

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методы решения систем алгебраических нелинейных уравнений»

Студент

Анна 06.05.25
(подпись, дата)

Логунова Анна Дмитриевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Мол 06.05.25
(подпись, дата)

Монахова О.А.
(ФИО)

Нормоконтролер

М - 23.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(ФИО)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой

Пань 2.06.25
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(ФИО)

Работа защищена с отметкой 5(отл) (протокол заседания ГЭК от 26.06.25 № 4)

Секретарь ГЭК

М - 26.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(ФИО)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	6
1.1 Понятие системы алгебраических нелинейных уравнений и ее особенности	6
1.2 Классификация методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений	10
1.3 Место и роль систем алгебраических нелинейных уравнений в курсе алгебры	23
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»	39
2.1 Психолого-педагогические основы обучения теме «Системы алгебраических нелинейных уравнений»	39
2.2 Применение рабочих листов при изучении методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений	41
2.3 Комплекс упражнений по теме «Системы уравнений с параметром» на динамических моделях	45
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	53
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	55
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	59

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к системам алгебраических нелинейных уравнений возникал еще в глубокой древности, когда цивилизации Вавилона и Египта активно применяли их для решения практических задач. Определенный вклад в развитие данной темы внесли И. Ньютон, Г.В. Лейбниц, Л. Эйлер, К. Гаусс и др.

Системы уравнений являются важной частью математического образования в школе. Их изучение начинается в среднем звене и продолжается до конца обучения, постепенно усложняясь и расширяя круг решаемых задач. Значимость темы подтверждается включением задач на решение систем алгебраических нелинейных уравнений в экзаменационные материалы государственной итоговой аттестации.

Системы нелинейных уравнений представляют собой один из наиболее сложных разделов школьной математики, так как существует множество различных подходов к их решению, каждый из которых требует отдельного изучения и практического закрепления. Работа с нелинейными уравнениями тесно связана с выполнением сложных алгебраических преобразований и их графическое представление может вызывать трудности и требует хорошего понимания аналитической геометрии. Из-за ограниченного времени, выделяемого на изучение темы, в учебных пособиях рассматриваются лишь наиболее часто используемые методы и приводится минимальное количество типовых задач для отработки навыков, чего зачастую бывает недостаточно для полного понимания темы. Возникает *противоречие*: с одной стороны, существует потребность обучающихся в глубоком понимании нелинейных систем и развитии навыков их решения, а с другой – существующие учебные материалы не всегда обеспечивают необходимую методическую поддержку.

Выделенное противоречие приводит к необходимости разработки учебных материалов, которые бы способствовали более глубокому освоению методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений.

Цель работы – создание рабочих листов, посвященных теме «Методы решения систем алгебраических нелинейных уравнений», а также составление системы упражнений на основе динамических моделей.

В соответствии с поставленной целью работы были определены следующие *задачи*:

1. Изучить и проанализировать литературу по рассматриваемой теме.
2. Выделить основные методы решения систем алгебраических нелинейных уравнений.
3. Провести анализ содержания теоретического и задачного материалов по теме «Системы алгебраических уравнений» в школьной программе.
4. Рассмотреть психолого-педагогические особенности изучения систем алгебраических нелинейных уравнений.
5. Разработать рабочие листы для изучения методов решения систем нелинейных уравнений.
6. Составить комплекс упражнений на основе динамических моделей.

Объектом исследования выступают системы алгебраических нелинейных уравнений.

Предметом исследования являются методы решения систем алгебраических нелинейных уравнений.

Практическая значимость работы заключается в том, что ее материалы могут быть использованы учителями математики, преподающими в основном и старшем звене школы, с целью обучения методам решения систем уравнений.

В рамках работы созданы рабочие листы, где структурирована информация об основных методах решения систем уравнений и подобран комплекс заданий, помогающий постепенно освоить данную тему, а также составлены задания на основе динамических моделей, которые позволяют развить навык не только решения систем алгебраических нелинейных уравнений с параметром, но и их составления по готовой динамической модели.

В соответствии с целью и поставленными задачами определена структура работы. Она состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников.

В первой главе рассматриваются теоретические основы решения систем алгебраических нелинейных уравнений, а именно понятие системы алгебраических нелинейных уравнений и ее особенности, классификация методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений, место и роль систем алгебраических нелинейных уравнений в курсе школьной алгебры.

Во второй главе рассматривается методический аспект обучения теме «Системы алгебраических нелинейных уравнений», включающий в себя психолого-педагогические особенности ее изучения, применение рабочих листов при изучении методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений и комплекс упражнений, основанный на динамических моделях. В заключении формулируются выводы о проделанной работе.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1 Понятие системы алгебраических нелинейных уравнений и ее особенности

Рассмотрим уравнение $f(x) = 0$ – нелинейное с одной неизвестной, где функция $f(x)$ является многочленом: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, где a_i – заданные вещественные числа ($i = \overline{0, n}$). Такое уравнение называется алгебраическим. Если выражение $f(x)$ содержит элементарные или специальные функции и уравнение нельзя преобразовать к виду алгебраического, то его называют трансцендентным. Далее будем рассматривать алгебраические нелинейные уравнения.

Система вида

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

называется системой алгебраических нелинейных уравнений, если хотя бы одно из уравнений нелинейное.

Решением системы уравнений называется n значений неизвестных $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то ее называют совместной. В частности, множество решений уравнений может быть пустым, в таком случае говорят, что система несовместна, т.е. не имеет решений.

Решить систему – значит выяснить, совместна она или несовместна, и если совместна, то найти все ее решения.

При решении системы алгебраических нелинейных уравнений необходимо с помощью некоторых преобразований последовательно переходить от данной

системы к другой, более простой, далее к еще более простой и т.д. Если с помощью некоторых преобразований осуществился переход от данной системы

$$\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x, y), \\ f_2(x; y) = g_2(x, y), \\ \dots \\ f_n(x; y) = g_n(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

к системе

$$\begin{cases} f'_1(x; y) = g'_1(x, y), \\ f'_2(x; y) = g'_2(x, y), \\ \dots \\ f'_n(x; y) = g'_n(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

и если при этом каждое решение системы (1) является в то же время решением системы (2), то система (2) называется следствием системы (1). Следствием системы уравнений может быть и одно уравнение.

Две системы нелинейных уравнений от n неизвестных называются равносильными, если они обе несовместны или множества их решений совпадают.

Чтобы перейти к равносильной системе, можно выполнить одно из следующих действий:

- 1) некоторые уравнения системы умножить на отличные от нуля числа, просуммировать результаты и на место одного из используемых уравнений поставить полученную сумму с коэффициентами;
- 2) в одном из уравнений выразить одну неизвестную через остальные и подставить полученное выражение во все оставшиеся уравнения, оставив при этом в системе и данное уравнение;
- 3) заменить какое-либо уравнение равносильным ему уравнением (соотношением, системой или совокупностью).

Замена уравнения на равносильное ему уравнение осуществляется при помощи равносильных преобразований. Преобразования называются равносильными, если они приводят к уравнению нового вида, множество

решений которого совпадает с множеством решений исходного уравнения. К равносильным преобразованиям относят:

— вычитание или прибавление одного и того же числа к обеим частям уравнения (например, $2xy - 15 = 13 \Rightarrow 2xy = 28$), в частности, перенос слагаемого из одной части уравнения в другую с изменением знака на противоположный (например, $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$);

— умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же число, отличное от 0 (например, $\frac{9}{x} = 12 \Rightarrow \frac{3}{x} = 4$).

Применение неравносильных преобразований может привести к потере корней или появлению постороннего корня. К таким преобразованиям относятся:

- 1) возведение обеих частей уравнения в четную степень;
- 2) освобождение от знаменателя, содержащего переменную;
- 3) взаимное уничтожение одного и того же слагаемого, содержащего переменную, в обеих частях уравнения (если слагаемое с переменной и исходное уравнение имеют одну и ту же область допустимых значений, то преобразование будет равносильным);
- 4) преобразования, приводящие к расширению или сужению области допустимых значений.

Пример влияния неравносильных преобразований на решение систем нелинейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{y(x^2 - 9)}{x + 3} = 0, \\ x^2 + 2x - y = 3. \end{cases}$$

1. Решение данной системы уравнений с использованием неравносильных преобразований.

По отношению к первому уравнению системы применим следующие преобразования:

1) используем в числителе формулу сокращенного умножения (равносильное преобразование);

2) сократим дробь на $(x + 3)$ (неравносильное преобразование).

Во втором уравнении перенесем $-y$ в правую часть уравнения с противоположным знаком, а 3 в левую часть, также меняя знак на противоположный (равносильные преобразования).

Получим

$$\begin{cases} y(x - 3) = 0, \\ y = x^2 + 2x - 3. \end{cases}$$

Подставим выражение из второго уравнения в первое

$$(x^2 + 2x - 3)(x - 3) = 0,$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ или } x - 3 = 0,$$

$$x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 3.$$

Следовательно, $y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 12$.

Ответ: $(-3; 0), (1; 0), (3; 12)$.

2. Решение данной системы уравнений с использованием равносильных преобразований.

Используя равносильные преобразования перейдем к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{y(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = 0, \\ y = x^2 + 2x - 3. \end{cases}$$

$$\frac{(x^2 + 2x - 3)(x + 3)(x - 3)}{x + 3} = 0,$$

$$(x^2 + 2x - 3)(x + 3)(x - 3) = 0 \text{ и } x + 3 \neq 0,$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 3 = 0, \\ x + 3 = 0, \\ x - 3 = 0, \\ x + 3 \neq 0, \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = -3, \\ x_4 = 3, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Следовательно, решением системы являются только $x_2 = 1$ и $x_4 = 3$, а значит $y_2 = 0, y_4 = 12$.

Ответ: $(1; 0), (3; 12)$.

Сравнивая полученные ответы в пунктах 1 и 2, можем сделать вывод, что $x_1 = -3$ – посторонний корень. Изменение области допустимых значений произошло из-за использования неравносильного преобразования (сокращение дроби на $(x + 3)$).

Системы алгебраических нелинейных уравнений находят широкое применение в различных областях математики. Например, в геометрии системы уравнений используются для нахождения точек пересечения кривых, в математическом анализе – для нахождения экстремумов функций нескольких переменных, решений дифференциальных уравнений (метод вариации произвольных постоянных), в теории вероятностей – для решения задач с условными вероятностями, моделирования случайных процессов.

1.2 Классификация методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

где, $f(x, y)$ и $g(x, y)$ – нелинейные функции, а x и y – неизвестные величины.

На основе анализа методической литературы [11, 30, 31] можно сделать вывод, что универсального метода решения таких систем не существует, однако можно использовать следующие:

- 1) метод разложения на множители;

- 2) метод подстановки;
- 3) метод алгебраических преобразований;
- 4) метод замены переменных;
- 5) метод решения систем, содержащих однородное уравнение;
- 6) графический метод.

Выбор того или иного метода решения зависит от структуры уравнений, количества неизвестных, требуемой точности решения и наличия дополнительных условий. Иногда требуется комбинировать несколько методов решения, а правильный их выбор может существенно упростить решение. Рассмотрим каждый из них подробнее.

1. Метод разложения на множители.

Данный метод позволяет путем равносильных преобразований представить левую часть уравнения, содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух выражений, содержащую неизвестную величину в меньшей степени, при этом в правой части уравнения должен оказаться ноль.

Разложение на множители можно произвести путем использования формул сокращенного умножения, вынесения общего множителя за скобку, группировки или предварительного преобразования.

Рассмотрим алгоритм решения систем нелинейных уравнений данным методом.

Для начала необходимо представить каждую из функций исходной системы в виде произведения двух функций:

$$\begin{cases} f(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y), \\ g(x, y) = g_1(x, y) \cdot g_2(x, y). \end{cases}$$

Тогда первоначально данную систему можно заменить совокупностью четырех систем:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ g_1(x, y) = 0; \\ f_2(x, y) = 0, \\ g_1(x, y) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0; \\ f_2(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

и совокупность решений этих систем образует решение исходной системы.

Следует раскладывать функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ так, чтобы их множители были проще по своей структуре, чем сами исходные функции, например, нелинейные функции можно представить в виде произведения линейных сомножителей.

Пример. Решите систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2x - 23xy - 16y - 8y^2 = 0, \\ 9x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Сначала разложим первое уравнение данной системы на множители.

$$f(x, y) = 3x^2 + 2x - 23xy - 16y - 8y^2.$$

Представим $-23xy = -24xy + xy$, получаем уравнение

$$f(x, y) = 3x^2 + 2x - 24xy + xy - 16y - 8y^2.$$

Далее разложим уравнение на множители, используя способ группировки.

Для начала сгруппируем слагаемые

$$f(x, y) = (3x^2 - 24xy) + (xy - 8y^2) + (2x - 16y).$$

Вынесем общий множитель из каждой скобки

$$f(x, y) = 3x(x - 8y) + y(x - 8y) + 2(x - 8y).$$

Каждое слагаемое имеет множитель $(x - 8y)$, вынесем его за скобку, получим

$$f(x, y) = (x - 8y)(3x + y + 2).$$

Рассмотрим вторую функцию и разложим ее на множители

$$g(x, y) = 9x^2 - y^2.$$

Заметим, что перед нами формула разности квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, тогда $g(x, y) = (3x - y)(3x + y)$.

Таким образом, исходная система принимает вид:

$$\begin{cases} f(x, y) = (x - 8y)(3x + y + 2), \\ g(x, y) = (3x - y)(3x + y). \end{cases}$$

Эту систему нелинейных уравнений можно заменить четырьмя системами линейных уравнений:

$$\begin{cases} f(x, y) = x - 8y, \\ g(x, y) = 3x - y; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x, y) = x - 8y, \\ g(x, y) = 3x + y; \end{cases}$$
$$\begin{cases} f(x, y) = 3x + y + 2, \\ g(x, y) = 3x - y; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x, y) = 3x + y + 2, \\ g(x, y) = 3x + y. \end{cases}$$

Совокупность решений этих линейных систем дает решение исходной нелинейной системы:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, y_1 = 0; \\ x_2 &= -\frac{1}{3}, y_2 = -1. \end{aligned}$$

Решение второй системы совпадает с решением первой системы, поэтому его можно не выписывать. Четвертая система уравнений решений не имеет.

2. Метод подстановки.

При решении данным методом выбирается уравнение, в котором одна из переменных наиболее просто выражается через остальные, после чего подставляется в следующие уравнения системы. Таким образом, при рассмотрении системы, состоящей из двух уравнений с двумя переменными, следует, используя одно из уравнений исходной системы, выразить одну неизвестную через другую и подставить ее во второе уравнение. В результате получается одно уравнение относительно одной неизвестной. Например, в системе

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases}$$

выразим неизвестную величину x через неизвестную y :

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow x = t(y)$$

и подставим получившуюся функцию $x = t(y)$ во второе уравнение вместо переменной x . Получаем одно уравнение относительно y : $g(t(y), y) = 0$.

Решив это уравнение, получаем значение переменной y и, далее, значение x по формуле $x = t(y)$.

Пример. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y^2 + 4 = 0, \\ x^2 + 3y^2 - 12 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения найдем $x = y^2 - 4$ и подставим это выражение во второе уравнение:

$$(y^2 - 4)^2 + 3y^2 - 12 = 0.$$

Применяя алгебраические преобразования, получим уравнение четвертой степени:

$$y^4 - 5y^2 + 4 = 0.$$

Сделав замену $y^2 = t$, приходим к обычному квадратному уравнению

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Корни данного уравнения $t_1 = 1, t_2 = 4$, следовательно $y_{1,2} = \pm 1$, $y_{3,4} = \pm 2$, то $x_{1,2} = (\pm 1)^2 - 4 = -3$, $x_{3,4} = (\pm 2)^2 - 4 = 0$.

Таким образом, получаем совокупность решений: $x_1 = -3, y_1 = 1$, $x_2 = -3, y_2 = -1$, $x_3 = 0, y_3 = 2$, $x_4 = 0, y_4 = -2$.

3. Метод алгебраических преобразований.

Суть данного метода заключается в упрощении систем уравнений с помощью алгебраических преобразований (уравнения системы можно складывать, вычитать, перемножать, делить или умножать на какое-либо выражение).

Пример. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 5y - 16 = 0, \\ y - 3x^2 = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на 3, получим

$$\begin{cases} 3x^2 + 15y - 48 = 0, \\ y - 3x^2 = 0. \end{cases}$$

Затем сложим уравнения этой системы и упростим:

$$3x^2 + 15y - 48 + y - 3x^2 = 0 + 0 \Rightarrow 16y - 48 = 0.$$

Далее решаем линейное уравнение относительно переменной y , полученное значение подставляем в любое уравнение системы и находим переменную x .

$$\begin{aligned}y &= 3, \\3 - 3x^2 &= 0, \\x^2 &= 1, x = \pm 1.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем два решения данной системы: $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $x_2 = -1$, $y_2 = 3$.

4. Метод замены переменных.

При решении данным методом некоторые выражения от исходных переменных принимаются за новые переменные, что приводит к более простой, чем первоначальная, системе от этих переменных. После того как новые переменные будут найдены, нужно найти значения исходных переменных.

Пример. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3xy = 89, \\x^2 + y^2 - x - y + xy = 30.\end{cases}$$

Выделим полный квадрат в обоих уравнениях системы и воспользуемся формулой квадрата суммы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + 2xy - 2xy + 4x + 4y + 3xy = 89, \\x^2 + y^2 + 2xy - 2xy - x - y + xy = 30,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x + y)^2 + xy + 4(x + y) = 89, \\(x + y)^2 - xy - (x + y) = 30.\end{cases}$$

Заметим, что в получившихся уравнениях системы неизвестные x и y присутствуют лишь в виде комбинаций $x + y$ и xy . Сделаем замену переменных:

$$u = x + y, v = xy.$$

Получаем систему уравнений относительно переменных u и v :

$$\begin{cases}u^2 + v + 4u = 89, \\u^2 - v - u = 30.\end{cases}$$

Воспользовавшись методом алгебраических преобразований, сложим уравнения системы.

$$u^2 + v + 4u + u^2 - v - u = 89 + 30,$$

$$2u^2 + 3u = 199 \text{ или } 2u^2 + 3u - 199 = 0.$$

Решим квадратное уравнение относительно неизвестной u и подставим получившиеся значения в любое уравнение системы:

$$u_1 = -\frac{17}{2}, u_2 = 7;$$

$$\left(-\frac{17}{2}\right)^2 - v_1 + \frac{17}{2} = 30,$$

$$v_1 = \frac{203}{4};$$

$$7^2 - v_2 - 7 = 30,$$

$$v_2 = 12.$$

Теперь возвращаемся к неизвестным x и y :

$$1) \quad u_1 = -\frac{17}{2}, v_1 = \frac{203}{4}$$

$$\begin{cases} x + y = -\frac{17}{2}, \\ xy = \frac{203}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y - \frac{17}{2}, \\ \left(-y - \frac{17}{2}\right)y = \frac{203}{4}; \end{cases}$$

$$y^2 + \frac{17}{2}y + \frac{203}{4} = 0,$$

$$D = -\frac{523}{4} < 0 \Rightarrow y \notin \mathbb{R}.$$

$$2) \quad u_2 = 7, v_2 = 12$$

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y + 7, \\ (-y + 7)y = 12; \end{cases}$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0,$$

$$y_1 = 3, y_2 = 4.$$

Подставим получившиеся значения в одно из уравнений системы. Таким образом, решение системы уравнений: $x_1 = 4, y_1 = 3, x_2 = 3, y_2 = 4$.

Рассмотренная в примере система уравнений является симметрической.

Функция $f(x, y)$ от двух переменных x и y называется симметрической, если $f(x, y) = f(y, x)$; иными словами, симметрическая функция переходит сама в себя при одновременной замене x на y и y на x . Так, $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ является симметрической функцией, а $g(x, y) = x^2 + y^3$ симметрической не является.

Система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

называется симметрической, если $f(x, y)$ и $g(x, y)$ – симметрические многочлены. В симметрических системах отлично работает двойная замена $u = x + y, v = xy$.

5. Метод решения систем, содержащих однородное уравнение.

Функция двух переменных $f(x, y)$ называется однородной степени k , если для всех a справедливо соотношение

$$f(ax, ay) = a^k f(x, y).$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0, \\ f(x, y) = 0, \end{cases}$$

где первое уравнение – однородное второй степени, а второе – любое.

Пусть $y \neq 0$, тогда можно разделить однородное уравнение на y^2 :

$$A \left(\frac{x}{y}\right)^2 + B \left(\frac{x}{y}\right) + C = 0.$$

Положив $x = ty$, получим обычное квадратное уравнение относительно t

$$At^2 + Bt + C = 0$$

с корнями t_1 и t_2 . Далее, подставляем выражения $x = t_1 y$ и $x = t_2 y$ во второе уравнение исходной системы, откуда получаем y_1, y_2 и, соответственно, x_1, x_2 .

Отдельно необходимо рассмотреть случай $y = 0$. Здесь из однородного уравнения следует, что $x = 0$. Если эти значения удовлетворяют второму уравнению системы, то получаем еще один ответ $x = 0$ и $y = 0$.

Пример. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 5y^2 = 0, \\ x^2 - xy + 2y^2 = 32. \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на y^2 :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{y}\right) - 5 = 0.$$

Пусть $x = ty$, то

$$t^2 + 4t - 5 = 0,$$

$$t_1 = 1, t_2 = -5.$$

$$1) \quad t_1 = 1 \Rightarrow x = y$$

Подставим $x = y$ во второе уравнение системы:

$$y^2 - y^2 + 2y^2 = 32,$$

$$2y^2 = 32, \text{ тогда } y_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 4.$$

$$2) \quad t_2 = -5 \Rightarrow x = -5y$$

Подставим $x = -5y$ во второе уравнение системы:

$$(-5y)^2 - 5y^2 + 2y^2 = 32,$$

$$25y^2 + 5y^2 + 2y^2 = 32,$$

$$32y^2 = 32, \text{ тогда } y_{3,4} = \pm 1 \Rightarrow x_{3,4} = \mp 5.$$

Ответ: $x_1 = 4, y_1 = 4, x_2 = -4, y_2 = -4, x_3 = -5, y_3 = 1, x_4 = 5, y_4 = -1$.

6. Графический метод.

Графический метод решения систем уравнений заключается в построении линий, заданных уравнениями системы, и нахождении координат точек их пересечения.

Алгоритм решения с помощью графического метода:

1) выразить одну переменную через другую в каждом уравнении системы;

- 2) построить координатную плоскость;
- 3) построить линии, заданные уравнениями системы;
- 4) найти координаты точек пересечения всех линий, заданных уравнениями системы;
- 5) проверить решение, подставив полученные координаты в каждое из уравнений системы;
- 6) записать решение системы уравнений.

Зачастую графический способ дает приближенное решение системы уравнений, поэтому и следует делать проверку.

Пример. Решите систему уравнений графическим методом:

$$\begin{cases} x^2 + y - 7 = 0, \\ x^2 - y - 1 = 0. \end{cases}$$

Выразим переменную y через переменную x в обоих уравнениях системы

$$\begin{cases} y = -x^2 + 7, \\ y = x^2 - 1. \end{cases} \quad (3)$$

Построим графики полученных функций и найдем координаты точек их пересечения на рисунке 1.

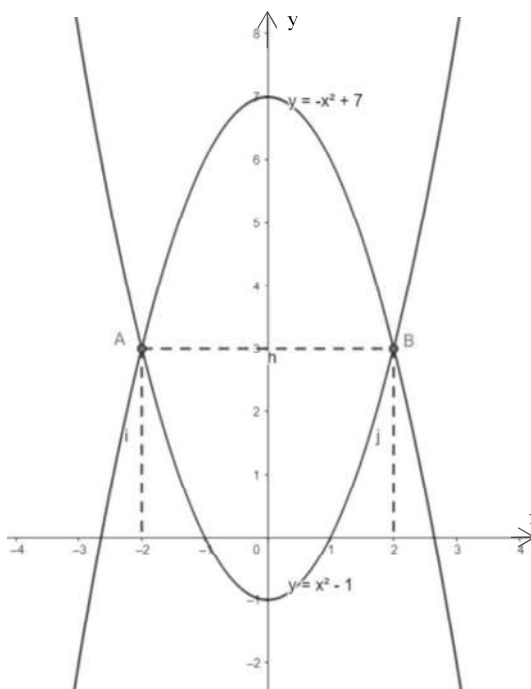


Рисунок 1 – Графическое представление системы уравнений (3)

Точки пересечения графиков: A (−2; 3), B (2; 3).

Проверим решение, подставив полученные координаты точек в каждое из уравнений системы:

$$1) \quad x_1 = -2, y_1 = 3$$

$$\begin{cases} (-2)^2 + 3 - 7 = 0, \\ (-2)^2 - 3 - 1 = 0. \end{cases}$$

Получено верное равенство, следовательно, $x_1 = -2, y_1 = 3$ является решением данной системы уравнений.

$$2) \quad x_2 = 2, y_2 = 3$$

$$\begin{cases} 2^2 + 3 - 7 = 0, \\ 2^2 - 3 - 1 = 0; \end{cases}$$

Получено верное равенство, следовательно, $x_1 = 2, y_1 = 3$ является решением данной системы уравнений.

Ответ: $x_1 = -2, y_1 = 3, x_2 = 2, y_2 = 3$.

Графическое представление систем нелинейных уравнений также дает возможность анализа количества решений.

Пример. Проанализируйте систему нелинейных уравнений и укажите число ее решений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4y, \\ (1 - y)^2 - y(y + x - 2) + 2x = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (4)$$

Преобразуем первое уравнение системы.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4y &= 0, \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 &= 0, \\ x^2 + (y - 2)^2 &= 4. \end{aligned}$$

Графическим представлением полученного уравнения является окружность с центром в точке с координатами $(0; 2)$ и радиусом 2.

Применим алгебраические преобразования ко второму уравнению данной системы.

$$(1 - y)^2 + (y + x)(2 - y) = \frac{1}{4},$$

$$1 - 2y + y^2 + 2y - y^2 + 2x - xy - \frac{1}{4} = 0,$$

$$2x - xy + \frac{3}{4} = 0,$$

$$x(2 - y) = -\frac{3}{4},$$

$$2 - y = -\frac{3}{4}x, (x \neq 0),$$

$$y = 2 + \frac{3}{4}x.$$

Графиком получившейся функции является гипербола со смещением по оси Y на две единицы вверх и сжатой относительно оси X в $\frac{3}{4}$ раза.

Построим окружность и гиперболу на рисунке 2.

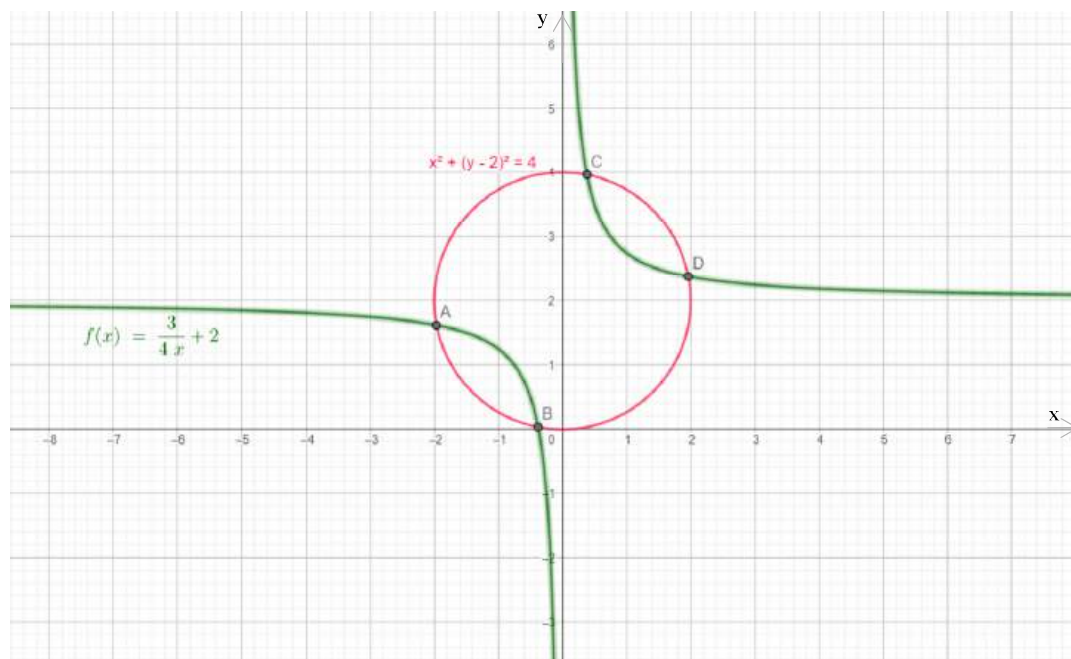


Рисунок 2 – Графическое представление системы уравнений (4)

Таким образом, графическое представление системы показывает, что исходная система уравнений имеет 4 решения.

В случаях, когда точки пересечения графиков слишком удалены от начала координат, целесообразно использовать средства информационных технологий, например GeoGebra, позволяющие изменять масштаб координатной плоскости.

Например, отвечая на вопрос, сколько решений имеет следующая система уравнений

$$\begin{cases} x - 3y^2 = 0, \\ \sqrt{x} = y + 5, \end{cases} \quad (5)$$

обучающиеся выполняют построение графиков в малом масштабе (в силу возможностей тетрадного листа) и визуально находят одну точку пересечения графиков функций, не подозревая о существовании иных точек, так как ветви парабол кажутся параллельными на рисунке 3.

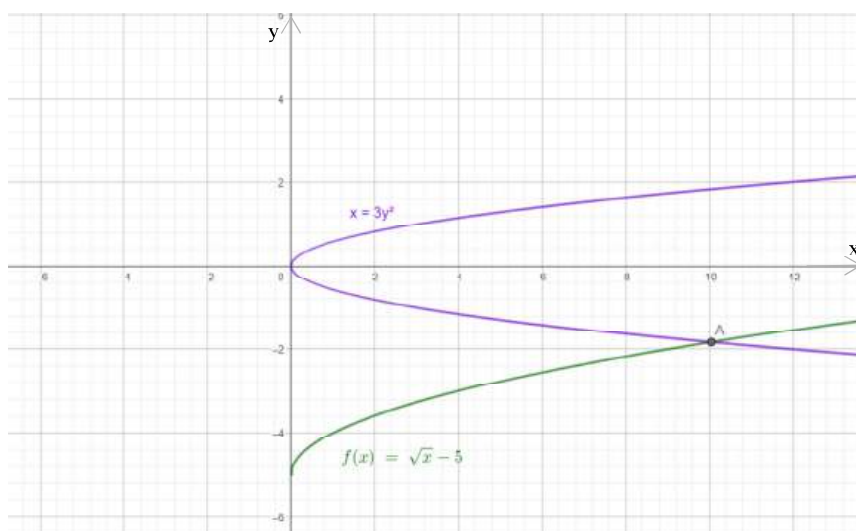


Рисунок 3 – Графическое представление системы уравнений (5)

Однако построение графиков, соответствующих уравнениям системы, в компьютерной программе на рисунке 4 позволяет изменить масштаб и показать, что в действительности система уравнений имеет два решения.

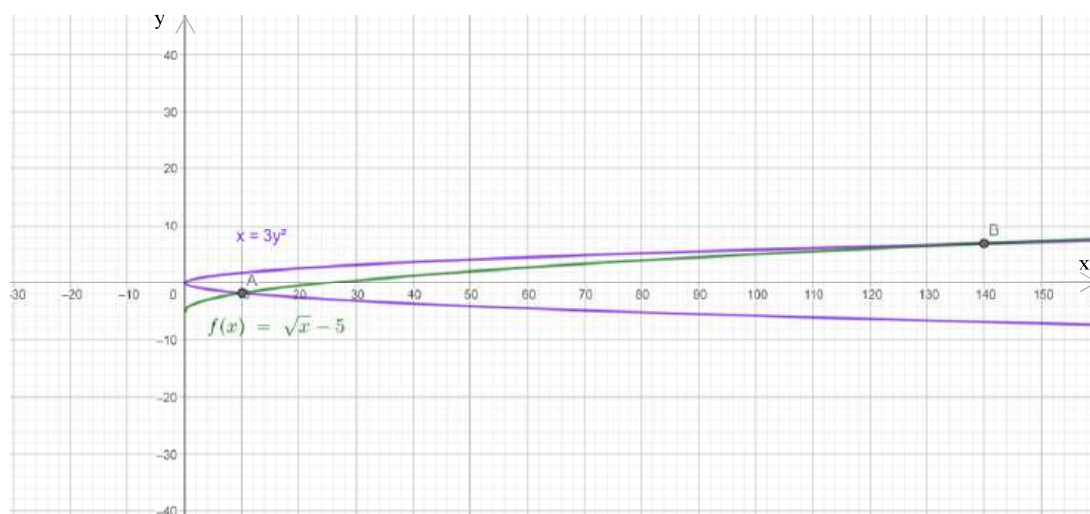


Рисунок 4 – Графическое представление системы уравнений (5)

1.3 Место и роль систем алгебраических нелинейных уравнений в курсе алгебры

Изучение темы «Системы алгебраических уравнений» занимает особое место в школьной программе по математике. Впервые данная тема встречается в курсе алгебры 7 класса и играет важную роль при обучении математике, так как обучающиеся не только учатся решать системы алгебраических уравнений, но и приобретают навыки построения математических моделей. Далее программа углубляется, и ученики знакомятся с более сложными типами систем уравнений, в том числе и с нелинейными, изучают новые способы их решения.

В федеральной рабочей программе [3] основного общего образования выделены следующие предметные результаты изучения темы «Системы уравнений».

1. Умение решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными и системы двух уравнений, в которых одно уравнение не является линейным.

2. Умение решать текстовые задачи алгебраическим способом с помощью составления уравнения или системы двух уравнений с двумя переменными.

3. Проводить простейшие исследования уравнений и систем уравнений, в том числе с применением графических представлений (устанавливать имеет ли уравнение или система уравнений решения, если имеет, то сколько, и прочее).

Некоторые аспекты роли изучения систем уравнений в школе:

- закрепление и углубление знаний (системы уравнений помогают закреплять, повторять и расширять теоретические знания, совершенствовать творческую составляющую учеников в области математической деятельности);
- решение текстовых задач (знания по теме «Системы уравнений» являются базовыми при изучении текстовых задач по математике);

- развитие алгоритмической культуры и критического мышления;
- реализация межпредметных связей (материал темы находит свое применение при изучении других тем школьного курса математики и смежных дисциплин).

Подходы к изучению темы «Системы алгебраических уравнений» в учебниках алгебры имеют различия, например, это прослеживается в порядке введения основной терминологии или распределении материала по классам, однако все же наблюдается схожая стратегия, по которой строится структура программы.

Пропедевтика данной темы происходит еще в курсе математики 5-6 классов, [5, 6, 7, 8]. Закладываются такие базовые понятия, как координаты точки на координатной плоскости, переменная, числовые и буквенные выражения, уравнение, прямая и обратная пропорциональная зависимости, уравнение первой степени, корень уравнения, решение линейного уравнения с одной неизвестной.

Далее проведем анализ ряда учебников по алгебре 7-9 классов.

1. Учебники [14-16], авторами которых являются Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и другие под ред. Теляковского С.А.

Данные учебные пособия входят в федеральный перечень учебников [2] на 2025-2026 учебный год.

В курсе алгебры 7 класса начинают рассматриваться системы линейных уравнений (14-15 параграфы). Первый из параграфов разбит на три подпункта, где рассматриваются: понятие линейного уравнения с двумя переменными, график уравнения с двумя переменными и в последнем пункте вводится понятие системы уравнений. Второй из параграфов посвящен методам решения этих систем уравнений (способ подстановки, способ сложения), а также решению задач с помощью систем уравнений. В разделе дополнительных задач встречаются системы, состоящие из трех уравнений с тремя неизвестными.

В 8 классе в параграфе 10 начинается раскрытие темы систем нелинейных уравнений. Параграф поделен на 5 пунктов. В первом пункте говорится о

существовании нелинейных уравнений, понятии равносильности. В следующем пункте проводится исследование систем двух линейных уравнений с двумя переменными. Далее рассматриваются методы решения систем нелинейных уравнений (графический и с помощью алгебраических преобразований) и задачи, решаемые с помощью систем уравнений. В содержании этих пунктов представлены системы нелинейных алгебраических уравнений, хотя авторы используют термин «Система уравнений».

Структура изучения данной темы в 9 классе схожа по построению с материалом, представленным в 8 классе. Однако сами уравнения систем усложняются, подробно рассматриваются графический метод и метод подстановки, а в рубрике «Для тех, кто хочет знать больше» приводятся и другие способы решения – метод сложения и метод введения новой переменной.

Таким образом, в учебниках данных авторов обучающиеся сталкиваются с понятием нелинейных уравнений в 8 классе, также в 8-9 классах рассматриваются методы решения систем нелинейных уравнений, но понятие нелинейности не используется.

2. Учебники [22-24], авторами которых являются Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.

В учебнике 7 класса введение в тему систем уравнений начинается с изучения линейных уравнений с двумя переменными. Далее обучающиеся подробно изучают системы уравнений, метод подстановки и метод алгебраического сложения. Также рассматривается графический способ решения, но он не выделяется отдельным параграфом, в отличие от остальных. Авторы учебника уделяют внимание применению систем уравнений для решения практических задач, демонстрируя, как математические модели помогают анализировать и решать реальные ситуации. Выделяются случаи, когда системы уравнений не имеют решений (несовместны) или имеют бесконечное множество решений (неопределены). Все эти понятия рассматриваются в самом начале курса обучения решению линейных уравнений – 16-19 параграфы.

В 8 классе данная тема в отдельные параграфы не выделяется, но системы нелинейных уравнений встречаются в задачном материале при изучении функций и их графиков. Формулировки заданий предполагают применение графического метода решения систем уравнений.

Однако в курсе алгебры 9 класса тема систем уравнений освещена наиболее полно (1-8 параграфы). Помимо систем уравнений и методов их решения рассматриваются также понятия однородной системы уравнений, симметрической системы уравнений, иррациональной системы уравнений и системы уравнений с модулем. Подробно описываются различные примеры их решения. Системы нелинейных уравнений также встречаются в задачном материале, но само понятие не определяется, говорится лишь о существовании уравнений не являющимися линейными.

Следовательно, обучающиеся сталкиваются с системами нелинейных уравнений в задачном материале 8 класса, а более подробно изучаются в начале курса 9 класса.

3. Учебники [18-20], авторами которых являются Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.

В учебнике алгебры для 7 класса данной теме посвящена 4 глава, в которой рассматриваются уравнения с двумя переменными (интересно заметить, что введение понятия происходит с помощью анализа задач прикладного характера), линейное уравнение с двумя переменными и его график, системы уравнений с двумя переменными и графический метод их решения, метод подстановки, метод сложения, решение задач с помощью систем линейных уравнений. В данном учебнике тема «Системы уравнений» рассматривается детально и подробно, в том числе в рубрике «Когда сделаны уроки» выделяется связь алгебры и геометрии на основе графического представления уравнений.

В задачном материале для 8 класса встречаются задания на определение количества решений системы нелинейных уравнений путем ее графического представления. Но в отдельные параграфы данная тема не выделяется.

В 9 классе «Системы уравнений с двумя переменными» встречаются лишь в 13 параграфе, где рассматривается графический метод, метод подстановки (также упоминается универсальная подстановка для симметрических систем уравнений). Материал излагается в сжатом виде с небольшим количеством упражнений.

Таким образом, системы уравнений подробно изучаются лишь в 7 классе, но затем встречаются при изучении других тем без выделения в отдельные параграфы учебного пособия. В 9 классе на рассмотрение данной темы выделен один параграф. Понятие нелинейности также не упоминается на протяжении всего курса.

4. Учебники [25-27] под авторством Никольского С.М., Потапова М.К., Решетникова Н.Н. и др.

Рассматривая учебник алгебры 7 класса, можно заметить, что тема «Системы уравнений» рассмотрена достаточно подробно. Выделены такие пункты, как «Уравнения первой степени с двумя неизвестными», «Системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными», «Способ подстановки», «Способ уравнивания коэффициентов», «Равносильность уравнений и систем уравнений», «Решение систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными», «О количестве решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными», «Системы уравнений первой степени с тремя неизвестными», «Решение задач при помощи систем уравнений первой степени», а в дополнении к главе также рассматривается метод Гаусса.

В 8 классе выделяются два параграфа «Системы рациональных уравнений» и «Графический способ решения систем уравнений». В 9 классе системы уравнений не рассматриваются.

Содержание данных учебников излагается на достаточно сложном для обучающихся языке. Понятие нелинейности не определяется.

При изучении систем уравнений часто встречаются задачи повышенного уровня сложности, включающие в себя параметр. Эти задания требуют от

учеников не просто решить систему, а проанализировать, как количество решений системы зависит от значения этого параметра. То есть, следует найти такие значения параметра, при которых система уравнений имеет либо одно решение, либо два решения (либо любое другое заданное количество), либо бесконечно много решений, либо не имеет решений совсем. В учебниках Ю.Н. Макарычева такие задания встречаются в разделе дополнительных упражнений к теме «Методы решения систем уравнений с двумя переменными» в курсе алгебры 7-9 классов; в учебниках А.Г. Мордковича системы уравнений с параметром встречаются при рассмотрении графического метода решения систем нелинейных уравнений в 9 классе; у А.Г. Мерзляка рассматриваемые задания также встречаются при изучении графического метода решения в 7 классе (на уровне подбора значений параметра) и в 9 классе; у С.М. Никольского системы уравнений с параметром в 7 классе выделены в пункт 10.7 «О количестве решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными» для дополнительного изучения, а в 8 классе при изучении графического метода решения.

Содержание темы «Системы уравнений» в рассмотренных учебниках разных авторов отличается по количеству материала, последовательностью изучения понятий. Большинство авторов наиболее полно раскрывают содержание данной темы в курсе 7 класса, а в 8-9 классах некоторые из них совсем не затрагивают системы уравнений. Такое распределение материала обуславливает и различное количество часов, выделенных на изучение темы: у Ю.Н. Макарычева – 9 часов в 7 классе, 10 часов в 8 классе, 10 часов в 9 классе (всего 29 ч.); у А.Г. Мордковича – 13 часов в 7 классе, 15 часов в 9 классе (всего 28 ч.); у А.Г. Мерзляка – 15 часов в 7 классе, 6 часов в 9 классе (всего 21 ч.); у С.М. Никольского – 16 часов в 7 классе, 21 час в 8 классе (всего 37 ч.).

Системы нелинейных уравнений играют важную роль в итоговой аттестации школьников и встречаются в различных заданиях государственной итоговой аттестации. В ОГЭ они представлены в заданиях № 20 (решение систем

различными методами), № 21 (практические задачи, сводящиеся к решению систем уравнений), № 22 (анализ количества решений систем уравнений в зависимости от параметра). В ЕГЭ системы уравнений с параметрами входят в блок заданий повышенной сложности (задание № 18), требующие глубокого понимания свойств функций и методов решения систем.

Примеры из открытого банка заданий ФИПИ, [1].

1. Задание № 20, ОГЭ. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 + y = 12, \\ 9x^2 - y = 2. \end{cases}$$

Указания к решению: данная система уравнений решается с помощью метода алгебраических преобразований (сложения) или метода подстановки. Ответ: $(-1; 7), (1; 7)$.

2. Задание № 21, ОГЭ.

Два оператора, работая вместе, могут набрать текст газеты объявлений за 8 ч. Если первый оператор будет работать 3 ч, а второй 12 ч, то они выполнят только 75% всей работы. За какое время может набрать весь текст каждый оператор, работая отдельно?

Указания к решению: в ходе анализа условия задачи составляется математическая модель:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{3}{x} + \frac{12}{y} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Далее система уравнений решается с помощью метода алгебраических преобразований (например, первое уравнение умножается на -3 и складывается со вторым). Ответ: первый оператор за 12 ч., второй оператор за 24 ч.

3. Задание № 22, ОГЭ.

Постройте график функции $y = x^2 + 3x - 4|x + 2| + 2$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Указания к решению: иными словами, в задании требуется найти значение параметра m , при котором следующая система уравнений имеет ровно три решения:

$$\begin{cases} y = x^2 + 3x - 4|x + 2| + 2, \\ y = m. \end{cases} \quad (6)$$

Воспользуемся графическим методом решения. Для начала рассмотрим первое уравнение системы. Раскроем модуль. При $x \geq -2$: $y = x^2 - x - 6$. При $x < -2$: $y = x^2 + 7x + 10$. Далее выполняется построение графиков функций на рисунке 5.

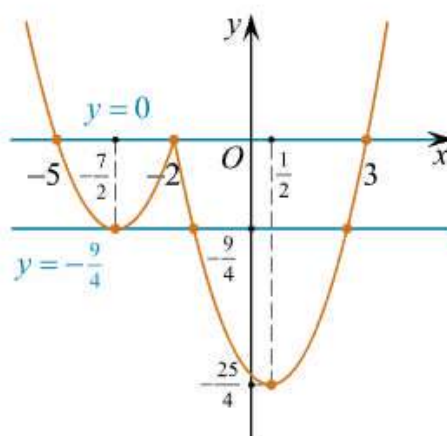


Рисунок 5 – Графическое представление системы уравнений (6)

Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $m = 0$ и $m = -\frac{9}{4}$. Ответ: $m = 0$ и $m = -\frac{9}{4}$.

4. Задание № 18, ЕГЭ. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 3xy - 3y + 9}{\sqrt{x+3}} = 0, \\ y = ax, \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Указания к решению: рассмотрим первое уравнение системы и запишем его в виде

$$\frac{(y-3)(xy-3)}{\sqrt{x+3}} = 0.$$

При $x \leq -3$ левая часть не имеет смысла. При $x > 3$ уравнение задаёт прямую $y = 3$ и гиперболу $y = \frac{3}{x}$. При каждом значении a уравнение $y = ax$ задаёт прямую с угловым коэффициентом a , проходящую через начало координат. Графическое представление решения изображено на рисунке 6.

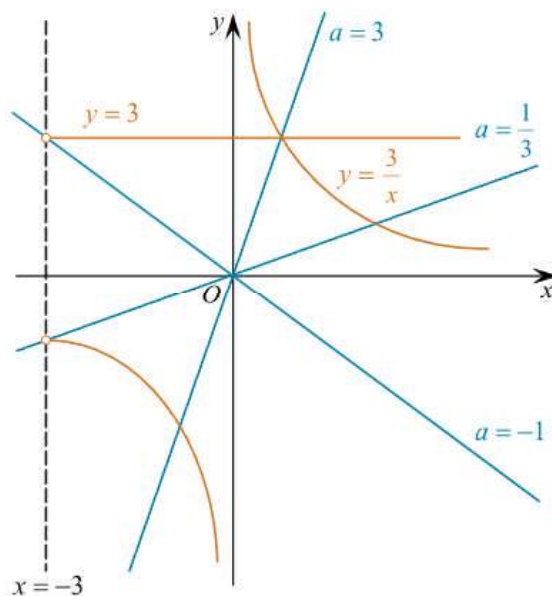


Рисунок 6 – Графическое представление решения

При $x > -3$ такая прямая пересекает прямую $y = 3$ при $a < -1$ и $a > 0$, пересекает правую ветвь гиперболы $y = \frac{3}{x}$ при $a > 0$, пересекает левую ветвь гиперболы $y = \frac{3}{x}$ при $a > \frac{1}{3}$. При этом прямая $y = ax$ проходит через точку пересечения прямой $y = 3$ и гиперболы $y = \frac{3}{x}$ при $a = 3$.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y = 3$ и гиперболы $y = \frac{3}{x}$ с прямой $y = ax$ при условии $x > -3$.

Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при $0 < a \leq \frac{1}{3}$ и при $a = 3$. Ответ: $0 < a \leq \frac{1}{3}$, $a = 3$.

Системы нелинейных алгебраических уравнений также встречаются в олимпиадных заданиях по математике.

Примеры олимпиадных заданий для 8 класса, [29].

1. Олимпиада «Шаг в будущее», 2019 г. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y^2 - 6y + 5}{x + 4} = x, \\ y = x^2 + 4x + 1. \end{cases}$$

Решение.

Для начала преобразуем первое уравнение системы:

$$\begin{cases} y^2 - 6y + 5 = x(x + 4), \\ x \neq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y - 3)^2 = (x + 2)^2, \\ x \neq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y - 3)^2 - (x + 2)^2 = 0, \\ x \neq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y - x - 5)(y + x - 1) = 0, \\ x \neq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 5, \\ y = x - 1; \\ x \neq -4; \end{cases}$$

Вернемся к исходной системе, заменив первое из уравнений, и решим с помощью метода подстановки:

$$\begin{cases} \begin{cases} y = x + 5, \\ y = x^2 + 4x + 1; \end{cases} \\ \begin{cases} y = x - 1, \\ y = x^2 + 4x + 1; \end{cases} \\ x \neq -4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5, \\ y = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases} \\ x \neq -4. \end{cases}$$

Ответ: (1; 6), (-5; 6), (0; 1).

2. Олимпиада «Шаг в будущее», 2020 г. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 + xy = 15, \\ x^2 + xy = 10. \end{cases}$$

Решение.

Используя метод сложения, получим $x + y = \pm 5$, заменим одно из уравнений системы на полученное.

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x^2 + xy = 10; \\ x + y = -5 \\ x^2 + xy = 10. \end{cases}$$

Далее применим метод подстановки, получим

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 2; \\ x = -3, \\ y = -2. \end{cases}$$

Ответ: $(3; 2), (-3; -2)$.

Примеры олимпиадных заданий для 9 класса, [9, 28].

1. Олимпиада «Всероссийская олимпиада школьников», 2020 г. Парабола $y = 20x^2 + 19x$ и прямая $y = 20x + 19$ пересекаются в двух точках. Верно ли, что график функции $y = 20x^3 + 19x^2$ проходит через эти же две точки?

Решение.

Составим систему уравнений и решим ее методом подстановки.

$$\begin{cases} y = 20x^2 + 19x, \\ y = 20x + 19; \\ x_1 = 1, y_1 = 39; \\ x_2 = -\frac{19}{20}, y_2 = 0. \end{cases}$$

Подставив получившиеся значения в уравнение $y = 20x^3 + 19x^2$, получим верные равенства, а это значит, что график данной функции проходит через эти точки.

2. Олимпиада «Физтех», 2022 г. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 50, \\ 5y + \sqrt{x^2 - 25y^2} = 1. \end{cases}$$

Решение.

Перейдем к равносильной системе, в которой первое уравнение получено путем сложения уравнений исходной системы, а второе путем вычитания.

$$\begin{cases} (x + 5y) + 2\sqrt{(x - 5y)(x + 5y)} = 51, \\ x - 5y = 49. \end{cases}$$

Сделаем замену в первом уравнении $\sqrt{x + 5y} = t$, получим $t^2 + 14t = 51$. Следовательно, $t_1 = -17$ и $t_2 = 3$, первый корень не подходит, так как не удовлетворяет условию $t > 0$.

$$\begin{cases} x + 5y = 9, \\ x - 5y = 49. \end{cases}$$

Решим систему методом сложения, получим $x = -4, y = 29$.

Ответ: $(-4; 29)$.

3. Олимпиада «Физтех», 2021 г. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + \frac{2}{3}x^2y^2 = 17. \end{cases}$$

Решение.

Система уравнений является симметрической, поэтому воспользуемся подстановкой $u = x^2 + y^2, v = x^2y^2$.

$$\begin{cases} 3u - 2v = 3, \\ u^2 - 2v + \frac{2}{3}v = 17. \end{cases}$$

Используя метод подстановки, получаем решение $u = 5, v = 6$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2y^2 = 6. \end{cases}$$

Выразим x^2 из первого уравнения и подставим во второе, получим

$$\begin{cases} x^2 = 3, \\ y^2 = 2; \\ x^2 = 2, \\ y^2 = 3. \end{cases}$$

Таким образом система нелинейных уравнений имеет 8 решений.

Ответ: $(\sqrt{3}; \sqrt{2}); (\sqrt{3}; -\sqrt{2}); (-\sqrt{3}; \sqrt{2}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{2}); (\sqrt{2}; \sqrt{3}); (\sqrt{2}; -\sqrt{3});$
 $(-\sqrt{2}; \sqrt{3}); (-\sqrt{2}; -\sqrt{3}).$

Примеры олимпиадных заданий для 10 класса, [10].

1. Олимпиада «Бельчонок», 2023 г. Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1, \\ x^3 + y^3 = 4. \end{cases}$$

Решение.

Используя алгебраические преобразования, перейдем к равносильной системе.

$$\begin{cases} x + y = -xy, \\ (x + y)^3 - 3(xy)^2 = 4. \end{cases}$$

Система уравнений является симметрической, воспользуемся подстановкой $u = x + y, v = xy$.

$$\begin{cases} u = -v, \\ u^3 - 3v^2 = 4; \\ u_1 = 1, v_1 = -1; \\ u_2 = -2, v_2 = 2; \end{cases}$$

1) $u_1 = 1, v_1 = -1$

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -1; \end{cases}$$

Решение системы: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$

2) $u_2 = -2, v_2 = 2$

$$\begin{cases} x + y = -2, \\ xy = 2; \end{cases}$$

Данная система уравнений решений не имеет.

Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$

2. Олимпиада «Бельчонок», 2023 г. Найдите все действительные решения системы

$$\begin{cases} 2x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ 2y - \frac{3y - x}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

Решение.

Умножив первое уравнение на y , второе на x , затем сложив их, перейдем к равносильной системе уравнений.

$$\begin{cases} 4xy - 1 = 3y, \\ 2y - \frac{3y - x}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

Далее воспользуемся методом подстановки, получим $x_1 = 1, y_1 = 1$,
 $x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = -1$.

Ответ: $(1; 1), (\frac{1}{2}; -1)$.

Примеры олимпиадных заданий для 11 класса, [17, 28].

1. Олимпиада «САММАТ», 2021 г. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{yz}}{y + z}, \\ y = \frac{\sqrt{xz}}{x + z}, \\ z = \frac{\sqrt{yx}}{y + x}. \end{cases}$$

Решение.

Заметим, что числа x, y, z одного знака, поэтому если тройка $(x; y; z)$ – решение системы, то $(-x; -y; -z)$ также решение.

Пусть числа x, y, z положительны. Из неравенства о средних $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ следует, что $\frac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \frac{1}{2}$. Следовательно, каждое из чисел x, y, z не больше $\frac{1}{2}$.

Перемножив все уравнения, получим

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 1.$$

Но сумма любых двух из чисел x, y, z не превосходят 1. Следовательно, $x + y = y + z = z + x = 1$. Значит $x = y = z = \frac{1}{2}$. Так как $(-x; -y; -z)$ также будет решением, то $x = y = z = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.

2. Олимпиада «Физтех», 2022 г. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

Решение.

Первое уравнение нелинейной системы равносильно уравнению $(x - 2y)^2 = xy - x - 2y + 2$ при условии $x - 2y \geq 0$, следовательно, $x^2 + (1 - 5y)x + (4y^2 + 2y - 2) = 0$. Решим это уравнение как квадратное относительно переменной x , имеем $D = (3y - 3)^2$; $x = 4y - 2$ или $x = y + 1$. Подставим полученные выражения во второе уравнение исходной системы.

При $x = 4y - 2$ второе уравнение системы: $25y^2 - 50y = 0$, откуда получаем две пары решений $x_1 = -2, y_1 = 0$ и $x_2 = 6, y_2 = 2$.

При $x = y + 1$ второе уравнение системы: $10y^2 - 20y - 15 = 0$, откуда $x_1 = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}, y_1 = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}$ и $x_2 = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}, y_2 = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Из всех пар решений неравенству $x \geq 2y$ удовлетворяют только две: $(6; 2)$, $(2 - \sqrt{\frac{5}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{5}{2}})$.

Ответ: $(6; 2), (2 - \sqrt{\frac{5}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{5}{2}})$.

Анализ методической литературы показал, что системы нелинейных уравнений представляют собой один из наиболее сложных разделов школьной математики, так как существует множество различных подходов к их решению, каждый из которых требует отдельного изучения и практического закрепления. Работа с нелинейными уравнениями тесно связана с выполнением сложных алгебраических преобразований и их графическое представление может

вызывать трудности и требует хорошего понимания аналитической геометрии. Из-за ограниченного времени, выделяемого на изучение темы, в учебных пособиях рассматриваются лишь наиболее часто используемые методы и приводится минимальное количество типовых задач для отработки навыков, чего зачастую бывает недостаточно для полного понимания темы. Возникает необходимость разработки учебных материалов, которые бы способствовали более глубокому освоению методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

2.1 Психолого-педагогические основы обучения теме «Системы алгебраических нелинейных уравнений»

При изучении темы «Системы алгебраических нелинейных уравнений» важно учитывать психолого-педагогические особенности обучения школьников, а также применять эффективные способы преподавания.

Одним из важных аспектов успешного обучения является создание благоприятной образовательной среды, благодаря которой ученики смогут постепенно преодолевать трудности, развивая необходимые математические навыки и умения, в том числе, критическое, пространственное и алгоритмическое мышление, аналитические способности и умение составлять математические модели на основе условия задачи или реальной ситуации. Для достижения таких результатов необходимо научить обучающихся разбивать сложные задачи на более простые или наоборот объединять их в единое целое, различать и понимать способы решения систем уравнений и анализировать условие задания с целью целесообразного применения того или иного метода решения, а также выделять существенное в математических моделях.

Существует несколько подходов к организации учебного процесса. Например, можно проводить традиционные уроки, включающие в себя проблемные или исследовательские задания, практические занятия с элементами групповой работы, факультативные занятия по решению олимпиадных задач, использовать средства современных информационных технологий для создания интерактивных заданий. Одним из эффективных методов обучения является проектная деятельность, направленная на глубокое изучение уже известных методов решения систем уравнений, анализ способов решения, не включенных в

школьную программу, или поиск принципиально новых путей рассмотрения систем алгебраических нелинейных уравнений.

Важно реализовывать индивидуальный подход к обучающимся, который будет соответствовать их возрастным и психологическим особенностям. При работе с учениками основной школы следует постепенно усложнять материал, так как это позволяет избежать перегрузку обучающихся, а также падение их мотивации к изучению темы. Пример поэтапного освоения темы «Методы решения систем алгебраических нелинейных уравнений»:

- 1) знакомство с понятием нелинейного уравнения, а также их системами;
- 2) изучение методов решения систем нелинейных уравнений;
- 3) решение систем уравнений с параметром;
- 4) решение задач прикладного характера с использованием полученных знаний и умений.

Чаще всего обучающиеся при решении поставленных математических задач сталкиваются со следующими трудностями:

- неумение анализировать условие задачи;
- проблемы с построением математической модели;
- сложность при выборе метода решения;
- трудности в интерпретации полученных знаний;
- слабые навыки работы с параметрами.

Это связано с особенностями восприятия учеников. При решении систем уравнений возникает потребность одновременного удержания в памяти нескольких уравнений, визуализации системы как единого целого, что вызывает определенные сложности в обучении. У большинства обучающихся при столкновении с нестандартными задачами возникает иллюзия сложности материала, из-за чего они испытывают страх и тревожность, что способствует снижению мотивации.

Обозначенные трудности возможно избежать, если:

- уделять внимание постоянному закреплению полученных знаний;
- использовать наглядные примеры и проводить параллели с повседневной жизнью;
- развивать логическое мышление;
- способствовать приобретению навыков самостоятельной оценки верности решения;
- создавать благоприятную и поддерживающую обстановку в процессе обучения.

Таким образом, для достижения наилучших результатов обучения следует уделять особое внимание методике преподавания, основываясь на потребностях и психологических особенностях учеников. Совершенствование учебного процесса также включает в себя постоянную оценку применяемых методов и их корректировку, в соответствии с развитием современных образовательных технологий.

2.2 Применение рабочих листов при изучении методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений

Использование рабочих листов в образовании берет свое начало в XX веке. Одним из первых, кто предложил подобный подход, был педагог В.Ф. Шаталов, разработавший систему опорных конспектов. Его система отличалась созданием благоприятной мотивационной среды для обучения.

Рабочий лист – одноразовый печатный материал, предназначенный для использования на определенном этапе урока. Он содержит задания, требующие от ученика заполнения специальных пространств. Обычно в рабочие листы включены краткие памятки по теме или теоретический материал, таблицы, графики, диаграммы, задачи для самостоятельного решения, упражнения для закрепления материала и другие виды учебной деятельности.

В литературе [21] указывается, что широкое применение рабочих листов в образовательном процессе объясняется рядом их преимуществ:

- 1) структурирование учебного материала с помощью разбиения его на части, что помогает лучшему усвоению информации;
- 2) развитие навыков самостоятельной работы. Рабочие листы могут быть направлены на открытие новых знаний, самостоятельную отработку изученных тем, самоанализ и самооценку;
- 3) эффективный контроль знаний и успеваемости учеников. Учитель может использовать рабочие листы для текущего, промежуточного или итогового контроля, оставляя комментарии для ученика в специально отведенном блоке. Ученик, в свою очередь, может провести самоанализ, используя блок рефлексии.

Рабочие листы могут использоваться как на уроках, так и в качестве домашнего задания или во внеурочной деятельности.

При изучении методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений одним из инструментов обучения являются рабочие листы.

В рамках работы были созданы комплекты рабочих листов, посвященных различным методам решения систем нелинейных уравнений, а именно: методу разложения на множители (Приложение 1), методу подстановки (Приложение 2), методу алгебраических преобразований (Приложение 3), методу замены переменных (Приложение 4), графическому методу (Приложение 5). Они содержат краткий теоретический материал, практические задания различного уровня сложности, задания для самостоятельной работы, блок рефлексии, блок оценивания учителем, памятку и ответы. Всего разработано пять комплектов, в каждом из которых от 8 до 10 рабочих листов.

Подробнее рассмотрим содержание рабочего листа, посвященного графическому методу решения систем нелинейных уравнений (Приложение 5).

В начале каждого листа предусмотрено место для указания фамилии, имени и класса ученика, что позволяет отслеживать прогресс каждого из них.

Первый лист начинается с вводного задания: обучающемуся предлагается выразить одну переменную через другую в трех предложенных уравнениях. Это упражнение необходимо для подготовки к дальнейшей работе с графиками и понимания взаимосвязи между переменными. Далее, на этом же листе, расположено задание на сопоставление уравнений с их графическим представлением и названием соответствующей линии. Это помогает визуализировать уравнения и закрепить знания о различных типах функций.

Второй лист углубляет понимание взаимосвязи графического представления и количества решений системы уравнений. Ученику предлагается определить количество решений системы уравнений, опираясь на представленный график. Затем следует теоретический блок, где представлено определение понятий «решение уравнения» и «решить уравнение», а также суть графического метода решения систем уравнений.

На третьем листе ученику предлагается решить систему нелинейных уравнений, следуя предложенному алгоритму. Это позволяет закрепить навыки и научиться применять графический метод на практике.

Четвертый лист содержит более сложные задания – самостоятельное решение двух систем уравнений. Для каждой системы предусмотрено место для подробного решения, что позволяет ученику продемонстрировать свои навыки и понимание материала.

Пятый лист предлагает задачи, требующие более глубокого анализа и применения полученных знаний. В задании № 6 обучающемуся необходимо решить текстовую задачу, а в задании № 7 – проявить творческие навыки и придумать систему уравнений, зная ее решение.

На шестом листе представлено двенадцать заданий для самостоятельного решения учениками, что позволит закрепить полученные знания и навыки решения систем уравнений графическим методом.

Седьмой лист предназначен для рефлексии и оценки. Ученик может оценить свою работу, а учитель – дать обратную связь и выставить оценку. Кроме

того, на этом листе размещена памятка в виде алгоритма решения систем уравнений графическим методом, которую можно вырезать и использовать в качестве опорного материала.

Наконец, восьмой и девятый листы содержат ответы ко всем заданиям, что позволяет ученику проверить свою работу и выявить пробелы в знаниях. Также эти листы могут оставаться у учителя для проверки заданий, выполненных обучающимися.

Разработанные рабочие листы предназначены для изучения и практического применения графического метода решения систем алгебраических нелинейных уравнений. Их структура позволяет постепенно осваивать этот метод обучающимися, переходя от упражнений, включающих применение базовых умений, к решению сложных практических задач.

Следовательно, представленные комплекты рабочих листов содержат краткие формулировки основных понятий темы, задания разного уровня сложности и дают возможность провести самооценку. Они позволяют ученикам не только научиться решать уравнения, но и развить логическое мышление, визуальное восприятие и навыки самоанализа.

Данные рабочие листы можно использовать на уроках алгебры при рассмотрении методов решения систем уравнений, для актуализации знаний при подготовке к ГИА, на факультативных занятиях, если в рамках используемого учебного пособия не предусмотрено рассмотрение какого-либо из методов решения, при дистанционном обучении, так как рабочие листы включают подробное рассмотрение каждого из методов, как дополнительное или домашнее задание.

Таким образом, использование рабочих листов помогает структурировать информацию, способствует эффективной самостоятельной работе учеников, облегчает контроль знаний и оценку успеваемости. Рабочие листы создают более интерактивную образовательную среду, где каждый ученик может проявить свои способности и достичь лучших результатов.

2.3 Комплекс упражнений по теме «Системы уравнений с параметром» на динамических моделях

Одним из важных разделов в теме «Системы нелинейных уравнений» являются системы нелинейных уравнений с параметром. Как уже упоминалось ранее, такие системы встречаются в курсе алгебре 8-9 класса, а также в заданиях повышенной сложности на ОГЭ (задание 22) и ЕГЭ (задание 18).

Н.В. Кочуренко в своей статье [12] акцентирует внимание на том, что решение задач с параметром способствует развитию логического мышления (необходимо строить цепочки рассуждений, выявлять взаимосвязи между параметром и переменными, делать обоснованные выводы), аналитического мышления (требуется разбивать задачу на подзадачи, рассматривать различные случаи в зависимости от значений параметра, анализировать полученные решения), критического мышления (необходимо проверять полученные решения на соответствие условиям задачи, выявлять ошибки и противоречия), пространственного решения (при решении геометрических задач с параметрами), гибкости мышления (необходимо уметь переключаться между различными подходами к решению, адаптироваться к изменяющимся условиям).

Для решения систем уравнений с параметром зачастую применяются те же методы, что и для обычных систем нелинейных уравнений, рассмотренные в работе, в частности, и графический метод. Однако, при выполнении заданий, посвященных данной теме, педагоги испытывают трудности при текущей оценке знаний учеников из-за широкой доступности технологических инструментов, позволяющих мгновенно находить решения математических задач, в том числе и систем алгебраических нелинейных уравнений. Эти инструменты, такие как мобильные приложения, онлайн-калькуляторы, специализированное программное обеспечение и даже нейросети с искусственным интеллектом, приводят к следующим негативным последствиям:

- падение интереса к самостоятельному поиску решений;

- ослабление аналитических способностей;
- поверхностное усвоение учебного материала;
- недостаточное понимание принципов и методов решения задач;
- затруднения в развитии алгоритмического мышления.

Активное обучение через моделирование и самостоятельное составление заданий – один из способ уменьшить зависимость от технологий и повысить вовлеченность в учебный процесс.

В процессе работы была создана система упражнений, позволяющая сделать изучение темы «Системы алгебраических нелинейных уравнений с параметром» более интерактивным и увлекательным для детей (Приложение 6). Ключевым элементом этой системы является использование динамических моделей, созданных в GeoGebra.

Система упражнений содержит 20 заданий с использованием графиков функций вида $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{k}{x}$, $y = |x|$, их комбинаций друг с другом, с прямыми и окружностями. Динамические модели находятся в свободном доступе для учителя и учеников при переходе по ссылке или QR-коду, расположенных в начале разработанной системы упражнений. Также система упражнений содержит ответы для самопроверки учениками или проверки учителем.

Упражнение начинается с визуального представления: обучающиеся видят на экране графики функций, изображения кривых, которые динамически изменяются в зависимости от параметра. Задача ученика – проанализировать эти визуальные данные, а именно, найти их аналитическое представление. На основе графического представления определить, какая функция или уравнение описывает этот объект. Это требует понимания основных свойств функций и умения распознавать их по графику. Далее требуется решение составленной системы алгебраических нелинейных уравнений с параметром. Проверить полученный результат также можно при помощи этой динамической модели.

Рассмотрим подробнее методику работы на примере одного из упражнений (задание 15 из приложения 6).

Задание. На основе динамической модели составьте систему уравнений с параметром. Определите количество решений системы в зависимости от параметра.

Обучающимся предлагается динамическая модель в GeoGebra, меняющаяся в зависимости от выбора параметра a .

Начнем анализ данной динамической модели.

1) При $a = 0$ (Рисунок 7):

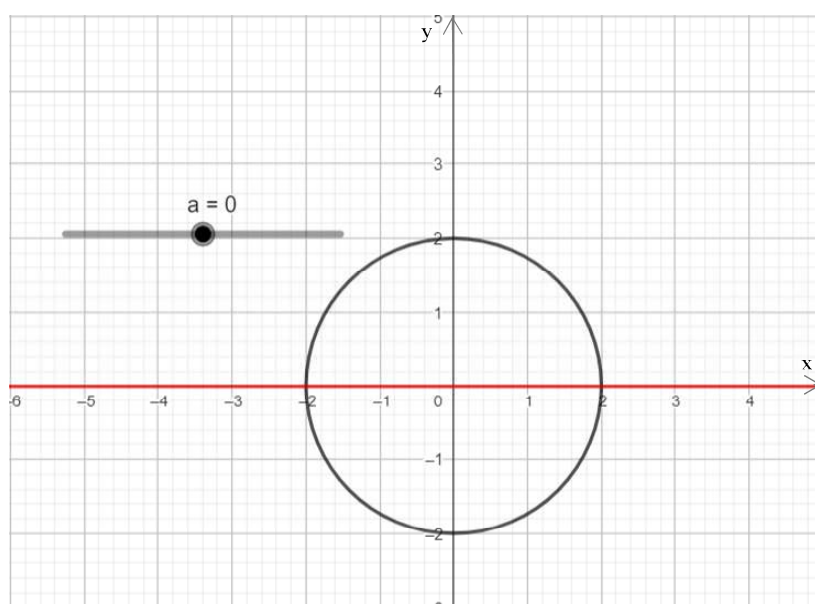


Рисунок 7 – Графическое представление системы уравнений с параметром
при $a = 0$

2) При $a = -2$ (Рисунок 8):

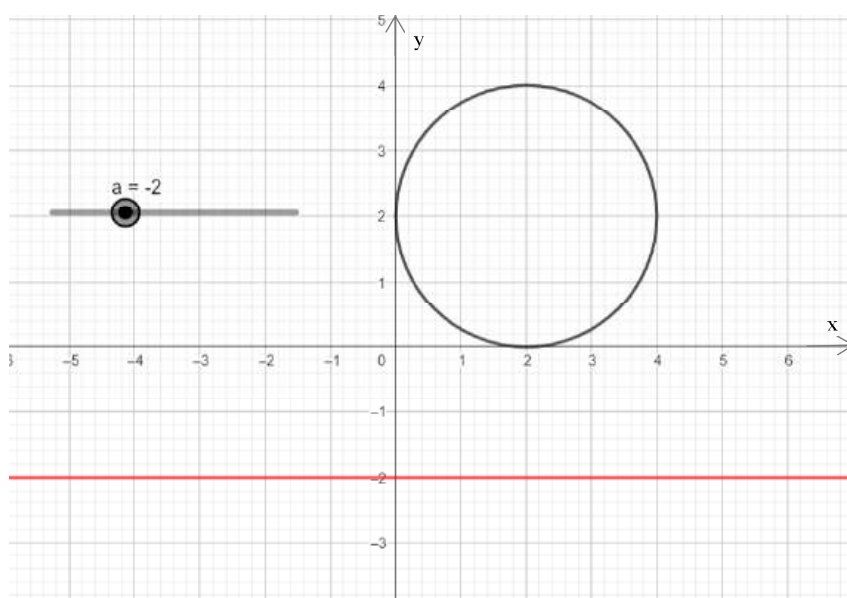


Рисунок 8 – Графическое представление системы уравнений с параметром
при $a = -2$

3) При $a = 2$ (Рисунок 9):

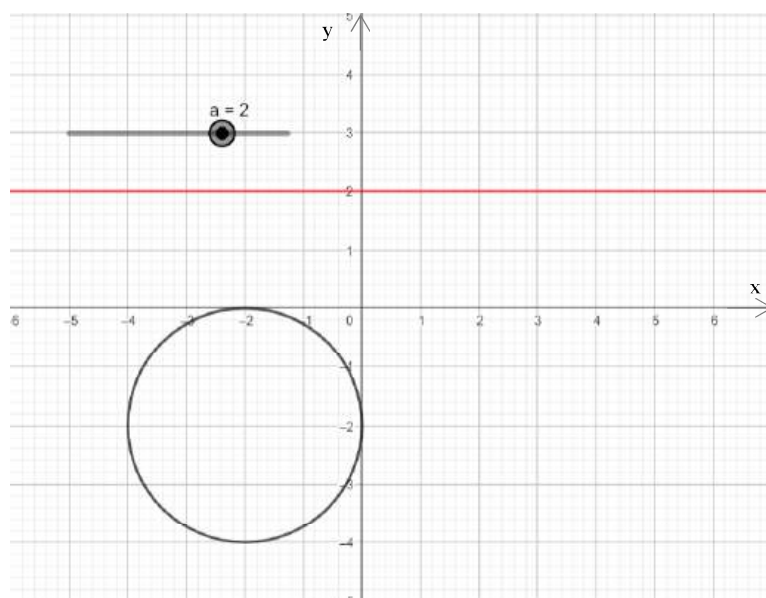


Рисунок 9 – Графическое представление системы уравнений с параметром
при $a = 2$

Одна из линий представляет собой окружность, уравнение которой в общем виде: $x^2 + y^2 = r^2$. Рассмотрим зависимость положения окружности в системе координат от параметра a .

При изменении параметра радиус окружности не меняется, значит он не зависит от параметра $\Rightarrow r = 2$.

Центр окружности при $a = 0$ находится в точке с координатами $(0; 0)$, при $a = -2$ центр в точке с координатами $(2; 2)$, при $a = 2$ координаты центра окружности $(-2; -2)$, следовательно центр окружности перемещается по прямой $y = x$.

Составим уравнение окружности, представленной в модели:

$$(x + a)^2 + (y + a)^2 = 4.$$

Второй график – прямая. Общее уравнение: $y = kx + b$, где параметр k отвечает за угол наклона прямой, а параметр b – за перемещение графика.

Заметим, что при изменении параметра прямая остается параллельной оси X , следовательно параметр $k = 0$. Рассмотрим перемещение прямой: при $a = 0$ горизонтальная прямая проходит через начало координат, при $a = -2$ через точку $(0; -2)$, при $a = 2$ через точку $(0; 2)$, следовательно параметр $b = a$.

Составим уравнение прямой, представленной в модели: $y = a$.

Получаем систему алгебраических нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} (x + a)^2 + (y + a)^2 = 4, \\ y = a. \end{cases}$$

Перейдем к анализу составленной системы уравнений. Количество решений системы определяется количеством точек пересечений. Чтобы найти точки пересечения, решим систему, используя метод подстановки.

Подставим $y = a$ в первое уравнение системы:

$$(x + a)^2 + (a + a)^2 = 4,$$

$$(x + a)^2 + (2a)^2 = 4.$$

Упростим уравнение с помощью алгебраических преобразований.

$$x^2 + 2ax + a^2 + 4a^2 - 4 = 0,$$

$$x^2 + 2ax + 5a^2 - 4 = 0.$$

Проанализируем количество решений этого уравнения. Для этого вычислим дискриминант.

$$D = (2a)^2 - 4(5a^2 - 4) = 4a^2 - 20a^2 + 16 = 16 - 16a^2.$$

Уравнение будет иметь одно решение при $D = 0$, иметь два решения при $D > 0$ и не иметь решений при $D < 0$. Рассмотрим каждый из случаев.

1) $D = 0$:

$$16 - 16a^2 = 0,$$

$$a^2 = 1,$$

$$a = \pm 1.$$

2) $D > 0$:

$$16 - 16a^2 > 0,$$

$$a^2 < 1,$$

$$a \in (-1; 1).$$

3) $D < 0$:

$$16 - 16a^2 < 0,$$

$$a^2 > 1,$$

$$a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ система уравнений решений не имеет; при $a = -1$ и $a = 1$ система уравнений имеет одно решение; при $a \in (-1; 1)$ система уравнений имеет два решения. Проверим полученный результат с помощью динамической модели. Двигая ползунок, увидим совпадение результата.

Система упражнений может быть использована в процессе обучения на различных его этапах.

1. При проведении факультативных занятий. Разработанные упражнения подойдут для изучения систем уравнений с параметром. Они помогут углубить знания о графиках функций и их взаимосвязи с решениями систем уравнений. А также для закрепления темы «Решение систем алгебраических нелинейных уравнений».

2. При подготовке к ОГЭ (задание № 22). Особое внимание стоит уделить анализу количества решений систем уравнений в зависимости от параметра.

3. При подготовке к ЕГЭ (задание № 18). Системы уравнений с параметрами – один из самых сложных блоков заданий в ЕГЭ. Для успешного решения таких задач необходимо не только владеть различными методами, но и глубоко понимать свойства функций, уметь строить и анализировать графики, а также логически рассуждать.

Разработанные задания также можно использовать на уроках алгебры для повышения интереса обучающихся и создания дополнительной мотивации. Рассмотрим пример включения упражнения в урок.

Фрагмент урока по теме «Решение систем уравнений с параметром» в 8 классе. Тип урока: закрепление полученных знаний (этап мотивации).

Сегодня каждый из нас сможет примерить на себя новую роль – профессию детектива. На экране появился загадочный объект в виде сложных кривых, ваша задача – собирая улики, найти решение этой задачи.

Первое, что следует сделать – внимательно изучить вид и особенности графиков. Похоже ли они на параболу, гиперболу, окружность или что-то другое? Ваша цель – используя все собранные улики составить уравнение, которое идеально описывает графики функций.

Перейдем к одному из самых интересных этапов – решение созданной вами задачи. Вам предстоит применить все свои знания и навыки, чтобы найти решение системы уравнений. А чтобы убедиться в верности решения, вы сможете проверить ответ с помощью динамической модели.

В результате этого исследования вы не только научились распознавать функции по графикам и анализировать системы уравнений, но и раскрыли свои творческие способности, научившись самостоятельно формулировать и решать сложные математические задачи.

Предлагается, что система упражнений позволит:

- научиться анализировать влияние параметра на количество решений системы уравнений;
- углубить понимание свойств функций;

- освоить различные методы решения систем алгебраических нелинейных уравнений;

- повысить уверенность в своих силах при решении сложных задач.

Можно выделить следующие преимущества использования разработанной системы упражнений:

- интерактивность (обучающиеся могут самостоятельно изменять параметры, наблюдать как меняются графики функций, анализировать количество решений системы с помощью ее визуализации);

- творчество (составление задач развивает логическое мышление, креативность и умение формулировать математические идеи);

- самостоятельность (задания нового типа ограничивают использование информационных средств, применяемых для решения систем уравнений).

Составленная система упражнений не просто учит решать готовые задачи, а развивает у обучающихся математическое мышление, исследовательские навыки и умение применять полученные знания на практике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе работы были рассмотрены основные аспекты изучения систем алгебраических нелинейных уравнений в курсе алгебры основной школы, выделены основные методы решения нелинейных систем, а также проведен анализ теоретического и задачного материалов по теме «Системы алгебраических уравнений» в школьной программе.

Данная работа затрагивает не только математические аспекты, но и психолого-педагогические особенности изучения этой темы обучающимися. Рассмотрена эффективность использования рабочих листов в процессе обучения. Кроме того, проанализировано влияние современных информационных технологий, предлагающих готовые решения, на понимание и усвоение материала. В качестве альтернативы предложена методика, основанная на решении заданий с использованием динамических моделей в GeoGebra, предполагающая более углубленное освоение темы.

В результате проделанной работы была достигнута поставленная цель, заключающаяся в разработке учебных материалов для изучения методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений. Анализ существующих учебных материалов показал, что недостаток внимания к данной теме в школьной программе требует создания новых ресурсов, способствующих более глубокому пониманию и освоению материала.

Разработанные рабочие листы не только обогатили методическую базу, но и представили обучающимся возможность постепенного изучения темы, в том числе и самостоятельного, а также развития учениками своих навыков и умений.

Подход к изучению темы, основанный на использовании динамических моделей, позволил создать систему упражнений, которая обеспечивает более глубокое понимание материала, способствует развитию исследовательских способностей учеников, позволяет усовершенствовать навыки работы с

параметрическими уравнениями, формирует умения составлять системы уравнений по заданным моделям.

Таким образом, результаты работы могут быть полезны как для учителей, так и для учеников, обеспечивая более качественное и глубокое изучение систем алгебраических нелинейных уравнений в школьном курсе алгебры. Дальнейшее развитие работы предполагает экспериментальную проверку эффективности предложенной методики в реальном учебном процессе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральный институт педагогических измерений. URL: <https://fipi.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).
2. Федеральный перечень учебников. URL: <https://fpu.edu.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).
3. Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика». 5-9 классы (базовый уровень). М., 2023. URL: https://sh-kuznecovomixajlovskaya-r897.gosweb.gosuslugi.ru/netcat_files/30/41/13_FRP_Matematika_5_9_klassy_baza.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).
4. Будущее математического образования : материалы IV Молодежной школы-конференции (28 марта 2024 г.) / отв. ред. Н. В. Тимербаева. Казань : Издательство Казан. ун-та, 2024. 84 с.
5. Виленкин Н. Я. Математика. 5 класс : учебник для общеобразовательных организаций. В 2 частях. Часть 1 / Н. Я. Виленкин, [и др.] ; М. : Просвещение, 2023. 158 с.
6. Виленкин Н. Я. Математика. 5 класс : учебник для общеобразовательных организаций. В 2 частях. Часть 2 / Н. Я. Виленкин, [и др.] ; М. : Просвещение, 2023. 174 с.
7. Виленкин Н. Я. Математика. 6 класс : учебник для общеобразовательных организаций. В 2 частях. Часть 1 / Н. Я. Виленкин, [и др.] ; М. : Просвещение, 2023. 161 с.
8. Виленкин Н. Я. Математика. 6 класс : учебник для общеобразовательных организаций. В 2 частях. Часть 2 / Н. Я. Виленкин, [и др.] ; М. : Просвещение, 2023. 145 с.
9. Всероссийская олимпиада школьников. URL: <https://vos.olimpiada.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).

10. Всесибирская открытая олимпиада школьников «Бельчонок». URL: <https://dovuz.sfu-kras.ru/abiturientu-sfu/olimpiady/belchonok>. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).
11. Дятлов В. Н. Математические этюды для абитуриентов, учащихся, учителей. Этюд № 3. Уравнения, неравенства, системы. Соотношения с корнями (радикалами). Второе издание. Новосибирск : Издательство Института математики, 2019. 76 с.
12. Кочуренко Н. В. Развитие мышления при решении задач с параметрами / Н. В. Кочуренко // Методика преподавания в современной школе: актуальные проблемы и инновационные решения : материалы II Российско-узбекской научно-практической конференции. СПб., 2024. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=75175478>. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).
13. Литвиненко В. Н. Практикум по элементарной математике : пособие для студентов пед. ин-тов / В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. М. : Просвещение, 1991. 352 с.
14. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 7 класс : учебник / Ю. Н. Макарычев, [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2024. 255 с.
15. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 8 класс : учебник / Ю. Н. Макарычев, [и др.] ; М. : Просвещение, 2024. 319 с.
16. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 9 класс : учебник / Ю. Н. Макарычев, [и др.] ; М. : Просвещение, 2023. 257 с.
17. Межрегиональная олимпиада школьников «САММАТ». URL: <https://sammat.samgtu.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).
18. Мерзляк А. Г. Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 275 с.
19. Мерзляк А. Г. Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк, [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 259 с.

20. Мерзляк А. Г. Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 321 с.

21. Миренкова Е. В. Рабочий лист как средство организации самостоятельной познавательной деятельности в естественно-научном образовании // Ценности и смыслы. 2021. № 1. С. 115–130. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/rabochiy-list-kak-sredstvo-organizatsii-samostoyatelnoy-poznavatelnoy-deyatelnosti-v-estestvenno-nauchnom-obrazovanii>.

Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).

22. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. М. : Просвещение, 2022. 369 с.

23. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. М. : Просвещение, 2022. 385 с.

24. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. М. : Просвещение, 2022. 369 с.

25. Никольский С. М. Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 294 с.

26. Никольский С. М. Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 310 с.

27. Никольский С. М. Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / С. М. Никольский [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 335 с.

28. Олимпиада «Физтех». URL: <https://olymp-online.mipt.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).

29. Олимпиада школьников «Шаг в будущее». URL: <https://olymp.bmstu.ru/ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).
30. Садыков А. В. Решение нелинейных уравнений : методические указания / А. В. Садыков, А. Н. Гайфутдинов. Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2012. 29 с.
31. Семакин А. Н. Системы нелинейных уравнений. Занятия 4.2-4.3 / А. Н. Семакин. М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, каф. "Высшая математика", 2019. URL: https://guimc.bmstu.ru/wp-content/uploads/2020/02/lesson_4.2-3.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.05.2025).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1.

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)

**Решение систем нелинейных уравнений
методом разложения на множители**

Решение системы уравнений с двумя переменными – это пара значений переменных, которая обращает каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему уравнений – это значит найти все её решения, или убедиться, что общих решений у исходных уравнений нет.

1

Разложите на множители следующие выражения:

1) $9x - 15x^2y =$

2) $a^3 - 14b + 7a^2b - 2a =$

3) $2n^2 + mn - 3nk - 5m - 10n + 15k =$



Разложение на множители можно произвести путем использования

- формул сокращенного умножения;
- вынесения общего множителя за скобку;
- группировки или предварительного преобразования.

Решение систем нелинейных уравнений методом разложения на множители

2

Решите систему уравнений методом разложения на множители:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 3x + 3y = 0, \\ x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y = 0. \end{cases}$$

1. Разложите на множители каждое из уравнений системы.

1) $x^2 - y^2 - 3x + 3y = 0$

2) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x + 4y = 0$

2. Запишите систему уравнений, полученную с помощью разложения на множители каждого из уравнений.

$$\begin{cases} \underline{\hspace{10em}} \\ \underline{\hspace{10em}} \end{cases}$$

3. Составьте четыре системы уравнений.

1) $\begin{cases} \underline{\hspace{10em}} \\ \underline{\hspace{10em}} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \underline{\hspace{10em}} \\ \underline{\hspace{10em}} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \underline{\hspace{10em}} \\ \underline{\hspace{10em}} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \underline{\hspace{10em}} \\ \underline{\hspace{10em}} \end{cases}$

Пример:

$$\begin{cases} f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) = 0, \\ g_1(x, y) \cdot g_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ g_1(x, y) = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} f_2(x, y) = 0, \\ g_1(x, y) = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} f_2(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0. \end{cases}$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)



Решение систем нелинейных уравнений методом разложения на множители



4. Решите каждую из четырех систем уравнений

5. Запишите в ответ решение каждой системы (повторяющиеся пары чисел можно выписывать единожды).

Ответ: _____

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)



Решение систем нелинейных уравнений методом разложения на множители



3

Решите систему уравнений методом разложения на множители:

$$1) \begin{cases} x^2 + xy - 6y^2 = 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)



Решение систем нелинейных уравнений методом разложения на множители



3

Решите систему уравнений методом разложения на множители:

$$2) \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y = 0, \\ x^2 - 9y^2 + 2x - 6y = 0. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса

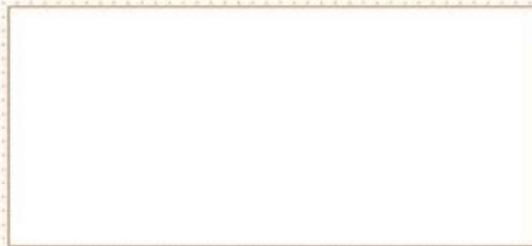


Решение систем нелинейных уравнений методом разложения на множители

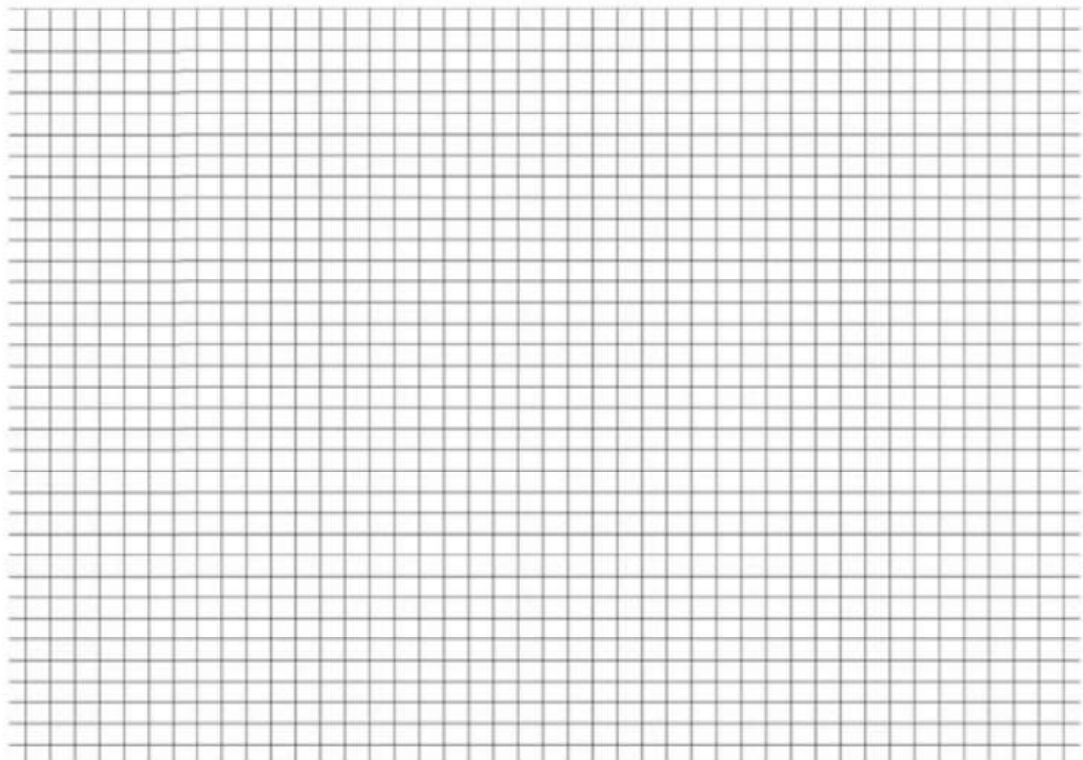


4

Попробуйте самостоятельно составить систему нелинейных уравнений, которая решается с помощью метода разложения на множители. Решите ее.



Решение



Ответ: _____

**Решение систем нелинейных уравнений
методом разложения на множители****Задания для самостоятельной
работы**

1)
$$\begin{cases} (x-2)(y-1) = 0, \\ 2x^2 - 3xy + 5y = 5. \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x^2 + 5x = 0, \\ x + 2y = 8. \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} (x-2y)(x^2 + y^2) = 6(x^2 + y^2), \\ 5x + 2 = 1. \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 7x - 2y = 5, \\ x^2 - y^2 = 12(x - y). \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} (2x + y - 5)(x^2 + y^2 - 26) = 0, \\ (5x + y)(xy - 7) = 0. \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} x^2 = xy, \\ x^2y = 4y. \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} 2x^2 - xy - y^2 = 0, \\ 6x^2 - 2xy + 6y - 18x = 0. \end{cases}$$

9)
$$\begin{cases} 7x^2 + 6xy - y^2 + 5x + 5y = 0, \\ y^2 - 6xy = 4y - 24x. \end{cases}$$

10)
$$\begin{cases} 3x^3 - 9x^2y + 9y^2 - 3xy = 0, \\ xy + 5y - 9x = 45. \end{cases}$$

11)
$$\begin{cases} x^2 + 7xy + 9y^2 = xy, \\ 5x^2 - 3xy + 40y - 24x = 0. \end{cases}$$

12)
$$\begin{cases} x^3 + 18x^2y + 81xy^2 - 3x^2 - 54xy - 243y^2 = 0, \\ 4x^2 - 7x + 2y^2 + 9xy - 14y = 0. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



Решение систем нелинейных уравнений методом разложения на множители



Оцени свою работу (опиши, что далось легко, что тяжелее, что показалось самым интересным и т.д.)



Оценка:

Комментарий учителя



Памятка

Алгоритм решения с помощью метода разложения на множители:

- 1) разложить каждое из уравнений системы на множители;
$$\begin{cases} f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) = 0, \\ g_1(x, y) \cdot g_2(x, y) = 0. \end{cases}$$
- 2) заменить исходную систему на совокупность систем;
$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ g_1(x, y) = 0; \end{cases} \begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0; \end{cases} \begin{cases} f_2(x, y) = 0, \\ g_1(x, y) = 0; \end{cases} \begin{cases} f_2(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0. \end{cases}$$
- 3) решить каждую систему;
- 4) объединить все найденные решения и записать ответ.



Решение систем нелинейных уравнений методом разложения на множители



Ответы

1

1) $3x(3 - 5xy)$

2) $(a + 7b)(a^2 - 2)$

3) $(m + 2n - 3k)(n - 5)$

2

$$\begin{cases} (x - y)(x + y - 3) = 0, \\ (x - 2y)(x - 2y - 2) = 0. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ x - 2y - 2 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(0; 0), (-2; -2), \left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right), (2; 1).$

3

1) **Ответ:** $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), (-4; -2), (4; 2).$

2) **Ответ:** $(0; 0), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right), (6; 2).$

4

Например:
$$\begin{cases} x^2 - 9y^2 + 3x - 9y = 0, \\ x^2 - 2xy + y^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right), (-3; 0), \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right).$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)



Решение систем нелинейных уравнений методом разложения на множители



Ответы на задания для самостоятельной работы

- 1) $(2; 3), (0; 1), (1,5; 1);$
- 2) $(0; 4), (-5; 6,5);$
- 3) $(-0,2; -3,1);$
- 4) $(1; 1), \left(\frac{29}{9}; \frac{79}{9}\right);$
- 5) $\left(-\frac{5}{3}; \frac{25}{3}\right), (-1; 5), (1; -5), (-1; -5), (1; 5), (-5; -1), (5; 1);$
- 6) $(-\sqrt{5}; -\sqrt{5}), (\sqrt{5}; \sqrt{5}), (3; -1), (-1; 3);$
- 7) $(0; 0), (-2; -2), (2; 2);$
- 8) $(0; 0), (3; -6), (3; 3);$
- 9) $(-5; -30), \left(-\frac{1}{7}; 4\right), (0; 0), (-4; 4);$
- 10) $(-5; 25), (-3; 9), (3; 9), \left(-5; -\frac{5}{3}\right), (27; 9);$
- 11) $(0; 0), (24; -8);$
- 12) $(0; 0), (1,8; -0,2), (3; -1,5), (3; -5).$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)

Решение систем нелинейных уравнений методом подстановки



При решении данным методом выбирается уравнение, в котором одна из переменных наиболее просто выражается через остальные, после чего подставляется в следующие уравнения системы.

1

Выразите одну из переменных из каждого уравнения.

$x^2 + 15x - y = (x + 2)^2$

$xy - 5x = 15$

$9a + 5 = 2(a^2 + b)$

Решение системы уравнений с двумя переменными – это пара значений переменных, которая обращает каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему уравнений – это значит найти все её решения, или убедиться, что общих решений у исходных уравнений нет.

2

Выберете пары чисел, которые являются решением системы уравнений.

$$\begin{cases} x - 3y = 2, \\ x^2 - 2xy = 7. \end{cases}$$

1) $(3; \frac{1}{3})$

2) $(3; 7)$

3) $(-7; -3)$

4) $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{7})$

Ответ: _____



Решение систем нелинейных уравнений методом подстановки



3

Решите систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x = 12y - 1, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

1. Выразите одну из переменных (удобнее выполнить это действие со вторым уравнением системы).

$$x - y = -1$$



2. Подставь полученное выражение в первое уравнение системы.

3. Решите полученное уравнение.



4. Подставьте найденное значение переменной в пункт 1 и найдите значение второй неизвестной.



5. Запишите в ответ решение системы уравнений

Ответ: _____

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



Решение систем нелинейных уравнений методом подстановки



4

Решите систему уравнений методом подстановки:

$$1) \begin{cases} 3x + y = 1, \\ (x + 3y)^2 - 7y = 2. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



Решение систем нелинейных уравнений методом подстановки



4

Решите систему уравнений методом подстановки:

$$2) \begin{cases} 3x + 10y = 4, \\ 5x^2 - 30y = 6. \end{cases}$$



Решение систем нелинейных уравнений методом подстановки



5

Найдите значение параметра a , при котором система уравнений имеет единственное решение.

$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ 3xy = a - 1. \end{cases}$$

Решение

Ответ: _____

6

Составьте систему нелинейных уравнений, решением которой являются пары чисел $(2; 3)$ и $(-2; -3)$



Решение систем нелинейных уравнений методом подстановки



Задания для самостоятельной работы

1)
$$\begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - 2y = 26. \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} xy = -2, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x + 3y = 11, \\ 2x + y^2 = 14. \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ 3y - x = 10. \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ 2y - x = -7. \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} x^2 + xy - x - y = 2, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{3}, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

9)
$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{12}{xy} + \frac{3}{y} = 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

10)
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 5, \\ x^2 - 3xy - y^2 = 36. \end{cases}$$

11)
$$\begin{cases} \frac{x + 3y}{3x - y} = 1, \\ x^2 + xy - 5y^2 = 1. \end{cases}$$

12)
$$\begin{cases} \frac{7x + 3y}{3x + 2y} = 2, \\ x + xy - y = 1. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)



Решение систем нелинейных уравнений методом подстановки



Оцени свою работу (опиши, что далось легко, что тяжелее, что показалось самым интересным и т.д.)



Оценка:

Комментарий учителя



Памятка

Алгоритм решения с помощью метода подстановки:

- 1) выразите одну переменную через другую;
- 2) подставьте полученное выражение в другое уравнение системы;
- 3) решите полученное уравнение;
- 4) найдите значение второй переменной;
- 5) запишите ответ.



Решение систем нелинейных уравнений методом подстановки



Ответы

1

1) $y = 11x - 4$

2) $y = \frac{15+5x}{x}$

3) $b = -a^2 + 4,5a + 4,5$

2*Ответ:* 1, 3.**3**

1) $x = y - 1$

2) $2(y - 1)^2 - (y - 1)y + 3y^2 - 7(y - 1) = 12y - 1$

$2y^2 - 11y + 5 = 0$

Ответ: $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}), (4; 5)$.**4**

1) *Ответ:* $(0; 1), (\frac{27}{64}; -\frac{17}{64})$.

2) *Ответ:* $(\frac{6}{5}; \frac{1}{25}), (-3; \frac{13}{10})$.

5

Ответ: $a = \frac{5}{4}$.

6*Например:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 2xy = 12. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)



Решение систем нелинейных уравнений методом подстановки



Ответы на задания для
самостоятельной работы

- 1) $(-4; -5), (6; 5);$
- 2) $(-1; 2), (2; -1);$
- 3) $(5; 2), (-1; 4);$
- 4) $(-4; 2), (-1; 3);$
- 5) $\left(-9\frac{2}{3}; -8\frac{1}{3}\right), (5; -1);$
- 6) $(-3; -2), (3; 1);$
- 7) $(2; 0), (0; -2);$
- 8) $(6; 2), (-1; -1,5);$
- 9) $(4; 3);$
- 10) $(10; 2), (-10; -2);$
- 11) $(2; 1), (-2; -1);$
- 12) $(-1; -1), (1; 1).$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)

Решение систем нелинейных уравнений методом алгебраических преобразований

1 Упростите выражения

1) $3(x + 5y - 15) - 6y + 3 =$

2) $(2x + y)^2 - 4x^2 + 5xy =$

Суть данного метода заключается в упрощении системы уравнений с помощью алгебраических преобразований (уравнения системы можно складывать, вычитать, перемножать, делить или умножать на какое-либо выражение).



Решение системы уравнений с двумя переменными – это пара значений переменных, которая обращает каждое уравнение системы в верное равенство.

2 Сложите уравнения системы

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 12y + 7 \\ -2x^2 - 3xy - y^2 = 13 \end{cases}$$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

=

$\downarrow$

Ответ: _____

Решить систему уравнений – это значит найти все её решения, или убедиться, что общих решений у исходных уравнений нет.



Решение систем нелинейных уравнений методом алгебраических преобразований



3

Решите систему уравнений
методом алгебраических
преобразований:

$$\begin{cases} 2x^2 + 4y = 10, \\ x^2 - 14y = -11. \end{cases}$$

1. С помощью алгебраических преобразований уравниваем коэффициенты перед x^2 (умножьте второе уравнение системы на подходящий коэффициент).

$$\begin{cases} 2x^2 + 4y = 10, \\ x^2 - 14y = -11. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4y = 10, \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

2. Вычтите из первого уравнения системы второе и запишите результат.

3. Решите полученное уравнение.

4. Подставьте найденное значение в любое из уравнений системы и найдите вторую неизвестную.

5. Запишите в ответ решение системы уравнений

Ответ: _____

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



Решение систем нелинейных уравнений методом алгебраических преобразований



4

Решите систему уравнений методом алгебраических преобразований:

$$1) \begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 7, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



Решение систем нелинейных уравнений методом алгебраических преобразований



4

Решите систему уравнений методом алгебраических преобразований:

$$2) \begin{cases} 7 - x + y - xy = 0, \\ 5 - y + x - xy = 0. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)



Решение систем нелинейных уравнений методом алгебраических преобразований



5

Самостоятельно придумайте систему, состоящую из двух уравнений с двумя переменными, решаемую методом алгебраических преобразований. Решите ее.

Ответ: _____

**Решение систем нелинейных уравнений
методом алгебраических преобразований****Задания для самостоятельной
работы**

1)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 61, \\ x^2 - y^2 = 11. \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 41, \\ 2x^2 + y^2 = 59. \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 22, \\ x^2 + 3y^2 = 28. \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} xy + y^2 = 1, \\ xy + 2y^2 - 2y = 9. \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} 3x^2 + xy + y^2 = 3, \\ x^2 + xy + y^2 + 4x = 5. \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 3y = 3, \\ x^2 + y^2 + 10x - 2y = 10. \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 6, \\ 2x^2 + y^2 + 3x - 2y = 2. \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} y^2 + 3x - y = 1, \\ y^2 + 6x - 2y = 1. \end{cases}$$

9)
$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4y = 20, \\ x^2 - 2x + y = -5. \end{cases}$$

10)
$$\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ xy - 2x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$$

11)
$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 2y - 2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - x - y = 0. \end{cases}$$

12)
$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y + 2 = 0, \\ 3x^2 - 6xy + 2y^2 - 3x - 2y + 8 = 0. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)

Решение систем нелинейных уравнений методом алгебраических преобразований

Оцени свою работу (опиши, что далось легко, что тяжелее, что показалось самым интересным и т.д.)

Оценка:

Комментарий учителя

Памятка

Алгоритм решения с помощью метода алгебраических преобразований

- 1) примените алгебраические преобразования к уравнениям системы, чтобы добиться исключения одной из переменных;
- 2) решите полученное уравнение или систему уравнений относительно одной переменной;
- 3) найдите значение второй переменной;
- 4) запишите ответ.

Решение систем нелинейных уравнений методом алгебраических преобразований

Ответы

1

1) $3x + 9y - 42$

2) $9xy + y^2$

2

$2y^2 - 4xy = 12y + 20$

3

1) $\begin{cases} 2x^2 + 4y = 10, \\ 2x^2 - 28y = -22. \end{cases}$

2) $32y = 32$

Ответ: $(\sqrt{3}; 1), (-\sqrt{3}; 1)$.

5

Например:

$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 8, \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 13. \end{cases}$

Ответ: $(\frac{1}{5}; -\frac{1}{3})$

4

1) Ответ: $(1; -0,5)$.

2) Ответ: $(3; 2), (-2; -3)$.

Ответы на задания для самостоятельной работы

1) $(-6; -5), (6; -5), (-6; 5), (6; 5);$

2) $(-5; -3), (-5; 3), (5; -3), (5; 3);$

3) $(-5; -1), (-5; 1), (5; -1), (5; 1);$

4) $(-3\frac{3}{4}; 4), (1,5; -2);$

5) $(1; 0), (1; -1);$

6) $(-\frac{131}{169}; -\frac{551}{169}), (1; 1);$

7) $(-1; 3), (-1; -1);$

8) $(\frac{1}{3}; 1), (-\frac{1}{3}; -1);$

9) $(0; -5), (1; -4);$

10) $(1; 2), (2; 1);$

11) $(2; 1), (-\frac{2}{13}; \frac{6}{13});$

12) $(1; 2), (4; 2), (\frac{11 \pm \sqrt{57}}{2}; 5).$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)

Решение систем нелинейных уравнений методом замены переменных

При решении данным методом некоторые выражения от исходных переменных принимаются за новые переменные, что приводит к более простой, чем первоначальная, системе от этих переменных. После того как новые переменные будут найдены, нужно найти значения исходных переменных.



1 Выполните замену переменных
 $xy = u, x + y = v$

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 3xy, \\ 2x - xy + 2y = 15. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

Решение системы уравнений с двумя переменными – это пара значений переменных, которая обращает каждое уравнение системы в верное равенство.

2 Какая замена была сделана в следующих системах уравнений?

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 5(x - y) = 3, \\ (x - y)^2 - 7(x + y) = 11. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - 5n = 3, \\ n^2 - 7m = 11. \end{cases}$$

Ответ: _____

Решить систему уравнений – это значит найти все её решения, или убедиться, что общих решений у исходных уравнений нет.



Решение систем нелинейных уравнений методом замены переменных



3

Решите систему уравнений
методом замены переменных:

$$\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

1. Проанализируем систему (заметим, что во втором уравнении xy можно вынести за скобку) и сделаем замену.

Пусть $xy = u$, $x + y = v$

$$\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \underline{\hspace{2cm}}, \\ \underline{\hspace{2cm}}. \end{cases}$$

2. Решите полученную систему уравнений.

3. Сделайте обратную замену и решите полученную систему уравнений.

$$\begin{cases} xy = \underline{\hspace{2cm}} \\ x + y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

4. Запишите в ответ решение системы уравнений

Ответ: _____

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



Решение систем нелинейных уравнений методом замены переменных



4

Решите систему уравнений методом замены переменных:

$$1) \begin{cases} (2x - 5)^2 + (3y - 2)^2 = 17, \\ (2x - 5)(3y - 2) = 4. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



Решение систем нелинейных уравнений методом замены переменных



4

Решите систему уравнений методом замены переменных :

$$2) \begin{cases} \frac{6}{x^2+xy} + \frac{12}{y^2+xy} = 5, \\ \frac{2}{x^2+xy} + \frac{2}{y^2+xy} = 1. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



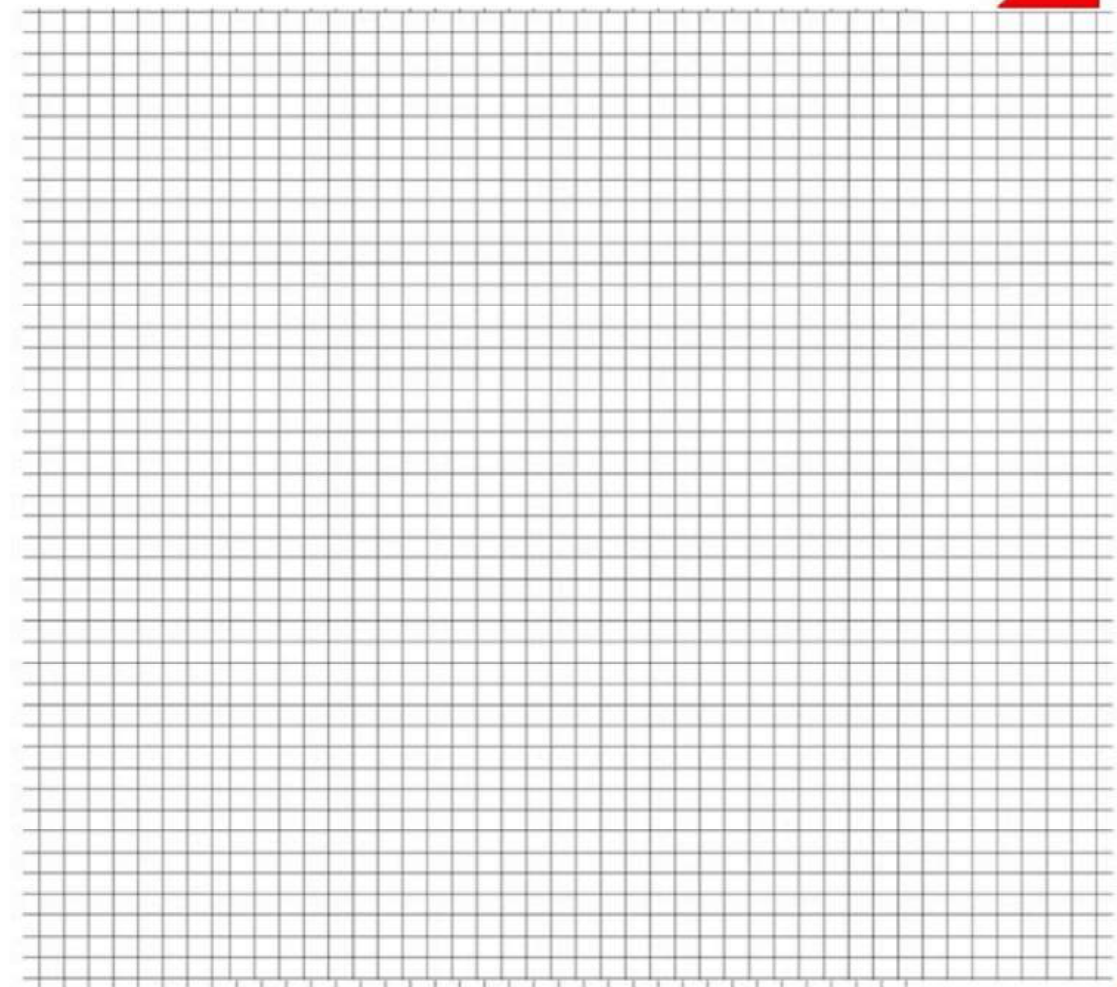
Решение систем нелинейных уравнений методом замены переменных



5

Решите задачу, составив систему уравнений.

Найдите длину и ширину прямоугольной полоски бумаги, если известно, что произведение ее периметра и площади равняется 24, а в сумме периметр и утроенная площадь полоски бумаги составляет 17.



Ответ: _____



Решение систем нелинейных уравнений методом замены переменных



Задания для самостоятельной работы

1)
$$\begin{cases} x^2y^2 + xy = 2, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 3(x - y) - 2(x - y)^2 = -2, \\ 2x + 7y = -5. \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} 5 \cdot \frac{x}{y} + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = 14, \\ 5x + 3y = 13. \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 4(x + y)^2 - 7(x + y) = 15, \\ 5x - 2y = 1. \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} xy(x + y) = 6, \\ xy + (x + y) = 5. \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} 3(x - y)^2 + 2(x + 2y)^2 = 5, \\ 2(x + 2y) - x + y = 1. \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} 5(x + y) + 4xy = 32, \\ xy(x + y) = 12. \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} 2(x + y)^2 + 3(x + 2y) = 5, \\ 3(x + 2y) - 2x - 2y = 5. \end{cases}$$

9)
$$\begin{cases} \frac{y}{x} + \frac{2x}{y} = 3, \\ \frac{4y}{x} + \frac{x}{y} = 5. \end{cases}$$

10)
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{6y}{x} = 5, \\ x^2 + xy - y^2 = 41. \end{cases}$$

11)
$$\begin{cases} (x + y)^2 - (x - y) - 8 = 0, \\ (x + y)^2 + (x - y) - 10 = 0. \end{cases}$$

12)
$$\begin{cases} \frac{x + 1}{y - 3} = 1, \\ (x + 1)(y - 3) = 4. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)



Решение систем нелинейных уравнений методом замены переменных



Оцени свою работу (опиши, что далось легко, что тяжелее, что показалось самым интересным и т.д.)



Оценка:

Комментарий учителя



Памятка

Алгоритм решения с помощью метода замены переменных:

- 1) проанализируйте систему, сделайте целесообразные преобразования и определите подходящую замену переменных;
- 2) выполните замену и получите новую систему уравнений;
- 3) решите полученную систему уравнений;
- 4) сделайте обратную замену переменных и решите получившуюся систему;
- 5) запишите ответ.



Решение систем нелинейных уравнений методом замены переменных



Ответы

1

$$\begin{cases} v^2 = 34, \\ 2v - u = 15. \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} x + y = m \\ x - y = n \end{cases}$$

3

$$1) \begin{cases} v + u = 11, \\ uv = 30. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5. \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 5, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Ответ: (3; 2), (2; 3), (5; 1), (1; 5).

5

$$\begin{cases} 2xy(x + y) = 24, \\ 2(x + y) + 3xy = 17. \end{cases}$$

Ответ: 3 и 1.

4

$$1) \text{ Ответ: } (4,5; 1), (3; 2), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right), \left(2; -\frac{2}{3}\right).$$

$$2) \text{ Ответ: } (2; 1), (-2; -1).$$

Ответы на задания для самостоятельной работы

$$1) (1; 1), \left(\frac{1}{2}; 2\right), (2; -1), \left(-\frac{1}{2}; 4\right);$$

$$2) (1; -1), \left(-\frac{17}{18}; -\frac{4}{9}\right);$$

$$3) (2; 1), \left(-2\frac{27}{32}; -\frac{13}{32}\right);$$

$$4) (1; 2), \left(-\frac{3}{14}; -1\frac{1}{28}\right);$$

$$5) (1; 2), (2; 1);$$

$$6) (1; 0), \left(-\frac{19}{21}; \frac{8}{21}\right);$$

$$7) (1; 3), (3; 1);$$

$$8) \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right), (-3; 2);$$

$$9) (a; a), a \in \mathbb{R}, a \neq 0;$$

$$10) (6; 1), (-6; -1);$$

$$11) (2; 1), (-1; -2);$$

$$12) (1; 5), (-3; 1).$$

Рабочий лист ученика _____
_____ класса

(Фамилия Имя)

1

Графический метод решения систем нелинейных уравнений

1
Выразите переменную y из каждого уравнения.

$x^2 - y + 5x = 0$

→

$xy = 15$

→

$6y + 5 = 7(x^2 + y)$

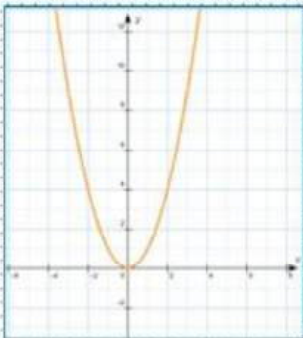
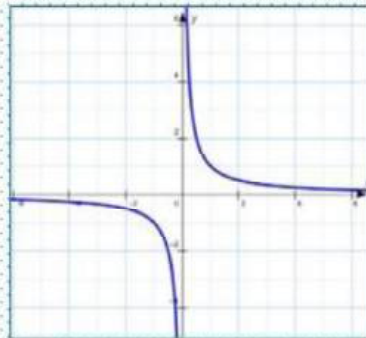
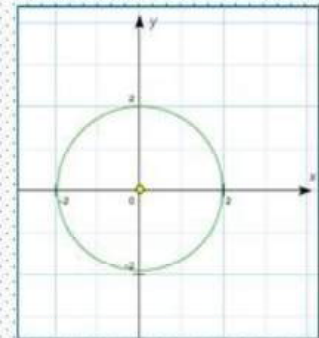
→

2
Соедините уравнение с его графическим представлением, а график кривой с ее названием.

$x^2 + y^2 = 4$

$y = x^2$

$y = \frac{1}{x}$

Гипербола

Окружность

Парабола

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



Графический метод решения систем нелинейных уравнений



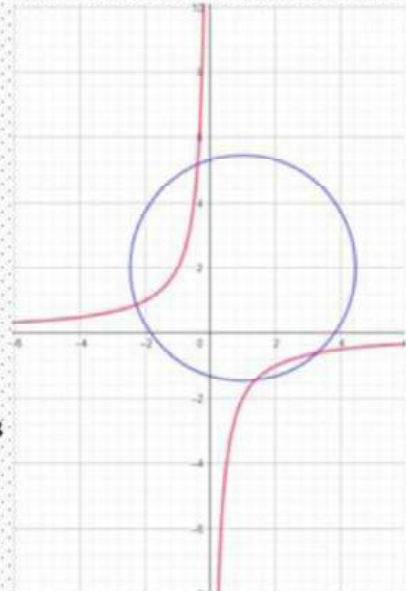
3

Определите количество решений системы уравнений, используя ее графическое представление.

$$\begin{cases} (y - 2)^2 + (x - 1)^2 = 12, \\ xy = -2. \end{cases}$$

*выделите точки пересечения графиков

Ответ:



Решение системы уравнений с двумя переменными – это пара значений переменных, которая обращает каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему уравнений – это значит найти все её решения, или убедиться, что общих решений у исходных уравнений нет.

Графический метод решения систем уравнений заключается в построении графиков кривых, заданных уравнениями системы, и нахождении точек их пересечения.



Графический метод решения систем нелинейных уравнений



4

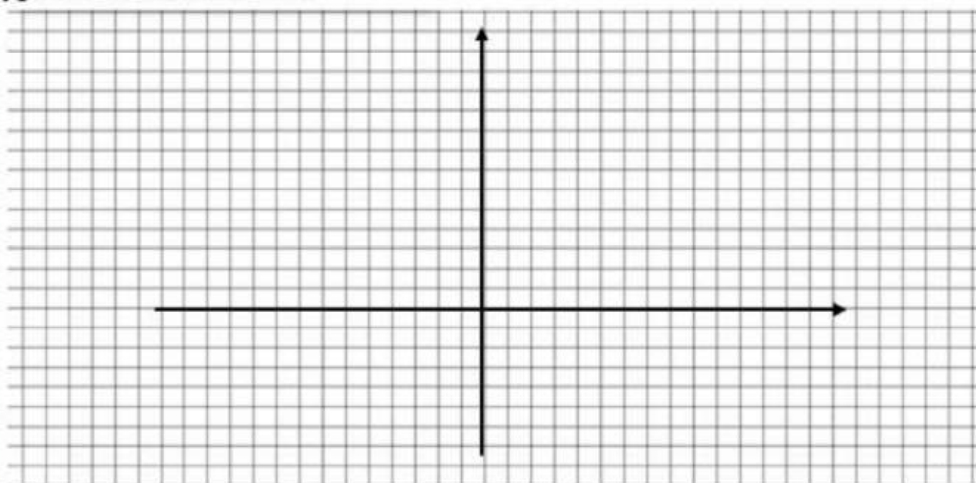
Решите систему
уравнений графическим
методом:

$$\begin{cases} x^2 + y - 7 = 0, \\ x^2 - y - 1 = 0. \end{cases}$$

1. Выразите одну переменную через другую в каждом уравнении системы.

$$\begin{cases} y = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

2. Постройте координатную плоскость и графики функций, заданных уравнениями системы.



3. Найдите координаты точек пересечения всех графиков функций системы. Запишите их

4. Проверьте решение, подставив полученные координаты в каждое из уравнений системы.

[illegible]

5. Ответ:



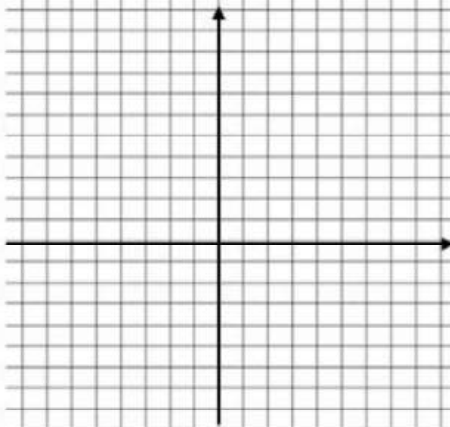
Графический метод решения систем нелинейных уравнений



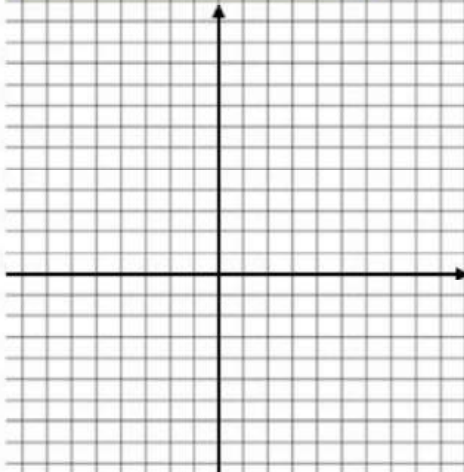
5

Решите системы уравнений графическим методом:

$$1) \begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9, \\ y-x=4. \end{cases}$$



$$2) \begin{cases} xy = 2, \\ x^2 - y = 1 - 2x. \end{cases}$$





Графический метод решения систем нелинейных уравнений

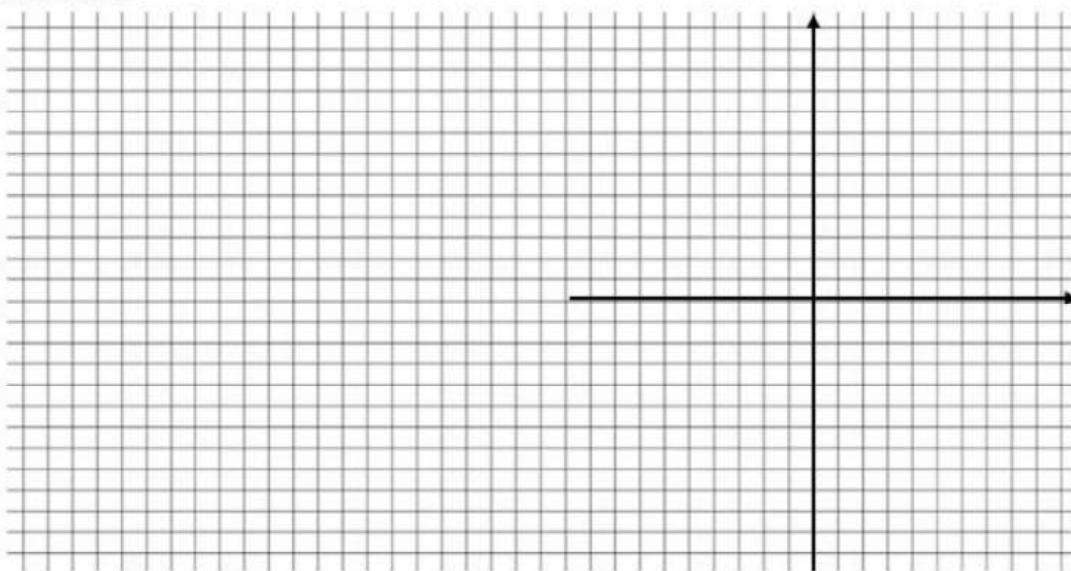


6

Решите задачу, составив систему уравнений.

Борис огородил свой участок забором, общая длина которого 20 м. Какие размеры имеет участок, если его площадь равна 24 м^2 ?

Решение



Ответ: _____

7

Составьте систему нелинейных уравнений, решением которой являются координаты точки $A(3; 5)$.



Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



Графический метод решения систем нелинейных уравнений



Задания для самостоятельной работы

1)
$$\begin{cases} x^2 + y = 3, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} y = -\frac{3}{x}, \\ y + x = -2. \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} xy = 4, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} xy = 6, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 = 4, \\ y = 0. \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 16, \\ x = 2. \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$$

9)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 0,5x^2 + 2. \end{cases}$$

10)
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 = 9, \\ y + 1 = x. \end{cases}$$

11)
$$\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = 2. \end{cases}$$

12)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = |x| - 1. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____

(Фамилия Имя)

_____ класса



Графический метод решения систем нелинейных уравнений



Оцени свою работу (опиши, что далось легко, что тяжелее, что показалось самым интересным и т.д.)



Оценка:

Комментарий учителя



Памятка

Алгоритм решения с помощью графического метода:

- 1) выразить одну переменную через другую в каждом уравнении системы;
- 2) построить координатную плоскость;
- 3) построить графики кривых или прямых, заданных уравнениями системы;
- 4) найти координаты точек пересечений всех графиков системы;
- 5) проверить решение, подставив полученные координаты точек пересечения в каждое из уравнений системы;
- 6) записать решение системы уравнений.

Графический метод решения систем нелинейных уравнений



Ответы

1

$$y = x^2 + 5x$$

$$y = \frac{15}{x}$$

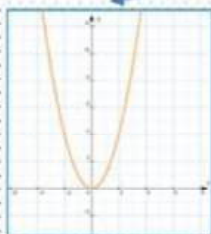
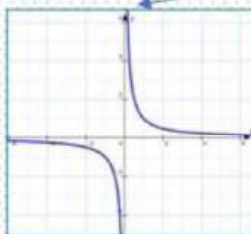
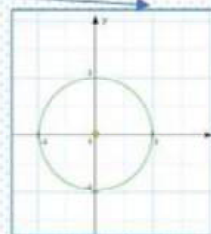
$$y = 5 - 7x^2$$

2

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y = x^2$$

$$y = \frac{1}{x}$$



Гипербола

Окружность

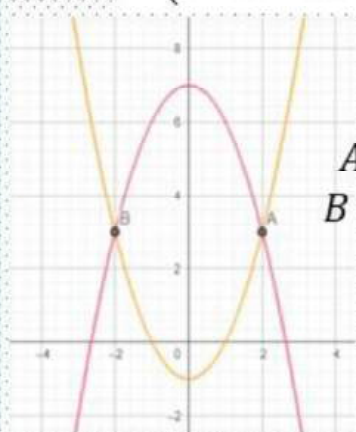
Парабола

3

Ответ: 4

4

$$1) \begin{cases} y = 7 - x^2, \\ y = x^2 - 1. \end{cases}$$



A (2; 3)
B (-2; 3)

Ответ: (2; 3), (-2; 3)

5

1) Ответ: (-1; 3), (2; 6)

2) Ответ: (-2; -1), (-1; -2), (1; 2)

6

$$\begin{cases} 2(x + y) = 20, \\ xy = 24. \end{cases}$$

Ответ: 6 м, 4 м.

7

Например:

$$\begin{cases} x^2 = y + 4, \\ (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 8. \end{cases}$$

Рабочий лист ученика _____ класса
(Фамилия Имя)



Графический метод решения систем нелинейных уравнений



Ответы на задания для
самостоятельной работы

- 1) $(1; 2), (-2; -1);$
- 2) $(-3; 5), (1; -3);$
- 3) $(1; -3), (-3; 1);$
- 4) $(2; 2), (-1; -4);$
- 5) $(2; 3), (-2; -3);$
- 6) $(-1; 0);$
- 7) $(2; 2);$
- 8) $(0; 0), (1; 1);$
- 9) $(0; 2);$
- 10) $(2; 1), (-1; -2);$
- 11) $(1; 1), (-1; 1);$
- 12) $(0; -1), (-1; 0), (1; 0).$

Приложение 6.

Система упражнений по теме «Системы уравнений с параметром»

Динамические модели: <https://disk.yandex.ru/d/ATm1rTDqQyzSCA>



Задание. На основе динамической модели составьте систему уравнений с параметром. Определите количество решений системы в зависимости от параметра.

Задание 1.

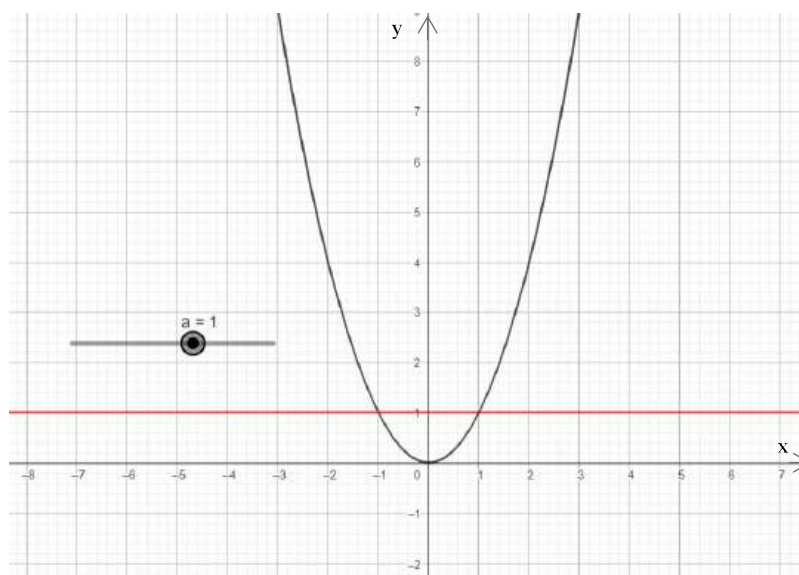


Рисунок 1 – Динамическая модель к заданию 1

Ответ:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = a. \end{cases}$$

При $a < 0$ система уравнений решений не имеет.

При $a = 0$ система уравнений имеет одно решение.

При $a > 0$ система уравнений имеет два решения.

Задание 2.

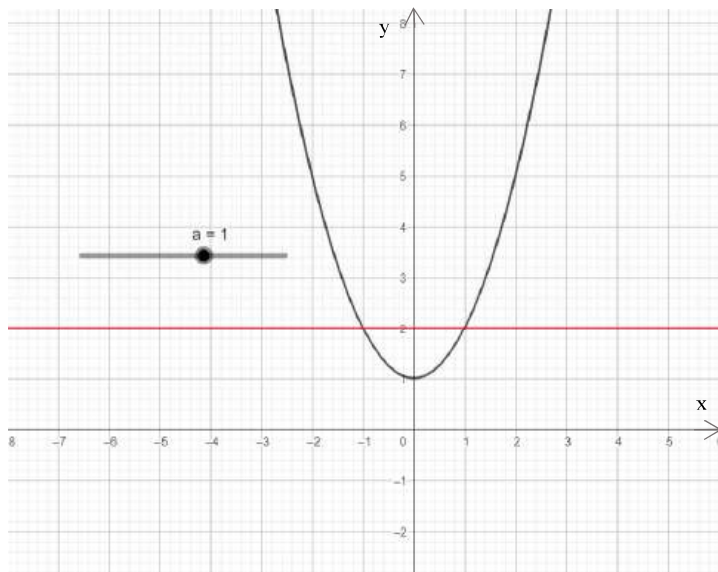


Рисунок 2 – Динамическая модель к заданию 2

Ответ:

$$\begin{cases} y = x^2 + a, \\ y = 2a. \end{cases}$$

При $a < 0$ система уравнений решений не имеет.

При $a = 0$ система уравнений имеет одно решение.

При $a > 0$ система уравнений имеет два решения.

Задание 3.

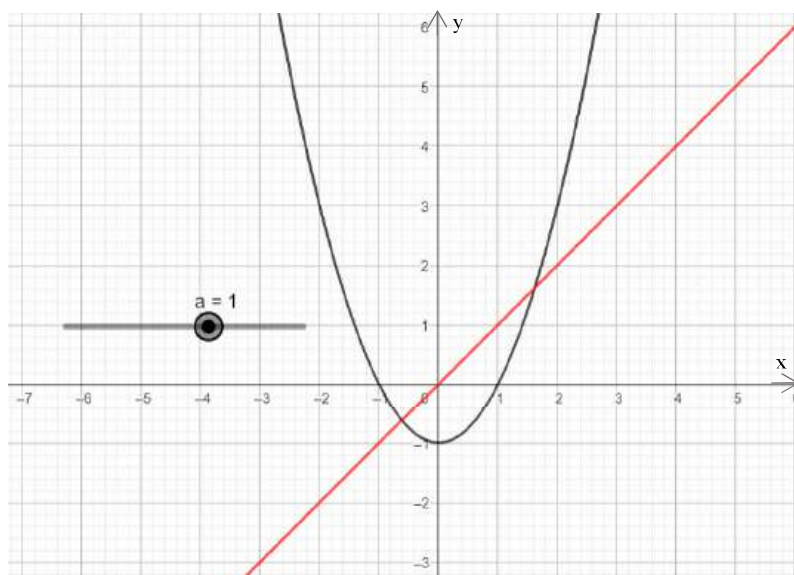


Рисунок 3 – Динамическая модель к заданию 3

Ответ:

$$\begin{cases} y = x^2 - a, \\ y = ax. \end{cases}$$

При $a \in (-4; 0)$ система уравнений решений не имеет.

При $a = -4$ и $a = 0$ система уравнений имеет одно решение.

При $a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ система уравнений имеет два решения.

Задание 4.

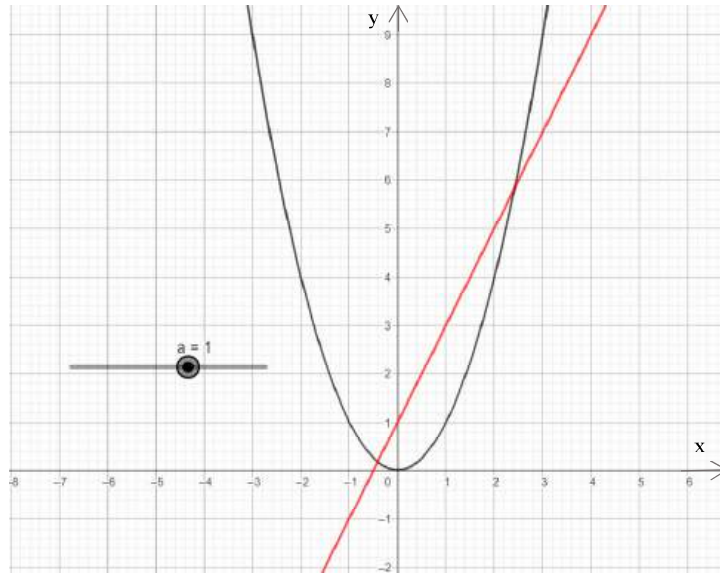


Рисунок 4 – Динамическая модель к заданию 4

Ответ:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x + a. \end{cases}$$

При $a < -1$ система уравнений решений не имеет.

При $a = -1$ система уравнений имеет одно решение.

При $a > -1$ система уравнений имеет два решения.

Задание 5.

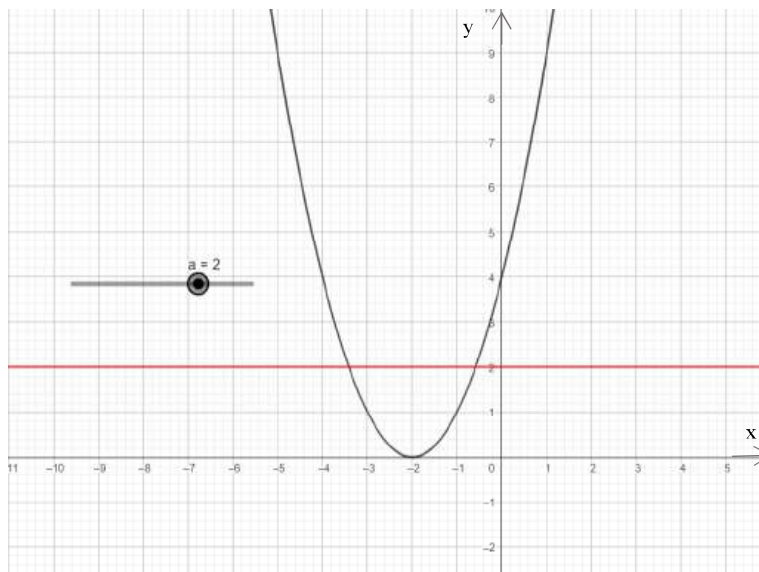


Рисунок 5 – Динамическая модель к заданию 5

Ответ:

$$\begin{cases} y = (x + a)^2, \\ y = a. \end{cases}$$

При $a < 0$ система уравнений решений не имеет.

При $a = 0$ система уравнений имеет одно решение.

При $a > 0$ система уравнений имеет два решения.

Задание 6.

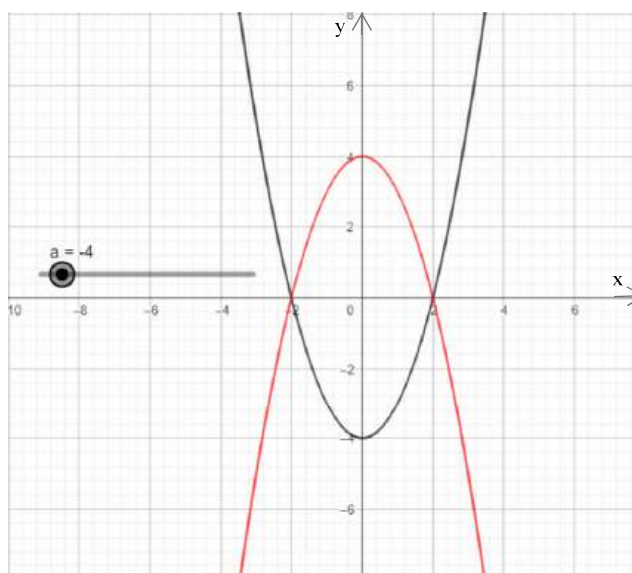


Рисунок 6 – Динамическая модель к заданию 6

Ответ:

$$\begin{cases} y = x^2 + a, \\ y = -(x^2 + a). \end{cases}$$

При $a > 0$ система уравнений решений не имеет.

При $a = 0$ система уравнений имеет одно решение.

При $a < 0$ система уравнений имеет два решения.

Задание 7.

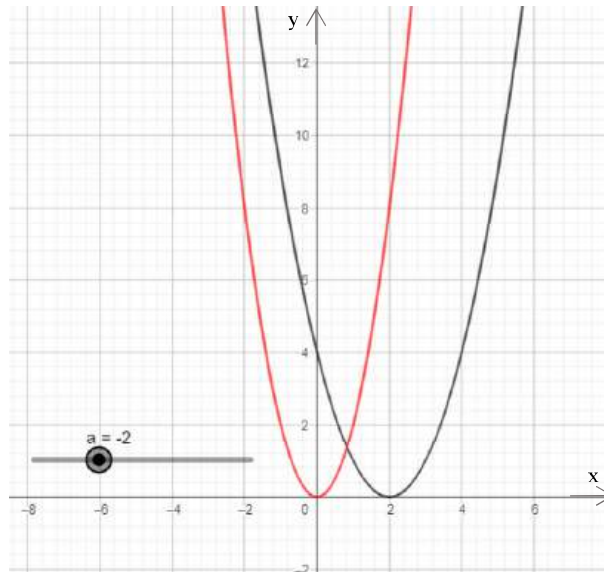


Рисунок 7 – Динамическая модель к заданию 7

Ответ:

$$\begin{cases} y = (x + a)^2, \\ y = -ax^2. \end{cases}$$

При $a > 0$ система уравнений решений не имеет.

При $a = 0$ система уравнений имеет одно решение.

При $a < 0$ система уравнений имеет два решения.

Задание 8.

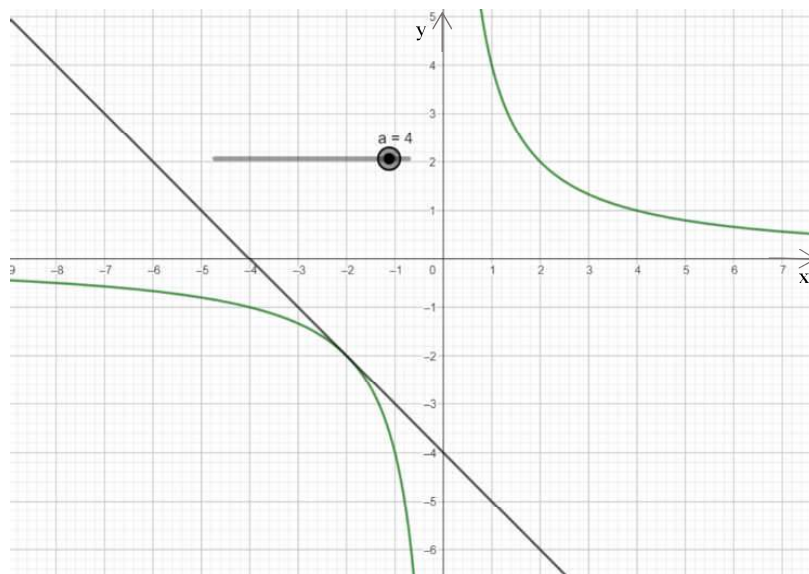


Рисунок 8 – Динамическая модель к заданию 8

Ответ:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{x}, \\ y = -x - a. \end{cases}$$

При $a \in (-4; 4)$ система уравнений решений не имеет.

При $a = -4$ и $a = 4$ система уравнений имеет одно решение.

При $a \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$ система уравнений имеет два решения.

Задание 9.

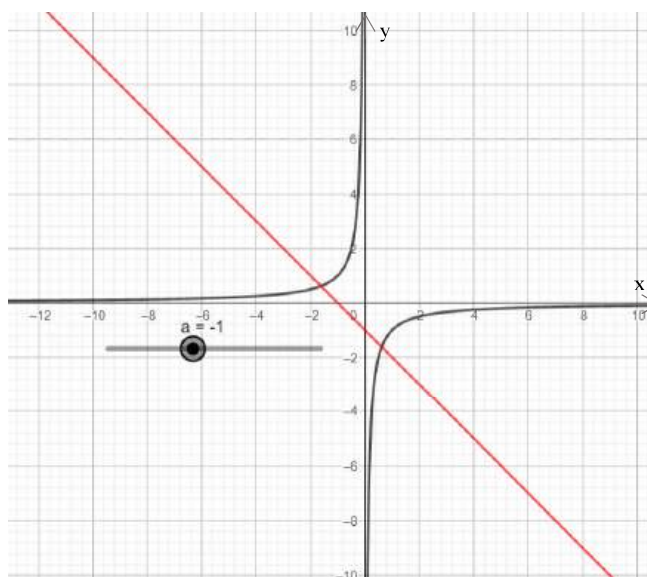


Рисунок 9 – Динамическая модель к заданию 9

Ответ:

$$\begin{cases} y = \frac{a}{x}, \\ y = -x + a. \end{cases}$$

При $a \in (0; 4)$ система уравнений решений не имеет.

При $a = 0$ и $a = 4$ система уравнений имеет одно решение.

При $a \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ система уравнений имеет два решения.

Задание 10.

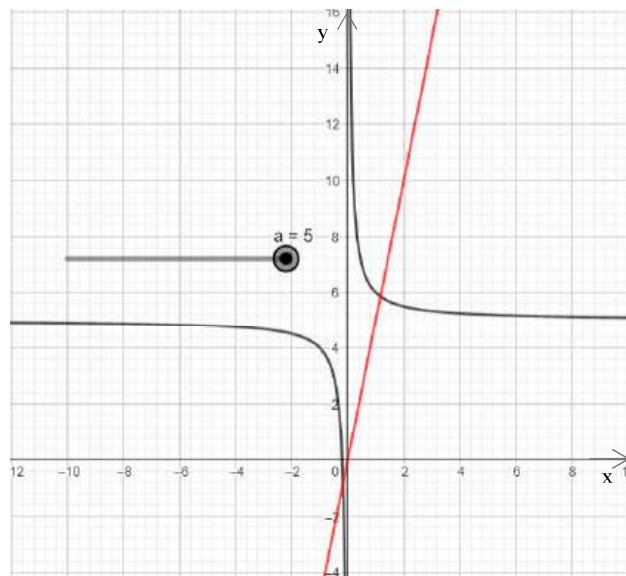


Рисунок 10 – Динамическая модель к заданию 10

Ответ:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} + a, \\ y = ax. \end{cases}$$

При $a \in (-4; 0]$ система уравнений решений не имеет.

При $a = -4$ система уравнений имеет одно решение.

При $a \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$ система уравнений имеет два решения.

Задание 11.

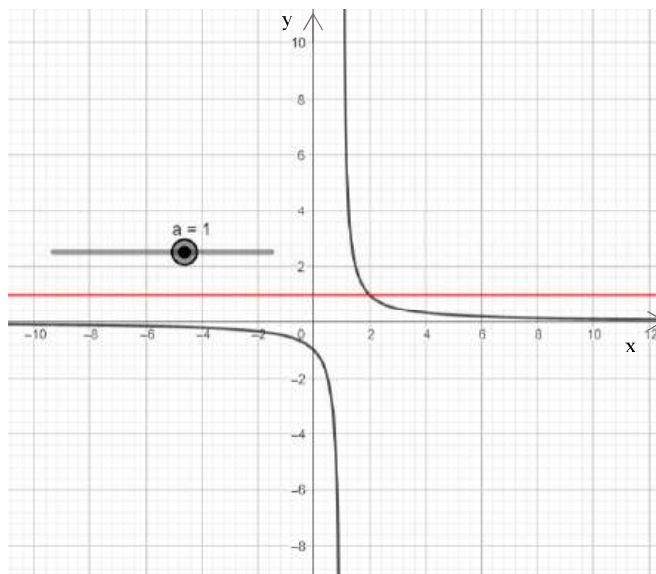


Рисунок 11 – Динамическая модель к заданию 11

Ответ:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x-a}, \\ y = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

При $a = 0$ система уравнений решений не имеет.

При $a \neq 0$ система уравнений имеет одно решение.

Задание 12.

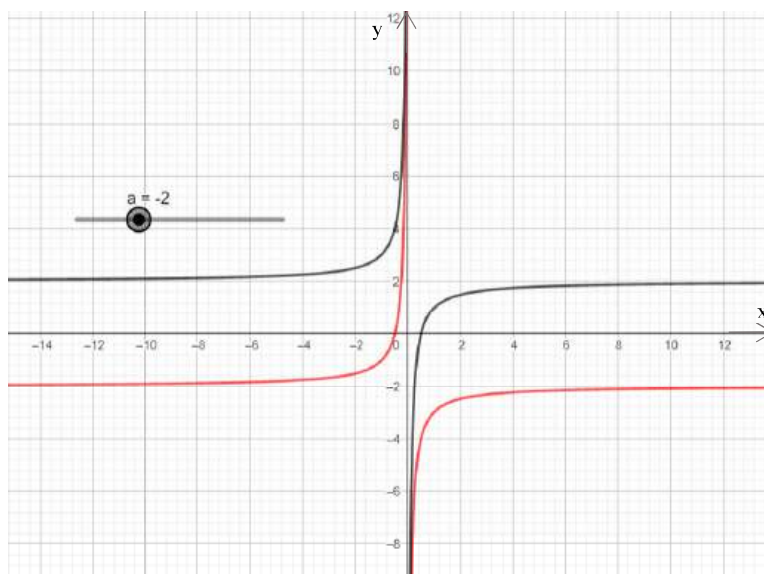


Рисунок 12 – Динамическая модель к заданию 12

Ответ:

$$\begin{cases} y = a - \frac{1}{x}, \\ y = -\left(a + \frac{1}{x}\right). \end{cases}$$

При $a \neq 0$ система уравнений решений не имеет.

При $a = 0$ система уравнений имеет бесконечное множество решений.

Задание 13.

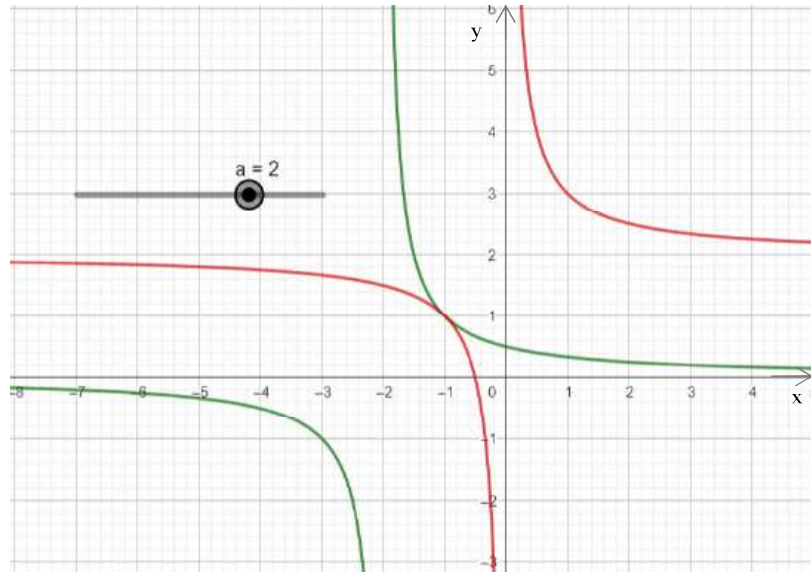


Рисунок 13 – Динамическая модель к заданию 13

Ответ:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x + a}, \\ y = \frac{1}{x} + a. \end{cases}$$

При $a \in (-2; 0) \cup (0; 2)$ система уравнений решений не имеет.

При $a = -2$ и $a = 2$ система уравнений имеет одно решение.

При $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ система уравнений имеет два решения.

При $a = 0$ система уравнений имеет бесконечное множество решений.

Задание 14.

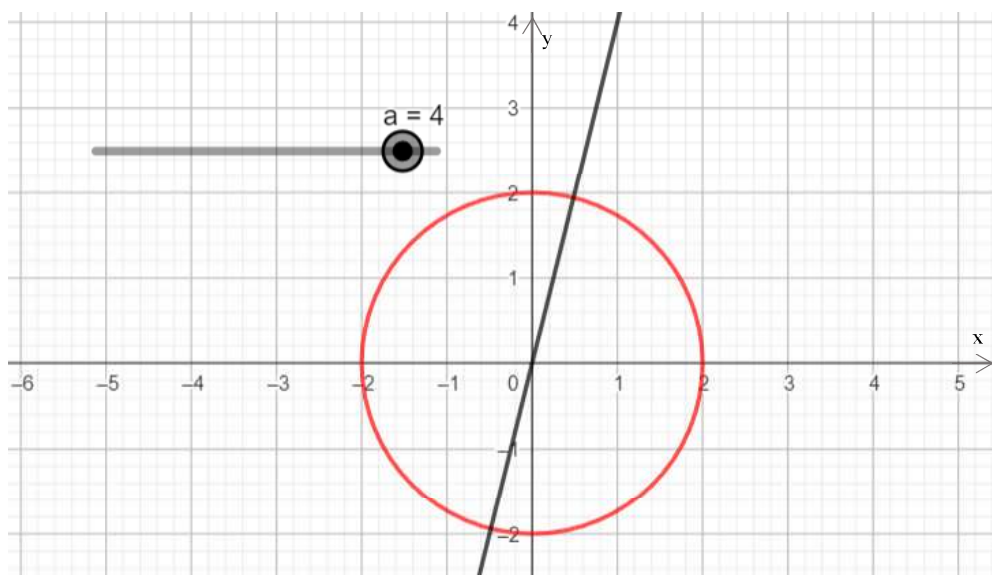


Рисунок 14 – Динамическая модель к заданию 14

Ответ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = ax. \end{cases}$$

При $a < 0$ система уравнений решений не имеет.

При $a = 0$ система уравнений имеет одно решение.

При $a > 0$ система уравнений имеет два решения.

Задание 15.

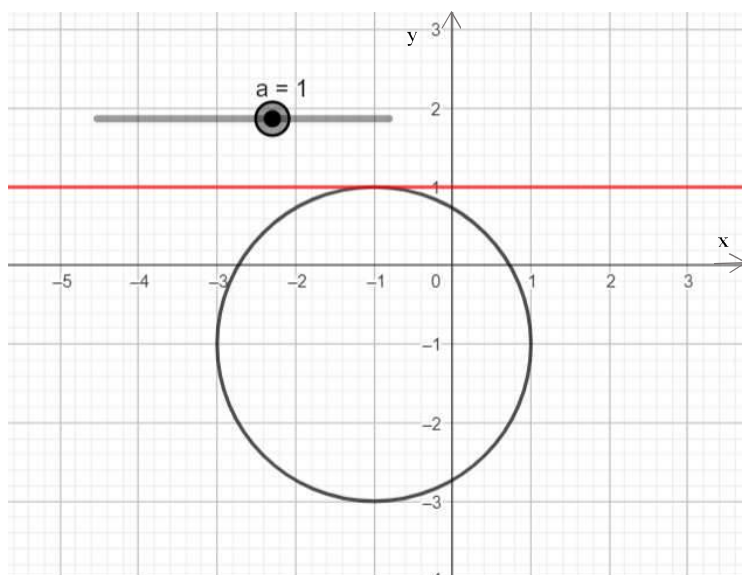


Рисунок 15 – Динамическая модель к заданию 15

Ответ:

$$\begin{cases} (x + a)^2 + (y + a)^2 = 4, \\ y = a. \end{cases}$$

При $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ система уравнений решений не имеет.

При $a = -1$ и $a = 1$ система уравнений имеет одно решение.

При $a \in (-1; 1)$ система уравнений имеет два решения.

Задание 16.

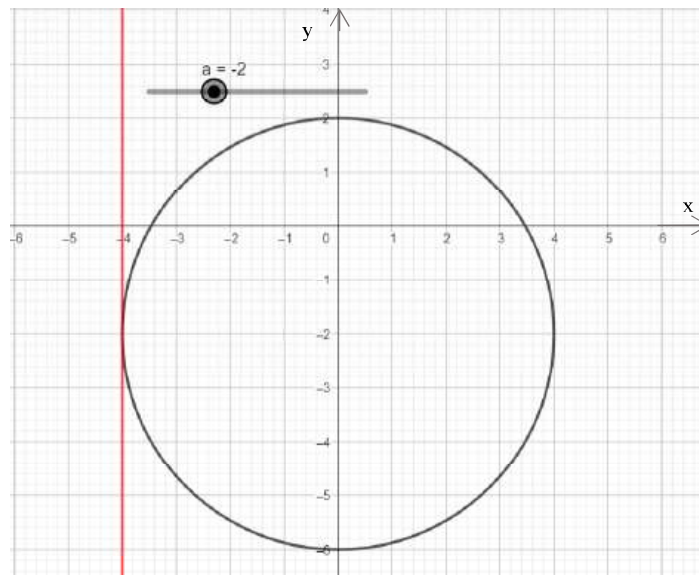


Рисунок 16 – Динамическая модель к заданию 16

Ответ:

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 16, \\ x = 2a. \end{cases}$$

При $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ система уравнений решений не имеет.

При $a = -2$ и $a = 2$ система уравнений имеет одно решение.

При $a \in (-2; 2)$ система уравнений имеет два решения.

Задание 17.

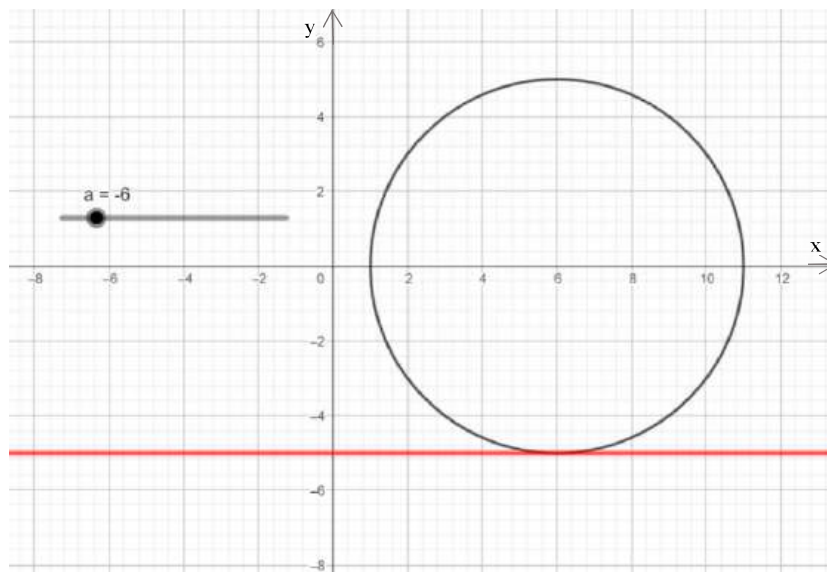


Рисунок 17 – Динамическая модель к заданию 17

Ответ:

$$\begin{cases} (x + a)^2 + y^2 = 16, \\ y = a + 1. \end{cases}$$

При $a \in (-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$ система уравнений решений не имеет.

При $a = -6$ и $a = 4$ система уравнений имеет одно решение.

При $a \in (-6; 4)$ система уравнений имеет два решения.

Задание 18.

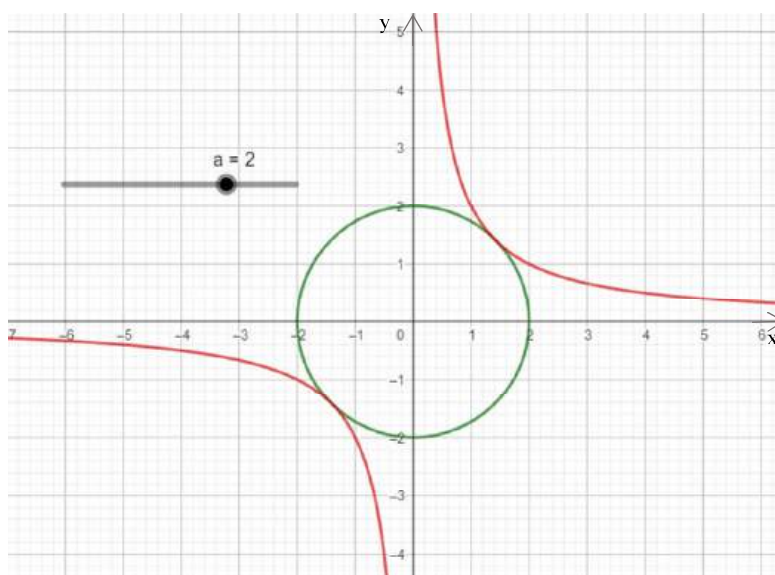


Рисунок 18 – Динамическая модель к заданию 18

Ответ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = \frac{a}{x}. \end{cases}$$

При $a \in (-2; 2)$ система уравнений решений не имеет.

При $a = -2$ и $a = 2$ система уравнений имеет два решения.

При $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ система уравнений имеет четыре решения.

Задание 19.

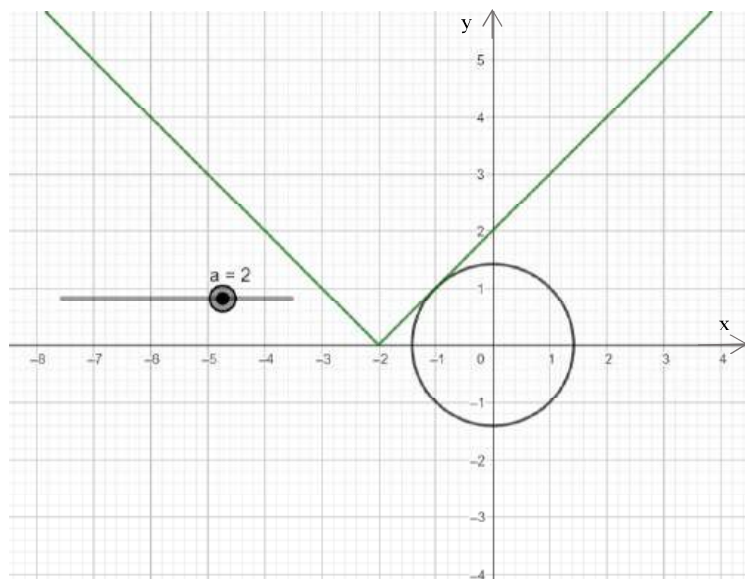


Рисунок 19 – Динамическая модель к заданию 19

Ответ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y = |x + a|. \end{cases}$$

При $a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ система уравнений решений не имеет.

При $a = 0$ и $a = 2$ система уравнений имеет одно решение.

При $a \in (0; 2)$ система уравнений имеет два решения.

Задание 20.

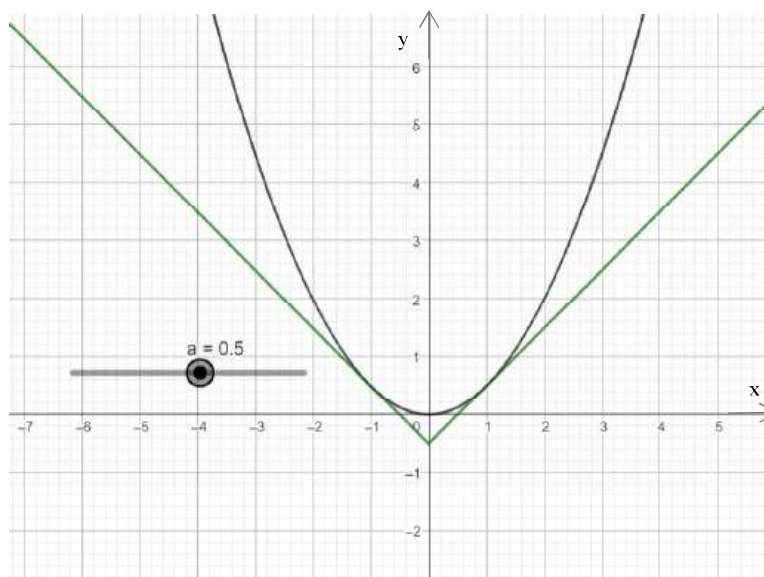


Рисунок 20 – Динамическая модель к заданию 20

Ответ:

$$\begin{cases} y = ax^2, \\ y = |x| - a. \end{cases}$$

При $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ система уравнений решений не имеет.

При $a = 0$ система уравнений имеет одно решение.

При $a = \frac{1}{2}$ система уравнений имеет два решения.

При $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ система уравнений имеет четыре решения.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Логуновой Анны Дмитриевны

(ФИО полностью)

Тема работы «Методы решения систем алгебраических нелинейных уравнений»

Утверждена приказом по Университету от «25.12» 2024 г. № 1350/0

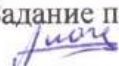
Срок сдачи студентом законченной работы «6» март 2025 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение литературы по теме работы	Сентябрь – октябрь 2025 г.	Выполнено
2.	Изучение основных понятий	Ноябрь 2025 г.	Выполнено
3.	Анализ методов решения систем алгебраических нелинейных уравнений	Декабрь 2025 г.	Выполнено
4.	Анализ учебной литературы	Январь 2025 г.	Выполнено
5.	Составление рабочих листов	Февраль – март 2025 г.	Выполнено
6.	Разработка системы упражнений	Март – апрель 2025 г.	Выполнено
7.	Оформление работы	Май – июнь 2025 г.	Выполнено

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель  Монахова О.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению  Логанова А.Д.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Логуновой Анны Дмитриевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Логунова Анна Дмитриевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему *«Методы решения систем алгебраических нелинейных уравнений»*, выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


подпись
18.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 18.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  О.А. Мокашова
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»

выпускной квалификационной работы на тему:

«Методы решения систем алгебраических нелинейных уравнений»

студентки 4 курса **Логуновой Анны Дмитриевны**

направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,

профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Монахова Оксана Александровна



СПРАВКА

о результатах проверки текстового документа
на наличие заимствований

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования "Пензенский государственный
университет"

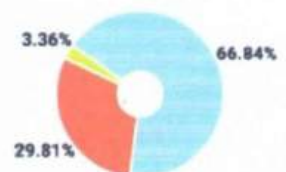
ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНА В СИСТЕМЕ АНТИПЛАГИАТ.ВУЗ

Автор работы: Логунова Анна Дмитриевна
Самоцитирование
рассчитано для: Логунова Анна Дмитриевна
Название работы: ВКР Логунова
Тип работы: Не указано
Подразделение: ПГУ кафедра "Математическое образование"

РЕЗУЛЬТАТЫ

СОВПАДЕНИЯ		29.81%
ОРИГИНАЛЬНОСТЬ		66.84%
ЦИТИРОВАНИЯ		3.36%
САМОЦИТИРОВАНИЯ		0%

ДАТА ПОСЛЕДНЕЙ ПРОВЕРКИ: 18.05.2025



Дата 18.05.25 (Монахова О.А.)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методы решения систем
алгебраических нелинейных уравнений»
студентки Логуновой Анны Дмитриевны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Работа посвящена методическим аспектам обучения решению систем алгебраических нелинейных уравнений в школьном курсе алгебры.

В работе рассмотрены основные понятия теории систем алгебраических нелинейных уравнений, выделены основные методы решения нелинейных систем, а также проведен анализ теоретического и задачного материалов по теме «Системы алгебраических уравнений» в школьной программе.

В рамках выпускной квалификационной работы созданы комплекты рабочих листов для обучения методам решения систем уравнений с комплексом заданий разного уровня сложности. А также составлена система упражнений на основе динамических моделей, созданных в программе GeoGebra, направленная на формирование навыка создание математической модели по ее графическому представлению. Комплекс упражнений направлен на обучение решению систем алгебраических нелинейных уравнений с параметром.

Работа Логуновой А.Д. заслуживает оценки «отлично» и может быть использована в учебном процессе учителем при подготовке обучающихся.

Руководитель ВКР:

Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»

Педагогического института

им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,

доцент, кандидат физико-математических наук

