МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

Курсовая работа
по дисциплине «Численные и аналитические методы оптимизации»
на тему «Вариационная задача с подвижными границами. Экстремали с угловыми точками»

Направление подготовки – 01.03.01 Математика
Профиль подготовки – Вычислительная математика и компьютерные науки

Выполнил студент: _____ Яковлева А.Д.
Группа: 19ВМ1

Руководитель:
к. ф.-м. н., доцент _____ Москалева М.А.

Работа защищена с оценкой _____
Преподаватель _____
Дата защиты _____

2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Зав. кафедрой МСМ
_____ Смирнов Ю.Г.

ЗАДАНИЕ
на курсовую работу по дисциплине
«Численные и аналитические методы оптимизации»
Тема: «Вариационная задача с подвижными границами. Экстремали с угловыми точками»

а) Изучить литературу по теме курсовой работы.
б) Изложить реферативно изученный по теме теоретический материал.
в) Самостоятельно придумать и решить задачи по теме курсовой работы.

Руководитель работы, доцент Москалева М.А.

Оглавление

Введение **4**

Глава I. Теоретическая часть **6**

§1. Простейшая задача с подвижными границами 6

§2. Задача с подвижными границами для функционала вида $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx$ 12

§3. Экстремали с угловыми точками 16

Глава II. Практическая часть **22**

Заключение **28**

Список литературы **29**

Введение

Во многих задачах, возникающих в анализе, механике, геометрии и т.д., важную роль играют переменные величины, называемые *функционалами*. Мы говорим, что нам задан функционал, если каждой функции (или кривой) из некоторого класса поставлено в соответствие определенное число. Таким образом, можно сказать, что функционал – это функция, в которой роль независимого переменного играют кривые или функции.

Отдельные задачи, связанные с понятием функционала, рассматривались более трехсот лет назад. Первые важные результаты здесь были получены еще Л. Эйлером. Тем не менее до сих пор еще не существует достаточно общих методов «исчисления функционалов», аналогичных классическому анализу («исчислению функций»). Наиболее разработанными являются методы нахождения наибольших и наименьших значений функционалов. Этот наиболее разработанный раздел «исчисления функционалов» называется вариационным исчислением. Правильнее, однако, было бы назвать его «вариационным исчислением в узком смысле», поскольку значение понятия вариации функционала, играющего основную роль в вариационном исчислении, далеко не исчерпывается применениями к задачам на нахождение экстремумов функционалов.

Вариационное исчисление – это раздел математики, в котором из неизвестных функций, входящих в подынтегральное выражение некоторого интеграла, выбирается такая функция, при которой этот интеграл достигает своего максимального или минимального значения. Такого рода задачи, которые называют *вариационными*, встречаются на разных стадиях научно-технических исследований.

Существуют вариационные задачи, в которых допустимые функции были определены на фиксированном отрезке $[a, b]$, причем концевые точки $A(a, y_A)$ и $B(b, y_B)$ графика функции были закреплены, часто необходимо решать и иные задачи, в которых экстремум функционала, заданного

интегралом, ищется среди функций, определенных на разных промежутках, причем значения этих функций на концах промежутка не являются фиксированными.

В теоретической части работы будет подробно рассказано об основных понятиях и определениях вариационного исчисления, связанных с решением вариационной задачи с подвижными границами. В практической части будут рассмотрены задачи, использующие знания по данной теории.

Глава I. Теоретическая часть

§1. Простейшая задача с подвижными границами

При исследовании функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

предположим, что одна или обе граничные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) могут перемещаться. Тогда класс допустимых кривых расширяется, – кроме кривых сравнения, имеющих общие граничные точки с исследуемой кривой, можно уже брать и кривые со смещенными граничными точками.

Поэтому если на какой-нибудь кривой $y = y(x)$ достигается экстремум в задаче с подвижными граничными точками, то экстремум тем более достигается по отношению к более узкому классу кривых, имеющих общие граничные точки с кривой $y = y(x)$, и, следовательно, должно быть выполнено основное, необходимое для достижения экстремума в задаче с неподвижными границами условие – функция $y(x)$ должна быть решением уравнения Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Итак, кривые $y = y(x)$, на которых реализуется экстремум в задаче с подвижными границами, должны быть экстремалями.

Общее решение уравнения Эйлера содержит две произвольные постоянные, для определения которых необходимо иметь два условия. В задаче с неподвижными граничными точками такими условиями были:

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } y(x_1) = y_1.$$

В задаче с подвижными границами одно или оба эти условия отсутствуют и недостающие условия для определения произвольных постоянных общего решения уравнения Эйлера должны быть получены из основного необходимого условия экстремума – равенства нулю вариации δv.

Так как в задаче с подвижными границами экстремум достигается лишь на решениях $y = y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера, то в дальнейшем можно рассматривать значение функционала лишь на функциях этого семейства. При этом функционал $v[y(x, C_1, C_2)]$ превращается в функцию параметров C_1 и C_2 и пределов интеграции x_0 и x_1, а вариация функционала совпадает с дифференциалом этой функции. Для упрощения будем считать, что одна из граничных точек, например (x_0, y_0), закреплена, а другая (x_1, y_1) может перемещаться и переходит в точку $(x_1 + \Delta x_1, y_1 + \Delta y_1)$, или, как обычно обозначают в вариационном исчислении, $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$.

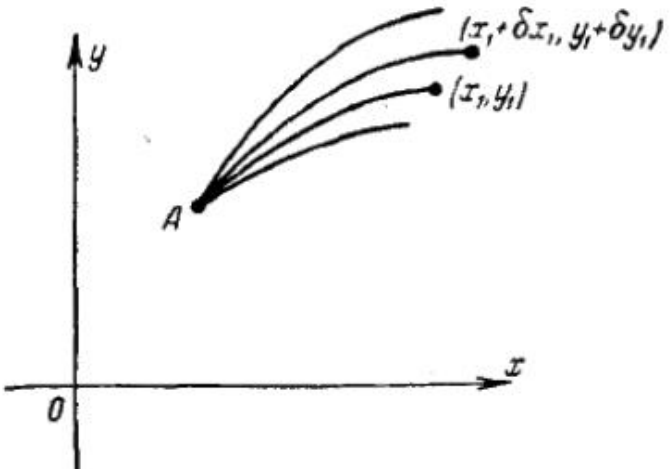

рис. 1.1

Допустимые кривые $y = y(x)$ и $y = y(x) + \delta y$ будем считать близкими, если модули вариаций δy и $\delta y'$ малы, и малы модули приращений δx_1 и δy_1 (приращения δx_1 и δy_1 обычно называют вариациями предельных значений x_1 и y_1).

Экстремали, проходящие через точку (x_0, y_0), образуют пучок экстремалей $y = y(x, C_1)$. Функционал $v[y(x, C_1)]$ на кривых этого пучка превращается в функцию C_1 и x_1. Если кривые пучка $y = y(x, C_1)$ в окрестности рассматриваемой экстремали не пересекаются, то $v[y(x, C_1)]$ можно рассматривать как однозначную функцию x_1 и y_1, так как задание x_1 и y_1 определяет экстремаль пучка (рис. 1.1) и тем самым определяет значение функционала.

Вычислим вариацию функционала $v[y(x, C_1)]$ на экстремалях пучка $y = y(x, C_1)$ при перемещении граничной точки из положения (x_1, y_1) в положение $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$. Так как функционал v на кривых пучка превратился в функцию x_1 и y_1, то его вариация совпадает с дифференциалом этой функции.

Выделим из приращения Δv главную линейную по отношению к δx_1 и δy_1 часть:

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]dx. \qquad (1.1)$$

Первое слагаемое первой части преобразуем с помощью теоремы о среднем значении:

$$\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx = F|_{x=x_1+\theta\delta x_1}\delta x_1, \quad \text{где } 0 < \theta < 1,$$

в силу непрерывности функции F будем иметь:

$$F|_{x=x_1+\theta\delta x_1} = F(x, y, y')|_{x=x_1} + \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 \to 0$ при $\delta x_1 \to 0$ и $\delta y_1 \to 0$.

Второе слагаемое правой части (1.1) преобразуем путем разложения подынтегральной функции по формуле Тейлора:

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')\delta y + F_{y'}(x, y, y')\delta y']dx + R_1,$$

где R_1 является бесконечно малой более высокого порядка, чем δy или $\delta y'$. В свою очередь линейная часть:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y\delta y + F_{y'}\delta y')dx$$

может быть преобразована путем интеграции по частям второго слагаемого подынтегральной функции к виду:

$$[F_{y'}\delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\delta y dx.$$

Значения функционала берутся лишь на экстремалях, следовательно, $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0$. Так как граничная точка (x_0, y_0) закреплена, то $\delta y|_{x=x_0} = 0$. Следовательно,

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'}\delta y')dx = [F_{y'}\delta y]|_{x=x_1}.$$

Заметим, что $\delta y|_{x=x_1}$ не равно δy_1 – приращению y_1, так как δy_1 – это приращение y_1 при перемещении граничной точки в положение $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$, а $\delta y|_{x=x_1}$ – это приращение ординаты в точке x_1 при переходе от экстремали, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) к экстремали, проходящей через точки (x_0, y_0) и $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ (рис. 1.2).

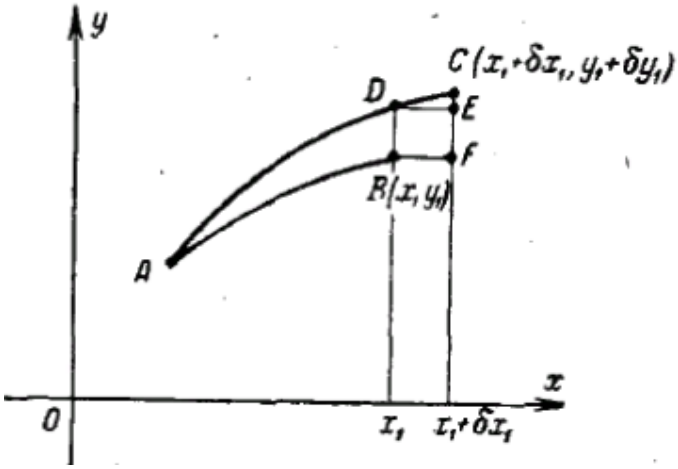

рис. 1.2

Из чертежа видно, что $BD = \delta y|_{x=x_1}$; $FC = \delta y_1$; $EC \approx y(x_1)\delta x_1$; $BD = FC - EC$

или

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1.$$

При этом приближенное равенство справедливо с точностью до бесконечно малых более высокого порядка.

Итак, окончательно имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F dx \approx F|_{x=x_1}\delta x_1;$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y')]dx \approx F_{y'}\big|_{x=x_1} \cdot (\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1),$$

где приближенные равенства также справедливы с точностью до членов порядка выше первого относительно δx_1 и δy_1.

Следовательно, из (1.1) получим:

$$\delta v = F|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1} \cdot (\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1) =$$

$$= (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1$$

или

$$\delta \bar{v}(x_1, y_1) = (F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1,$$

где $\bar{v}(x_1, y_1)$ – функция, в которую превратился функционал v на экстремалях $y = y(x, C_1)$, а $dx_1 = \Delta x_1 = \delta x_1$, $dy_1 = \Delta y_1 = \delta y_1$ – приращения координат граничной точки.

Основное необходимое условие экстремума $\delta v = 0$ приобретает вид:

$$(F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\big|_{x=x_1}\delta y_1 = 0. \qquad (1.2)$$

Если вариации δx_1 и δy_1 независимы, то отсюда следует, что:

$$(F - y'F_{y'})\big|_{x=x_1} = 0 \quad \text{и} \quad F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0.$$

Однако чаще приходится рассматривать случай, когда вариации δx_1 и δy_1 зависимы.

Пусть, например, правая граничная точка (x_1, y_1) может перемещаться по некоторой кривой: $y_1 = \varphi(x_1)$.

Тогда $\delta y_1 \approx \varphi'(x_1)\delta x_1$ и, следовательно, условие (1.2) принимает вид $\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]\delta x_1 = 0$ или, так как δx_1 изменяется произвольно, то $\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_1} = 0$. Это условие устанавливает зависимость между

угловыми коэффициентами φ' и y' в граничной точке. Оно называется *условием трансверсальности*.

Условие трансверсальности совместно с условием $y_1 = \varphi(x_1)$ позволяет, вообще говоря, определить одну или несколько экстремалей пучка $y = y(x, C_1)$, на которых может достигаться экстремум. Если граничная точка (x_0, y_0) может перемещаться по некоторой кривой $y_0 = \psi(x_0)$, то совершенно так же обнаружим, что и в точке (x_0, y_0) должно удовлетворяться условие трансверсальности:

$$\left[F + (\psi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_0} = 0.$$

§2. Задача с подвижными границами для функционала вида

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx$$

Если при исследовании на экстремум функционала:

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx$$

одна из граничных точек, например $B(x_1, y_1, z_1)$, перемещается, а другая, $A(x_0, y_0, z_0)$, неподвижна (или обе граничные точки подвижны), то очевидно, что экстремум может достигаться лишь на интегральных кривых системы уравнений Эйлера:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0; \quad F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} = 0.$$

Действительно, если на некоторой кривой C реализуется экстремум в задаче с подвижными границами, т.е. достигается максимальное или минимальное значение v по сравнению со значениями v на всех близких допустимых кривых, среди которых находятся как кривые, имеющие общие граничные точки с кривой C, реализующей экстремум, так и кривые, у которых граничные точки не совпадают с граничными точками кривой C, то тогда подавно на кривой C достигается экстремум по отношению к более узкому классу близких кривых, имеющих общие граничные точки с кривой C.

Следовательно, на кривой C должны удовлетворяться необходимые условия экстремума задачи с неподвижными граничными точками, и, в частности, кривая C должна быть интегральной кривой системы уравнений Эйлера.

Общее решение системы уравнений Эйлера содержит четыре произвольные постоянные. Зная координаты граничной точки $A(x_0, y_0, z_0)$, которую мы считаем неподвижной, можно, вообще говоря, исключить две произвольные постоянные.

Для определения двух других произвольных постоянных необходимо иметь еще два уравнения, которые будут получены из условия $\delta v = 0$, причем

при вычислении вариации мы уже будем считать, что функционал задается лишь на решениях системы уравнений Эйлера, так как только на них может достигаться экстремум. При этом функционал v превращается в функцию $\Phi(x_1, y_1, z_1)$ координат x_1, y_1, z_1 точки $B(x_1, y_1, z_1)$, и вариация функционала превращается в дифференциал этой функции.

Вычисление вариации v может быть проведено следующим образом:

$$\Delta v = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y', z'+\delta z')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y', z'+\delta z')dx +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y', z'+\delta z') - F(x, y, z, y', z')]dx.$$

Применим теорему о среднем значении к первому интегралу и воспользуемся непрерывностью функции F, а во втором интеграле выделим главную линейную часть с помощью формулы Тейлора. После этих преобразований получим

$$\delta v = F|_{x=x_1}\delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_z \delta z + F_{y'}\delta y' + F_{z'}\delta z']dx.$$

Интегрируя по частям два последних слагаемых, стоящих под знаком интеграла, будем иметь:

$$\delta v = F|_{x=x_1}\delta x_1 + \left[F_{y'}\delta y\right]_{x=x_1} + [F_{z'}\delta z]_{x=x_1} +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\,\delta y + (F_z - \frac{d}{dx}F_{z'})\delta z']dx.$$

Так как значения v вычисляются лишь на экстремалях, то

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \equiv 0; \quad F_z - \frac{d}{dx}F_{z'} \equiv 0$$

и, следовательно,

$$\delta v = F|_{x=x_1}\delta x_1 + \left[F_{y'}\delta y\right]_{x=x_1} + \left[F_{z'}\delta z\right]_{x=x_1}.$$

В результате получим

$$\delta y|_{x=x_1} \approx \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1 \quad \text{и} \quad \delta z|_{x=x_1} \approx \delta z_1 - z'(x_1)\delta x_1,$$

и, следовательно,

$$\delta v = [F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1 = 0.$$

Если вариации δx_1, δy_1, δz_1 независимы, то из условия $\delta v = 0$ получим:

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1} = 0; \quad F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0; \quad F_{z'}|_{x=x_1} = 0.$$

Если граничная точка $B(x_1, y_1, z_1)$ может перемещаться по некоторой кривой $y_1 = \varphi(x_1);\ z_1 = \psi(x_1)$, то $\delta y_1 = \varphi'(x_1)\delta x_1$, а $\delta z_1 = \psi'(x_1)\delta x_1$ и условие $\delta v = 0$ или

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1 = 0$$

переходит в условие

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 = 0,$$

откуда в силу произвольности δx_1 получим:

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - z')F_{z'}]_{x=x_1} = 0.$$

Это условие носит название условия трансверсальности в задаче об исследовании на экстремум функционала

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')dx.$$

Условие трансверсальности совместно с уравнениями $y_1 = \varphi(x_1)$; $z_1 = \psi(x_1)$ дает недостающие уравнения для определения произвольных постоянных в общем решении системы уравнений Эйлера.

Если граничная точка $B(x_1, y_1, z_1)$ может перемещаться по некоторой поверхности $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$, то $\delta z_1 = \varphi'_{x_1}\delta x_1 + \varphi'_{y_1}\delta y_1$, причем вариации δx_1 и δy_1 произвольны. Следовательно, условие $\delta v = 0$ или, в развернутом виде:

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}\Big|_{x=x_1}\delta y_1 + F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1 = 0$$

преобразуется в условие

$$[F - y'F_{y'} - z'F_{z'} + \varphi'_x F_{z'}]_{x=x_1}\delta x_1 + [F_{y'} + F_{z'}\varphi'_y]_{x=x_1}\delta y_1 = 0.$$

Эти два условия вместе с уравнением $z_1 = \varphi(x_1, y_1)$, вообще говоря, дают возможность определить две произвольные постоянные в общем решении системы уравнений Эйлера.

Если подвижной является граничная точка $A(x_0, y_0, z_0)$, то тем же методом в этой точке получим совершенно аналогичные условия.

Если рассмотреть функционал

$$v = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n)dx,$$

то без изменения метода доказательства получим, что в случае подвижной точки $B(x_1, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1})$ в этой точке

$$(F - \sum_{i=1}^{n} y'_i F_{y'_i})\Big|_{x=x_1} \delta x_1 + \sum_{i=1}^{n} F_{y'_i}\Big|_{x=x_1} \delta y_{i1} = 0.$$

§3. Экстремали с угловыми точками

До сих пор мы рассматривали вариационные задачи, в которых искомая функция $y = y(x)$ предполагалась непрерывной и имеющей непрерывную производную. Однако во многих задачах последнее требование является неестественным, более того, в некоторых классах вариационных задач решение, как правило, достигается на экстремалях, имеющих угловые точки. К числу таких задач принадлежат, например, задачи на отражение и преломление экстремалей, являющиеся обобщением соответствующих задач на отражение и преломление света.

Задача об отражении экстремалей. Найти кривую, реализующую экстремум функционала $v = \int_{x_0}^{x_2} F(x, y, y')dx$ и проходящую через заданные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_2, y_2)$, причем кривая должна попасть в точку B лишь после отражения от заданной линии $y = \varphi(x)$ (рис. 3.1).

Естественно считать, что в точке отражения $C(x_1, y_1)$, может быть угловая точка искомой экстремали и, следовательно, в этой точке левая производная $y'(x_1 - 0)$ и правая производная $y'(x_1 + 0)$, вообще говоря, различны. Поэтому удобнее функционал $v[y(x)]$ представить в виде: $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$, причем на каждом из интервалов $x_0 \le x \le x_1$ и $x_1 \le x \le x_2$ производная $y'(x)$ предполагается непрерывной и, следовательно, мы можем пользоваться изложенными выше результатами.

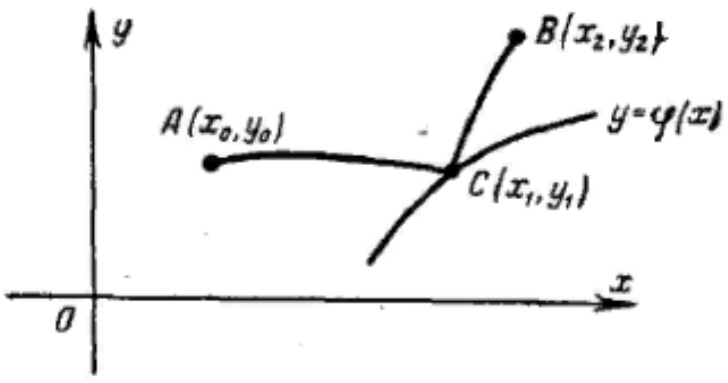

рис. 3.1

Основное необходимое условие экстремума $\delta v = 0$ принимает вид:

$$\delta v = \delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \ = 0.$$

Так как точка (x_1, y_1) может перемещаться по кривой $y = \varphi(x)$, то при вычислении вариаций $\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ и $\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ мы находимся в условиях задачи с подвижной граничной точкой, движущейся по заданной кривой. Очевидно, что кривые AC и CB являются экстремалями. Действительно, на этих участках $y = y(x)$ является решением уравнения Эйлера, так как если считать одну из этих кривых уже найденной и варьировать лишь другую, то задача сводится к нахождению экстремума функционала $\int_{x_0}^{x_1} Fdx$ (или $\int_{x_1}^{x_2} Fdx$) в задаче с закрепленными граничными точками. Вычисляя вариацию функционала, будем считать, что функционал рассматривается лишь на экстремалях, имеющих угловую точку C.

Тогда

$$\delta \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \ = [F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1-0}\delta x_1$$

и

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \ = -[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1+0}\delta x_1,$$

где знаки $x = x_1 - 0$ и $x = x_1 + 0$ означают, что берется предельное значение величины, стоящей в скобках при приближении к точке x_1 в первом случае слева (со стороны значений x, меньших x_1) и во втором случае справа (со стороны значений x, больших x_1).

Так как в точке отражения разрывна лишь производная y', то в первом случае надо взять в угловой точке левую производную, а во втором случае – правую производную.

Условие $\delta v = 0$ принимает вид:

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1-0}\delta x_1 - [F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1+0}\delta x_1 = 0$$

или, так как δx_1 изменяется произвольно, то

$$[F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1-0} = [F + (\varphi' - y')F_{y'}]_{x=x_1+0}.$$

Это условие отражения приобретает особенно простой вид для функционалов типа

$$v = \int_{x_0}^{x_1} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

а именно:

$$A(x_1,y_1)\left[\sqrt{1+y'^2} + \frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1-0} =$$

$$= A(x_1,y_1)\left[\sqrt{1+y'^2} + \frac{(\varphi'-y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]_{x=x_1+0}$$

или упрощая и сокращая на $A(x_1,y_1)$ в предположении, что $A(x_1,y_1) \neq 0$, получим

$$\left.\frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1-0} = \left.\frac{(\varphi' - y')y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right|_{x=x_1+0}.$$

Обозначив угол между касательной к кривой $y = \varphi(x)$ и осью абсцисс буквой α, а углы наклона к оси абсцисс левой и правой касательных к экстремали в точке отражения C, соответственно β_1 и β_2 (рис. 3.2), получим

$$y'(x_1 - 0) = \operatorname{tg}\beta_1, \qquad y'(x_1 + 0) = \operatorname{tg}\beta_2; \qquad \varphi'(x_1) = \operatorname{tg}\alpha.$$

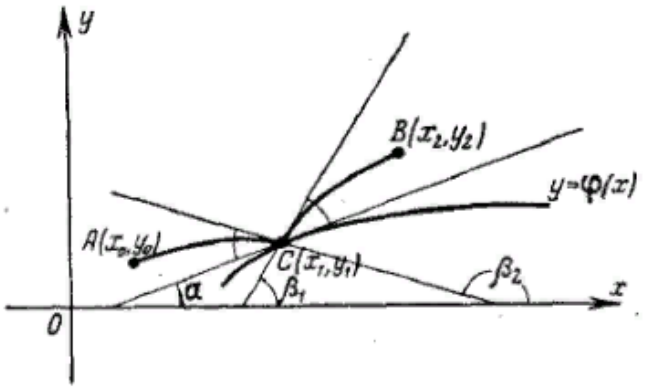

рис. 3.2

Условие в точке отражения приобретает вид:

$$\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta_1}{-\sec\beta_1} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta_2}{\sec\beta_2}$$

или после упрощения и умножения на $\cos\alpha$:

$$-\cos(\alpha-\beta_1)=\cos(\alpha-\beta_2).$$

Отсюда следует равенство угла падения и угла отражения.

Если точка движется в некоторой среде со скоростью $v(x,y)$, то время t, затрачиваемое на перемещение точки из положения $A(x_0,y_0)$ в положение $B(x_1,y_1)$, равно интегралу $\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}dx$, который принадлежит к рассматриваемому виду функционалов $\int_{x_0}^{x_1}A(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx$, и следовательно, при любом законе изменения скорости $v(x,y)$ в точке отражения угол падения равен углу отражения.

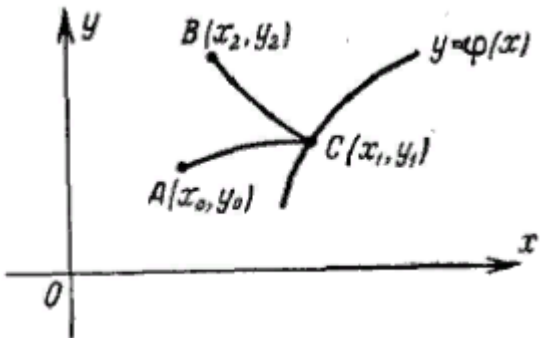

рис. 3.3

Если бы точки A, B и C были расположены иначе, например, так как они расположены на рис. 3.3, то для получения того же условия в точке отражения из-за двузначности функции $y=y(x)$ удобнее было бы проводить исследование в параметрической форме.

Преломление экстремалей. Предположим, что подынтегральная функция функционала $v=\int_{x_0}^{x_2}F(x,y,y')dx$ в рассматриваемой области имеет линию разрыва $y=\varphi(x)$, а граничные точки A и B расположены по разные стороны линии разрыва (рис. 3.4).

Представим функционал v в виде:

$$v=\int_{x_0}^{x_1}F_1(x,y,y')dx+\int_{x_1}^{x_2}F_2(x,y,y')dx,$$

где $F_1(x,y,y')=F(x,y,y')$ с одной стороны линии разрыва, а $F_2(x,y,y')=F(x,y,y')$ с другой стороны линии разрыва.

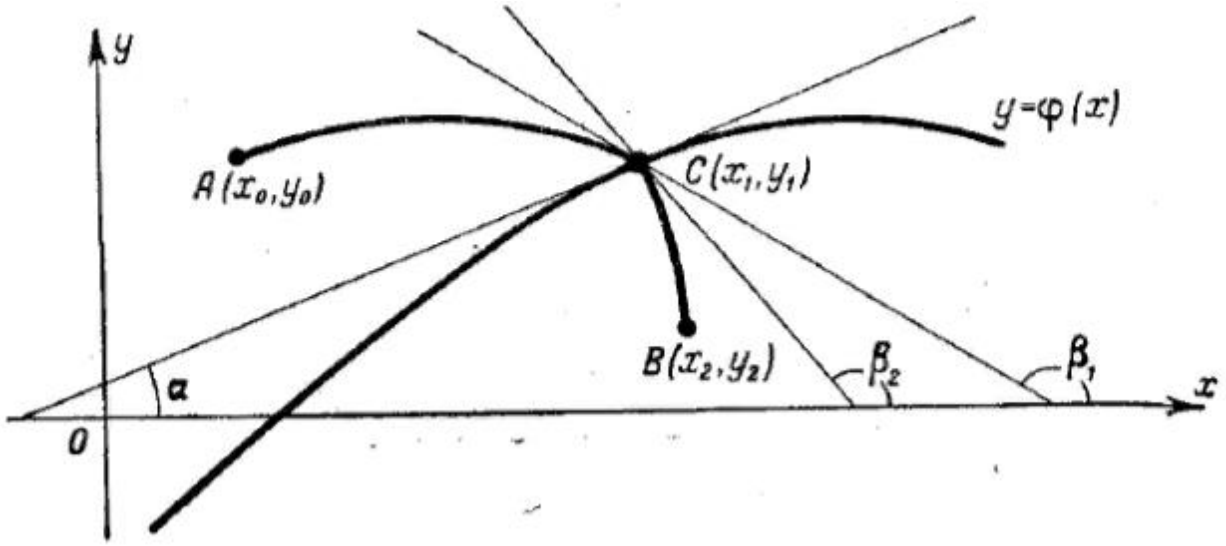

рис. 3.4

Предположим, что F_1 и F_2 трижды дифференцируемы. В точке C пересечения искомой кривой с линией разрыва, естественно, ожидать наличия угловой точки. Дуги AC и CB, очевидно, являются экстремалями (это опять следует из того, что, фиксируя одну из этих дуг и варьируя лишь другую, мы получим задачу с закрепленными граничными точками). Поэтому можно брать в качестве кривых сравнения лишь ломаные, состоящие из двух дуг экстремалей, и тогда вариация ввиду подвижности граничной точки $C(x_1, y_1)$, перемещающейся по кривой $y = \varphi(x)$, принимает следующий вид:

$$\delta v = \delta \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, y, y')dx + \delta \int_{x_1}^{x_2} F_2(x, y, y')dx =$$

$$= [F_1 + (\varphi' - y')F_{1_{y'}}]_{x=x_1-0}\delta x_1 - [F_2 + (\varphi' - y')F_{2_{y'}}]_{x=x_1+0}\delta x_1,$$

основное необходимое условие экстремума $\delta v = 0$ сводится к равенству:

$$\left[F_1 + (\varphi' - y')F_{1_{y'}}\right]_{x=x_1-0} \delta x_1 = \left[F_2 + (\varphi' - y')F_{2_{y'}}\right]_{x=x_1+0}.$$

Так как в точке преломления может быть разрывна лишь y', то это условие преломления можно записать и в следующем виде:

$$F_1\big(x, y_1, y'(x_1 - 0)\big) + \big(\varphi'(x_1) - y'(x_1 - 0)\big)F_{1_{y'}}\big(x, y_1, y'(x_1 - 0)\big) =$$

$$= F_1\big(x, y_1, y'(x_1 + 0)\big) + \big(\varphi'(x_1) - y'(x_1 + 0)\big)F_{1_{y'}}\big(x, y_1, y'(x_1 + 0)\big).$$

Это условие преломления вместе с уравнением $y_1 = \varphi(x_1)$ дает возможность определить координаты точки C.

Если, в частности, функционал v равен:

$$\int_{x_0}^{x_2} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} A_1(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx + \int_{x_1}^{x_2} A_2(x,y)\sqrt{1+y'^2}dx,$$

то условие преломления приобретает вид:

$$A_1(x,y)\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_1-0} = A_2(x,y)\frac{1+\varphi' y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=x_1+0},$$

или $y'(x_1-0)=\operatorname{tg}\beta_1$, $y'(x_1+0)=\operatorname{tg}\beta_2$; $\varphi'(x_1)=\operatorname{tg}\alpha$, после упрощений и умножения на $\cos\alpha$ будем иметь:

$$\frac{\cos(\alpha-\beta_1)}{\cos(\alpha-\beta_2)} = \frac{A_2(x_1,y_1)}{A_1(x_1,y_1)} \text{ или } \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_1)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta_2)\right]} = \frac{A_2(x_1,y_1)}{A_1(x_1,y_1)},$$

что является обобщением известного закона преломления света: отношение синуса угла падения к синусу угла преломления равно отношению скоростей:

$$v_1(x,y) = \frac{1}{A_1(x,y)} \text{ и } v_2(x,y) = \frac{1}{A_2(x,y)}$$

в средах, на границе которых происходит преломление.

Не следует думать, что экстремали с угловыми точками появляются лишь в задачах на отражение или преломление экстремалей. Экстремум может достигаться на экстремалях с угловыми точками даже в задачах на экстремум функционала $v = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$, где функция F трижды дифференцируема, и допустимые кривые должны проходить через граничные точки A и B без каких бы то ни было дополнительных условий.

Глава II. Практическая часть

Задача №1

Найти кратчайшее расстояние от точки $A(1,1,1)$ до сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Решение:

Задача сводится к исследованию на экстремум функционала

$$I[y,z] = \int_{x_1}^{1} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}dx,$$

где точка $B(x_1, y_1, z_1)$ должна находиться на сфере. Экстремалями функционала являются прямые

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2, \\ z = c_3 x + c_4. \end{cases}$$

Из условия прохождения экстремали через точку $A(1,1,1)$ получаем

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_3 + c_4 = 1. \end{cases}$$

Условия трансверсальности

$$\begin{cases} \left[F + y'F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'}\right]\Big|_{x=x_1} = 0, \\ \left[F_{y'} + F_{z'}\varphi'_y\right]\Big|_{x=x_1} = 0 \end{cases}$$

с учетом прямых экстремалей имеют вид

$$\begin{cases} \left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \dfrac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \left(\dfrac{-x}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} - z'\right)\dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0, \\ \left[\dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \cdot \dfrac{-y}{\sqrt{1 - y'^2 - z'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0, \end{cases}$$

откуда после несложных преобразований будем иметь

$$\begin{cases} z_1 - c_3 x_1 = 0, \\ c_1 x_1 - c_3 y_1 = 0, \end{cases}$$

где x_1, y_1, z_1 – координаты искомой точки B.

Из условия прохождения экстремали через точку $B(x_1, y_1, z_1)$ имеем

$$\begin{cases} y_1 = c_1 x_1 + c_2, \\ z_1 = c_3 x_1 + c_4. \end{cases}$$

И теперь получим, что:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 0,$$

так что уравнение экстремали

$$\begin{cases} y = x, \\ z = x. \end{cases}$$

Так как точка $B(x_1, y_1, z_1)$ должна лежать на сфере и получим, что

$$x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 = 1,$$

т.е. $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, получаем две точки $B_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ и $B_2(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. И, следовательно, экстремаль, соединяющая точку A с точкой B_1, дает функционалу минимум, равный

$$I_{\min} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \sqrt{1+1+1}\,dx = \sqrt{3} - 1,$$

а экстремаль, соединяющая точку A с точкой B_1, дает функционалу максимум

$$I_{\max} = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \sqrt{1+1+1}\,dx = \sqrt{3} + 1.$$

Задача №2

Рассмотрим *Задачу №2* об экстремуме функционала, но в качестве A возьмем центр сферы $O(0,0,0)$.

Решение:

Экстремалями функционала являются прямые

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2, \\ z = c_3 x + c_4. \end{cases}$$

И, условие прохождения экстремали через точку $O(0,0,0)$ сразу дает $c_2 = c_4 = 0$.

Условия трансверсальности будут прежними:

$$\begin{cases} z_1 - c_3 x_1 = 0, \\ c_1 x_1 - c_3 y_1 = 0, \end{cases}$$

а условия на подвижном конце будут

$$\begin{cases} y_1 = c_1 x_1, \\ z_1 = c_3 x_1. \end{cases}$$

Также известно, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Для определения пяти величин c_1, c_3, x_1, y_1, z_1 мы имеем

$$\begin{cases} y_1 = c_1 x_1, \\ z_1 = c_3 x_1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

В итоге получим

$$x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + c_1^2 + c_3^2}}, \qquad y_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + c_1^2 + c_3^2}},$$

$$z_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + c_1^2 + c_3^2}},$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Значения переменных равны, так как расстояние от точки $O(0,0,0)$ до сферы одинаково по любому направлению, т.е. при любых значениях c_1 и c_2.

Значение функционала $I[y, z]$ на экстремалях

$$\begin{cases} y_1 = c_1 x, \\ z_1 = c_3 x. \end{cases}$$

Равно

$$I[y,z] = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+c_1^2+c_3^2}}} \sqrt{1+c_1^2+c_3^2}\,dx = 1$$

Задача №3

Найти кратчайшее расстояние между от $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямой

$$\begin{cases} y = mx + q, \\ z = nx + q. \end{cases}$$

Решение:

Задача сводится к нахождению экстремума (минимума) интеграла:

$$I[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

при условии, что правый конец экстремали может перемещаться по прямой

$$\begin{cases} y = mx + q, \\ z = nx + q, \end{cases}$$

т.е. в нашем случае функции φ и ψ имеют соответственно вид

$$\varphi(x) = mx + q, \quad \psi(x) = nx + q.$$

Общее решение соответствующей системы уравнений Эйлера будет

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2, \\ z = c_3 x + c_4, \end{cases}$$

где C_i $(i = 1,2,3,4)$ подлежат определению.

Условие трансверсальности (на правом конце) выглядит так:

$$\left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + (m - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + (n - z')\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1} = 0$$

откуда следует, что $y' = c_1, z' = c_3$, получим

$$1 + mc_1 + nc_3 = 0.$$

Воспользуемся тем, что искомая прямая проходит через точку $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$y_0 = c_1 x_0 + c_2, \quad z_0 = c_3 x_0 + c_4,$$

а также тем, что правый конец перемещаться по заданной прямой:

$$\begin{cases} c_1 x + c_2 = mx_1 + p, \\ c_3 x + c_4 = nx_1 + q. \end{cases}$$

Надо определить c_1, c_2, c_3, c_4 и x_1 ($x_0, y_0, z_0, m, n, p, q -$ заданные числа). Для нахождения интеграла достаточно знать x_1, c_1 и c_3.

Имеем

$$x_1 = \frac{x_0 + m(y_0 - p) + n(z_0 - q)}{1 + n^2 + m^2},$$

$$c_1 = \frac{mx_0 + mn(z_0 - p) - (1 + n^2)(y_0 - q)}{m(y_0 - p) + n(z_0 - q) - (m^2 + n^2)x_0},$$

$$c_3 = \frac{nx_0 + mn(y_0 - p) - (1 + m^2)(z_0 - q)}{m(y_0 - p) + n(z_0 - q) - (m^2 + n^2)x_0}.$$

Подставляя эти величины, получим

$$h = \min I[y, z] =$$

$$= \sqrt{x_0^2 + (y_0 - p)^2 + (z_0 - q)^2 - \frac{[x_0 + m(y_0 - p) + n(z_0 - q)]^2}{1 + n^2 + m^2}}.$$

Если граничная точка $A(x_0, y_0, z_0)$ неподвижна, а другая граничная точка $B(x_1, y_1, z_1)$ может перемещаться по некоторой поверхности $z = \varphi(x, y)$, то условия трансверсальности будут:

$$\begin{cases} \left[F + y'F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'}\right]\Big|_{x=x_1} = 0, \\ \left[F_{y'} + F_{z'}\varphi'_y\right]\Big|_{x=x_1} = 0. \end{cases}$$

Эти условия совместно с уравнением $z = \varphi(x, y)$, вообще говоря, дают возможность определить две произвольные постоянные в общем решении системы уравнений Эйлера (две другие постоянные определяются из условия прохождения экстремали через неподвижную точку $A(x_0, y_0, z_0)$).

Если подвижной точкой является граничная точка $A(x_0, y_0, z_0)$, то при $x = x_0$ получаем условия, совершенно аналогичные последним условиям.

Заключение

В своей курсовой работе были раскрыты начальные сведения о вариационной задаче с подвижными границами и об экстремали с угловыми точками:

- в теоретической части работы было рассказано об основных понятиях и определениях вариационного исчисления, связанных с решением вариационной задачи с подвижными границами;
- в практической части были рассмотрены задачи по данной теории.

Вариационное исчисление − раздел функционального анализа, в котором изучаются вариации функционалов. Самая типичная задача вариационного исчисления состоит в том, чтобы найти функцию, на которой функционал достигает экстремального значения.

Методы вариационного исчисления широко применяются в различных областях математики, в дифференциальной геометрии с их помощью ищут геодезические линии и минимальные поверхности.

В физике вариационный метод − одно из мощнейших орудий получения уравнений движения, как для дискретных, так и для распределённых систем, в том числе и для физических полей.

Решение вариационных задач связано с большими трудностями, поэтому при решении подобных задач применили систему компьютерной математики Maple, хорошо приспособленную к решению математических задач, требующих большого количества аналитических преобразований.

Список используемой литературы

1. Ванько В. И. Вариационное исчисление и оптимальное управление: Учеб. для вузов / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006 г. – 488 с.
2. Гельфанд И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М.: Физматлит, 1961 г. – 228 с.
3. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969 г. – 424 с.