

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методы решения уравнений и неравенств с модулем»

Студент

Андр 15.05.26
(подпись, дата)

Андряшина Ирина Романовна
(ФИО полностью)

Руководитель

Никитин 15.05.26
(подпись, дата)

Никитин Н. Д.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

М - 15.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И.о. заведующего кафедрой

Пань
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 26.06.26 № 13)

Секретарь ГЭК

М 26.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ	5
1.1 Методы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля.....	5
1.2 Методы решений неравенств, содержащих переменную под знаком модуля..	9
1.3 Уравнения и неравенства с модулем в заданиях ЕГЭ	14
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В ШКОЛЕ.....	23
2.1 Анализ школьных учебников на наличие уравнений и неравенств с модулем.....	23
2.2 Методические особенности изучения уравнений и неравенств с модулем в школе.....	26
2.3 Конспекты уроков	31
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	57
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	59
ПРИЛОЖЕНИЯ	61

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения и неравенства составляют существенную часть содержания школьного курса математики. При этом, изучению уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, в рамках школьной программы уделяется достаточно мало внимания. Необходимость рассмотрения указанной темы обусловлена тем, что задания, включающие модуль, вызывают у обучающихся существенные затруднения. Подобные задачи представлены и в материалах ЕГЭ и ОГЭ как в базовой части, так и в заданиях повышенного и высокого уровней сложности. Наряду с этим, решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, выступает эффективным способом повторения и закрепления навыков решения и других видов уравнений (линейных, квадратных, логарифмических, тригонометрических, показательных и т.д.) и соответствующих методов их решения. В процессе работы над такими заданиями закрепляется умение решать различные виды неравенств, а также систем и совокупностей уравнений и неравенств. Понятие модуля (абсолютной величины) относится к числу важнейших характеристик числа как в области действительных, так и в области комплексных чисел. Указанное понятие находит широкое применение не только в курсе школьной математики, но и в курсах высшей физики, математики и других технических дисциплин, изучаемых в высших учебных заведениях.

Объектом исследования является процесс обучения математике в средней общеобразовательной школе.

Предметом исследования - методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля.

Цель работы состоит в изучении методических особенностей обучения решению уравнений и неравенств с неизвестной под знаком модуля на уроках математики.

Задачи исследования:

- 1) осуществить анализ и систематизацию теоретических сведений по рассматриваемой теме;
- 2) рассмотреть уравнения и неравенства, содержащие неизвестную под знаком модуля, в заданиях ЕГЭ. Провести их анализ;
- 3) проанализировать методические особенности решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля;
- 4) подготовить конспекты двух уроков.

Исследование по теме «Методы решения уравнений и неравенств с модулем» будет полезно при проведении занятий со школьниками за счет комплексного подхода к методической проработке темы и создания дифференцированного перечня упражнений.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, приложений. Исследование включает два основных этапа: теоретический анализ методов решения уравнений и неравенств с модулем. На втором этапе осуществлен анализ содержания школьных учебников на предмет включения в них уравнений и неравенств с модулем; выявлены методические особенности изучения указанной темы в рамках школьного курса. А также представлены конспекты двух учебных занятий и приведены решения заданий из материалов единого государственного экзамена по математике по теме «Уравнения и неравенства с модулем».

ГЛАВА 1 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

1.1 Методы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля

1) Решение уравнений с использованием определения модуля

Определение:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Если число a положительное или равно нулю, то его модуль равен самому числу: $|a| = a$; если число a отрицательное, то его модуль равен противоположному числу $|a| = -a$.

Свойства модуля числа, которые следуют из определения:

- 1) $|a| \geq 0$;
- 2) $|a| \geq a$;
- 3) $|a|^2 = a^2$;
- 4) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- 5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;
- 6) $|-a| = a$, при $a \geq 0$;
- 7) $|-a| = |a|$.

Пример. Решить уравнение $|x^2 - 4| = 4 - x^2$.

Решение. По определению $x^2 - 4 \leq 0$, поэтому все корни данного уравнения являются решением неравенства $x^2 - 4 \leq 0$, следовательно, $-2 \leq x \leq 2$.

Ответ: $x \in [-2; 2]$.

2) Решение уравнений вида $|f(x)| = a$

Если $a < 0$, то уравнение не имеет решения.

Если $a = 0$, то данное уравнение равносильно уравнению вида: $f(x) = 0$.

Если $a > 0$, то рассматриваемое уравнение равносильно совокупности уравнений: $\begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases}$

Пример. Решить уравнение $|x - 5| = 6$.

Решение. $|x - 5| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 6, \\ x - 5 = -6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11, \\ x = -1. \end{cases}$

Ответ: $-1; 11$.

3) Алгоритм решения уравнений, имеющих вид: $|f(x)| = |g(x)|$

Так как $|a| = |b|$, при условии, что $a = \pm b$, то

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |f(x)| = |g(x)| &\Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) \\ &= 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x). \end{aligned}$$

Пример. Решить уравнение $|12x + 5| = |6x + 35|$.

Решение. $|12x + 5| = |6x + 35| \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 5 = 6x + 35, \\ 12x + 5 = -(6x + 35). \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x = -2\frac{2}{9}. \end{cases}$$

Ответ: $-2\frac{2}{9}; 5$.

4) Решение уравнений следующего вида: $|f(x)| = g(x)$

1 способ. Решение исходного уравнения эквивалентно решению совокупности уравнений: $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$ и последующей проверке соблюдения условия $g(x) \geq 0$ для каждого из найденных значений неизвестного.

2 способ. Так как $|f(x)| = f(x)$, если $f(x) \geq 0$;

$|f(x)| = -f(x)$, если $f(x) < 0$; $|f(x)| = f(x)$, если $f(x) \geq 0$,

то уравнение $|f(x)| = g(x)$ равнозначно следующей совокупности систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$$

В первой системе после решения уравнения $f(x) = g(x)$ осуществляется проверка соблюдения условия $f(x) \geq 0$. Аналогичные действия выполняются и для второй системы.

Замечания.

1. Допускается решение двух уравнений: $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$. Корни каждого из них подлежат проверке подстановкой в уравнение $|f(x)| = g(x)$.

2. Для уравнения $|f(x)| = g(x)$ допустимо применение одного из двух подходов: приведение к системе $\begin{cases} f^2(x) - g^2(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$, либо сведение к уравнению $f^2(x) - g^2(x) = 0$ с последующей проверкой корней.

Пример. Решить уравнение $|x^2 - 4| = x + 2$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } |x^2 - 4| = x + 2 &\leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0, \\ x^2 - 4 = x + 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ x^2 - 4 = -x - 2 \end{cases} \end{cases} \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (x-2)(x+2) \geq 0, \\ x^2 - x - 6 = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2)(x+2) < 0, \\ x^2 + x - 2 = 0. \end{cases} \end{cases} &\leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty), \\ x = -2; 3. \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (-2; 2), \\ x = -2; 1. \end{cases} \end{cases} \leftrightarrow x = -2; 1; 3. \end{aligned}$$

Ответ: -2; 1; 3.

5) Решение уравнений вида: $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$

Решение указанных уравнений базируется на определении модуля числа. Пусть задано уравнение вида $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| = g(x)$, где $f_i(x)$ (при $i=1, 2, \dots, n$) представляют собой функции произвольной природы (многочлены, дробно – рациональные функции, тригонометрические функции и т. п.). Для каждой из функций $f_i(x)$ требуется определить область определения, ее нули и точки разрыва, которые разбивают общую область определения функций $f_i(x)$ на промежутки, в пределах которых каждая из указанных функций сохраняет свой знак. Затем, руководствуясь определением модуля, для

каждой из полученных областей выводится уравнение, подлежащее решению на рассматриваемом промежутке.

Пример. Решить уравнение $|x^2 - x| + |x - 2| = x^2 - 2$.

Решение. Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$. Эти числа разбивают координатную прямую на 4 промежутка, следовательно, необходимо решить 4 системы.

$$1) \begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 - x - x + 2 = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x = 2. \end{cases} \text{ Система не имеет решений.}$$

$$2) \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ -x^2 + x - x + 2 = x^2 - 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases} \text{ Система решений не имеет.}$$

$$3) \begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ x^2 - x - x + 2 = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$4) \begin{cases} x > 2, \\ x^2 - x + x - 2 = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Ответ: $x \in [2; +\infty)$.

6) Метод замены переменной при решении уравнений с модулем

Правильно осуществленная замена переменной значительно облегчает решение поставленных задач.

Пример. Решить уравнение $\frac{|x-5|+10}{4} = \frac{6}{|x-5|}$.

Решение. Введем новую переменную: $|x - 5| = t$. Тогда исходное уравнение запишется в виде: $\frac{t+10}{4} = \frac{6}{t}$. Найдем корни этого уравнения:

$$\frac{t+10}{4} = \frac{6}{t} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 10t - 24 = 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

По теореме Виета $t_1 = -12$; $t_2 = 2$ корни уравнения. Так как $t > 0$, то $t_2 = 2$ – решение системы. Учитывая наше обозначение, получим, что $|x - 5| = 2$. Решим уравнение: $|x - 5| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = 2, \\ x - 5 = -2. \end{cases}$ 3, 7 – корни этого уравнения.

Ответ: 3, 7.

Пример. Решить уравнение $x^2 + 5|x| - 6 = 0$.

Решение. Так как $|x|^2 = x^2$, то введем обозначение $|x| = t$. Тогда исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} t^2 + 5t - 6 = 0, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

$t_1 = 1; t_2 = -5$ – корни уравнения, $t_1 = 1$ – решение системы. Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению $|x| = 1$.

Ответ: $-1; 1$.

7) Уравнения с параметром, содержащие переменную под знаком модуля

Пример. Решить уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$.

Решение. Подмодульные выражения обращаются в нуль при значениях $x = -3, x = 1$.

Пусть $x < -3$, тогда $-x - 3 + ax - a = 4; x(a - 1) = a + 7; x = \frac{a+7}{a-1}$ при $a \neq 1$. Найдем те значения a , при которых $\frac{a+7}{a-1} < -3; \frac{4a+4}{a-1} < 0; \frac{a+1}{a-1} < 0$.

Очевидно, что $|a| < 1$. Пусть $-3 \leq x \leq 1$, тогда получаем уравнение $x + 3 + ax - a = 4, x(a + 1) = a + 1$. Если $a = -1$, то $-3 \leq x \leq 1$ – решение данного уравнения; если $a \neq -1$, то $x = 1$.

Рассматривая случай, когда $x > 1$, получаем уравнение: $x + 3 + ax - a = 4, x(1 - a) = 1 - a$. Если $a = 1$, решением уравнения является $x > 1$; если $a \neq 1$, то $x = 1$.

Ответ: при $a = 1, x \geq 1$; при $a = -1, -3 \leq x \leq 1$; при $|a| < 1, x = 1$ и $x = \frac{a+7}{a-1}$; при $|a| > 1, x = 1$.

1.2 Методы решений неравенств, содержащих переменную под знаком модуля

1) Решение неравенств вида:

$$|f(x)| \leq a, |f(x)| \leq |g(x)|, |f(x)| \geq a, |f(x)| \geq |g(x)|$$

Прежде всего, следует отметить, что неравенство $|x| \leq a$ равносильно условию $-a \leq x \leq a$, где $a \geq 0$ (при $a < 0$ неравенство решения не имеет); $|x| \geq a \leftrightarrow \begin{cases} x \geq a, \\ x \leq -a \end{cases}$ при $a \geq 0$; при $a < 0$ неравенство выполняется при любых действительных значениях x .

Напомним одно свойство числовых неравенств: если $a > b, a > 0, b > 0$, то $a^2 > b^2$. Заметим также, что $|a|^2 = a^2$, а поэтому неравенства

$$|f(x)| \leq a \ (a \geq 0), |f(x)| \leq |g(x)|, |f(x)| \geq a \ (a \geq 0), |f(x)| \geq |g(x)|$$

можно заменить на равносильные:

$$f^2(x) - a^2 \leq 0, f^2(x) - g^2(x) \leq 0, f^2(x) - a^2 \geq 0, f^2(x) - g^2(x) \geq 0. \quad \text{В}$$

некоторых случаях такой подход существенно облегчает решение.

Пример. Решить неравенство $|4x - 7| \leq 5$.

Решение. $|4x - 7| \leq 5 \leftrightarrow -5 \leq 4x - 7 \leq 5 \leftrightarrow 0,5 \leq x \leq 3$.

Ответ: $x \in [0,5; 3]$.

2) Решение неравенств вида: $|f(x)| \leq g(x)$ и $|f(x)| \geq g(x)$.

1 способ. Указанное неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ равносильно следующей совокупности, состоящей из двух систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Аналогичным образом может быть рассмотрено неравенство $|f(x)| \geq |g(x)|$.

2 способ. Неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ имеет решение при $g(x) \geq 0$,

$$\text{поэтому } |f(x)| \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) - g^2(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство $|f(x)| > g(x)$ выполняется для всех x из области определения функции $f(x)$, при которых $g(x) < 0$. Если же $g(x) \geq 0$, то $|f(x)| \geq g(x) \leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \geq 0$. Таким образом, для решения неравенства $|f(x)| > g(x)$ требуется проанализировать два случая.

3 способ. При решении неравенства $|f(x)| \leq g(x)$ следует учитывать, что оно эквивалентно двойному неравенству

$-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, при условии, что $g(x) \geq 0$. Данное утверждение может быть также сформулировано следующим образом:

$$|f(x)| \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq -g(x), \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$$

Пример. Решить неравенство $|\sin x| \leq \cos x$.

Решение. Неравенство сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} (\sin x)^2 - (\cos x)^2 \leq 0, \\ \cos x \geq 0. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2(\cos x)^2 - 1 \geq 0, \\ \cos x \geq 0. \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2} \cos x - 1)(\sqrt{2} \cos x + 1) \geq 0 \\ \cos x \geq 0. \end{cases} \leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

2) Решение неравенств вида: $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| \leq g(x)$,
 $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_n(x)| \geq g(x)$

Решение неравенств рассматриваемого вида осуществляется с использованием приема, аналогичного применяемому при решении уравнений, в которые входит сумма модулей нескольких функций.

Пример. Решить неравенство $|2x + 5| < 3x - 1$.

Решение. Так как $2x + 5 = 0$ при $x = -2,5$, то решением данного неравенства будет совокупность решений двух систем неравенств

$$\left[\begin{cases} x \geq -2,5, \\ 2x + 5 < 3x - 1. \end{cases} \leftrightarrow x \in (6; +\infty). \right. \\ \left. \begin{cases} x < -2,5, \\ -2x - 5 < 3x - 1. \end{cases} \right]$$

Ответ: $x \in (6; +\infty)$.

3) Решение неравенств, содержащих модули, методом интервалов

При решении неравенства методом интервалов его предварительно приводят к виду $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$ (неравенства также могут быть нестрогими). Определяют область определения функции $f(x)$ и ее нули. Указанные нули разбивают область определения $f(x)$ на промежутки, на каждом из которых функция является непрерывной и не обращается в нуль; следовательно, на каждом таком промежутке функция сохраняет свой знак неизменным.

Пример. Решить неравенство $\frac{2-|x^2-5|}{|3x^2-2x|-4} \leq 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{2-|x^2-5|}{|3x^2-2x|-4}$. Найдем нули функции: $|x^2 - 5| = 2$, откуда $x_1 = -\sqrt{7}$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = \sqrt{3}$; $x_4 = \sqrt{7}$. Далее находим точки разрыва: $|3x^2 - 2x| = 4$, откуда $x_5 = \frac{1-\sqrt{13}}{3}$; $x_6 = \frac{1+\sqrt{13}}{3}$.

Отметим точки разрыва и нули функции на числовой прямой. На всех промежутках функция сохраняет знак.

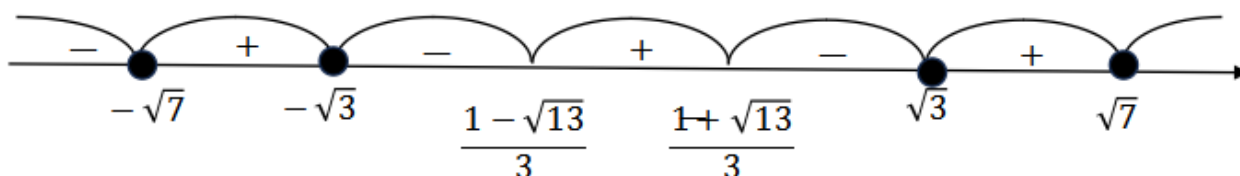


Рисунок 1– Иллюстрация к решению неравенства

$$x \in (-\infty; -\sqrt{7}] \cup \left[-\sqrt{3}; \frac{1-\sqrt{13}}{3}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{3}; \sqrt{3}\right] \cup [\sqrt{7}; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; -\sqrt{7}] \cup \left[-\sqrt{3}; \frac{1-\sqrt{13}}{3}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{3}; \sqrt{3}\right] \cup [\sqrt{7}; +\infty).$

Обратимся к аналитическому способу решения.

Пример. Для каждого значения параметра a решить неравенство:

$$2|x - a| < 2ax - x^2 - 2.$$

Решение. Неравенство $2|x - a| < 2ax - x^2 - 2$ равносильно неравенству $2|x - a| + (x^2 - 2ax + a^2) - a^2 + 2 < 0$, $2|x - a| + (x - a)^2 - a^2 + 2 < 0$. Введем обозначение: $|x - a| = t$. Тогда неравенство запишется в виде $t^2 + 2t +$

$1 + (-a^2 + 1) < 0$ или $(t + 1)^2 < a^2 - 1$. Так как $t + 1 > 0$, то $t + 1 < \sqrt{a^2 - 1}$. Учитывая, что $t = |x - a|$, имеем: $|x - a| + 1 < \sqrt{a^2 - 1}$, $|x - a| < -1 + \sqrt{a^2 - 1}$. Рассмотрим случаи: 1) $x \geq a$, 2) $x < a$.

$$1) \begin{cases} x \geq a, \\ x - a < -1 + \sqrt{a^2 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a, \\ x < a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}. \end{cases}$$

Найдем условие на параметр a , когда a находится левее, чем $a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}$.

Отметим эти точки на числовой прямой:



Рисунок 2 – Иллюстрация к решению неравенства

Для этого решим неравенство $a < a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}$:

$$\sqrt{a^2 - 1} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 > 2, \\ a < -1 \cup a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a < -\sqrt{2} \cup a > \sqrt{2}. \text{ Если } a < -\sqrt{2} \text{ или}$$

$a > \sqrt{2}$, то $x \in [a; a - 1 + \sqrt{a^2 - 1})$.

$$2) \begin{cases} x < a, \\ -x + a + 1 < \sqrt{a^2 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < a, \\ x > a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}. \end{cases}$$

Найдем условие на параметр a , когда $a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}$ находится левее, чем a на числовой прямой.

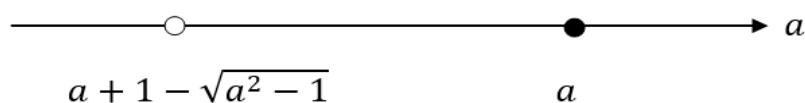


Рисунок 3 – Иллюстрация к решению неравенства

Для этого решим неравенство $a + 1 - \sqrt{a^2 - 1} < a$. Это неравенство равносильно неравенству $\sqrt{a^2 - 1} > 1$ или

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 1, \\ a < -1 \cup a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow a < -\sqrt{2} \cup a > \sqrt{2}.$$

Если $a < -\sqrt{2}$ или $a > \sqrt{2}$, то $x \in (a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}; a]$.

Ответ: если $a < -\sqrt{2}$ или $a > \sqrt{2}$, то $x \in (a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}; a - 1 + \sqrt{a^2 - 1})$; если $a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, то неравенство не имеет решения.

1.3 Уравнения и неравенства с модулем в заданиях ЕГЭ

Задания, содержащие переменную под знаком модуля, регулярно включаются в контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике и представлены как на базовом, так и на профильном уровнях сложности. В рамках экзаменационной работы уравнения и неравенства с модулем встречаются преимущественно в следующих блоках:

- 1) задания базового уровня направлены на проверку умения применять определение модуля и простейшие методы решения. Такие задания могут входить в практико-ориентированные и алгебраические блоки экзамена;
- 2) задания повышенного и высокого уровня сложности (профильный ЕГЭ) традиционно включают уравнения и неравенства с модулем в комбинации с другими темами: параметрами, иррациональными, тригонометрическими, показательными и логарифмическими выражениями. Наиболее сложные задания (например, №18 с параметром) требуют свободного владения различными методами решения: методом интервалов, равносильными переходами, графической интерпретацией и анализом.

Более подробно рассмотрим задания ЕГЭ из профильной математики.

1) 1 тип задач (задание №15 ЕГЭ).

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, в рамках задания №15 применяются следующие методы:

- раскрытие модуля по определению;
- замена переменной;
- метод интервалов;

- метод рационализации;
- возведение обеих частей неравенства в квадрат.

Пример. Решите неравенство $\left| \log_x \frac{x}{4} \right| \cdot \log_{4x}(2x)^2 \leq \left| \log_x \frac{x}{4} \right|$.

Решение. Область допустимых значений:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 4x > 0, \\ 4x \neq 1, \\ \frac{x}{4} > 0. \end{cases}$$

Таким образом, $x \in (0; \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}; 1) \cup (1; +\infty)$.

$$\left| \log_x \frac{x}{4} \right| \cdot \log_{4x}(2x)^2 - \left| \log_x \frac{x}{4} \right| \leq 0, \left| \log_x \frac{x}{4} \right| \cdot (\log_{4x}(2x)^2 - 1) \leq 0.$$

1 случай: $\left| \log_x \frac{x}{4} \right| = 0 \rightarrow \log_x \frac{x}{4} = 0 \rightarrow \frac{x}{4} = 1 \rightarrow x = 4$ (принадлежит области допустимых значений).

$$2 \text{ случай: } \left| \log_x \frac{x}{4} \right| > 0 \rightarrow \log_{4x}(2x)^2 - 1 \leq 0.$$

Так как $\log_{4x}(2x)^2 = 2\log_{4x}(2x) = 2 \cdot \frac{\ln(2x)}{\ln(4x)}$, то $2 \cdot \frac{\ln(2x)}{\ln(4x)} - 1 \leq 0$,

$$\frac{2 \ln(2x) - \ln(4x)}{\ln(4x)} \leq 0.$$

Так как $2 \ln(2x) - \ln(4x) = \ln(2x)^2 - \ln(4x) = \ln \frac{4x^2}{4x} = \ln x$, то

$$\frac{\ln x}{\ln(4x)} \leq 0.$$

Рассмотрим знак числителя и знаменателя на промежутках ОДЗ.

- $\ln x = 0 \leftrightarrow x = 1$ (не входит в ОДЗ).
- $\ln(4x) = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (не входит в ОДЗ).

Интервалы знакопостоянства:

- $x \in (0; \frac{1}{4})$:

$$x < \frac{1}{4} \rightarrow 4x < 1 \rightarrow \ln(4x) < 0, \quad x < \frac{1}{4} < 1 \rightarrow \ln x < 0.$$

- Неравенство не выполняется

- $x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right)$:
- $\frac{1}{4} < x < 1 \rightarrow 1 < 4x < 4 \rightarrow \ln(4x) > 0, \ln x < 0$.
- Неравенство выполняется.
- $x \in (1; +\infty)$:
 $x > 1 \rightarrow \ln x > 0, 4x > 4 > 1 \rightarrow \ln(4x) > 0$.

Неравенство не выполняется. Следовательно, $x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup \{4\}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{4}; 1\right) \cup \{4\}$.

Пример. Решите неравенство $\log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} - x - 1) \geq 1$.

Решение. Рассмотрим 4 случая:

1 случай. При $x > 1$ получаем:

$$\begin{aligned} &\left\{ \log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} - x - 1) \geq 1, \right. \\ &\quad \left. x > 1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \sqrt{9-x^2} - x - 1 \geq x, \right. \\ &\quad \left. x > 1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \sqrt{9-x^2} \geq 2x + 1, \right. \\ &\quad \left. x > 1. \right\} \quad \text{Система решений не имеет.} \end{aligned}$$

2 случай. При $x < -1$ получаем:

$$\begin{aligned} &\left\{ \log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} - x - 1) \geq 1, \right. \\ &\quad \left. x < -1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \sqrt{9-x^2} - x - 1 \geq -x, \right. \\ &\quad \left. x < -1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \sqrt{9-x^2} \geq 1, \right. \\ &\quad \left. x < -1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}, \right. \\ &\quad \left. x < -1 \right\} \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq x < -1 \end{aligned}$$

3 случай. При $0 < x < 1$ получаем:

$$\begin{aligned} &\left\{ \log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} - x - 1) \geq 1, \right. \\ &\quad \left. 0 < x < 1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ 0 < \sqrt{9-x^2} - x - 1 \leq x, \right. \\ &\quad \left. 0 < x < 1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ \sqrt{9-x^2} \leq 2x + 1, \right. \\ &\quad \left. 0 < x < 1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ 0 \leq 9 - x^2 \leq 4x^2 + 4x + 1, \right. \\ &\quad \left. 0 < x < 1 \right\} \Leftrightarrow \left\{ 5x^2 + 4x - 8 \geq 0, \right. \\ &\quad \left. 0 < x < 1 \right\} \Leftrightarrow \frac{-2 + \sqrt{44}}{5} \leq x < 1. \end{aligned}$$

4 случай. При $-1 < x < 0$ получаем:

$$\left\{ \log_{|x|}(\sqrt{9-x^2} - x - 1) \geq 1, \right. \\ \left. -1 < x < 0 \right\} \Leftrightarrow \left\{ 0 < \sqrt{9-x^2} - x - 1 \leq -x, \right. \\ \left. -1 < x < 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9-x^2} \leq 1, \\ -1 < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 8, \\ -1 < x < 0 \end{cases} \quad \text{Система решений не имеет. Таким}$$

образом $x \in [-2\sqrt{2}; -1) \cup \left[\frac{-2+2\sqrt{11}}{5}; 1\right)$.

$$\text{Ответ: } x \in [-2\sqrt{2}; -1) \cup \left[\frac{-2+2\sqrt{11}}{5}; 1\right).$$

Пример. Решите неравенство $\frac{\log_{0,2}(x-2)}{(4^x-8)(|x|-5)} \geq 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\log_{0,2}(x-2)}{(4^x-8)(|x|-5)} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\log_{0,2}(x-2) - \log_{0,2}1}{(2^{2x}-2^3)(\sqrt{x^2}-\sqrt{25})} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(0,2-1)(x-2-1)}{(2-1)(2x-3)(x^2-25)} \geq 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{(2x-3)(x-5)(x+5)} \leq 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{x-5} \leq 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x < 5, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x < 5. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } x \in [3; 5).$$

Пример. Решите неравенство $3x - |x+8| - |1-x| \leq -6$.

Решение. $3x - |x+8| - |1-x| \leq -6 \Leftrightarrow 3x + 6 \leq |x+8| + |x-1|$.

Выражение $|x+8| + |x-1|$ – сумма расстояний от точки x до точек -8 и 1 .

- При $x \leq -8$ сумма расстояний $-7 - 2x$.
- При $-8 \leq x \leq 1$ сумма расстояний 9 .
- При $x \geq 1$ сумма расстояний: $2x + 7$.

1 случай. $x \leq -8$. $3x + 6 \leq -7 - 2x \rightarrow 5x \leq -13 \rightarrow x \leq -2,6$.

С учетом $x \leq -8$: $x \leq -8$.

2случай. $-8 \leq x \leq 1$. $3x + 6 \leq 9 \rightarrow 3x \leq 3 \rightarrow x \leq 1$. С учетом $-8 \leq x \leq 1$: $x \in [-8; 1]$.

3 случай. $x \geq 1$. $3x + 6 \leq 2x + 7 \rightarrow x \leq 1$. С учетом $x \geq 1$: $x = 1$.

Объединение: $x \in (-\infty; -8] \cup [-8; 1] \cup \{1\} = (-\infty; 1]$.

$$\text{Ответ: } x \in (-\infty; 1].$$

2) Второй тип задач (задание №18 ЕГЭ)

При решении задания №18 применяются следующие методы:

- аналитический метод;
- графический метод;
- аналитико-графический метод.

Пример. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$ имеет 4 различных решения.

Решение.
$$\begin{cases} -2x^2 + 12x - ax + a^2 - 6a = 0, & x \geq 0, \\ -2x^2 - 6x - ax + a^2 - 6a = 0, & x < 0. \end{cases}$$

1 случай. $x \geq 0$, $-2x^2 + (12 - a)x + a(a - 6) = 0$.

$$D = 144 - 24a + a^2 + 8a(a - 6) = 144 - 24a - 48a + a^2 + 8a^2 = 9a^2 - 72a + 144 = 9(a - 4)^2. D \geq 0 \rightarrow 1 \text{ или } 2 \text{ корня:}$$

$$x_1 = \frac{-12 + a + 3a - 12}{-4} = -a + 6, x_2 = \frac{-12 + a - 3a + 12}{-4} = \frac{a}{2}.$$

$$a \leq 6 \text{ и } a \geq 0 \rightarrow a \in [0; 6].$$

2 случай. $x < 0$, $2x^2 + (6 + a)x - a(a - 6) = 0$.

$$D = 36 + 12a + a^2 + 8a(a - 6) = 36 + 12a + a^2 + 8a^2 - 48a = 9a^2 - 36a + 36 = (3a - 6)^2 \rightarrow D \geq 0, \text{ поэтому уравнение имеет } 1 \text{ или } 2 \text{ корня:}$$

$$x_1 = \frac{-6 - a + 3a - 6}{4} = \frac{a}{2} - 3, x_2 = \frac{-6 - a - 3a + 6}{4} = -a.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a - 3 < 0, \\ -a < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 6, \\ a > 0 \end{cases} \rightarrow a \in (0; 6). -a + 6 = \frac{1}{2}a \rightarrow a = 4, \frac{1}{2}a - 3 = -a \rightarrow a = 2. \text{ Таким образом, если } a \in (0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; 6), \text{ то исходное уравнение имеет 4 решения.}$$

Ответ: $a \in (0; 2) \cup (2; 4) \cup (4; 6)$.

Пример. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 10x + 16| = a^2 - 8a$ имеет 4 решения.

Решение. Построим график функции $y = |x^2 - 10x + 16|$. Для этого найдем координаты вершины и точки пересечения с осями координат параболы, задаваемой функцией $y = x^2 - 10x + 16$:

$$x_B = \frac{10}{2} = 5, y_B = -9; x^2 - 10x + 16 = 0, D = 100 - 64 = 36$$

$$x_1 = \frac{10+6}{2} = 8; \quad x_2 = \frac{10-6}{2} = 2.$$

Теперь построим график функции $y = |x^2 - 10x + 16|$.

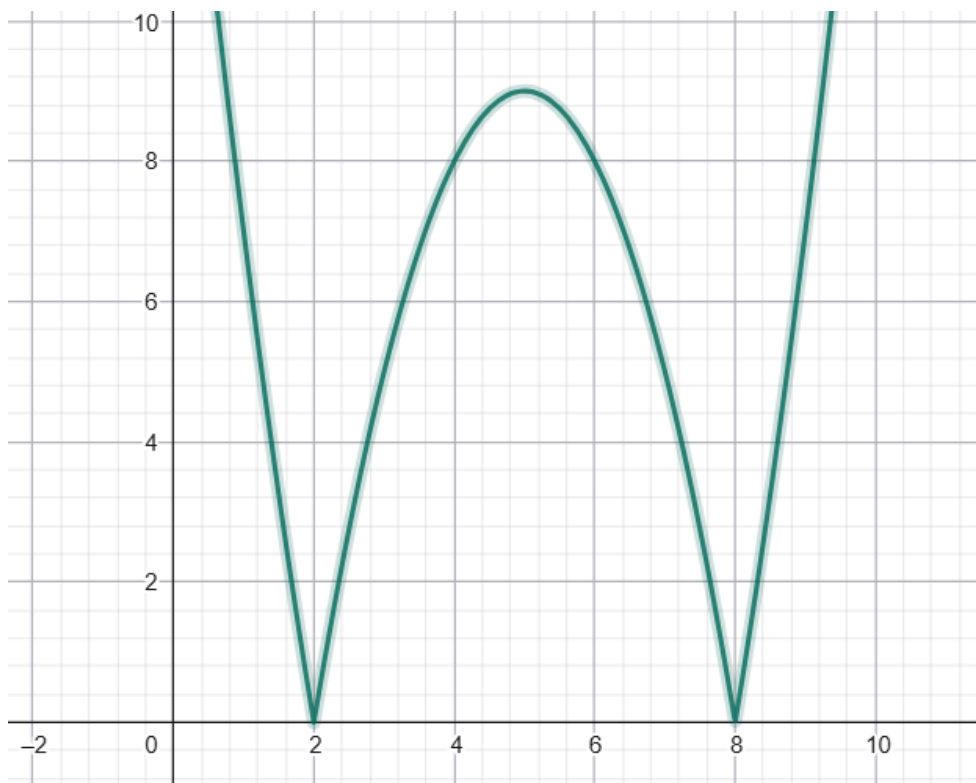


Рисунок 4 – Графическая иллюстрация к решению уравнения

Исходное уравнение имеет 4 решения только тогда, когда параметр a удовлетворяет неравенству:

$$0 < a^2 - 8a < 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a^2 - 8a, \\ a^2 - 8a < 9. \end{cases}$$

$$0 < a^2 - 8a,$$

$$a^2 - 8a = 0,$$

$$a(a - 8) = 0,$$

$$a \in (-\infty; 0) \cup (8; +\infty).$$

$$a^2 - 8a - 9 < 0,$$

$$a^2 - 8a - 9 = 0,$$

$$D = 64 + 36 = 100 \rightarrow a_1 = 9; a_2 = -1$$

$$a \in (-1; 9).$$

Следовательно, $a \in (-1; 0) \cup$

Ответ: $a \in (-1; 0) \cup (8; 9)$

Пример. При каких значениях параметра a уравнение

$$a|x + 1| + (1 - a)|x - 1| + 2 = 0$$

имеет ровно 2 решения.

Решение. 1) $x < -1$: $-a(x+1) + (a-1)(x-1) + 2 = 0$,
 $-ax - a + ax - a + 1 - x + 2 = 0, x_1 = -2a + 3. -2a + 3 < -1 \rightarrow a > 2$

Если $a > 2$, то $x_1 = -2a + 3$.

2) $-1 \leq x < 1$. На этом промежутке уравнение имеет вид:

$$(x+1) + (1-x)(1-a) + 2 = 0, ax + a + 1 - x - a + ax + 2 = 0,$$

$$(2a-1)x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{3}{1-2a}, a \neq \frac{1}{2}.$$

$$-1 \leq \frac{3}{1-2a} < 1 \leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{1-2a} \geq -1, \\ \frac{3}{1-2a} < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{a-2}{2a-1} \geq 0, \\ \frac{a+1}{2a-1} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < \frac{1}{2} \cup a \geq 2, \\ a < -1 \cup a > \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow a < -1 \cup a \geq 2$. Если $a < -1 \cup a \geq 2$, то $x_2 = \frac{3}{1-2a}$.

3) $x \geq 1$. $a(x+1) + (1-a)(x-1) + 2 = 0, ax + a + x - 1 - ax + a + 2 = 0,$
 $x_3 = -2a - 1. -2a - 1 \geq 1 \rightarrow a \leq -1$.

Если $a \leq -1$, то $x_3 = 2a - 1$.



Рисунок 5 – Иллюстрация к решению уравнения

Ответ: если $a \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$, то уравнение имеет 2 решения.

Пример. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3 \text{ выполняется при всех } x.$$

Решение. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\left| 1 + \frac{(a-1)x}{x^2+x+1} \right| < 3 \leftrightarrow -3 < 1 + \frac{(a-1)x}{x^2+x+1} < 3 \leftrightarrow -4 < \frac{(a-1)x}{x^2+x+1} < 2.$$

Так как неравенство $x^2 + x + 1 > 0$ для любого действительного числа,

то $-4 < \frac{(a-1)x}{x^2+x+1} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 - 4x - 4 < (a-1)x \\ (a-1)x < 2x^2 + 2x + 4 \end{cases}$. Найдем значения параметра a , при

которых решением системы неравенств является любое действительное число. Рассмотрим первое неравенство системы.

$$1) -4x^2 - 4x - 4 < (a-1)x \Leftrightarrow 4x^2 + (a-3)x + 4 > 0.$$

$4x^2 + (a-3)x + 4 > 0$ для любого действительного числа тогда только тогда, когда $D = a^2 - 6a - 55 < 0$. Так как $a_1 = -5$, $a_2 = 11$ корни уравнения $a^2 - 6a - 55 = 0$, то множество $(-5; 11)$ решение неравенства $a^2 - 6a - 55 < 0$.

$$2) (a-1)x < 2x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 + (3-a)x + 2 > 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 + (3-a)x + 2$ $D = a^2 - 6a - 55$.

Если $D = a^2 - 6a - 7 < 0$, то неравенству $2x^2 + (3-a)x + 2 > 0$

удовлетворяет любое действительное число. Так как $a_1 = -1$, $a_2 = 7$ корни уравнения $a^2 - 6a - 7 = 0$, то $(-1; 7)$ множество решений неравенства $a^2 - 6a - 7 < 0$.

При всех параметров $a \in (-5; 7) = (-5; 11) \cap (-1; 7)$ исходное неравенство выполняется для любого действительного числа.

Ответ: $a \in (-5; 7)$.

Проведенный анализ заданий ЕГЭ по математике профильного уровня позволяет сделать следующие выводы относительно наличия и значимости заданий, содержащих переменную под знаком модуля: уравнения и неравенства с модулем не выделены в отдельную тематическую группу в кодификаторе ФИПИ, однако они присутствуют в составе комплексных заданий. В соответствии с актуальной структурой экзамена, задания с модулем встречаются преимущественно во 2 части и относятся к повышенному и высокому уровням сложности. Задания, в которых встречаются уравнения и неравенства под знаком модуля:

Задание №18 (задача с параметром). Данный тип задач относится к части с развернутым ответом высокого уровня сложности и традиционно

предполагает исследование уравнения или неравенства, содержащего модуль, в зависимости от значений параметра. Как правило, в условии требуется найти все значения параметра, при которых уравнение или неравенство имеет определенное количество решений, либо выполняются заданные условия на промежутке. В таких заданиях модуль может быть представлен как самостоятельно, так и в комбинации с другими элементами.

Задание №15 (неравенства). В структуре контрольных измерительных материалов ЕГЭ по математике профильного уровня задание №15 относится к части с развернутым ответом повышенного уровня сложности и направлено на проверку умения решать различные виды неравенств. Таким образом, тема «Уравнения и неравенства с модулем» занимает важное место в структуре ЕГЭ по профильной математике. Несмотря на отсутствие отдельного пункта в кодификаторе, задания с модулем систематически включаются в экзаменационные варианты и выполняют ключевую роль в дифференциации выпускников по уровню подготовки. Освоение методов решения уравнений и неравенств с модулем является необходимым условием для успешной сдачи экзамена на высокий балл.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ В ШКОЛЕ

2.1 Анализ школьных учебников на наличие уравнений и неравенств с модулем

Был проведен анализ учебников по курсу математики, алгебры и начал математического анализа с целью установления способов введения понятия «модуль числа», а также степени представленности заданий, использующих данное понятие. В качестве основных источников были рассмотрены три учебника, применяемых в школах – учебник А. Г. Мордковича, учебник Н. Я. Виленкина и учебник Ю. Н. Макарычева.

Таблица 1 – Сравнение учебников по математике 6 классов

6 класс	А. Г. Мордкович	Н. Я. Виленкин
	<p>Модуль числа определяется как расстояние: «расстояние от точки $A(a)$ до начала отсчета, то есть до точки $O(0)$, называется модулем числа a, и обозначают a. После введения понятия модуля, рассматривается свойство $0 = 0$. Далее в учебнике разъясняется понятие противоположных чисел. В задании №66 ученикам предлагается сделать вывод о модулях противоположных чисел. Таким образом, учащиеся должны самостоятельно прийти к следующему свойству модуля: модули противоположных чисел равны.</p> <p>В учебнике есть задания: на нахождение модулей рациональных чисел (№62, 63, 64), на сравнение модулей чисел (№85, 86), на решение простейших уравнений и неравенств с модулем (№90, 103).</p>	<p>Модуль числа определяется через понятие расстояния: «модулем числа n называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки $N(n)$. После введения понятия модуля, рассматриваются следующие свойства:</p> <ol style="list-style-type: none">1) модуль числа 0 равен 02) модуль отличного от нуля числа всегда положительное число3) модули противоположных чисел равны: $-a = a$. <p>В учебнике есть задания: на нахождение модулей чисел (№4.63, 4.64), на сравнение модулей чисел (№4.85), на решение простейших уравнений с модулем (№4.71, 4.72). Заданий с неравенствами с модулем в учебнике 6 класса нет.</p>

Таблица 2 – Сравнение учебников математики 7 классов

7 класс	А. Г. Мордкович	Ю. Н. Макарычев
	Учебник состоит из двух частей: из учебника и задачника. В задачнике в главе «Математический язык. Математическая модель» представлены задания на применение свойств модуля числа и раскрытие модуля. В теме «Линейные уравнения с одной переменной» в рамках заданий повышенного уровня сложности предлагается решить уравнения с модулем. Помимо простейших уравнений включены уравнения, содержащие переменную как под знаком модуля, так и вне его.	Понятие модуля числа и соответствующие уравнения с модулем в явном виде практически не рассматриваются. Модуль используется эпизодически (в том числе в задачах повышенной сложности или в рубрике (Для тех, кто хочет знать больше)). В частности, в одном из заданий №221 проверяется понимание свойств модуля при решении неравенств.

Таблица 3 – Сравнение учебников математики 8 классов

8 класс	А. Г. Мордкович	Ю. Н. Макарычев
	В разделе «Действительные числа» рассматривается понятие модуля действительного числа, которое вводится аналитическим способом: модулем неотрицательного действительного числа x называется само это число ($ x = -x$). Модуль применяется для оценки иррациональных чисел. Геометрический смысл модуля выражается формулой $p(a - b) = a - b $. Также рассматриваются уравнения, содержащие знак модуля, причем предполагается их решение как аналитическим, так и графическим способами. В задачнике в главе «Квадратные уравнения» представлены уравнения с модулем различных уровней сложности.	42 параграф учебника целиком посвящен теме «Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля». В номерах 948, 1022 рассматриваются выражения и уравнения, включающие знак модуля, для закрепления навыков преобразования и решения.

Таблица 4 – Сравнение учебников математики 9 классов

9 класс	А. Г. Мордкович	Ю. Н. Макарычев
	В учебнике имеется отдельный параграф 5, посвященный решению неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. В рамках этой темы рассматриваются различные типы неравенств, включая линейные и квадратные. Упражнения, содержащие модуль: №1.5 (в, г); 1.6 (а, б); 1.7 (а, б). Также рассматривается решение модульных неравенств с помощью геометрического смысла модуля.	Тема уравнений и неравенств с модулем не выделена в отдельный параграф. Однако задания, содержащие переменную под знаком модуля, встречаются в разделе задач повышенной трудности. Например, №892. Следует отметить, что данные задания относятся к разделу неравенств с двумя переменными и их системам.

В каждом из рассмотренных учебников задания, содержащие модуль, используются в основном для проверки знаний и умений, приобретенных в процессе изучения соответствующей темы. Во всех проанализированных учебниках дается четкое определение модуля. Наиболее часто модуль встречается при вычислении значений выражений, а также при решении уравнений и неравенств.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что для реализации разноуровневого изучения темы «модуль» в школьном курсе математики использование какого-либо одного учебника является недостаточным. Решению уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, следует уделять значительное внимание на уроках математики.

2.2 Методические особенности изучения уравнений и неравенств с модулем в школе

В этом пункте рассматриваются методические приемы обучения решению уравнений и неравенств, содержащих модуль. Указаны аспекты, на которые следует обращать внимание при изучении темы «Модуль числа», а также сформулирована цель, которую учитель должен ставить перед учащимися. Кроме того, даны методические рекомендации, которых учителю рекомендуется придерживаться при объяснении данного материала. Из-за малого количества часов, выделяемых на изучение темы «Модуль числа» в рамках школьного курса математики (6 класс – 2 часа; 8 класс – 4 часа), учащиеся часто испытывают трудности при выполнении заданий, содержащих модуль. Школьники часто допускают ошибки вследствие непонимания определения модуля числа. В связи с этим, при работе над определением необходимо акцентировать внимание учащихся на том, что переменная x может принимать как отрицательные, так и положительные значения.

Для достижения сознательного усвоения математических знаний в процессе обучения решению уравнений и неравенств, содержащих модуль, необходимо применение различных методических приемов и методов, а также активное вовлечение обучающихся в деятельность по решению задач. Прежде чем перейти к рассмотрению указанных методов, необходимо определить само понятие «метод обучения». Метод обучения – упорядоченный комплекс дидактических приемов и средств, посредством которых реализуются цели обучения и воспитания. Методы обучения представляют собой взаимосвязанные способы целенаправленной деятельности учителя и обучающихся. Рассмотрим основные методы обучения:

- объяснительно – иллюстративный метод: заключается в том, что преподаватель предъявляет обучающимся готовую информацию, а обучающиеся обязаны осмыслить и запомнить ее;

- репродуктивный метод: основан на воспроизведении учащимися действий и решений по готовому алгоритму, что позволяет эффективно формировать соответствующие умения и навыки;
- исследовательский метод обучения: предполагает самостоятельное исследование проблемы обучающимися и последующее ее решение;
- метод проблемного обучения: предполагает постановку перед учащимися проблемы, исследование способов ее решения осуществляется обучающимися самостоятельно, однако учитель также вовлечен в указанный процесс (ключевым элементом метода проблемного обучения выступает создание проблемной ситуации).

Обратимся к методическим рекомендациям, которых следует придерживаться учителю:

- 1) осуществлять мотивацию учащихся к изучению нового понятия;
- 2) требовать от обучающихся понимания формулировок определений, а не их механического заучивания;
- 3) ориентировать учащихся на поиск наиболее простого и рационального способа решения задачи и его оформления;
- 4) предоставлять обучающимся возможность самостоятельного изучения материала, при этом организуя и контролируя данный процесс;
- 5) при решении учащимися задания у доски требовать комментирования каждого выполняемого действия;
- 6) проводить тесты для проверки минимальных знаний по изученному материалу с целью выявления тенденций усвоения темы.

В курсе алгебры 8 – 9 классов происходит накопление опыта решения уравнений и неравенств с модулем различных видов, в ходе которого учащиеся осваивают общие свойства равносильных преобразований и различные способы их решения. В старших классах изложение теории становится более сжатым, а описание решений уравнений и неравенств с модулем практически не демонстрируется. Теоретический материал в большей степени опирается на

изучение основных свойств и графиков иррациональных, тригонометрических, логарифмических и показательных функций, а также соответствующих уравнений и неравенств. Для успешного решения уравнений и неравенств с модулем указанных типов выражений, необходимо детально изучить их свойства и ограничения.

Этапы изучения темы «Уравнения и неравенства с модулем»:

- 1) освоение понятия модуля (понимание его определения);
- 2) изучение и осмысление методов решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.

Первый этап предполагает понимание определения модуля. Рассмотрим методические требования к формированию данного понятия. Начальным этапом формирования понятия является мотивация, сущность которой состоит в подчеркивании значимости изучения данного понятия. Мотивация может быть реализована как с использованием средств нематематического содержания, так и посредством выполнения специальных упражнений, демонстрирующих необходимость развития математической теории. Изучение понятия модуля может быть мотивировано необходимостью выполнения учащимися заданий, требующих применения данного определения. Следующий этап предполагает рассмотрение свойств модуля числа и закрепление предложенного материала посредством выполнения упражнений. Указанный подход позволяет учащимся овладеть способностью осуществлять переход от понятия к его существенным свойствам и обратно. На ранних этапах изучения уравнений и неравенств с модулем следует рассмотреть блок простых рациональных уравнений и неравенств, содержащих модуль, демонстрируя при этом различные способы их решения. В 8 классе достаточно показать решение уравнений с модулем простейших видов, например: $|x| = a$, где $a \geq 0$ – действительное число.

Это позволит учащимся легче вспомнить, как применяется определение модуля при решении данного типа уравнений.

Первоначальное закрепление материала может быть проведено посредством устного выполнения упражнений, предложенных в учебнике. Учащимся необходимо актуализировать знания, полученные в 6 – 7 классах, где изучался геометрический смысл модуля ($|x|$ есть расстояние от точки x до любой другой точки), и напомнить, что данный метод может рассматриваться как еще один способ решения уравнений с модулем. После этого целесообразно перейти к рассмотрению уравнения следующего вида: $|f(x)| = a$, $|f(x)| = g(x)$, $|f(x)| = |g(x)|$, показав не только способ раскрытия модуля через определение, но и графический способ, по мере изучения линейных и квадратичных функций.

Графический метод, для рассмотренных ранее уравнений, заключается в том, чтобы найти общие точки пересечения функций. Например, для нахождения решения уравнения вида $|f(x)| = a$, нужно построить графики функции $y = |f(x)|$ и $y = a$. Абсциссы их точек пересечения будут решением. Если точек пересечения нет, то уравнение не имеет решений. Для линейных и квадратных неравенств с модулем вида: $|f(x)| < a$; $|f(x)| > a$; $|f(x)| > g(x)$; $|f(x)| < g(x)$; $|f(x)| > |g(x)|$; $|f(x)| < |g(x)|$ рекомендуется изучить основные приемы перехода к совокупности, к системе, к совокупности систем. Применение данных приемов, также подразумевает умение делать преобразование, для перехода к стандартным, упрощенным выражениям.

Выделим основные способы решения уравнений и неравенств с модулем:

- решение на основе определения модуля;
- решение с использованием геометрической интерпретации модуля;
- возведение в квадрат обеих частей уравнения или неравенства;
- метод промежутков;
- метод перехода к равносильным совокупностям и системам;
- графический метод;
- метод замены переменной.

Сущность метода промежутков заключается в следующем: учащийся должен найти значения неизвестной переменной, при которых каждое подмодульное выражение обращается в нуль. Полученные точки разбивают область допустимых значений на промежутки, в каждом из которых необходимо определить знак подмодульного выражения. Затем, раскрывая модуль в соответствии с установленными знаками на каждом промежутке, записываются выражения, что в дальнейшем позволяет перейти непосредственно к решению уравнения или неравенства. В качестве методического приема учителю рекомендуется организовать совместную с учащимися работу по составлению схемы, в которой будет представлен алгоритм решения задач указанного типа. Метод замены переменной заключается в сведении сложного уравнения или неравенства к более стандартному виду. При демонстрации данного метода учитель должен разъяснить учащимся, что замена сложного выражения на более простое позволяет облегчить процесс решения уравнений и неравенств. При этом необходимо учитывать имеющиеся ограничения и обязательно выполнять обратную замену. Учащиеся нередко испытывают затруднения и избегают подхода к решению уравнений и неравенств с модулем указанного типа.

Графический метод предполагает представление решения в виде рисунка, при этом учащиеся воспроизводят знания, умения и навыки построения графиков функций. Используя данный способ, учитель может актуализировать алгоритм построения функции с модулем и без модуля. Сущность графического решения уравнений и неравенств, содержащих модуль, заключается в нахождении общих точек пересечения графиков, которые и являются решением соответствующих уравнений и неравенств.

Метод перехода к равносильным совокупностям и системам. Прежде всего учителю следует напомнить учащимся на простых примерах, что является решение системы и совокупности уравнений и неравенств. Уникальность данного метода заключается в том, что при решении уравнений и неравенств

область допустимых значений и сравнительные величины располагаются в одном месте, что позволяет не упустить всевозможные случаи получения результата. Однако метод имеет недостатки: по мере включения дополнительных ограничений решения становятся весьма громоздкими.

При рассмотрении метода возведения обеих частей в четную степень учителю необходимо акцентировать внимание на том, что данный метод применим не во всех случаях. Он целесообразен для уравнений и неравенств первой степени, а также для освобождения от иррациональности. Следует отметить, что обе части уравнения или неравенства должны быть неотрицательными.

На элективных курсах контроль выполнения самостоятельных работ учащимися может осуществляться следующими способами:

- 1) обмен решениями – данный способ позволяет учащимся научиться выявлять ошибки, как в собственных работах, так и в работах товарищей;
- 2) индивидуальное домашнее задание (ИДЗ) – этот метод контроля предоставляет учащимся возможность применять те способы решения уравнений и неравенств с модулем, которые они считают наиболее целесообразными;
- 3) проведение стандартных самостоятельных работ.

2.3 Конспекты уроков

Конспект урока на тему «Решение уравнений с модулем»

Класс: 11

Тип урока. Открытие нового знания.

Цели урока.

Образовательные: обобщить и систематизировать знания о модуле числа; сформировать умения решать уравнения с модулем различными методами.

Развивающие: развить умение классифицировать уравнения с модулем по методу решения; развить математическую речь и самостоятельность.

Воспитательные: сформировать ответственность за результат учебной деятельности; воспитать умение работать в группе.

Учебник: Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений (профильный уровень). М. : Мнемозина, 2014. 266 с.

Структура урока.

- 1) Организационный момент.
- 2) Актуализация знаний.
- 3) Целеполагание.
- 4) Открытие нового знания.
- 5) Первичное закрепление.
- 6) Подведение итогов урока и рефлексия.

Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые УУД
1. Организационный момент	Приветствует учащихся, проверяет готовность к уроку.	Приветствуют учителя, настраиваются на работу.	
2. Актуализация знаний	<p>– Ребята, в 6 классе мы с вами изучали такое понятие, как модуль. 1 слайд презентации (прил. 1). Давайте попробуем вспомнить определение модуля. 2 слайд презентации (прил. 2)</p> <p>– Кроме определения модуля, мы с вами изучали основные свойства. Есть ли 2</p>	<p>– Модуль – расстояние от начала координат до точки, соответствующей этому числу на числовой прямой, независимо от его знака.</p> <p>2 человека выходят к доске, остальные устно работают с учителем.</p>	<p>1. Познавательные: структурирование знаний, выбор наиболее эффективных способов решения задач.</p> <p>2. Регулятивные: принятие и сохранение учебной задачи, оценка.</p> <p>3. Коммуникативные: умение слушать и вступать в диалог, участие в коллективном обсуждении.</p>

	<p>человека, которые готовы выйти к доске и написать свойства модуля? (Учитель вызывает двух учеников, остальных спрашивает устно). 3 слайд презентации (прил. 3)</p> <p>– На слайде представлены уравнения, вам необходимо устно решить их по цепочке. 4 слайд презентации (прил. 4)</p> <p>а) $x = 235$ б) $x = 512$</p>	<p>Свойства модуля:</p> <p>1) $a \geq 0$; 2) $a \geq a$; 3) $a ^2 = a^2$; 4) $ab = a \cdot b$; 5) $\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }$; 6) $-a = a$, при $a \geq 0$; 7) $-a = a$.</p> <p>Устно решают уравнения, представленные на слайде.</p> <p>а) $x = \pm 235$ б) $x = \pm 512$ в) решений нет, так как модуль не может быть отрицательным</p>	<p>4. Личностные: самоопределение, самооценка.</p>
--	--	---	--

	<p>в) $a = -24$ г) $a + 10 = 12$ д) $x = 54$ е) $a - 241 = 335$</p> <p>– На доске написаны уравнения, сможете ли вы их решить?</p> <p>а) $x - 3 = x + 1$ б) $y - 14 = 28y$ в) $c - 15 + c + 24 = 13c$</p> <p>– Такие уравнения мы с вами еще не решали,</p>	<p>г) $a = -22$ или $a = 2$ д) $x = \pm 54$ е) $a = -94$ или $a = 576$</p> <p>Пытаются решить уравнения, предлагают свои варианты решения.</p>	
--	---	---	--

	сегодня мы научимся это делать.		
3. Целеполагание	<p>– Ребята, с чего мы начали сегодняшний урок?</p> <p>– Посмотрите на доску и подумайте, чем мы с вами будем заниматься на уроке и сформулируйте тему урока.</p> <p>– Все верно, запишите в своих тетрадях число, классную работу и тему</p>	<p>– Мы вспоминали определение и основные свойства модуля, решали простые уравнения с модулем.</p> <p>– Мы будем учиться решать более сложные уравнения с модулем. Тема урока «Решение уравнений с модулем».</p>	<p>1. Регулятивные: целеполагание, планирование, прогнозирование.</p> <p>2. Познавательные: самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели, осознанное и произвольное построение речевого высказывания.</p> <p>3. Коммуникативные: участие в коллективном обсуждении, планирование учебного</p>

	<p>рока «Решение уравнений с модулем».</p> <p>5 слайд презентации (прил. 5)</p> <p>– Как вы считаете, какие мы можем поставить цели на этот урок?</p>	<p>– Узнать, какие виды уравнений с модулем бывают, научиться решать эти уравнения, потренироваться решать уравнения с модулем разного уровня сложности.</p>	<p>сотрудничества с учителем и одноклассниками.</p>
--	---	--	---

	<p>по какому принципу это сделали.</p>	<p>в) $d + 18 = d - 12$ 2 группа: б) $y - 14 = 28y$ е) $a + 345 = 12a$ 3 группа: г) $c - 15 + c + 24 = c$ д) $x + 23 + x - 6 = x$</p> <p>В первой группе и в правой, и в левой частях уравнения стоят модули, во второй группе в левой части уравнений модуль, в правой части одночлен, в 3 группе в левой части</p>	<p>познавательных интересов, самоопределение.</p>
--	--	---	---

	<p>– Все правильно. Сегодня мы с вами научимся решать уравнения таких трех видов. В первой группе, как вы сказали, в обеих частях уравнения стоят модули. Это первый тип уравнений, который мы рассмотрим сегодня. 7 слайд презентации (прил. 7).</p> <p>– Запишите в общем виде:</p> $ f(x) = g(x) .$ <p>Так как $a = b$, при</p>	<p>уравнения стоит сумма двух модулей, а в правой части одночлен.</p> <p>– Записывают формулу в тетрадях.</p>	
--	---	---	--

	<p>условии, что $a = \pm b$, то</p> $ f(x) = g(x) \leftrightarrow$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$ $ f(x) = g(x) $ $\leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = 0$ $\leftrightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) \leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x)$ <p>– Во второй группе представлены уравнения вида $f(x) = g(x)$.</p> <p>1 способ. Решение исходного уравнения эквивалентно решению совокупности уравнений:</p>	<p>– Записывают в тетрадах.</p>	
--	---	---------------------------------	--

	$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$ <p>и последующей проверке соблюдения условия $g(x) \geq 0$ для каждого из найденных значений неизвестного.</p> <p>2 способ. Так как $f(x) = f(x)$, если $f(x) \geq 0$; $f(x) = -f(x)$, если $f(x) < 0$; то уравнение $f(x) = g(x)$ равнозначно следующей совокупности систем:</p> $\left[\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0, \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \right.$		
--	---	--	--

	<p>В первой системе после решения уравнения $f(x) = g(x)$ осуществляется проверка соблюдения условия $f(x) \geq 0$. Аналогичные действия выполняются и для второй системы. 8 слайд презентации (прил. 8)</p> <p>– Давайте найдем способ решения уравнений из 3 группы с помощью конкретного примера: $x^2 - x + x - 2 = x^2 - 2$. Решение представлено</p>		
--	---	--	--

– Записывают в тетрадях.

	на 9 слайде презентации (прил. 9)		
5. Первичное закрепление	– Откройте учебники на странице 180, выполняем задачи №29.8 (а, б); №29.13 (а, б); №29.29 (а, б). На каждый номер выходит два человека, остальные	Выполняют задания в тетрадах и у доски.	1. Регулятивные: контроль, коррекция, самоконтроль. 2. Познавательные: применение полученных знаний, структурирование знаний, рефлексия

	выполняют задание в тетрадях.		способов и условий действия. 3. Личностные: развитие познавательных интересов, самооценка.
6. Рефлексия	<p>– Наш урок подходит к концу, давайте вспомним, чем мы занимались на уроке?</p> <p>– С помощью метода «Три М» назовите три момента, которые у вас получились, и предложите одно действие для улучшения работы на следующем уроке.</p> <p>– Домашнее задание:</p>	<p>– Мы изучали виды уравнений с модулем и учились их решать.</p> <p>– Отвечают на вопрос учителя.</p> <p>– Записывают домашнее</p>	<p>1. Регулятивные: оценка, саморегуляция, коррекция, прогнозирование, целеполагание.</p> <p>2. Познавательные: рефлексия способов и условий действия, структурирование знаний.</p> <p>3. Коммуникативные: умение с достаточной полнотой и точностью</p>

	<p>№29.8 (в, г); №29.13 (в, г); №29.29 (в, г). 10 слайд презентации (прил. 10) – Всем спасибо за урок, до свидания!</p>	задание.	<p>выражать свои мысли, участие в коллективном обсуждении.</p>
--	--	----------	--

Конспект урока на тему «Решение неравенств с модулем»

Класс: 11

Тип урока. Открытие нового знания

Цели урока.

Образовательные: обобщить и систематизировать знания о модуле числа; сформировать умения решать неравенства с модулем различными методами.

Развивающие: развить умение классифицировать неравенства с модулем по методу решения; развить математическую речь и самостоятельность.

Воспитательные: сформировать ответственность за результат учебной деятельности; воспитать умение работать в группе.

Учебник: Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений (профильный уровень). М. : Мнемозина, 2014. 266 с.

Структура урока.

- 1) Организационный момент.
- 2) Актуализация знаний.
- 3) Целеполагание.
- 4) Открытие нового знания.
- 5) Первичное закрепление.
- 6) Подведение итогов урока и рефлексия.

Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые УУД
1. Организационный момент	Приветствует учащихся, проверяет готовность к уроку.	Приветствуют учителя, готовятся к уроку.	
2. Актуализация знаний	<p>– Давайте вспомним, чем мы занимались на нескольких предыдущих уроках?</p> <p>1 слайд презентации (прил. 11)</p> <p>– Назовите основные свойства модуля.</p>	<p>– Мы учились решать уравнения с модулем.</p> <p>Свойства модуля:</p> <p>1) $a \geq 0$;</p> <p>2) $a \geq a$;</p> <p>3) $a ^2 = a^2$;</p> <p>4) $ab = a \cdot b$;</p> <p>5) $\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }$;</p> <p>6) $-a = a$, при $a \geq 0$;</p> <p>7) $-a = a$.</p>	<p>1. Познавательные: структурирование знаний, выбор наиболее эффективных способов решения задач.</p> <p>2. Регулятивные: принятие и сохранение учебной задачи, оценка.</p> <p>3. Коммуникативные: умение слушать и вступать в диалог, участие в коллективном обсуждении.</p>

	<p>– Сколько способов решения уравнений с модулем мы с вами изучили?</p> <p>– На слайде записаны неравенства, решите их в тетрадях.</p> <p>2 слайд презентации (прил. 12)</p> <p>а) $x < 7$</p> <p>б) $x + 5 > 7$</p> <p>в) $x - 8 < 7$</p> <p>г) $5x - 1 > 1$</p> <p>– На доске записаны неравенства, попробуйте решить их в тетрадях.</p> <p>1) $2x - 1 > 4x$</p>	<p>– Мы изучили 3 способа. (перечисляют способы решения уравнений)</p> <p>Решают неравенства в тетрадях.</p> <p>а) $-7 < x < 7$</p> <p>б) $x \in (-\infty; -12) \cup (2; +\infty)$</p> <p>в) $x \in (1; 15)$</p> <p>г) $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{2}{15}; +\infty)$</p> <p>Пробуют решить неравенства в тетрадях, предлагают свои варианты решения</p>	<p>4. Личностные:</p> <p>самоопределение, самооценка.</p>
--	---	---	---

	<p>2) $5x + 13 < x + 3$</p> <p>3) $2a + 13 > a$</p> <p>4) $a - 9 < a + 8$</p> <p>– Такие неравенства мы с вами еще не умеем решать.</p>		
3. Целеполагание	<p>– Ребята, чем мы занимались с вами в самом начале урока?</p> <p>– Посмотрите на доску и подумайте, чем мы с вами будем заниматься на уроке и сформулируйте тему</p>	<p>– Мы вспоминали основные свойства модуля, вспоминали способы решения уравнений с модулем.</p> <p>– Мы будем учиться решать неравенства с модулем.</p> <p>Тема урока «Решение неравенств с модулем».</p>	<p>1. Регулятивные: целеполагание, планирование, прогнозирование.</p> <p>2. Познавательные: самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели,</p>

	<p>рока.</p> <p>– Все верно, запишите в своих тетрадях число, классную работу и тему рока «Решение неравенств с модулем».</p> <p>3 слайд презентации (прил. 13)</p> <p>– Как вы считаете, какие мы можем поставить цели на этот урок?</p>	<p>– Научиться решать неравенства с модулем, потренироваться решать неравенства с модулем разного уровня сложности.</p>	<p>осознанное и произвольное построение речевого высказывания.</p> <p>3. Коммуникативные: участие в коллективном обсуждении, планирование учебного сотрудничества с учителем и одноклассниками.</p>
4. Открытие нового знания	<p>– Неравенства, которые написаны на доске, можно записать в общем виде:</p> $ f(x) \leq g(x) \text{ и } f(x) \geq g(x).$	Записывают в тетрадях.	<p>1. Познавательные: поиск и выделение необходимой информации,</p>

	<p>Такие неравенства можно решать несколькими способами:</p> <p>1 способ. Указанное неравенство $f(x) \leq g(x)$ равносильно следующей совокупности, состоящей из двух систем:</p> $\begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases} \end{cases}$ <p>Аналогичным образом может быть рассмотрено неравенство $f(x) \geq g(x)$.</p> <p>4 слайд презентации (прил. 14)</p>		<p>структурирование знаний, выбор наиболее эффективных способов решения задач, формулирование проблемы.</p> <p>Регулятивные: планирование, контроль, оценка.</p> <p>2. Коммуникативные: планирование учебного сотрудничества, умение задавать вопросы.</p> <p>3. Личностные: самооценка, развитие познавательных интересов, самоопределение.</p>
--	--	--	--

	<p>3 способ. Неравенство $f(x) \leq g(x)$ имеет решение при $g(x) \geq 0$, поэтому $f(x) \leq g(x) \leftrightarrow$</p> $\begin{cases} f^2(x) - g^2(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$ <p>Неравенство $f(x) > g(x)$ выполняется для всех x из области определения функции $f(x)$, при которых $g(x) < 0$. Если же $g(x) \geq 0$, то $f(x) \geq g(x) \leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \geq 0$. Таким образом, для решения неравенства $f(x) > g(x)$ требуется проанализировать два случая.</p>		
--	--	--	--

	<p>5 слайд презентации (прил. 15)</p> <p>3 способ. При решении неравенства $f(x) \leq g(x)$ следует учитывать, что оно эквивалентно двойному неравенству $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, при условии, что $g(x) \geq$ 0. Данное утверждение может быть также сформулировано следующим образом:</p> $ f(x) \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -g(x), \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}.$ <p>Слайд 6 презентации (прил. 16)</p>		
--	---	--	--

<p>5. Первичное закрепление</p>	<p>– Откройте учебники на странице 184, выполните №29.31 (а, б); №29.32 (а, б); №29. 34 (а, б). На каждый номер выходят 2 ученика к доске, остальные выполняют задания в тетрадях.</p>	<p>Выполняют задания в тетрадях и у доски.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Регулятивные: контроль, коррекция, самоконтроль. 2. Познавательные: применение полученных знаний, структурирование знаний, рефлексия способов и условий действия. 3. Личностные: развитие познавательных интересов, самооценка.
---------------------------------	--	--	--

<p>6. Подведение итогов урока и рефлексия</p>	<p>– Наш урок подходит к концу. Давайте вспомним, чем мы занимались на сегодняшнем уроке.</p> <p>– Что у вас получилось, а что не получилось на уроке?</p> <p>– Домашнее задание: №29.31 (в, г); №29.32 (в, г); №29. 34 (в, г). Слайд 7 презентации (прил. 7)</p>	<p>– Мы учились решать неравенства с модулем.</p> <p>– Отвечают на вопросы учителя.</p> <p>– Записывают домашнее задание.</p>	<p>1. Регулятивные: оценка, саморегуляция, коррекция, прогнозирование, целеполагание.</p> <p>2. Познавательные: рефлексия способов и условий действия, структурирование знаний.</p> <p>3. Коммуникативные: умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли, участие в коллективном обсуждении.</p>
---	---	---	--

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения выпускной квалификационной работы на тему «Методы решения уравнений и неравенств с модулем» была достигнута поставленная цель и решены сформулированные задачи.

В первой главе исследования был систематизирован теоретический материал, касающийся понятия модуля числа, его свойств, а также основных методов решения уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля. Рассмотрены такие методы, как: решение на основе определения модуля, метод интервалов, метод замены переменной, графический метод, метод возведения в квадрат, а также метод перехода к равносильным совокупностям и системам.

Проанализированы задания ЕГЭ по профильной математике, содержащие переменную под знаком модуля. Рассмотрены и решены задачи из заданий №15 (неравенства) и №18 (задачи с параметром), выявлены основные методы их решения. Задания с модулем регулярно включаются в КИМ ЕГЭ, относятся к повышенному и высокому уровням сложности и играют важную дифференцирующую роль при отборе абитуриентов для поступления в высшие учебные заведения.

Во второй главе был проведен анализ содержания темы «Уравнения и неравенства с модулем» в школьных учебниках по математике, алгебре и началам математического анализа для 6 – 9 классов. Установлено, что в большинстве рассмотренных учебников понятие модуля вводится преимущественно на геометрической основе (как расстояние), однако задания, содержащие модуль, часто носят эпизодический характер и не охватывают всех методов решения. Выявлено, что систематическое изучение уравнений и неравенств с модулем в полном объеме представлено лишь в отдельных учебных пособиях, что подтверждает необходимость использования дополнительных дидактических материалов и разработки методических рекомендаций.

В работе были определены методические особенности изучения данной темы в школе: акцент на мотивацию при введении понятия модуля, использование наглядных и иллюстративных приемов, постепенное усложнение заданий, а также применение различных методов контроля знаний.

Разработаны конспекты двух уроков: по теме «Решение уравнений с модулем» и «Решение неравенств с модулем».

Таким образом, проведенное исследование подтверждает, что тема «Уравнения и неравенства с модулем» занимает значимое место в школьном курсе математик и в структуре итоговой аттестации. Разработанные в работе методические рекомендации, конспекты уроков и подборка заданий могут быть применены в образовательном процессе, на элективных курсах и при подготовке учащихся к ЕГЭ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1) Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2020. 256 с.
- 2) Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович [и др.]; М. : Бином. Лаборатория знаний, 2020. 367 с.
- 3) Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2020. 287 с.
- 4) Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович [и др.]; М. : Бином. Лаборатория знаний, 2020. 367 с.
- 5) Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2020. 271 с.
- 6) Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович [и др.]; М. : Бином. Лаборатория знаний, 2020. 367 с.
- 7) Виленкин Н. Я. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. организаций : в 2 ч. / Н. Я. Виленкин [и др.]; 38-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2020. 328 с.
- 8) Зенкович А. П. Об условиях рационального сочетания методических приемов обучения на уроках математики / А. П. Зенкович // Математика в школе. 2021. № 4. С. 24–29.
- 9) Кириллова М. Н. Математика : 6-й класс : контрольно-проверочные работы : практическое пособие (по учебникам А. Г. Мерзляка, Ю. Н. Макарычева, А. Г. Мордковича, Ш. А. Алимова и др.) / М. : М-Книга, 2020. 95 с.
- 10) Колесникова С. И. Математика. Решение сложных задач ЕГЭ : учеб.-метод. пособие / С. И. Колесникова. 5-е изд., испр. М. : Айрис-пресс, 2020. 288 с.

11) Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / А. Г. Мордкович, И. И. Зубарева. 4-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2020. 287 с.

12) Севрюков П. Ф. Уравнения и неравенства с модулями и их решение / П. Ф. Севрюков, А. Н. Смоляков. 3-е изд., испр. и доп. М. : Илекса, 2020. 112 с.

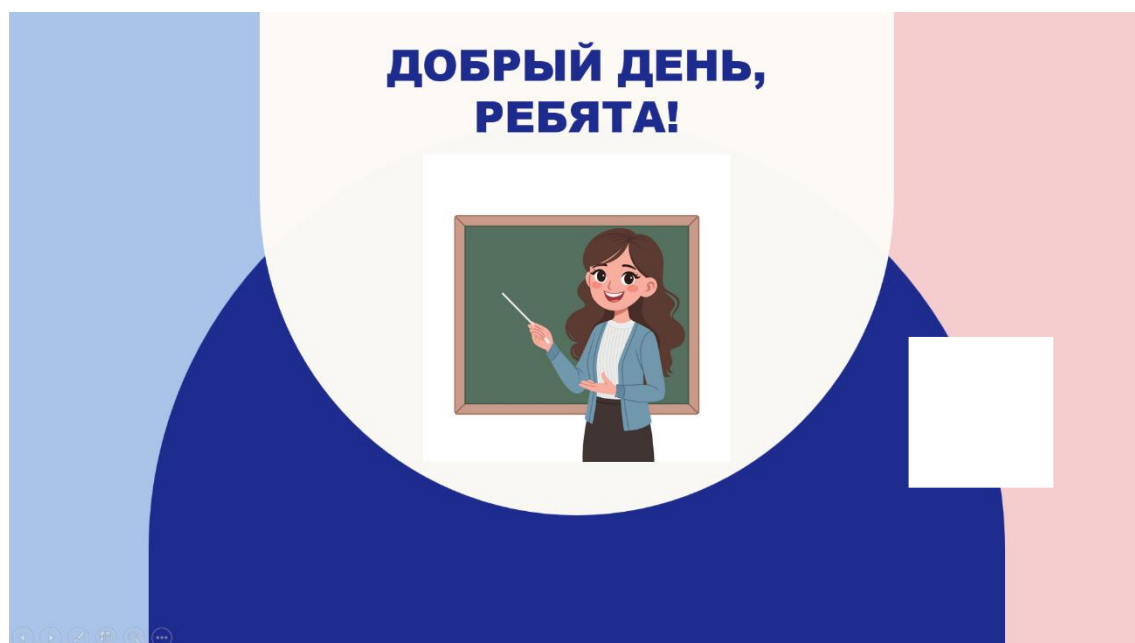
13) Федеральный институт педагогических измерений (ФИПИ). ЕГЭ 2025. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты : 30 вариантов / под ред. И. В. Ященко. М. : Национальное образование, 2024. 240 с.

14) Шестаков С. А. ЕГЭ. Математика. Задачи с параметром : учеб.-метод. пособие. М. : МЦНМО, 2020. 288 с.

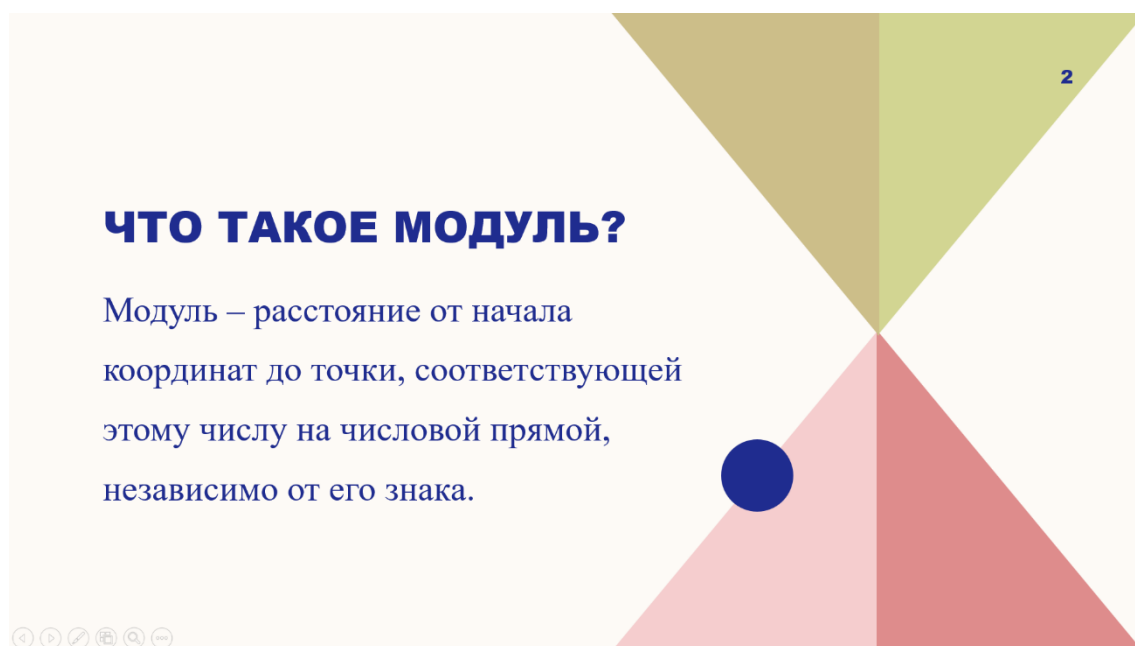
15) Яковлев И. В. Методические приемы обучения решению уравнений и неравенств, содержащих модуль / И. В. Яковлев. М. : Чистые пруды, 2020. 32 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1



Приложение 2



Приложение 3

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МОДУЛЯ

- 1) $|a| \geq 0$;
- 2) $|a| \geq a$;
- 3) $|a|^2 = a^2$;
- 4) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- 5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;
- 6) $|-a| = a$, при $a \geq 0$;
- 7) $|-a| = |a|$.



Приложение 4

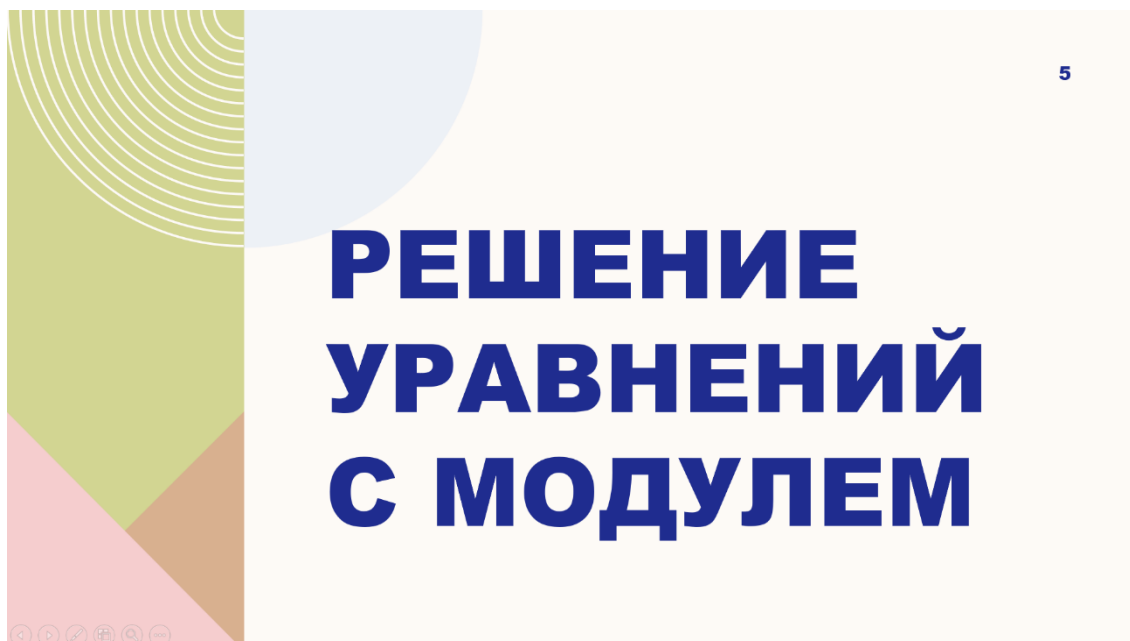
РЕШИТЕ УРАВНЕНИЯ

- а) $|x| = 235$
- б) $|x| = 512$
- в) $|a| = -24$
- г) $|a + 10| = 12$
- д) $|x| = 54$
- е) $|a - 241| = 335$

ОТВЕТЫ:

- а) $x = \pm 235$
- б) $x = \pm 512$
- в) решений нет, так как модуль не может быть отрицательным
- г) $a = -22$ или $a = 2$
- д) $x = \pm 54$
- е) $a = -94$ или $a = 576$

Приложение 5



Приложение 6

**ЗАДАНИЕ: РАЗБИТЬ
УРАВНЕНИЯ НА 3 ГРУППЫ**

а) $|x - 3| = |x + 1|$

б) $|y - 14| = 28y$

в) $|d + 18| = |d - 12|$

г) $|c - 15| + |c + 24| = c$

д) $|x + 23| + |x - 6| = x$

е) $|a + 345| = 12a$

6

Decorative elements: A pink triangle in the top-left, a blue triangle in the bottom-left, and a pink triangle in the bottom-right. Navigation icons are at the bottom left.

7

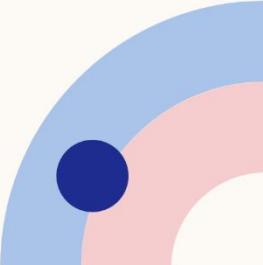
1 ВИД УРАВНЕНИЙ

$|f(x)| = |g(x)|.$

Так как $|a| = |b|$, при условии, что $a = \pm b$, то $|f(x)| = |g(x)|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) + g(x))(f(x) - g(x))$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x)$$


8

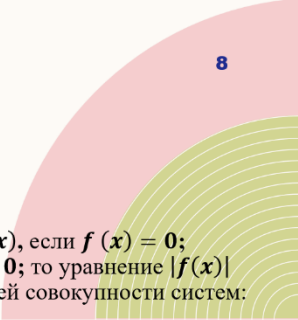
2 ВИД УРАВНЕНИЙ

$|f(x)| = g(x)$

1 способ. Решение исходного уравнения эквивалентно решению совокупности уравнений: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$ и последующей проверке соблюдения условия $g(x) \geq 0$ для каждого из найденных значений неизвестного.

2 способ. Так как $|f(x)| = f(x)$, если $f(x) \geq 0$; $|f(x)| = -f(x)$, если $f(x) < 0$; то уравнение $|f(x)| = g(x)$ равнозначно следующей совокупности систем: $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$

В первой системе после решения уравнения $f(x) = g(x)$ осуществляется проверка соблюдения условия $f(x) \geq 0$. Аналогичные действия выполняются и для второй системы.






9

3 ВИД УРАВНЕНИЙ

Решить уравнение $|x^2 - x| + |x - 2| = x^2 - 2$.

Решение. Подмодульные выражения обращаются в нуль при $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$. Эти числа разбивают координатную прямую на 4 промежутка, следовательно, необходимо решить 4 системы.

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ x^2 - x - x + 2 = x^2 - 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x = 2. \end{cases} \text{ Система не имеет решений.}$$

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ -x^2 + x - x + 2 = x^2 - 2. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1, \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases} \text{ Система решений не имеет.}$$

$$\begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ x^2 - x - x + 2 = x^2 - 2 \end{cases} \leftrightarrow x = 2.$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ x^2 - x + x - 2 = x^2 - 2 \end{cases} \leftrightarrow x > 2.$$

Ответ: $x \in [2; +\infty)$.



10

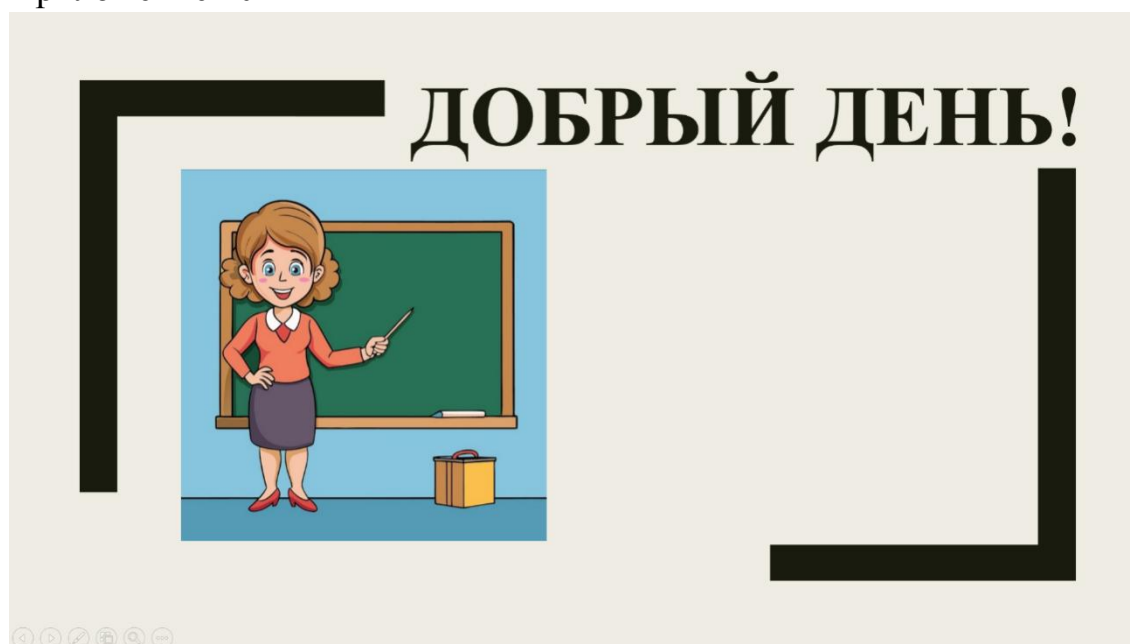
ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

№29.8 (в, г); №29.13 (в, г);

№29.29 (в, г)



Приложение 10



Приложение 11

Решите неравенства

а) $|x| < 7$

б) $|x + 5| > 7$

в) $|x - 8| < 7$

г) $|5x - 1| > 1$

ТЕМА УРОКА

**Решение неравенств с
модулем**



1 способ решения

Указанное неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ равносильно следующей совокупности, состоящей из двух систем:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x) \\ f(x) < 0, \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$$

Аналогичным образом может быть рассмотрено неравенство $|f(x)| \geq |g(x)|$.



2 способ решения

Неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ имеет решение при $g(x) \geq 0$, поэтому

$$|f(x)| \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) - g^2(x) \leq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Неравенство $|f(x)| > g(x)$ выполняется для всех x из области определения функции $f(x)$, при которых $g(x) < 0$. Если же $g(x) \geq 0$, то $|f(x)| \geq g(x) \leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) \geq 0$. Таким образом, для решения неравенства $|f(x)| > g(x)$ требуется проанализировать два случая.



3 способ решения

При решении неравенства $|f(x)| \leq g(x)$ следует учитывать, что оно эквивалентно двойному неравенству

$-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$, при условии, что $g(x) \geq 0$. Данное утверждение может быть также сформулировано следующим образом: $|f(x)| \leq$

$$g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -g(x), \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$



Домашнее задание

№29.31 (в, г); №29.32 (в, г);

№29. 34 (в, г).



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 18 » 09 2025 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Андрияшиной Ирины Романовны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методы решения уравнений и неравенств с модулем»

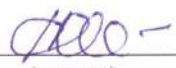
Утверждена приказом по университету от « 28.09 » 2025 г. № 1103/0

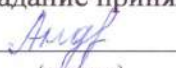
Срок сдачи студентом законченной работы « 15 » 05 2026 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение и анализ литературы по теме исследования	Ноябрь-декабрь 2025 г.	Выполнено 
2.	Определение цели обучения и места уравнений и неравенств с модулем в школьном курсе математики	Январь 2026 г.	Выполнено 
3.	Решение и анализ уравнений и неравенств с модулем из заданий ЕГЭ	Февраль-март 2026 г.	Выполнено 
4.	Анализ методики изучения неравенств и уравнений с модулем	Март 2026 г.	Выполнено 
5.	Разработка конспектов двух уроков для учащихся 11 классов	Март-апрель 2026 г.	Выполнено 
6.	Оформление библиографического списка	Май 2026 г.	Выполнено 
7.	Оформление работы, подготовка презентации и выступления	Май-июнь 2026 г.	Выполнено 

Дата выдачи задания «11» 09 2025 г.

Руководитель  Никитин Н. Д.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
 Андрияшина И. Р.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
Гулякову А.Д.
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Андрিয়াшиной Ирины Романовны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Андрияшина Ирина Романовна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методы решения уравнений и неравенств с модулем», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



ПОДПИСЬ
27.04.26

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 27.04.26

ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР 

ПОДПИСЬ
Никитин Н. Д.
Ф.И.О.

ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему: «Методы решения уравнений и неравенств с модулем» студентки 4 курса Андрияшиной Ирины Романовны

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

профиля подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Никитин Н. Д.



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://vuz.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

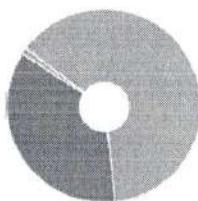
Автор: Андрияшина Ирина Романовна

Название документа: Методы решения уравнений и неравенств с модулем

Проверяющий: Никитин Николай Дмитриевич

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
35,65%

Оригинальность:
63,25%

ИИ-контент:
0%

Цитирование:
1,1%

Самоцитирование:
0%

1 «Совпадения», «Цитирование», «Самоцитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображающими в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

2 Проверено: 90,6% текста документа, исключено из проверки: 9,4% текста документа. Разделы и элементы, отмеченные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография, Приложение, Таблица.

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично совпадающие с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, совпадающих с совпадениями в общем объеме текста.
- **Самоцитирование** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментами текста источника, автором или создателем которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирование** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленному цитированию. Цитирование относится также к цитируемым фрагментам библиографических записей, найденным модулем поиска «ПС-Горно» нормативно-правовых документов. Показатель «Цитирования» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источники** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводилась проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не совпадающие ни с одним из найденных источников. Показатель «Оригинальности» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 10

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 28.04.2026 16:57:55

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 57

Символов в тексте: 57219

Слов в тексте: 8190

Число предложений: 1892

Комментарий: не указан

28.04.2026
ДД.ММ.ГГГГ.

подпись

Никитин Н.Д.
И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методы решения уравнений и неравенств с модулем»
студентки Андрияшиной Ирины Романовны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль
подготовки «Математика», гр. 22ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Андрияшиной Ирины Романовны посвящена вопросам методики обучения школьников решению уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля. Этим вопросам в школьном курсе математики не уделяется должного внимания, что является большой ошибкой, так как задания с модулем встречаются как на олимпиадах по математике, так и в заданиях Единого государственного экзамена.

Актуальность выбранной темы состоит и в том, что умение решать уравнения и неравенства с неизвестной под знаком модуля позволяет проверить истинные знания ученика, а не его натренированность в процессе решения однотипных задач.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

В первой главе рассмотрены основные методы решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля. Здесь же приводятся способы решения уравнений и неравенств с параметром, содержащих неизвестную под знаком модуля.

Приводятся примеры решения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, в заданиях ЕГЭ.

Во второй главе рассмотрены методические особенности изучения уравнений и неравенств, содержащих неизвестную под знаком модуля, проведен сравнительный анализ школьных учебников по данной теме. Разработаны технологические карты двух уроков.

Работа Андрияшиной Ирины Романовны является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Андрияшиной Ирины Романовны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР Никитин Николай Дмитриевич, доцент кафедры
«Математическое образование», к.ф.-м.н. 