \frac{1}{x} - 5$$

Задача:

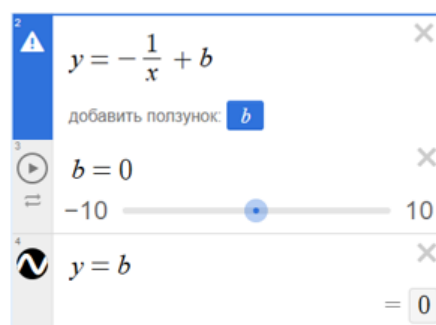
Провести исследование в программе Desmos, заполнить таблицу, сформулировать выводы о том, куда и на сколько сдвигается гипербола $y = \frac{1}{x}$.

Шаг 1.

- Откройте в браузере сайт www.desmos.com/calculator.
- В первой строке введите $y=1/x$.
- Далее вам будет необходимо задать параметр, меняя который вы сможете наблюдать преобразования графика.

**Шаг 2.**

- Во второй строке введите $y=1/x+b$.
- В нижней части строки появится фраза «Добавить ползунок». Кликните на нее.
- На следующей строке появится параметр и его ползунок. Теперь значения параметра b будут подставляться в формулу вашей функции.
- На четвертой строке введите $y=b$. Это будет горизонтальная асимптота.

**Шаг 3.**

- Перемещайте ползунок влево, пока параметр не примет значение -5 .
- Продолжайте двигать ползунок вправо, затем влево.
- Зафиксируйте ваши наблюдения в таблице.

Вопрос	Ваш ответ
Куда сместился график?	
На сколько единиц?	
Что случилось с горизонтальной асимптотой?	
В какой точке находится центр гиперболы (точка пересечения асимптот)?	

Шаг 4.

- Изобразите график $y = \frac{1}{x}$, а также вашей функции на обратной стороне листа.
- Подготовьте небольшое выступление от группы на 2-3 минуты

Ваша функция:

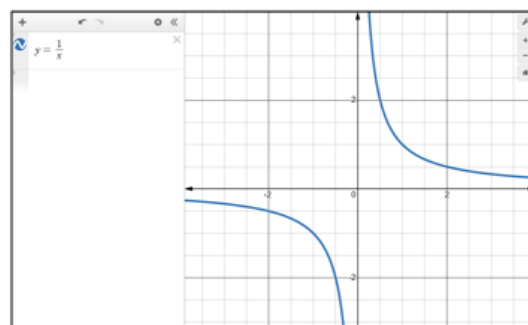
$$y = \frac{1}{x} + 4$$

Задача:

Провести исследование в программе Desmos, заполнить таблицу, сформулировать выводы о том, куда и на сколько сдвигается гипербола $y = \frac{1}{x}$.

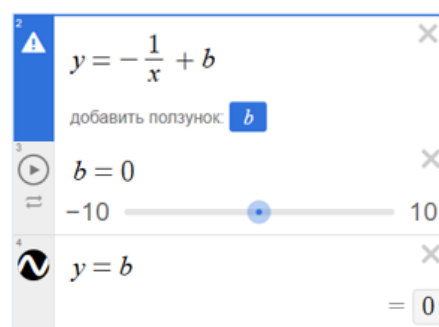
Шаг 1.

- Откройте в браузере сайт www.desmos.com/calculator.
- В первой строке введите $y=1/x$.
- Далее вам будет необходимо задать параметр, меняя который вы сможете наблюдать преобразования графика.



Шаг 2.

- Во второй строке введите $y=1/x+b$.
- В нижней части строки появится фраза «Добавить ползунок». Кликните на нее.
- На следующей строке появится параметр и его ползунок. Теперь значения параметра b будут подставляться в формулу вашей функции.
- На четвертой строке введите $y=b$. Это будет горизонтальная асимптота.



Шаг 3.

- Перемещайте ползунок вправо, пока параметр не примет значение 4.
- Продолжайте двигать ползунок вправо, затем влево.
- Зафиксируйте ваши наблюдения в таблице.

Вопрос	Ваш ответ
Куда сместился график?	
На сколько единиц?	
Что случилось с горизонтальной асимптотой?	
В какой точке находится центр гиперболы (точка пересечения асимптот)?	

Шаг 4.

- Изобразите график $y = \frac{1}{x}$, а также вашей функции на обратной стороне листа.
- Подготовьте небольшое выступление от группы на 2-3 минуты

Ваша функция:

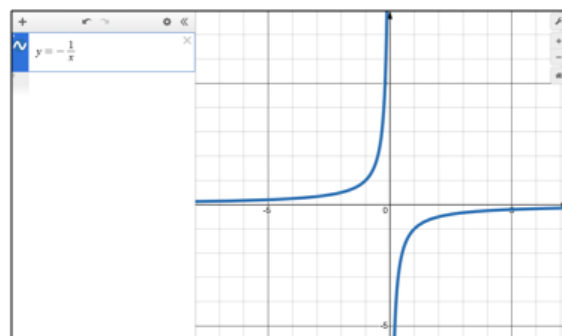
$$y = -\frac{1}{x} + 2$$

Задача:

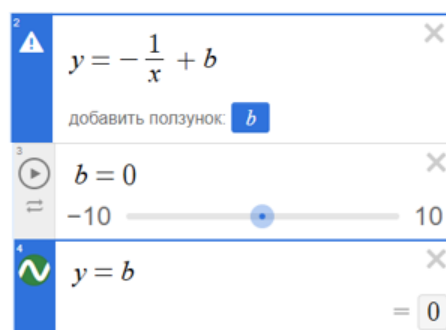
Провести исследование в программе Desmos, заполнить таблицу, сформулировать выводы о том, куда и на сколько сдвигается гипербола $y = \frac{1}{x}$.

Шаг 1.

- Откройте в браузере сайт www.desmos.com/calculator.
- В первой строке введите $y = -1/x$.
- Далее вам будет необходимо задать параметр, меняя который вы сможете наблюдать преобразования графика.

**Шаг 2.**

- Во второй строке введите $y = -1/x + b$.
- В нижней части строки появится фраза «Добавить ползунок». Кликните на нее.
- На следующей строке появится параметр и его ползунок. Теперь значения параметра b будут подставляться в формулу вашей функции.
- На четвертой строке введите $y = b$. Это будет горизонтальная асимптота.

**Шаг 3.**

- Перемещайте ползунок вправо, пока параметр не примет значение 2.
- Продолжайте двигать ползунок вправо, затем влево.
- Зафиксируйте ваши наблюдения в таблице.

Вопрос	Ваш ответ
Куда сместился график?	
На сколько единиц?	
Что случилось с горизонтальной асимптотой?	
В какой точке находится центр гиперболы (точка пересечения асимптот)?	

Шаг 4.

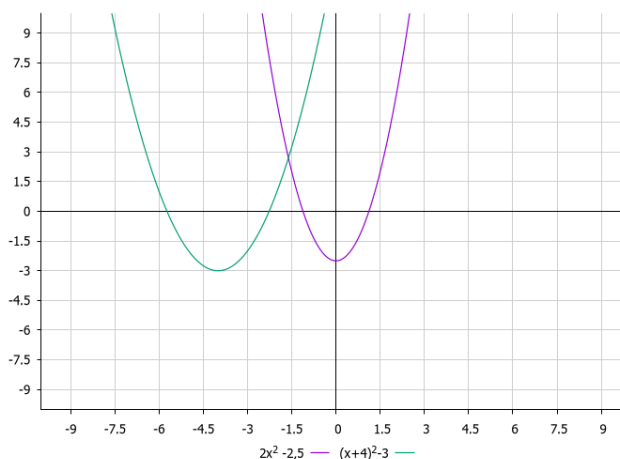
- Изобразите график $y = \frac{1}{x}$, а также вашей функции на обратной стороне листа.
- Подготовьте небольшое выступление от группы на 2-3 минуты

Российские онлайн-сервисы

Ниже представлены примеры российских онлайн-сервисов, которые предоставляют возможности для построения графиков и работы с математическими функциями.

Сервис Grafikus.ru предназначен для построения различных графиков в двумерных и трехмерных координатах. В частности, возможно построение графиков простых алгебраических функций вида $y(x)$ и $z(x, y)$, параметрических функций, заданных в двумерном и трехмерном пространстве, а также функций, заданных в полярной системе координат. В двумерных координатах можно строить графики по точкам. Проект создавался исключительно в образовательных целях.

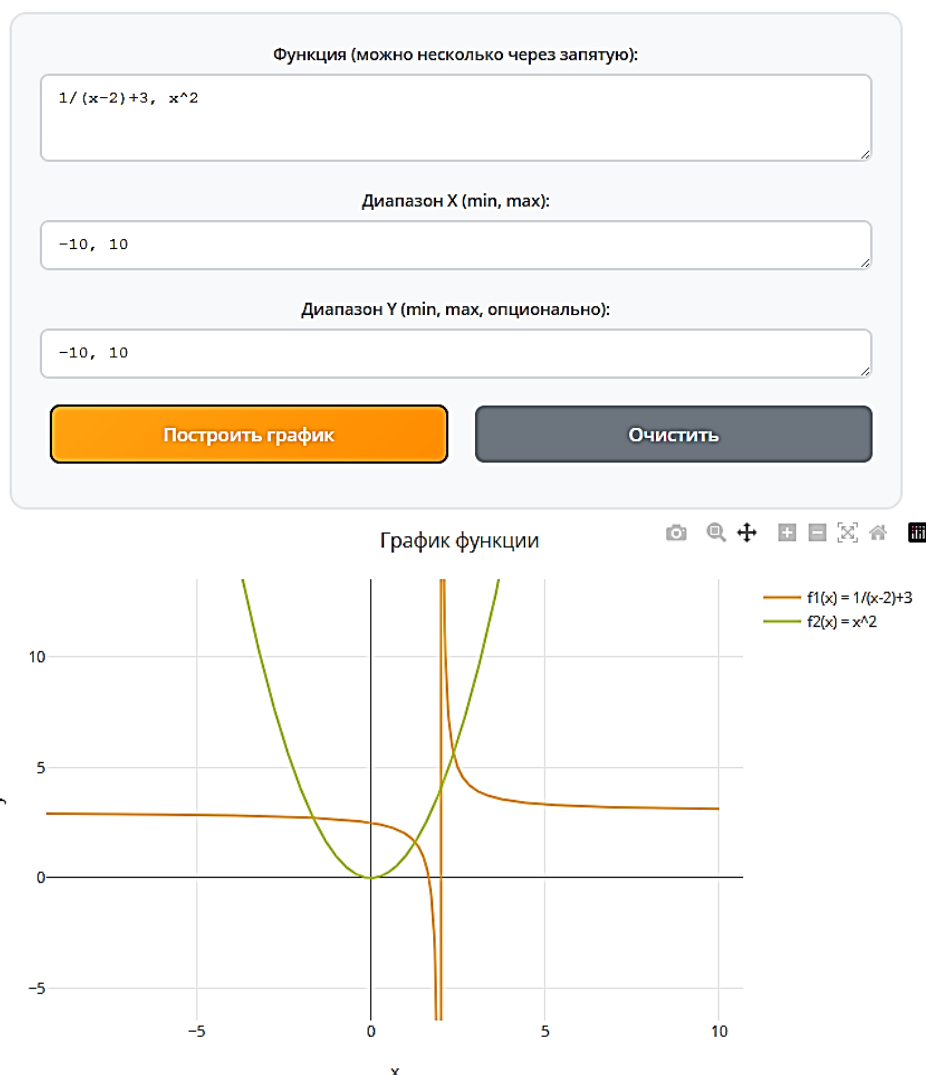
The screenshot shows the Grafikus.ru website interface for 2D graphing. The top navigation bar includes links for '2D график', '3D график', 'Помощь', 'Примеры', and 'О сервисе'. The main content area is divided into a left sidebar and a right main panel. The sidebar contains three sections: 'ось X' (X-axis) with input fields for 'от' (from -10), 'до' (to 10), 'шаг сетки' (grid step 1,5), and 'подпись' (label); 'ось Y' (Y-axis) with similar input fields; and 'изображение' (image) with input fields for 'ширина' (width 700 px), 'высота' (height 500 px), 'шрифт' (font 10 px), and a checkbox for 'полярная система координат' (polar coordinate system). The main panel has a title 'Построение двумерных графиков онлайн' and a description of the service. Below the description are buttons for 'Добавить график' (Add graph) and 'Построить графики' (Build graphs). There are two input fields for functions: $y(x) = 2x^2 - 2,5$ and $y(x) = (x+4)^2 - 3$. At the bottom of the interface, there is a copyright notice '© OddLabs, 2011-2026' and a disclaimer 'Правильность результатов не гарантируется'.



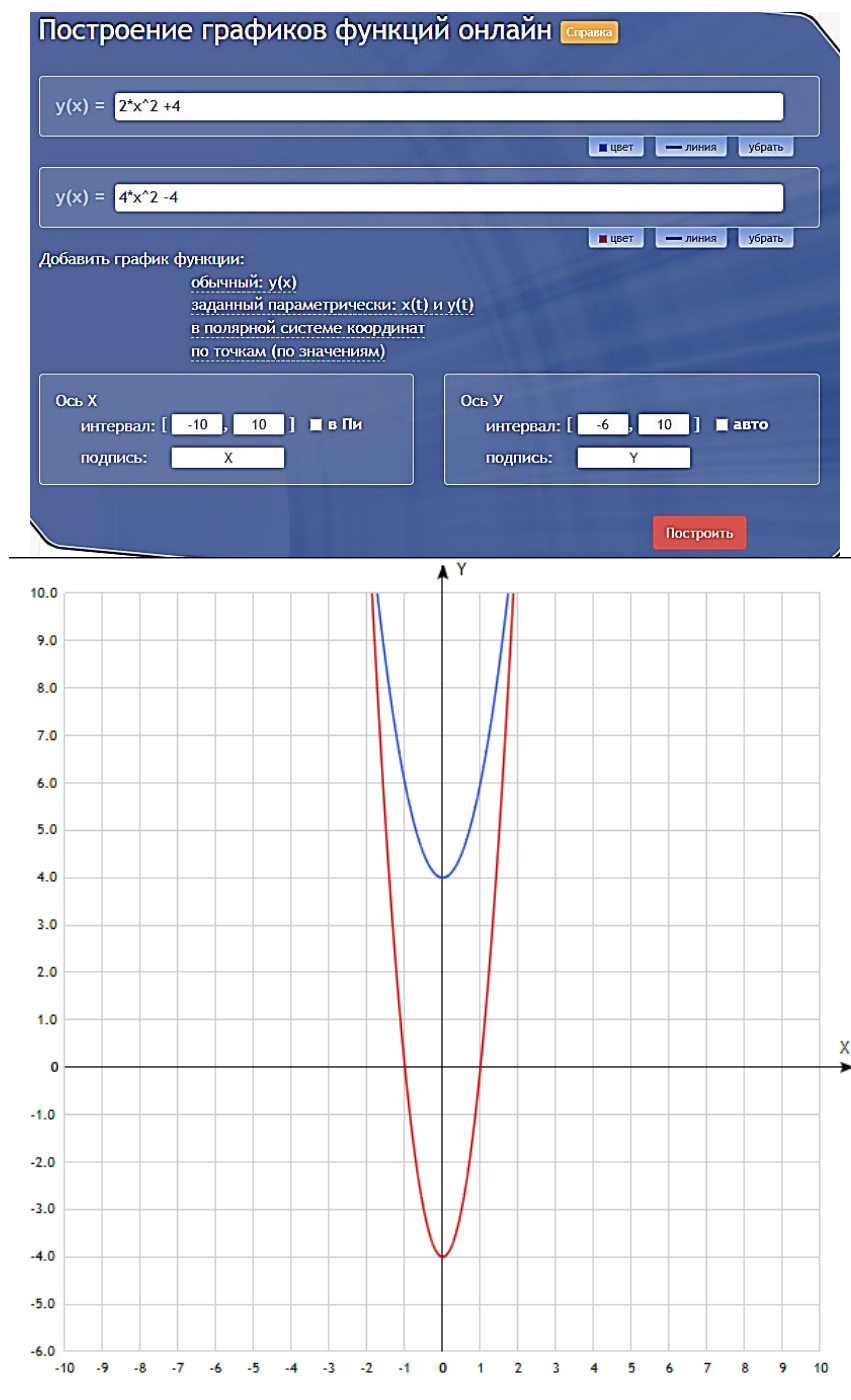
Allcalc.ru — российский онлайн- агрегатор калькуляторов, включающий инструменты для построения графиков. Сервис бесплатный, не требует регистрации, интерфейс на русском языке. На платформе доступны специализированные графические калькуляторы для: построения графиков функций вида $y=f(x)$ (линейных, квадратичных, тригонометрических, логарифмических и др.); визуализации параметрических уравнений (вида $x=f(t)$, $y=g(t)$); построения графиков в полярной системе координат ($r=f(\theta)$). Подходит для школьников, студентов и всех, кому нужно оперативно визуализировать функцию без установки дополнительного ПО.

Расширенный построитель графиков функций

Введите функцию в формате: $f(x)$ или несколько функций через запятую
Поддерживается синтаксис: x^2 , $\sin(x)$, $\exp(x)$, $\log(x)$, $\sqrt{x}$ и другие



Yotox.ru — Этот сервис создан в помощь школьникам и студентам в изучении математики (алгебры и геометрии) и физики и предназначен для онлайн построения графиков функций (обычных и параметрических) и графиков по точкам (графиков по значениям), а также графиков функций в полярной системе координат. Сервис существует с 2009 года. У него есть группа во «ВКонтакте», где пользователи могут обсуждать работу сервиса, задавать вопросы, оставлять отзывы и предложения.



BuildingClub.ru — российский онлайн-сервис с графическим калькулятором для построения и анализа математических функций. Ориентирован на школьников, студентов и инженеров. Бесплатный, не требует регистрации, интерфейс на русском языке. Основные возможности: построение графиков функций вида $y=f(x)$ (линейных, квадратичных, тригонометрических, логарифмических, экспоненциальных и др.); одновременное отображение нескольких графиков на одной координатной плоскости; отображение ключевых точек графика: нулей функции, экстремумов, точек пересечения с осями.



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 12 » 09 2025 г.
Паньженский В.И. Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Учайкиной Ксении Николаевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методические аспекты изучения функций с использованием электронных образовательных ресурсов»

Утверждена приказом по университету от « 25.09 » 2025 г. № 1103/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 11 » 05 2026 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение и анализ литературы по теме работы	Ноябрь – декабрь 2025 г.	Выполнено
2.	Исследование цифровых технологий как части современной методики преподавания математики и определение возможностей использования цифровых ресурсов при изучении функций	Январь 2026 г.	Выполнено
3.	Изучения содержания темы «Функция» в курсе алгебры 7-9 классов	Февраль – март 2026 г.	Выполнено
4.	Анализ возможностей повышения наглядности обучения через использование цифровых технологий, и разработка практических рекомендаций по организации работы с GeoGebra и Desmos при изучении функций	Март – апрель 2026 г.	Выполнено
5.	Разработка трех конспектов уроков с использованием ЭОР по темам: 1. «Изучение линейной функции и ее графика с использованием цифровых технологий» 2. «Изучение графиков функций $y = ax^2 + n$ и $y = a(x-m)^2$ с использованием цифровых технологий». 3. «Изучение графика функции $y = \frac{1}{x+a} + b$ с применением цифрового инструмента Desmos».	Апрель 2026 г.	Выполнено
6.	Оформление списка использованных источников	Май 2026 г.	Выполнено
7.	Оформление работы, подготовка презентации и выступления	Май – июнь 2026 г.	Выполнено

Дата выдачи задания «11» 09 2025г.

Руководитель  – Журавлева Е.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
 Учайкина К.Н.
(подпись) (Ф.И.О.)

И.о. ректора Пензенского
государственного университета
Д.В. Артамонову
студента (ки) 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Учайкиной Ксении Николаевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Учайкина Ксения Николаевна,
Ф.И.О. студента

студент (ка) 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методические аспекты изучения функций с использованием электронных образовательных ресурсов», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


ПОДПИСЬ
11.05.26
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 11.05.26
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР 
ПОДПИСЬ

Курявцева Е. Г.
И.О.Ф.

ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе "Антиплагиат.ВУЗ" выпускной квалификационной работы на тему : «Методические аспекты изучения функций с использованием электронных образовательных ресурсов»

студентки 4 курса Учайкиной Ксении Николаевны
направления подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование"

профиль подготовки "Математика"

Руководитель ВКР Журавлева Е.Г.



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://online.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

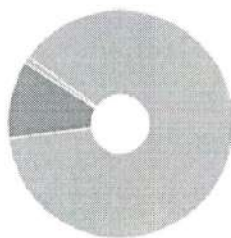
Автор: Учайкина Ксения Николаевна

Название документа: Методические аспекты изучения функций с использованием электронных образовательных ресурсов

Проверяющий: Журавлева Екатерина Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
11,25%



Оригинальность:
87,53%



ИИ-контент:
14,74%



Цитирования:
1,22%



Самоцитирования:
0%



1 «Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

- Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 159

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 11.05.2026 13:35:27

Дата корректировки: 01.06.2026 11:12:56

Количество страниц: 59

Символов в тексте: 83425

Слов в тексте: 10605

Число предложений: 953

Руководитель ВКР

Е.Г. Журавлева

дата, подпись

ОТЗЫВ

РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ на тему: «Методические аспекты изучения функций с использованием электронных образовательных ресурсов» студентки Учайкиной Ксении Николаевны факультета физико-математических и естественных наук направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование» профиль «Математика», гр. 22ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Учайкиной Ксении Николаевны посвящена разработке интерактивного учебного материала по алгебре к разделу "Функции" с использованием электронных образовательных ресурсов.

Использование электронных образовательных ресурсов позволяет не только сделать процесс изучения алгебры более увлекательным и доступным, но и адаптировать его под индивидуальные потребности каждого ученика. Интерактивные элементы, такие как анимации, графики и тесты, создают возможность для активного участия обучающихся в учебном процессе, что способствует более глубокому усвоению знаний. Функция как элемент математического образования делает возможным упорядочение представления о различных зависимостях, полученные в повседневной жизни и путем изучения других предметов, способствует развитию у учащихся умения мыслить в терминах функциональной зависимости, развить представление о различных, находящихся в зависимости друг от друга, величинах, что является немало важным в познании ребенком окружающей его действительности и повышения уровня усвоения функциональной линии.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, приложения.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи: выделены виды цифровых технологий в качестве инструмента современной методики преподавания математики, определена их роль и место в образовательном процессе, проанализированы возможности электронных образовательных ресурсов для решения методических задач в изучении функций, проведен анализ литературы по теме исследования, разработаны конспекты уроков к разделу "Функции". В работе более подробно рассмотрено применение компьютерной программы Desmos в обучении математике.

Работа является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован в школе.

Выпускная квалификационная работа Учайкиной К.Н. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным работам и заслуживает оценки «отлично».

Руководитель, к.п.н., доцент кафедры
«Математическое образование»



Е.Г. Журавлева