

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Элементы алгебры многочленов на факультативе по математике»

Студент

Е.С. 06.05.25
(подпись, дата)

Страхова Екатерина Сергеевна
(ФИО полностью)

Руководитель

М.О. 06.05.25
(подпись, дата)

Монахова О.А.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

М- 23.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой

Л.С. 02.06.25
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 5(отл) (протокол заседания ГЭК от 27.06.25 № 18)

Секретарь ГЭК

М- 27.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРЫ МНОГОЧЛЕНОВ	6
1.1 Основные понятия алгебры многочленов	6
1.2 Цели обучения теме «Многочлены» в курсе алгебры основной школы	15
1.3 Анализ учебной литературы по теме «Многочлены»	16
1.4 Обзор олимпиадных задач по теме «Многочлены»	22
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРЫ МНОГОЧЛЕНОВ НА ФАКУЛЬТАТИВЕ ПО МАТЕМАТИКЕ	28
2.1 Пояснительная записка к факультативным занятиям по теме «Многочлены»	28
2.2 Учебно-тематический план факультативных занятий по теме «Многочлены»	29
2.3 Материал для факультативных занятий по теме «Многочлены»	30
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	59
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	60

ВВЕДЕНИЕ

В современном образовательном процессе важное место занимает углублённое изучение математических дисциплин, которые являются основой для формирования целостного мировоззрения. Они не только развивают логическое и абстрактное мышление, но и учат системному подходу к решению задач, что является одним из самых важных навыков в современном мире. Математические дисциплины не просто дают набор формул и методов – они формируют особый способ мышления, который позволяет видеть мир как систему взаимосвязанных закономерностей. Алгебра многочленов, в частности, представляет собой ключевую тему, которая находит применение в различных областях науки и техники, таких как физика, экономика, информатика и инженерия.

При изучении темы «Многочлены» обучающиеся сталкиваются со сложностью понимания материала из-за обильного количества понятий и формул, новизны символического обозначения. Кроме этого, необходимо применять полученные знания о многочленах не только на уроках по данной теме, но и при решении олимпиадных задач и задач повышенной сложности. В таком случае возникает потребность в рассмотрении темы «Многочлены» на внеурочных, индивидуальных и групповых занятиях для основательного, детального изучения представленного материала.

Таким образом, работа на тему «Элементы алгебры многочленов на факультативе по математике» является актуальной, поскольку она направлена на улучшение процесса обучения теме «Многочлены», разработку методических рекомендаций и создание учебных материалов, способствующих углублённому освоению темы обучающимися.

Цель работы – разработать факультативные занятия для обучения по теме «Многочлены».

В соответствии с целью можно определить следующие *задачи*:

- 1) рассмотреть основные понятия алгебры многочленов;
- 2) выявить цели обучения теме «Многочлены» в курсе алгебры основной школы;
- 3) проанализировать содержание учебников алгебры 7-11 классов базового и углублённого уровней по данной теме;
- 4) проанализировать содержание олимпиадных задач по теме «Многочлены»;
- 5) разработать программу факультативных занятий по теме «Многочлены».

Объект работы – процесс обучения математике в рамках внеурочной работы.

Предметом являются методические особенности преподавания элементов алгебры многочленов на факультативе по математике.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что в ней представлены основные понятия алгебры многочленов, а также анализ учебной литературы различных авторов для 7-11 классов базового и углублённого уровней по теме «Многочлены».

Практическая значимость работы заключается в разработке программы факультативных занятий по теме «Многочлены», которая может быть использована учителями во время внеурочной работы для подготовки обучающихся к экзаменам, олимпиадам.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников.

В первой главе рассмотрены основные понятия алгебры многочленов, цели обучения теме «Многочлены» в курсе алгебры основной школы, проведён анализ учебной литературы различных авторов для 7-11 классов базового и углублённого уровней по теме «Многочлены», представлен обзор олимпиадных задач по данной теме.

Во второй главе представлена разработанная программа и задачный материал для факультативных занятий по теме «Многочлены» для 10 класса.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРЫ МНОГОЧЛЕНОВ

1.1 Основные понятия алгебры многочленов

Многочлены от одной переменной.

Многочлен от переменной x определяется как выражение вида:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ называют коэффициентами многочлена, $a_i x^i$ называют одночленом, переменная x принимает значения в R , n – наибольшая степень переменной, определяющая степень всего многочлена.

Используется краткая запись многочлена: $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

Два многочлена называются *равными*, если их степени совпадают и коэффициенты при одинаковых степенях переменной x равны:

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n b_i x^i \Leftrightarrow a_i = b_i.$$

Операция сложения многочленов определяется через сложение соответствующих коэффициентов. Пусть f и g – многочлены не обязательно одинаковой степени. Тогда:

$$f + g = \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{j=0}^m b_j x^j = \sum_{k=0}^p (a_i + b_j) x^k, \text{ где } p = \max\{n, m\}.$$

Операция умножения многочленов определяется через умножение одночленов с последующим приведением подобных слагаемых:

$$f \cdot g = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0) = a_n b_m x^{n+m} + \\ + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + \dots + a_0 b_0.$$

На множестве многочленов можно определить понятие *делимости без остатка*. Говорят, что многочлен $f(x)$ делится без остатка на многочлен $g(x)$, если существует многочлен положительной степени $h(x)$, что $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

Элемент x_0 называется *корнем* многочлена $f(x)$, если $f(x_0) = 0$, то есть $\sum_{i=0}^n a_i x_0^i = 0$.

Теорема 1. Многочлен $f(x)$ степени n имеет не более n корней.

Также можно определить деление многочленов с остатком. Частный случай деления многочлена на двучлен описывается теоремой 2.

Теорема 2. Для любого x_0 многочлен $f(x)$ можно единственным образом представить в виде:

$$f(x) = (x - x_0)g(x) + f(x_0), \quad (2)$$

где

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Подставим $f(x)$ и $g(x)$ в равенство (2) и раскроем скобки:

$$a_n x^n + \dots + a_0 = (x - x_0)(b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) + f(x_0).$$

$$a_n x^n + \dots + a_0 = b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - x_0 b_{n-1}) x^{n-1} + (b_{n-3} - x_0 b_{n-2}) x^{n-2} + \dots + (b_0 - x_0 b_1) x + (-x_0 b_0 + f(x_0)).$$

$$a_n = b_{n-1} \Rightarrow b_{n-1} = a_n,$$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - x_0 b_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 b_{n-1},$$

$$a_{n-2} = b_{n-3} - x_0 b_{n-2} \Rightarrow b_{n-3} = a_{n-2} + x_0 b_{n-2},$$

...

$$a_1 = b_0 - x_0 b_0 \Rightarrow b_0 = a_1 + x_0 b_1,$$

$$a_0 = f(x_0) - x_0 b_0 \Rightarrow f(x_0) = a_0 + x_0 b_0.$$

Коэффициенты многочлена $g(x)$ могут быть вычислены по схеме Горнера. Проиллюстрируем схему на примере.

Пример. Выполните деление многочлена $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ на двучлен $(x - 1)$.

Необходимо составить таблицу, в которой будет две строки, а столбцов — на два больше, чем степень многочлена. В данном случае степень многочлена $f(x)$ равна 3, значит — 5 столбцов.

В верхнюю строку, начиная со второй клетки, запишем по порядку все коэффициенты многочлена по убыванию степеней переменной многочлена $f(x)$.

Если какая-либо степень отсутствует, то записываем коэффициент, равный 0. В нижнюю левую клетку пишем число x_0 . В данном примере это число 1.

	1	1	-5	3
1				

Первый коэффициент переписываем из верхней клетки в нижнюю.

	1	1	-5	3
1	1			

Далее только что вписанное число умножаем на x_0 (из нижней левой клетки) и добавляем к следующему числу из первой строчки.

$$1 \cdot 1 + 1 = 2.$$

	1	1	-5	3
1	1	2		

Повторяем эту же последовательность действий с остальными коэффициентами.

$$1 \cdot 2 + (-5) = -3.$$

	1	1	-5	3
1	1	2	-3	

$$1 \cdot (-3) + 3 = 0.$$

	1	1	-5	3
1	1	2	-3	0

Число в правой нижней клетке – это остаток от деления. Числа, вписанные в нижнюю строку (кроме самого числа x_0) – это коэффициенты многочлена $g(x)$.

Таким образом, $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

Следствие (теорема Безу.) Многочлен $f(x)$ делится на $x - x_0$ тогда и только тогда, когда x_0 – его корень.

Наличие корней у многочлена $f(x)$ зависит от множества, над которым рассматривается данный многочлен.

Теорема 3. Если какое-то рациональное число является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то числитель этого числа является делителем свободного члена, а знаменатель является делителем старшего коэффициента.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_0 \in \mathbb{Z}.$$

$$x_0 = \frac{p}{q}, p \text{ и } q - \text{взаимно простые числа.}$$

$$\frac{a_n p^n}{q^n} + \frac{a_{n-1} p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + \frac{a_1 p}{q} + a_0 = 0. \text{ Домножим данное равенство на } q^n.$$

$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} \cdot q + \dots + a_1 p \cdot q^{n-1} + a_0 q^n = 0$. Заметим, что в полученной сумме слагаемые $a_n p^n, a_{n-1} p^{n-1} \cdot q, \dots, a_1 p \cdot q^{n-1}$ и 0 кратны p . Из этого следует: слагаемое $a_0 q^n$ тоже кратно p . Так как p и q – взаимно простые числа, значит p и q^n – тоже взаимно простые числа. И можно сделать вывод, что a_0 кратно p .

С другой стороны видим, что слагаемые $a_{n-1} p^{n-1} \cdot q, \dots, a_1 p \cdot q^{n-1}, a_0 q^n$ и 0 кратны q . Следовательно $a_n p^n$ кратно q . Так как p и q – взаимно простые числа, значит p^n и q – тоже взаимно простые числа. Согласно нашим выводам получаем, что a_n кратно q .

Следствие. Если приведённый многочлен (старший коэффициент которого равен 1) с целыми коэффициентами имеет рациональные корни, то эти корни целые и являются делителями свободного члена. Если никакой делитель свободного члена не является корнем приведённого многочлена с целыми коэффициентами, то у него нет рациональных корней.

Пример. Найдите корни многочлена $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

$$a_0 = -14.$$

$$x_0 = 1; -1; 2; -2; 7; -7; 14; -14.$$

Воспользуемся схемой Горнера:

	1	-6	15	-14
1	1	-5	10	-4
-1	1	-7	22	-36
2	1	-4	7	0

$-4 \neq 0 \Rightarrow 1$ не является корнем.

$-36 \neq 0 \Rightarrow -1$ не является корнем.

$0 = 0 \Rightarrow 2$ является корнем.

$$f(x) = (x - 2)(x^2 - 4x + 7)$$

$$x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$D = 16 - 28 = -12$$

$$x_1 = \frac{4 + 2i\sqrt{3}}{2} = 2 + i\sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{4 - 2i\sqrt{3}}{2} = 2 - i\sqrt{3}$$

Ответ: $x_1 = 2 + i\sqrt{3}$, $x_2 = 2 - i\sqrt{3}$, $x_3 = 2$.

Пусть $f(x)$ – многочлен и x_0 – его корень. По теореме Безу многочлен $f(x)$ делится на $x - x_0$. Но может быть и такое, что $f(x)$ делится не только на $x - x_0$, но и на $(x - x_0)^2$, а может и на более высокую степень $x - x_0$. Наибольшее целое число k при котором $f(x)$ делится на $(x - x_0)^k$ называется *кратностью корня* x_0 многочлена $f(x)$. Другими словами, кратность корня x_0 равна k , если $f(x)$ делится на $(x - x_0)^k$, но не делится $(x - x_0)^{k+1}$. Если $k > 1$, то x_0 – *кратный корень*. Если $k = 1$, то x_0 – *простой корень*.

Пример. Найдите кратность корня $x_0 = 1$ многочлена

$$f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 26x^2 - 31x + 11.$$

Используя схему Горнера, будем делить $f(x)$ на $x - 1$ до тех пор, пока не получим ненулевой остаток.

	1	-5	-2	26	-31	11
1	1	-4	-6	20	-11	0
1	1	-3	-9	11	0	
1	1	-2	-11	0		
1	1	-1	-12			

Из вычислений заметим, что $f(x)$ делится на $(x - x_0)^3$, но не делится на $(x - x_0)^4$. Значит, кратность корня $x_0 = 1$ многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 26x^2 - 31x + 11$ равна 3.

Ответ: кратность корня $x_0 = 1$ многочлена $f(x)$ равна 3.

Если многочлен $f(x)$ степени n имеет n корней (с учётом кратностей), то его коэффициенты могут быть выражены через корни и старший коэффициент по формулам Виета.

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \text{ где } a_0 \neq 0$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – корни многочлена, каждый из которых повторяется столько раз, какова его кратность.

Получаем, что коэффициент a_k ($k = 1, 2, \dots, n$) равен произведению $(-1)^k a_0$ на сумму всевозможных произведений по k элементов из $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -a_0(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \\
 a_2 &= a_0(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n), \\
 &\dots \\
 a_n &= (-1)^n a_0 x_1 x_2 \dots x_n.
 \end{aligned} \tag{3}$$

(3) – формулы Виета.

Формулы Виета также могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -\frac{a_1}{a_0}, \\
 x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_2}{a_0}, \\
 &\dots \\
 x_1 x_2 \dots x_n &= (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Пример. Запишите формулы Виета для многочлена

$$f(x) = 4x^3 - x^2 - 2x + 4.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2},$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{4}{4} = -1.$$

Многочлен, который может быть разложен в произведение двух многочленов положительной степени, называется *приводимым*.

Многочлен, который не может быть разложен в произведение двух многочленов меньшей степени, называется *неприводимым*.

Любой многочлен первой степени неприводим, так как произведение двух многочленов положительной степени всегда имеет степень ≥ 2 .

Теорема 4. (Критерий неприводимости многочлена над полем рациональных чисел – критерий Эйзенштейна). Если существует p – простое, что все коэффициенты многочлена $f(x)$ (кроме старшего) делятся на это число, и свободный член не делится на квадрат этого числа, то многочлен $f(x)$ неприводим в $Z[x]$.

Пример. Приводим ли многочлен $f(x) = x^4 - 2x + 2$ в $Z[x]$?

$$p = 2$$

$$x^4: 1 \text{ не кратно } 2,$$

$$x^3: 0 \text{ кратно } 2,$$

$$x^2: 0 \text{ кратно } 2,$$

$$x: -2 \text{ кратно } 2,$$

$$x^0: 2 \text{ не кратно } 2^2.$$

По критерию Эйзенштейна $f(x)$ неприводим в $Z[x]$.

Ответ: $f(x) = x^4 - 2x + 2$ неприводим в $Z[x]$.

Следствие. В кольце $Z[x]$ с целыми коэффициентами существуют неприводимые многочлены любой степени.

Многочлены от нескольких переменных.

Многочлен от переменных $x_1, \dots, x_k$ определяется как выражение вида:

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k}, \quad (5)$$

где $i_1 + i_2 + \dots + i_k$ – степень одночлена $x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \dots \cdot x_k^{i_k}$. Наивысшая степень одночлена определяет степень всего многочлена.

Одночлен $u = a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ считается старше одночлена $v = b x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$ (одночлен v – младше одночлена u), если либо $k_1 > l_1$, либо $k_1 = l_1$, но $k_2 > l_2$, либо $k_1 = l_1, k_2 = l_2$, но $k_3 > l_3$ и т. д. В этом случае $u > v$ (или $v < u$). Среди членов любого ненулевого многочлена $f(x_1, \dots, x_k)$ имеется член, который старше всех остальных. Он называется *старшим членом* многочлена $f(x_1, \dots, x_k)$.

Пример. У многочлена $f(x_1, x_2, x_3) = x_2^4 + x_1 x_2 x_3 + 3x_1 x_2 - x_2 x_3 + 2x_2 x_3^2$ старшим членом является одночлен $x_1 x_2 x_3$.

Равенство и операции над многочленами определяются аналогично многочлену от одной переменной.

Многочлен называется *однородным*, если степени всех одночленов одинаковые.

Многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *симметрическим*, если он не меняется при любой перестановки переменных, то есть если

$$f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6)$$

для любой перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$.

Пример.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$ – симметрический многочлен;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$ не является симметрическим многочленом, так как $f(x_1, x_3, x_2) = x_1^2 x_3 + x_3^2 x_2 + x_2^2 x_1 \neq f(x_1, x_2, x_3)$.

Любой симметрический многочлен есть линейная комбинация многочленов вида $S(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$, где $S(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$ – сумма

различных одночленов, которые получаются из $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ всевозможными перестановками переменных.

Отсюда вытекает, что всякий симметрический многочлен является суммой однородных симметрических многочленов.

Особую роль среди симметрических многочленов играют элементарные симметрические многочлены:

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ \sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \\ &\dots \\ \sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1x_2\dots x_n.\end{aligned}\tag{7}$$

Ещё одной важной серией симметрических многочленов являются степенные суммы:

$$S_k = S_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k.\tag{8}$$

Теорема 5. Всякий симметрический многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть представлен в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

Другими словами, можно найти такой многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных, что $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = f$.

Заметим, что:

$$\sigma_1^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n) = S(x_1^2) + 2S(x_1x_2).$$

Отсюда имеем:

$$S(x_1^2) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.\tag{9}$$

Далее видим: $\sigma_1\sigma_2 = S(x_1^2x_2) + 3S(x_1x_2x_3)$.

Получаем:

$$S(x_1^2x_2) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3.\tag{10}$$

Из равенства: $S(x_1^2)\sigma_1 = S(x_1^3) + S(x_1^2x_2)$ находим:

$$S(x_1^3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.\tag{11}$$

Лемма 1. Пусть $u = ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ – старший член симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Тогда:

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n. \quad (12)$$

1.2 Цели обучения теме «Многочлены» в курсе алгебры основной школы

В федеральной рабочей программе основного общего образования (базовый уровень) от 18 мая 2023 года [1] указывается, что в процессе изучения линии «Алгебраические выражения» обучающийся в 7-9 классах научится: «Использовать алгебраическую терминологию и символику, применять её в процессе освоения учебного материала. Находить значения буквенных выражений при заданных значениях переменных. Выполнять преобразования целого выражения в многочлен приведением подобных слагаемых, раскрытием скобок. Выполнять умножение одночлена на многочлен и многочлена на многочлен, применять формулы квадрата суммы и квадрата разности. Осуществлять разложение многочленов на множители с помощью вынесения за скобки общего множителя, группировки слагаемых, применения формул сокращённого умножения. Применять преобразования многочленов для решения различных задач из математики, смежных предметов, из реальной практики. Использовать свойства степеней с натуральными показателями для преобразования выражений. Выполнять тождественные преобразования рациональных выражений на основе правил действий над многочленами и алгебраическими дробями. Раскладывать квадратный трёхчлен на множители» [1].

В федеральной рабочей программе основного общего образования (углублённый уровень) от 18 мая 2023 года [2] в процессе изучения линии «Алгебраические выражения» обучающийся получит возможность научиться в 7-9 классах для обеспечения возможности успешного продолжения

образования на углублённом уровне: «Использовать алгебраическую терминологию и символику, применять её в процессе освоения учебного материала. Находить значения буквенных выражений при заданных значениях переменных. Использовать понятие тождества, выполнять тождественные преобразования выражений, доказывать тождества. Выполнять преобразования целого выражения в многочлен приведением подобных слагаемых, раскрытием скобок. Выполнять действия (сложение, вычитание, умножение) с одночленами и с многочленами, применять формулы сокращённого умножения (квадрат и куб суммы, квадрат и куб разности, разность квадратов, сумма и разность кубов), в том числе для упрощения вычислений. Осуществлять разложение многочленов на множители с помощью вынесения за скобки общего множителя, группировки слагаемых, применяя формулы сокращённого умножения. Применять преобразования многочленов для решения различных задач из математики, смежных предметов, из реальной практики. Использовать свойства степеней с натуральными показателями для преобразования выражений. Свободно оперировать понятием квадратного трёхчлена, находить корни квадратного трёхчлена. Раскладывать квадратный трёхчлен на линейные множители» [2].

Таким образом подводя итог всему вышесказанному, можно выделить основные цели обучения линии алгебраических выражений в основной школе – формирование навыков работы с алгебраической терминологией и символикой, освоение базовых операций с многочленами (преобразования, умножение, разложение на множители), применение формул сокращённого умножения.

1.3 Анализ учебной литературы по теме «Многочлены»

Учебная программа включает в себя знакомство обучающихся с понятиями одночлена и многочлена, а также изучение соответствующих вычислительных алгоритмов в 7-9 классах.

В современной учебно-методической литературе теме «Многочлены» уделяется значительное внимание. На первом этапе проведём анализ учебников по алгебре для 7-9 классов базового уровня следующих авторов: Ш.А. Алимова, Ю.Н. Макарычева, А.Г. Мордковича и Г.К. Муравина.

В учебниках алгебры Г.К. Муравина [15], Ю.Н. Макарычева [10] для 7 класса сначала вводятся понятия тождества и тождественных преобразований, затем изучаются свойства степеней, и только после этого даются определения одночлена и многочлена. А в учебниках А.Г. Мордковича [12] и Ш.А. Алимова [3] переходят к изучению одночленов и многочленов сразу после изучения свойств степени. Стоит отметить, что в учебнике Ш.А. Алимова [3] нет отдельного параграфа «Тождества», как в учебниках других авторов.

Определение. «Одночленом называют алгебраическое выражение, которое представляет собой произведение чисел и переменных, возведённых в степени с натуральным показателем» [12].

Понятие многочлена авторы данных учебников вводят через понятие одночлена.

Определение. «Многочленов называют сумму одночленов» [12].

Учебник алгебры А.Г. Мордковича [12] для 7 класса отличается углублённым изучением темы «Одночлены и многочлены», выделяя на их освоение 56 учебных часов. Автор приводит дополнительные параграфы, которые отсутствуют в других рассмотренных пособиях, что позволяет обеспечить более фундаментальное освоение темы.

Если рассматривать тему «Деление многочлена на одночлен» в учебниках А.Г. Мордковича [12] и Ш.А. Алимова [3], то информация в них раскрывается с помощью двух параграфов: «Разложение многочленов на множители» и «Сокращение алгебраических дробей». Такой метод подачи информации позволяет продемонстрировать практическое применение деления многочленов и показать взаимосвязь различных алгебраических операций.

Анализ учебных материалов по алгебре для 7 классов выше упомянутых авторов показывает, что изучение темы «Многочлены» в школьном курсе имеет единую логику, но различается в подходах и методике изложения. Несмотря на различия в структуре, все рассмотренные учебники обеспечивают системное освоение многочленов, формируя базу для дальнейшего изучения алгебры. Выбор учебника зависит от методических предпочтений педагога и уровня подготовки класса.

В учебном пособии Г.К. Муравина [16] для 8 класса развитие темы «Тождественные преобразования» осуществляется в рамках главы «Рациональные выражения» и связано с обучением таким темам, как «Формулы сокращённого умножения», «Дробные выражения», «степень с целым показателем».

В учебниках А.Г. Мордковича [13] и Ю.Н. Макарычева [11] для 8 класса изучение линии «Тождественных преобразований» продолжается в главах, посвящённых изучению алгебраических дробей, где выполняются алгебраические действия с дробями. Данные операции тесно связаны с обучением арифметических действий над многочленами.

В учебном пособии Г.К. Муравина [17] для 9 класса знания и умения, полученные обучающимися при изучении темы «Многочлены», углубляются при изучении тем: «Корни многочленов», «Квадратные уравнения и уравнения, сводимые к квадратным», «Целые корни многочленов с целыми коэффициентами», «Разложение квадратного трёхчлена на множители».

Анализ представленных учебных материалов позволяет сделать вывод, что в школьном курсе алгебры ключевое внимание уделяется формированию навыков тождественных преобразований при работе с многочленами.

Проведём анализ содержания теоретического материала темы «Многочлены» в различных учебниках для 7-9 классов с углублённым изучением математики.

Учебник Н.Я. Виленкина [4] для 8 класса предлагает расширенную программу изучения многочленов, включающую как базовые, так и углублённые темы. В пособии подробно рассматриваются основные разделы: «Операции над многочленами», «Формулы сокращённого умножения». А также рассматриваются вопросы, которых нет в учебниках для общеобразовательных учреждений 7 классов: формула разложения на множители разности степеней, формула квадрата суммы нескольких слагаемых, теорема Безу, деление многочлена на многочлен с остатком, симметрические многочлены от двух переменных, корни многочлена.

В учебнике Н.Я. Виленкина [5] для 9 класса обучение начинается с повторения тем, изучаемых в 8 классе. Далее с обучающимися рассматривают темы: «Схема Горнера», «НОД и НОК многочленов», «Алгоритм Евклида».

Следует отметить, что термин «корень многочлена» в учебниках, предназначенных для базового изучения алгебры, встречается только в учебнике Г.К. Муравина [17] для 9 класса. В учебных пособиях для углублённого изучения данное понятие вводится лишь в учебнике Н.Я. Виленкина [4] в 8 классе.

Учебники Н.Я. Виленкина [4], [5] обеспечивают системное и углублённое изучение многочленов, включая темы, которые в базовых курсах либо отсутствуют, либо изучаются позже. Это делает их ценным ресурсом для: профильных классов с усиленной математической подготовкой; дополнительных занятий для обучающихся, интересующихся алгеброй; подготовки к олимпиадам и конкурсам, где требуются знания различных методов работы с многочленами.

Таким образом, данные учебники расширяют стандартную программу, позволяя обучающимся освоить более сложные алгебраические понятия на ранних этапах обучения.

На следующем этапе проведём анализ учебников профильных старших классов. Выбраны следующие авторы: А.Г. Мордкович, С.М. Никольский, Н.Я. Виленкин.

В курсе алгебры 11 класса А.Г. Мордкович [14] уделяет особое внимание многочленам. Данная тема раскрывается в отдельной главе, состоящей из трёх разделов. В первом разделе автор ставит задачу актуализировать знания учащихся, полученные ими в 7 классе. Вновь вводится определение многочлена, понятие стандартного вида многочлена. Равенство многочленов определяется через равенство степеней и коэффициентов при одинаковых степенях переменной. Рассматриваются основные действия над многочленами: сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, деление многочлена на многочлен с остатком. Изучается теорема Безу и следствия из неё, а также деление многочлена на двучлен по схеме Горнера. Рассматриваются такие методы разложения многочлена на множители, как вынесение общего множителя, метод группировки, применение формул сокращённого умножения, разложение квадратного трёхчлена на множители через корни. В заключении приводятся и доказываются две теоремы:

- 1) теорема о нахождении целых корней многочлена среди делителей его свободного члена;
- 2) теорема о разложении любого многочлена 3 и большей степени на множители в виде многочленов первой и второй степени.

Второй раздел полностью сосредоточен на изучении многочленов от нескольких переменных, при этом определение данного понятия автор не даёт. Здесь описываются различные методы разложения таких многочленов на множители. Среди рассматриваемых методов – использование формул сокращённого умножения, замена переменных, метод группировки и использование тождественных преобразований. Обучающиеся знакомятся с однородными и симметрическими многочленами, но применение симметрических не раскрывается.

Третий раздел посвящён изучению уравнений высших степеней. В этом параграфе собираются рассмотренные ранее методы преобразования, разложения на множители многочлена от одной переменной. Сообщается и доказывается следующая теорема.

Теорема. «Если приведённое уравнение с целыми коэффициентами имеет рациональный корень, то этот корень обязательно является целым числом» [14].

Также рассматривается графический способ решения рациональных уравнений высших степеней.

В учебном пособии С.М. Никольского [18] изучение многочленов начинается с параграфа «Квадратный трёхчлен», где автор показывает способ разложения квадратного трёхчлена на множители с помощью корней. Корни рассматриваются комплексные, а сам трёхчлен берётся с действительными коэффициентами. Затем автор переходит к многочленам n -ой степени с комплексными коэффициентами, определяя их как функцию от комплексной переменной x . Дается способ деления «уголком» многочлена на многочлен, понятие корня многочлена, теорема Безу с доказательством, но без следствия. Далее рассматриваются многочлены с действительными коэффициентами, приводится теорема о попарной сопряженности комплексных корней, факт о разложении многочлена с действительными коэффициентами на множители.

В учебнике для 11 класса Н.Я. Виленкина [7] многочлены представлены в главе «Многочлены от нескольких переменных. Системы уравнений и неравенств». В этой главе определяется многочлен от нескольких переменных как сумма одночленов и отождествляются с целыми рациональными выражениями. Вводятся понятия лексикографического порядка записи, однородного многочлена, симметрического многочлена, основного симметрического многочлена. Доказывается, что любой симметрический многочлен можно представить как многочлен от основных симметрических одночленов. В дальнейшем, при рассмотрении систем уравнений и неравенств понятие симметрических одночленов не применяется.

Проанализировав учебную литературу для 7-11 классов базового и углублённого уровней, включающую в себя тему «Многочлены», можно сделать вывод, что базовые учебники делают упор на отработку основных действий над многочленами и подготовку к ОГЭ. Учебники же с углублённым изучением алгебры дают теоретическую базу для олимпиадной математики, а также для дальнейшего изучения алгебры в высшем учебном заведении. При выборе подходящего учебного пособия важно опираться на следующие критерии: уровень математической подготовки обучающихся; цели изучения предмета; временные рамки, отведённые на изучение темы; необходимость подготовки к дальнейшему образованию. Разнообразие подходов в представленных учебных пособиях позволяет педагогам подобрать оптимальный учебник для конкретной образовательной ситуации.

1.4 Обзор олимпиадных задач по теме «Многочлены»

Многочлены занимают одно из центральных мест в алгебре и являются важной темой в математических олимпиадах различного уровня – от школьных этапов до международных соревнований. Изучение многочленов в олимпиадной математике выходит за рамки школьной программы: здесь рассматриваются не только стандартные операции и разложение на множители, но и более глубокие вопросы, связанные, например, с корнями, симметрией, делимостью.

Проанализировав такие олимпиады по математике, как «Всероссийская олимпиада школьников», «Покори Воробьёвы Горы», «Турнир городов», «Росатом», «Бельчонок», «Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций» были выделены следующие темы, которые включают в себя задания для старших классов по теме «Многочлены». Рассмотрим данные темы более подробно.

1. Многочлены с целыми коэффициентами и теорема Безу.

Задача 1. (Бельчонок – 2024, 11 класс.)

Многочлен $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$ имеет корни a, b, c, d .

Многочлен $Q(x) = x^6 - x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x + 3$.

Найдите $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d)$.

Решение:

Пусть $Q(x) = H(x)P(x) + R(x)$. Заметим, что при $x = a, b, c, d$ выполняется $Q(x) = R(x)$, то есть достаточно найти число $R(a) + R(b) + R(c) + R(d)$.

Если разделим $Q(x)$ на $P(x)$, получим $R(x) = x^2 - x + 2$. Из этого следует, что нужная сумма равна $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) + 8 = (a + b + c + d)^2 - 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) - (a + b + c + d) + 8$.

По теореме Виета сумма корней равна 1, а сумма их попарных произведений равна -1 . После подстановки получаем ответ 10.

Ответ: 10.

Задача 2. (Бельчонок – 2024, 11 класс.)

Известно, что числа $a, b, c, \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$ – целые. Обязательно ли являются целыми все три числа $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$?

Решение:

Обратим внимание на числа $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$. По условию сумма $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$ – целая, произведение этих чисел abc – целое и сумма их попарных произведений $a^2 + b^2 + c^2$ – целая. Из этого следует, что существует приведённый многочлен с целыми коэффициентами и корнями $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$:

$$P(x) = x^3 - \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right)x^2 + (a^2 + b^2 + c^2)x - abc = \left(x - \frac{ab}{c}\right)\left(x - \frac{bc}{a}\right)\left(x - \frac{ac}{b}\right).$$

Заметим, что корни многочлена рациональны, как отношение целых чисел. Если целочисленный многочлен имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$ (где p и q – взаимно простые), то его старший коэффициент делится на q . Так как полученный многочлен является приведённым, то его корни являются целыми числами.

Ответ: да.

2. Теорема Виета для многочленов.

Задача 1. (Покори Воробьёвы Горы – 2023, 10 класс.)

Числа x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $x^3 + 6x^2 + 7x + 1 = 0$. При каких значениях a, b, c корнями уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ являются числа $x_1 + x_2, x_2 + x_3$ и $x_3 + x_1$?

Решение:

По теореме Виета для уравнения $x^3 + 6x^2 + 7x + 1 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 7 \\ x_1x_2x_3 = 1 \end{cases}$$

По теореме Виета для уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$:

$$(x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_1) = -a;$$

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = -a.$$

Отсюда получаем, что $a = 12$.

Найдём b :

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + (x_1 + x_2)(x_3 + x_1) + (x_3 + x_1)(x_2 + x_3) = 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = b;$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = b.$$

Отсюда получаем, что $b = 43$.

Найдём c :

$$-(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) = -(-6 - x_1)(-6 - x_2)(-6 - x_3) = c.$$

Пусть $f(x) = x^3 + 6x^2 + 7x + 1$. По условию $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Видим, что $c = -f(-6) = 41$.

Ответ: $a = 12, b = 43, c = 41$.

3. Корни многочлена.

Задача 1. (Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций – 2023, 11 класс.)

А) Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$.

Б) С помощью пункта (А) найдите $f(x_0)$, где $f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x$.

Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b – целые числа.

Решение:

А) Число $\sqrt{5} - 1$ – не рациональное, следовательно оно не может быть корнем многочлена степени 1 с целыми коэффициентами. Поэтому степень многочлена равна хотя бы 2.

$$x = \sqrt{5} - 1,$$

$$x + 1 = \sqrt{5},$$

$$x^2 + 2x + 1 - 5 = 0,$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0.$$

Многочлен $g(x) = x^2 + 2x - 4$ удовлетворяет данному условию.

Б) Остаток при делении $f(x)$ на $g(x)$ равен $x + 4$.

Тогда $f(x) = g(x)h(x) + x + 4$ для некоторого многочлена $h(x)$. Тогда получаем:

$$f(x_0) = x_0 + 4 = \sqrt{5} + 3$$

Ответ: А) $g(x) = x^2 + 2x - 4$; Б) $\sqrt{5} + 3$.

Задача 2. (Турник городов – 2024, 11 класс.)

Дано натуральное число n . Можно ли представить многочлен

$$x(x-1)\dots(x-n)$$

в виде суммы двух кубов многочленов с действительными коэффициентами?

Решение:

Предположим, что существуют многочлены f и g и выполняется равенство $x(x-1)\dots(x-n) = f^3 + g^3$. Многочлены f и g не имеют общих корней, иначе это будет кратный корень суммы кубов. У многочлена $x(x-1)\dots(x-n)$ кратных корней нет. Получаем, что многочлен $f^2 - fg + g^2$ имеет степень 2 ($\max(\deg f, \deg g)$) и у него нет корней, так как выражение $a^2 - ab + b^2 = 0$ только при $a = b = 0$. Но такой делитель многочлен $x(x-1)\dots(x-n)$ не имеет.

Ответ: нет.

4. Симметрические многочлены.

Задача 1. (Всероссийская олимпиада школьников – 2012, 10 класс.)

Положительные числа $a_1, \dots, a_n, k$ таковы, что $a_1 + \dots + a_n = 3k$, $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \dots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-либо два из чисел $a_1, \dots, a_n$ отличаются больше, чем на 1.

Решение:

Перемножим

$$a_1 + \dots + a_n = 3k \quad (1)$$

и неравенство $a_1^3 + \dots + a_n^3 > 3k^3 + k$.

Получим:

$$a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 + a_1^3 a_2 + a_1 a_2^3 + a_1^3 a_3 + a_1 a_3^3 + \dots + a_{n-1}^3 a_n + a_{n-1} a_n^3 > 9k^4 + 3k^2. \quad (2)$$

$$\text{Возведём в квадрат } a_1^2 + \dots + a_n^2 = 3k^2. \quad (3)$$

Получим:

$$a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 + 2a_1^2 a_2^2 + 2a_1^2 a_3^2 + \dots + 2a_{n-1}^2 a_n^2 = 9k^4. \quad (4)$$

Вычтем из равенства (2) неравенство (4):

$$(a_1^3 a_2 - 2a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2^3) + \dots + (a_{n-1}^3 a_n - 2a_{n-1}^2 a_n^2 + a_{n-1} a_n^3) > 3k^2.$$

Или:

$$a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 + a_1 a_3 (a_1 - a_3)^2 + \dots + a_{n-1} a_n (a_{n-1} - a_n)^2 > 3k^2. \quad (5)$$

Предположим теперь, что любые два числа отличаются не больше, чем на 1. Тогда квадрат их разности не больше 1 и из (5) получаем:

$$a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n > 3k^2. \quad (6)$$

Но, если вычесть из квадрата равенства (1) равенство (3), получим: $2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + \dots + 2a_{n-1} a_n = 6k^2$. А это противоречит неравенству (6). Из этого следует, что из чисел $a_1, \dots, a_n$ найдутся какие-либо два, отличающиеся больше, чем на 1.

5. Неприводимость и разложение на неприводимые многочлены.

Задача 1.

Разложите $x^{12} - 1$ на неприводимые сомножители ненулевой степени с целыми коэффициентами.

Решение:

Применим формулу разности квадратов для $x^{12} - 1$:

$$x^{12} - 1 = (x^6 - 1)(x^6 + 1).$$

Применим формулу разности квадратов для $x^6 - 1$:

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1).$$

Далее применим формулы разности и суммы кубов для $(x^3 - 1)(x^3 + 1)$:

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Преобразуем $x^6 + 1$ по формуле суммы кубов:

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

$$\text{Получаем: } x^{12} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

Заметим, что $x - 1$ и $x + 1$ неприводимы над Z . Квадратные трёхчлены $x^2 + x + 1$ и $x^2 - x + 1$ тоже неприводимы над Z , так как их дискриминанты равны -3 , следовательно нет целых корней. Аналогично, $x^2 + 1$ — неприводим.

Проверим многочлен $x^4 - x^2 + 1$. Он не может быть разложен в виде $(x - x_0)(x^3 + ax^2 + bx + c)$, так как тогда бы у него был целый корень, однако все его корни комплексные. Тогда единственный возможный вариант разложения: $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Покажем, что это невозможно.

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d + ac = -1 \\ ad + bc = 0 \\ bd = 1 \end{cases}$$

Из уравнения $bd = 1$ получаем $b = d = \pm 1$, так как b и $d \in Z$. Тогда из уравнения $b + d + ac = -1$ получаем $ac = -3$ или $ac = 1$. Но оба варианта невозможны, так как целых решений вместе с уравнением $a + c = 0$ не может быть. Следовательно, многочлен $x^4 - x^2 + 1$ — неприводим.

$$\text{Ответ: } x^{12} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРЫ МНОГОЧЛЕНОВ НА ФАКУЛЬТАТИВЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

2.1 Пояснительная записка к факультативным занятиям по теме «Многочлены»

Факультативные занятия по теме «Многочлены» предназначены для обучающихся 10 классов, углублённо изучающих математику, а также планирующих участвовать в математических олимпиадах различного уровня.

Задания ориентированы на систематизацию и углубление знаний о многочленах, изучение стандартных и нестандартных методов решения задач. На занятиях рассматриваются классические теоретические основы алгебры многочленов, задания школьного курса алгебры по теме «Многочлены», необходимые для подготовки к решению более сложных заданий, и олимпиадные задачи, требующие нешаблонного подхода.

Цели факультативных занятий:

- 1) углубление знаний в области теории алгебры многочленов;
- 2) подготовка обучающихся к участию в математических олимпиадах и конкурсах.

Задачи факультативных занятий:

- 1) повторить и изучить основные понятия (степень многочлена, корни многочлена и другие);
- 2) освоить теоремы (Безу, Виета, о рациональных корнях многочлена, критерий Эйзенштейна);
- 3) познакомиться с многочленами от нескольких переменных;
- 4) научиться преобразовывать симметрические многочлены;
- 5) рассмотреть решение задач с параметром некоторых типов;
- 6) учиться решать нестандартные и олимпиадные задачи по теме «Многочлены».

Ожидаемые результаты:

- 1) обучающиеся овладеют основными методами работы с многочленами;
- 2) научатся решать сложные задачи, включая олимпиадные;
- 3) приобретут навыки математического рассуждения и доказательства.

Факультатив может быть реализован в I четверти 10 класса. Факультативные занятия по теме «Многочлены» рассчитаны на 14 часов (2 часа в неделю) и включают в себя практические занятия. Для успешного освоения курса занятий ученикам предлагается предварительно ознакомиться с теорией, изложенной в пункте 1.1 «Основные понятия алгебры многочленов». Обучающиеся могут изучить материал самостоятельно, получив его в распечатанном виде от учителя. Указанный материал содержит все необходимые сведения по темам факультативных занятий. Подробно разобраны теоремы и проиллюстрированы примерами. Основные теоремы приведены с доказательствами. Знакомство с доказательствами поможет обучающимся глубже усвоить материал и методы алгебры многочленов. К каждой теме подобраны задачи, иллюстрирующие применение введённых теоретических понятий с подробным решением. Таким образом знакомство с теоретическим материалом подготовит обучающихся к решению задач высокого уровня сложности.

2.2 Учебно-тематический план факультативных занятий по теме «Многочлены»

Таблица 1 – Учебно-тематический план

№ занятия	Тема занятия	Количество часов
1	Деление многочлена. Теорема Безу	2
2	Корни многочлена	2
3	Теорема Виета для многочленов	2

Продолжение таблицы 1

4	Неприводимость многочленов. Разложение на неприводимые многочлены	2
5	Многочлены от нескольких переменных. Симметрические многочлены	2
6-7	Решение олимпиадных задач	4
	Итого:	14

2.3 Материал для факультативных занятий по теме «Многочлены»

В данном параграфе представлен задачный материал для факультативных занятий, который разбит по темам учебно-тематического плана. Для каждого занятия подобраны задания тренировочного характера для уточнения теоретических понятий и подготовки к самостоятельному решению задач повышенной сложности. На каждом занятии предлагается 1-2 задачи повышенной сложности по рассматриваемой теме. Для каждой задачи приведено подробное решение или даны указания для самостоятельного выполнения. Все задачи повышенной сложности приведены с решением.

Для удобства использования материала учителем в начале предлагается список задач для занятия, а затем методические указания. Таким образом учитель может предлагать обучающимся либо всю группу задач, либо последовательно подводить учеников к решению задач повышенной сложности по предложенной теме.

В работе проведена систематизация материала. В архивах рассмотренных олимпиад отсутствуют подготовительные задачи и не указана их тематика. Поэтому была проведена работа по анализу задач повышенной сложности и выстраиванию материала в систему. Подготовительные задачи были взяты из различных математических сборников, указанных в литературе. Задачи были

выстроены таким образом, чтобы подвести учеников к решению задач повышенной сложности.

Занятие 1. Деление многочлена. Теорема Безу.

Задачи

Задание 1. Разделите многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ и запишите результат в виде $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$:

1) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5$, $Q(x) = x^2 - 1$;

2) $P(x) = x^5 - 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1$.

3) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$, $Q(x) = x - 2$.

Задание 2. Выполните деление с остатком, используя схему Горнера:

1) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $x - 1$;

2) $2x^5 - 5x^3 + 8x$ на $x + 3$.

Задание 3. При каком значении a многочлен $x^{1000} - ax^2 + 9$ делится на $x + 1$?

Задание 4. Докажите, что многочлен $P(x) = (x + 1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x + 1)(2x + 1)$.

Задание 5. Найдите остаток при делении $x^{2023} + 2023x^{2022} + 2022x - 1$ на:

1) $x - 1$;

2) $x^2 - 1$.

Задание 6. (Московская математическая олимпиада школьников – 2025, 11 класс.)

Существует ли такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и натуральные числа m и n , что $f(m)$ не делится на n , но $f(p^k)$ делится на n для любого простого числа p и любого натурального числа k ?

Методические указания

Задание 1. Разделите многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ и запишите результат в виде $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$:

1) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5$, $Q(x) = x^2 - 1$;

2) $P(x) = x^5 - 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1$.

3) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$, $Q(x) = x - 2$.

Решение:

1) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5$, $Q(x) = x^2 - 2$. Разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ «УГОЛКОМ».

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5 \\
 \underline{2x^4 - 2x^2} \\
 -3x^3 + 3x^2 - 5 \\
 \underline{-3x^3 + 3x} \\
 3x^2 - 3x - 5 \\
 \underline{3x^2 - 3} \\
 -3x - 2
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 x^2 - 1 \\
 2x^2 - 3x + 3
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Указание: необходимо обратить внимание на отсутствие слагаемого, содержащего третью степень переменной в вычитаемом.

Ответ необходимо записать в виде $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$. Получаем, что $P(x) = (x^2 - 1)(2x^2 - 3x + 3) - 3x - 2$.

Ответ: $P(x) = (x^2 - 1)(2x^2 - 3x + 3) - 3x - 2$.

2) $P(x) = x^5 - 1$, $Q(x) = x^2 + x + 1$. Также разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ «УГОЛКОМ».

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 x^5 - 1 \\
 \underline{x^5 + x^4 + x^3} \\
 -x^4 - x^3 - 1 \\
 \underline{-x^4 - x^3 - x^2} \\
 x^2 - 1 \\
 \underline{x^2 + x - 3} \\
 -x - 2
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 x^2 + x + 1 \\
 x^3 - x^2 + 1
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Получаем, $P(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) - x - 2$.

Ответ: $P(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) - x - 2$.

3) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$, $Q(x) = x - 2$.

1 способ. Разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ «уголком».

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 x^3 - 4x^2 + 6x - 4 \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 -2x^2 + 6x - 4 \\
 \underline{-2x^2 + 4x} \\
 2x - 4 \\
 \underline{2x - 4} \\
 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 x - 2 \\
 x^2 - 2x + 2
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Заметим, что остаток равен нулю, поэтому $P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 2)$.

Ответ: $P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 2)$.

2 способ. Так как $Q(x) = x - 2$, можно проверить в данном случае выполнимость теоремы Безу. Теорема Безу утверждает, что многочлен $P(x)$ делится на $x - x_0$ тогда и только тогда, когда x_0 — его корень. В нашем случае $x_0 = 2$. Вычислим $P(2)$.

$$P(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 4 = 8 - 16 + 12 - 4 = 0.$$

Так как остаток равен нулю, то 2 является корнем многочлена $P(x)$. Значит $Q(x)$ является делителем $P(x)$. Разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$, используя схему Горнера.

	1	-4	6	-4
2	1	-2	2	0

Получаем, $P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 2)$.

Ответ: $P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x + 2)$.

Задание 2. Выполните деление с остатком, используя схему Горнера:

1) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $x - 1$;

2) $2x^5 - 5x^3 + 8x$ на $x + 3$.

Указание: при составлении схемы Горнера в примере (2) необходимо обратить внимание на наличие нулевых коэффициентов.

Задание 3. При каком значении a многочлен $x^{1000} - ax^2 + 9$ делится на $x + 1$?

Решение:

Пусть $P(x) = x^{1000} - ax^2 + 9$. Согласно теореме Безу, чтобы $P(x)$ делился на $x + 1$ без остатка, необходимо чтобы $P(-1)$ был равен нулю. Вычислим $P(-1)$.

$$P(-1) = (-1)^{1000} - a(-1)^2 + 9 = 1 - a + 9 = 10 - a.$$

Приравняем полученное выражение к нулю: $10 - a = 0$. Отсюда получаем, что $x^{1000} - ax^2 + 9$ делится на $x + 1$ при $a = 10$.

Ответ: $a = 10$.

Задание 4. Докажите, что многочлен $P(x) = (x + 1)^6 - x^6 - 2x - 1$ делится на $x(x + 1)(2x + 1)$.

Решение:

Чтобы доказать, что $P(x)$ делится на $x(x+1)(2x+1)$, достаточно проверить, что $P(0) = 0$, $P(-1) = 0$, $P(-\frac{1}{2}) = 0$. Так как НОД $(x, x+1, 2x+1) = 1$, то множители $x, x+1, 2x+1$ взаимно просты. Это значит, что если $P(x)$ делится на каждый множитель, то он будет делиться и на их произведение.

$$P(0) = 1^6 - 0^6 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

$$P(-1) = 0^6 - (-1)^6 + 2 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0.$$

$$P(-\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^6 - (\frac{1}{2})^6 + 1 - 1 = 0.$$

Доказательство завершено.

Задание 5. Найдите остаток при делении $x^{2023} + 2023x^{2022} + 2022x - 1$ на:

1) $x - 1$;

2) $x^2 - 1$.

Решение:

Пусть $P(x) = x^{2023} + 2023x^{2022} + 2022x - 1$.

1) Разделим многочлен $P(x)$ на $x - 1$. Тогда получим:

$$P(x) = (x - 1) \cdot Q(x) + R(x), \text{ где } R(x) - \text{остаток и } R(x) - \text{константа.}$$

По теореме Безу остаток при делении $P(x)$ на $x - 1$ равен $P(1)$. Вычислим $P(1)$:

$$P(1) = 1^{2023} + 2023 \cdot 1^{2022} + 2022 \cdot 1 - 1 = 1 + 2023 + 2022 - 1 = 4045.$$

$$R(x) = 4045 - \text{искомый остаток.}$$

Ответ: $R(x) = 4045$.

2) Разделим многочлен $P(x)$ на $x^2 - 1$. Получим следующую запись:

$$P(x) = (x^2 - 1) \cdot Q(x) + R(x), \text{ где } R(x) - \text{остаток и } R(x) \text{ имеет вид } ax + b.$$

Подставим в $P(x)$ $x = 1$ и $x = -1$.

При $x = 1$: $a + b = 4045$.

При $x = -1$: $-a + b = -1$.

Отсюда получаем, что $a = 2023$, $b = 2022$.

Следовательно $R(x) = 2023x + 2022$ – искомый остаток.

Ответ: $R(x) = 2023x + 2022$.

Задание 6. (Московская математическая олимпиада школьников – 2025, 11 класс.)

Существует ли такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и натуральные числа m и n , что $f(m)$ не делится на n , но $f(p^k)$ делится на n для любого простого числа p и любого натурального числа k ?

Решение:

Пусть $q > 2$ – простое, $m = 2q$, $n = q^3$. И пусть $r_1, r_2, \dots, r_t$ – все не кратные q натуральные числа, меньше q^3 .

Предположим: $f(x) = x(x - q) \cdot (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_t)$.

Тогда: $f(m) = q^2 \cdot 2 \cdot (2q - r_1)(2q - r_2) \dots (2q - r_t)$ не кратно q^3 .

При $p \neq q$ число p^k имеет остаток от деления на q^3 , не кратный q , поэтому один из множителей в определении $f(x)$ будет кратен q^3 при $x = p^k$.

При $p = q$ и $k > 2$ уже число $p^k(p^k - q)$ будет кратно q^3 .

И при $p = q$ и $k = 1$ значение $f(p_1) = 0$ делится на q^3 .

Ответ: многочлен существует.

Занятие 2. Корни многочлена.

Задачи

Задание 1. Составьте многочлен наименьшей степени с корнями:

- 1) 1, -5 и 3;
- 2) 2 (показатель кратности равен 2) и -3 ;

Задание 2. Найдите все корни многочленов:

- 1) $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;
- 2) $R(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Задание 3. Чему равен показатель кратности корня:

- 1) 2 для многочлена $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;
- 2) -2 для многочлена $Q(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$?

Задание 4. Найдите рациональные корни многочленов:

- 1) $T(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

$$2) H(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3.$$

Задание 5. Многочлен $P(x) - a$ и многочлен $P(P(x) - b)$ имеют как минимум один общий корень. Докажите, что число $a - b$ является корнем многочлена $P(x)$.

Задание 6. (Дополнительные вступительные испытания в МГУ – 2024, 11 класс.)

Число x_0 является общим корнем многочленов

$$x^3 + ax^2 + bx + c, x^3 + bx^2 + cx + a, x^3 + cx^2 + ax + b.$$

Найдите все возможные значения x_0 , если известно, что $a > b > c$.

Методические указания

Задание 1. Составьте многочлен наименьшей степени с корнями:

1) 1, –5 и 3;

2) 2 (показатель кратности равен 2) и –3.

Решение:

1) Многочлен с заданными корнями можно представить в виде:

$P(x) = a(x - 1)(x + 5)(x - 3)$, где a – произвольный ненулевой коэффициент. Для удобства возьмём $a = 1$.

$P(x) = (x - 1)(x + 5)(x - 3)$. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые.

$$P(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15.$$

Ответ: $P(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$.

2) Многочлен с заданными корнями можно представить в виде:

$P(x) = a(x - 2)^2(x + 3)$, где a – произвольный ненулевой коэффициент. Для удобства также возьмём $a = 1$.

$P(x) = (x - 2)^2(x + 3)$. Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые.

$$P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12.$$

Ответ: $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$.

Задание 2. Найдите все корни многочленов:

1) $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;

2) $R(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Указание: корни можно найти подбором.

Задание 3. Чему равен показатель кратности корня:

1) 2 для многочлена $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;

2) -2 для многочлена $Q(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$?

Решение:

1) Разделим многочлен $P(x)$ на $x - 2$, используя схему Горнера:

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0
2	1	-1	-1	-2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

Видим, что многочлен $P(x)$ можно представить в виде:

$P(x) = (x - 2)^3 \cdot (x^2 + x + 1)$. Следовательно показатель кратности корня 2 равен 3.

Ответ: показатель кратности корня 2 равен 3.

2) Разделим многочлен $Q(x)$ на $x + 2$, используя схему Горнера:

	1	7	16	8	-16	-16
-2	1	5	6	-4	-8	0
-2	1	3	0	-4	0	
-2	1	1	-2	0		
-2	1	-1	0			
-2	1	-3				

Видим, что многочлен $Q(x)$ можно представить в виде:

$Q(x) = (x + 2)^4 \cdot (x - 1)$. Следовательно показатель кратности корня -2 равен 4.

Ответ: показатель кратности корня -2 равен 4.

Задание 4. Найдите рациональные корни многочленов:

1) $T(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$;

2) $H(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

Решение:

1) Найдём делители свободного члена $a_0 = 6$ многочлена $T(x)$:

$$x_0 = 1; -1; 2; -2; 3; -3; 6; -6.$$

Проверим каждое число, является ли оно корнем, используя схему Горнера:

	1	-2	-4	4	-5	6
1	1	-1	-5	-1	-6	0
-1	1	-3	-1	5	-10	16
2	1	0	-4	-4	-13	-20
-2	1	-4	4	-4	3	0
3	1	1	-1	1	-2	0
-3	1	-5	11	-29	82	-240
6	1	4	20	124	739	4440
-6	1	-8	44	-260	1555	-9324

В последнем столбце остаток равен нулю только при $x_0 = 1; -2; 3$. Получаем, что корнями многочлена $T(x)$ по теореме Безу являются числа $1; -2; 3$.

Ответ: $1; -2; 3$.

2) Аналогично предыдущему примеру, найдём делители свободного члена $a_0 = -3$ многочлена $H(x)$:

$$x_0 = 1; -1; 3; -3.$$

Проверим каждое число, является ли оно корнем, используя схему Горнера:

	1	1	-6	-14	-11	-3
1	1	2	-4	-18	-29	-32
-1	1	0	-6	-8	-3	0
3	1	4	6	4	1	0
-3	1	-2	0	-14	31	-96

В последнем столбце остаток равен нулю только при $x_0 = -1; 3$. Получаем, что корнями многочлена $H(x)$ по теореме Безу являются числа $-1; 3$.

Ответ: $-1; 3$.

Задание 5. Многочлен $P(x) - a$ и многочлен $P(P(x) - b)$ имеют как минимум один общий корень. Докажите, что число $a - b$ является корнем многочлена $P(x)$.

Решение:

Пусть x_0 – общий корень многочленов. Тогда справедливы равенства $P(x_0) - a = 0$ и $P(P(x_0) - b) = 0$. $P(x_0) - a = 0$, значит $P(x_0) = a$. Подставим полученное равенство в $P(P(x_0) - b) = 0$: $P(P(x_0) - b) = P(a - b) = 0$. Получаем, что $a - b$ является корнем многочлена $P(x)$.

Доказательство завершено.

Задание 6. (Дополнительные вступительные испытания в МГУ – 2024, 11 класс.)

Число x_0 является общим корнем многочленов

$$x^3 + ax^2 + bx + c, x^3 + bx^2 + cx + a, x^3 + cx^2 + ax + b.$$

Найдите все возможные значения x_0 , если известно, что $a > b > c$.

Решение:

По условию x_0 – решение системы:

$$\begin{cases} x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \\ x^3 + bx^2 + cx + a = 0 \\ x^3 + cx^2 + ax + b = 0 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, тогда получим:

$$(a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0.$$

Из второго вычтем третье:

$$(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0.$$

Многочлены в левых частях этих уравнений не являются тождественными нулями, поскольку $a > b > c$. И x_0 – общий корень этих квадратных уравнений, поскольку каждое из этих уравнений – разность двух уравнений с общим корнем x_0 . Заметим, что теперь максимальная степень в уравнениях равна 2. Попробуем её уменьшить ещё раз. Для этого первое из полученных уравнений умножим на $b - c$ и вычтем из него второе полученное уравнение, умноженное на $a - b$. Получим:

$$(b - c)((a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a)) - (a - b)((b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b)) = 0.$$

После раскрытия скобок, группировки слагаемых с x в одной стороне и слагаемых без x – в другой получаем:

$$(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ab - ca)x = a^2 + b^2 + c^2 - bc - ab - ca.$$

Заметим, что x_0 является корнем и этого уравнения.

Докажем, что коэффициент перед x не равен нулю. Согласно неравенству о средних $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$, $\frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc$, $\frac{c^2 + a^2}{2} \geq ca$. Сложим все три неравенства и получим:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq bc + ab + ca, \text{ то есть } a^2 + b^2 + c^2 - bc - ab - ca \geq 0.$$

Поскольку оценка получена с помощью неравенства о средних, то равенство возможно тогда и только тогда, когда $a = b = c$. По условию $a > b > c$, поэтому случай равенства невозможен. Таким образом, полученное уравнение можно разделить на коэффициент при x , откуда $x = 1$, что означает $x_0 = 1$.

Мы доказали, что если эти уравнения имеют общий корень, то этот корень равен 1. Осталось привести пример подходящих a, b, c . Для этого подставим $x = 1$ в исходную систему. Тогда мы получим три одинаковых уравнения вида $1 + a + b + c = 0$. Подойдут, например, $a = 1, b = 0, c = -2$.

Ответ: $x_0 = 1$.

Занятие 3. Теорема Виета для многочленов.

Задачи

Задание 1. Для уравнения $x^2 + 7x - 12 = 0$:

- 1) найдите сумму и произведение корней, не решая уравнение;
- 2) запишите квадратный трёхчлен, корни которого обратны корням данного.

Задание 2. Составьте квадратное уравнение, если:

- 1) $x_1 + x_2 = -4$; $x_1 \cdot x_2 = 3$;
- 2) корни равны $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$.

Задание 3. Один из корней уравнения $x^2 + px - 18 = 0$ равен -3 . Найдите p и второй корень.

Задание 4. Для многочлена $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ найдите:

- 1) $x_1 + x_2 + x_3$;
- 2) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
- 3) $x_1x_2x_3$.

Задание 5. Составьте кубический многочлен, корни которого равны 1; -2; 4.

Задание 6. Для многочлена $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 4$:

- 1) Чему равна сумма корней?
- 2) Чему равно произведение корней?

Задание 7. Составьте многочлен 4-ой степени с корнями 1; -1; 2; -3; старший коэффициент которого равен 3.

Задание 8. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ является квадратом другого?

Задание 9. Пусть a, b, c – вещественные числа. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел равно 1.

Задание 10. (Росатом – 2025, 10 класс.)

Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три корня, равные попарным суммам корней многочлена $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. Найдите a, b, c .

Методические указания

Задание 1. Для уравнения $x^2 + 7x - 12 = 0$:

- 1) найдите сумму и произведение корней, не решая уравнение;
- 2) запишите квадратный трёхчлен, корни которого обратны корням данного.

Решение:

- 1) По теореме Виета имеем:

Сумма корней: $x_1 + x_2 = -7$;

Произведение корней: $x_1 \cdot x_2 = -12$.

Ответ: $x_1 + x_2 = -7$; $x_1 \cdot x_2 = -12$.

2) Если корни данного уравнения равны x_1 и x_2 , то корни нового квадратного трёхчлена имеют вид $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

1 способ.

Преобразуем $y = \frac{1}{x} : y^2 + py + q = 0$.

По теореме Виета получаем:

$$\begin{cases} q = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{12} \\ p = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = -\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{-7}{-12} = -\frac{7}{12} \end{cases}$$

$$y^2 - \frac{7}{12}y - \frac{1}{12} = 0.$$

$$12y^2 - 7y - 1 = 0.$$

2 способ.

Преобразуем: $y = \frac{1}{x}$. Получим $x = \frac{1}{y}$ и подставим в исходное уравнение:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{y}\right) - 12 = 0.$$

$$\frac{1 + 7y - 12y^2}{y^2} = 0.$$

$$-12y^2 + 7y + 1 = 0.$$

Ответ: $12y^2 - 7y - 1 = 0$.

Задание 2. Составьте квадратное уравнение, если:

1) $x_1 + x_2 = -4$; $x_1 \cdot x_2 = 3$;

2) корни равны $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$.

Решение:

1) Используя теорему Виета, уравнение имеет вид:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Подставим данные значения в уравнение и получим:

$$x^2 + 4x + 3 = 0.$$

Ответ: $x^2 + 4x + 3 = 0$.

2) По теореме Виета имеем:

$$\text{Сумма корней: } (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4;$$

Произведение корней: $(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 1$.

Следовательно уравнение имеет вид: $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Ответ: $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Задание 3. Один из корней уравнения $x^2 + px - 18 = 0$ равен -3 . Найдите p и второй корень.

Решение:

Подставим $x = -3$ в уравнение:

$$(-3)^2 + (-3)p - 18 = 0.$$

$$-3p = 9.$$

$$p = -3.$$

По теореме Виета произведение корней $x_1 \cdot x_2 = -18$. Если x_1 равен -3 , то:

$$-3x_2 = -18.$$

$$x_2 = 6.$$

Ответ: $p = -3$; $x_2 = 6$.

Задание 4. Для многочлена $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ найдите:

1) $x_1 + x_2 + x_3$;

2) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;

3) $x_1x_2x_3$.

Решение:

Для многочлена $P(x)$ коэффициенты равны $a = 1$, $b = -6$, $c = 11$, $d = -6$.

Используем теорему Виета для многочленов:

1) $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = 6$;

2) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = 11$;

3) $x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a} = 6$.

Ответ: $x_1 + x_2 + x_3 = 6$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 11$; $x_1x_2x_3 = 6$.

Задание 5. Составьте кубический многочлен, корни которого равны 1 ; -2 ; 4 .

Решение:

Пусть x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a – старший коэффициент. Для удобства примем $a = 1$. Используем теорему Виета для кубического многочлена:

$$1) x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = -b;$$

$$2) x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = c;$$

$$3) x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a} = -d.$$

Подставим вместо x_1, x_2, x_3 известные корни многочлена $P(x)$ и найдём его коэффициенты:

$$1) 1 + (-2) + 4 = -b \Rightarrow b = -3.$$

$$2) 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 4 = c \Rightarrow c = -6.$$

$$3) 1 \cdot (-2) \cdot 4 = -d \Rightarrow d = 8.$$

Получили кубический многочлен $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Ответ: $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

Задание 6. Для многочлена $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 4$:

1) Чему равна сумма корней?

2) Чему равно произведение корней?

Решение:

Для многочлена $P(x)$ коэффициенты равны $a = 2, b = -5, c = 3, d = -1, e = 4$.

Используем теорему Виета для многочленов:

$$1) x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{-b}{a} = \frac{5}{2};$$

$$2) x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} = 2.$$

Ответ: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{5}{2}; x_1x_2x_3x_4 = 2$.

Задание 7. Составьте многочлен 4-ой степени с корнями 1; -1; 2; -3; старший коэффициент которого равен 3.

Указание: задание решается аналогично заданию 5; формулы Виета составляются для многочлена 4-ой степени; старший коэффициент $a = 3$.

Задание 8. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ является квадратом другого?

Решение:

Обозначим корни: $x_1 = k$, тогда $x_2 = k^2$.

По теореме Виета:

$$\text{Сумма корней } x_1 + x_2 = k + k^2 = \frac{15}{4}.$$

$$\text{Произведение корней } x_1 \cdot x_2 = k \cdot k^2 = k^3 = a^3.$$

Решим первое уравнение:

$$k^2 + k - \frac{15}{4} = 0.$$

$$4k^2 + 4k - 15 = 0.$$

$$D = 16 + 240 = 256 = 16^2.$$

$$k_1 = \frac{3}{2}, k_2 = -\frac{5}{2}.$$

Найдём a из произведения корней:

$$\text{Для } k = \frac{3}{2} : k^3 = a^3 = \frac{27}{8}. \text{ Следовательно } a = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Для } k = -\frac{5}{2} : k^3 = a^3 = -\frac{125}{8}. \text{ Следовательно } a = -\frac{5}{2}.$$

Проверка: подставим найденные значения a в исходное уравнение и убедимся, что один корень действительно является квадратом другого.

$$\text{Для } a = \frac{3}{2} : x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{27}{8} = 0.$$

$$\text{Корни } x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Проверка суммы: } \frac{3}{2} + \frac{9}{4} = \frac{15}{4}.$$

$$\text{Проверка произведения: } \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

$$\text{Для } a = -\frac{5}{2} : x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{125}{8} = 0.$$

$$\text{Корни } x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = \frac{25}{4}.$$

$$\text{Проверка суммы: } -\frac{5}{2} + \frac{25}{4} = \frac{15}{4}.$$

$$\text{Проверка произведения: } -\frac{5}{2} \cdot \frac{25}{4} = -\frac{125}{8}.$$

Ответ: $a = \frac{3}{2}$; $a = -\frac{5}{2}$.

Задание 9. Пусть a, b, c – вещественные числа. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел равно 1.

Решение:

Подставим abc вместо 1 во второе условие и получим:

$$a + b + c = bc + ac + ab.$$

Рассмотрим $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 + nx^2 + kx + l$. Если у многочлена $P(x)$ будет корень 1, то одно из чисел a, b, c будет равняться 1. Запишем теорему Виета для $P(x)$:

$$\begin{cases} l = -abc = -1 \\ k = ab + bc + ac \\ n = -(a + b + c) \end{cases}$$

Учитывая, что $a + b + c = ab + bc + ac$, получаем следующее:

$$P(x) = x^3 - kx^2 + kx - 1 = (x - 1)(x^2 + x - k + 1).$$

Таким образом, доказали, что есть корень 1. Следовательно, одно из чисел a, b, c равняется 1.

Доказательство завершено.

Задание 10. (Росатом – 2025, 10 класс.)

Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три корня, равные попарным суммам корней многочлена $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. Найдите a, b, c .

Решение:

Многочлен $Q(x)$ имеет степень три, значит по основной теореме алгебры он имеет ровно три корня, причём некоторые из них могут быть комплексными или могут совпадать. Аналогично, многочлен $P(x)$ имеет ровно три корня.

Обозначим q_1, q_2, q_3 корни многочлена $Q(x)$, а p_1, p_2, p_3 – корни многочлена $P(x)$. Воспользуемся теоремой Виета и получим:

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = -2 \\ q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3 = -3 \\ q_1q_2q_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = -a \\ p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3 = b \\ p_1p_2p_3 = -c \end{cases}$$

Согласно условию, $p_1 = q_2 + q_3$, $p_2 = q_1 + q_3$, $p_3 = q_1 + q_2$. Подставив выражения для p_1, p_2, p_3 через q_1, q_2, q_3 в выражение для a , получим значение:

$$a = -(p_1 + p_2 + p_3) = -2(q_1 + q_2 + q_3) = -2(-2) = 4.$$

Аналогично, значение b :

$$\begin{aligned} b &= p_1p_2 + p_2p_3 + p_1p_3 = (q_2 + q_3)(q_1 + q_3) + (q_1 + q_3)(q_1 + q_2) + (q_2 + q_3)(q_1 + q_3) = \\ &= (q_1 + 2)(q_2 + 2) + (q_2 + 2)(q_3 + 2) + (q_1 + 2)(q_3 + 2) = q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3 + 4(q_1 + \\ &+ q_2 + q_3) + 12 = -3 + 4(-2) + 12 = 1. \end{aligned}$$

Значение c :

$$\begin{aligned} c &= -p_1p_2p_3 = (q_1 + 2)(q_2 + 2)(q_3 + 2) = q_1q_2q_3 + 2(q_1q_2 + q_2q_3 + q_1q_3) + 4(q_1 + q_2 + \\ &+ q_3) + 8 = 1 + 2(-3) + 4(-2) + 8 = -5. \end{aligned}$$

Ответ: $a = 4$, $b = 1$, $c = -5$.

Занятие 4. Неприводимость многочленов. Разложение на неприводимые многочлены.

Задачи

Задание 1. Докажите, что многочлен $x^3 + 3x + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

Задание 2. Верно ли, что $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 6x + 12$ неприводим над $\mathbb{Q}$?

Задание 3. Разложите $x^3 + 2x^2 + 2x + 6$ на неприводимые множители над $\mathbb{Q}$.

Задание 4. Представьте $x^6 - 1$ в виде произведения неприводимых множителей над $\mathbb{R}$.

Задание 5. Разложите $x^4 - 5x^2 + 6$ на неприводимые множители над $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Задание 6. Почему многочлен $x^5 - x^2 + 1$ не имеет рациональных корней?

Задание 7. Докажите, что $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$ имеет один рациональный корень. Разложите многочлен на множители.

Задание 8. Разложите многочлен $x^{12} - 1$ на неприводимые сомножители ненулевой степени с целыми коэффициентами.

Задание 9. Докажите для различных целых $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ неприводимость многочлена $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{100}) - 1$.

Методические указания

Указания к заданиям 1-7: в данных заданиях вам необходимо применить следующую теорию

- критерий неприводимости многочлена (критерий Эйзенштейна);
- теорему о рациональных корнях многочлена;
- формулы сокращённого умножения.

Задание 8. Разложите многочлен $x^{12} - 1$ на неприводимые сомножители ненулевой степени с целыми коэффициентами.

Решение:

Применим формулу разности квадратов для $x^{12} - 1$:

$$x^{12} - 1 = (x^6 - 1)(x^6 + 1).$$

Применим формулу разности квадратов для $x^6 - 1$:

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1).$$

Далее применим формулы разности и суммы кубов для $(x^3 - 1)(x^3 + 1)$:

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Преобразуем $x^6 + 1$ по формуле суммы кубов:

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

$$\text{Получаем: } x^{12} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

Заметим, что $x - 1$ и $x + 1$ неприводимы над Z . Квадратные трёхчлены $x^2 + x + 1$ и $x^2 - x + 1$ тоже неприводимы над Z , так как их дискриминанты равны -3 , следовательно нет целых корней. Аналогично, $x^2 + 1$ – неприводим.

Проверим многочлен $x^4 - x^2 + 1$. Он не может быть разложен в виде $(x - x_0)(x^3 + ax^2 + bx + c)$, так как тогда бы у него был целый корень, однако все его корни комплексные. Тогда единственный возможный вариант разложения: $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Покажем, что это невозможно.

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + d + ac = -1 \\ ad + bc = 0 \\ bd = 1 \end{cases}$$

Из уравнения $bd = 1$ получаем $b = d = \pm 1$, так как b и $d \in \mathbb{Z}$. Тогда из уравнения $b + d + ac$ получаем $ac = -3$ или $ac = 1$. Но оба варианта невозможны, так как целых решений вместе с уравнением $a + c = 0$ не может быть. Следовательно, многочлен $x^4 - x^2 + 1$ — неприводим.

Ответ: $x^{12} - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

Задание 9. Докажите для различных целых $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ неприводимость многочлена $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{100}) - 1$.

Решение:

Поскольку приводимость над $\mathbb{Q}$ равносильна приводимости над $\mathbb{Z}$, достаточно доказывать неприводимость многочлена над $\mathbb{Z}$. Обозначим многочлен символом p и предположим, что $p(x) = q(x) \cdot r(x)$, где $q, r \in \mathbb{Z}[x]$ и $1 \leq \deg(q), \deg(r) \leq 99$.

Отметим, что в точках $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ многочлен принимает значение -1 . Тогда в точках $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ многочлены $q(x)$ и $r(x)$ принимают значения по модулю равные 1, причём, поскольку их произведение отрицательно, они различны по знаку.

Рассмотрим $q(x) + r(x)$. Степень этого многочлена не превосходит 99, но в ста точках $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ он принимает значение 0. Такое возможно только если $q(x) + r(x)$ тождественно равен 0, то есть $q(x) = -r(x)$. Но тогда $p(x) = q(x) \cdot r(x) = -q^2(x)$ имеет отрицательный старший коэффициент. Однако очевидно, что $p(x) = (x - a_1) \dots (x - a_{100}) - 1$ имеет положительный старший коэффициент. Получили противоречие. Значит многочлен $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{100}) - 1$ неприводим.

Доказательство завершено.

Занятие 5. Многочлены от нескольких переменных.

Симметрические многочлены.

Задачи

Задание 1. Какие из следующих многочленов являются симметрическими в кольце $Q[x_1, x_2, x_3]$:

- 1) $x_1 + x_2 + x_3$;
- 2) $3x_1^2 + x_2 + 3x_3^2$;
- 3) $x_1x_2 + x_2x_1$;
- 4) $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$;
- 5) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$;
- 6) $(x_1 - x_2 - x_3)(x_2 - x_1 - x_3)(x_3 - x_1 - x_2)$?

Задание 2. Найдите высший член многочлена:

- 1) $(x_2^3 + x_1^2x_3 - x_3^3)(x_1^2 - x_1^2x_2x_3)(x_1^3x_2^2 - x_1^4 + x_2^4)$;
- 2) $2\sigma_1^4\sigma_2^3\sigma_3^2$, где $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

Задание 3. Среди следующих одночленов укажите те, которые могут быть высшими членами симметрических многочленов:

- 1) $x_1^5x_2^3x_3^5$;
- 2) $x_2^5x_3^4x_1^3$;
- 3) $x_1^5x_2^5x_3^5$;
- 4) $x_1^4x_2^4x_3$;
- 5) $x_2^5x_3x_1^4$;
- 6) $x_2^5x_3^2x_1^5$.

Задание 4. Следующие симметрические многочлены выразите через основные симметрические многочлены:

- 1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;
- 2) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$.

Задание 5. Многочлен $x^4 + ax^3 + 2x^2 + 3x + 4$ имеет корень, равный 1. Найдите сумму кубов остальных его корней.

Методические указания

Задание 1. Какие из следующих многочленов являются симметрическими в кольце $Q[x_1, x_2, x_3]$:

- 1) $x_1 + x_2 + x_3$;
- 2) $3x_1^2 + x_2 + 3x_3^2$;
- 3) $x_1x_2 + x_2x_1$;
- 4) $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$;
- 5) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$;
- 6) $(x_1 - x_2 - x_3)(x_2 - x_1 - x_3)(x_3 - x_1 - x_2)$?

Указание: необходимо выполнить перестановку переменных и указать, совпадает ли полученный многочлен с исходным.

Задание 2. Найдите высший член многочлена:

- 1) $(x_2^3 + x_1^2x_3 - x_3^3)(x_1^2 - x_1^2x_2x_3)(x_1^3x_2^2 - x_1^4 + x_2^4)$;
- 2) $2\sigma_1^4\sigma_2^3\sigma_3^2$, где $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, $\sigma_3 = x_1x_2x_3$.

Указание: в данном задании нужно раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

Задание 3. Среди следующих одночленов укажите те, которые могут быть высшими членами симметрических многочленов:

- 1) $x_1^5x_2^3x_3^5$;
- 2) $x_2^5x_3^4x_4^3$;
- 3) $x_1^5x_2^5x_3^5$;
- 4) $x_1^4x_2^4x_3$;
- 5) $x_2^5x_3x_1^4$;
- 6) $x_2^5x_3^2x_1^5$.

Указание: одночлен будет являться высшим членом симметрического многочлена, если его степени упорядочены по убыванию или равны.

Задание 4. Следующие симметрические многочлены выразите через основные симметрические многочлены:

$$1) x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;$$

$$2) x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3.$$

Решение:

1) Воспользуемся тождеством:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

$$\text{Ответ: } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

2) Воспользуемся тождеством:

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3)$. В задании (1) мы уже нашли, что $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Подставим в предыдущее равенство:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = \sigma_1((\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2) = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

$$\text{Ответ: } x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2.$$

Задание 5. Многочлен $x^4 + ax^3 + 2x^2 + 3x + 4$ имеет корень, равный 1.

Найдите сумму кубов остальных его корней.

Решение:

Пусть $P(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + 3x + 4$. 1 – корень $P(x)$, значит $P(1) = 0$.

$$P(1) = 1^4 + a \cdot (1)^3 + 2 \cdot (1)^2 + 3 + 4 = 0.$$

$$a + 10 = 0. \text{ Значит } a = -10.$$

Так как 1 – корень $P(x)$, разложим многочлен на множители:

$$P(x) = (x - 1)(x^3 - 9x^2 - 7x - 4).$$

Для множителя $x^3 - 9x^2 - 7x - 4$ запишем теорему Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -7 \\ x_1x_2x_3 = 4 \end{cases}$$

С помощью предыдущих вычислений найдём $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1^2x_3 + 3x_2^2x_1 + 3x_2^2x_3 + 3x_3^2x_1 + 3x_3^2x_2 + 6x_1x_2x_3. \text{ Из этого равенства следует:}$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 3(x_1x_2x_3).$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 9^3 - 3 \cdot 9 \cdot (-7) + 3 \cdot 4 = 930.$$

$$\text{Ответ: } 930.$$

Занятие 6. Решение олимпиадных задач.

Задачи

Задание 1. (Турнир городов – 2022, 11 класс.)

Многочлен третьей степени имеет три различных корня строго между 0 и 1. Учитель сообщил ученикам два из этих корней. Ещё он сообщил все четыре коэффициента многочлена, но не указал, в каком порядке эти коэффициенты идут. Обязательно ли можно восстановить третий корень?

Задание 2. (Московская математическая олимпиада – 2021, 11 класс.)

Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, наибольший из которых равен сумме двух других. Докажите, что $c > ab$.

Задание 3. (Росатом – 2021, 11 класс.)

Коля написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Вите угадать его степень. Витя задал Коле два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -3$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $x - n$, где n – его степень?». Получив ответы 1 и 6 соответственно, Витя уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

Задание 4. (Росатом – 2021, 10 класс.)

Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при $x = 2$ принимает значение 3, а при $x = 4$ его значение равно 1. Известно, что уравнение $P(n) = n - 1$ имеет целое решение. Найдите это решение.

Методические указания

Задание 1. (Турнир городов – 2022, 11 класс.)

Многочлен третьей степени имеет три различных корня строго между 0 и 1. Учитель сообщил ученикам два из этих корней. Ещё он сообщил все четыре коэффициента многочлена, но не указал, в каком порядке эти коэффициенты идут. Обязательно ли можно восстановить третий корень?

Решение:

Пусть a, b, c, d – коэффициенты многочлена от старшего к младшему; α, β – известные корни; γ – неизвестный корень.

Заметим, что все корни между 0 и 1, поэтому по теореме Виета d – наименьший из коэффициентов по модулю.

Так как все корни многочлена положительные, знаки коэффициентов чередуются. Поэтому, если знаем d , определим b . Если найдём a , то определим и c . По теореме Виета:

$a\gamma = \frac{-d}{\alpha\beta}$ и $b = -a(\alpha + \beta + \gamma)$. Поэтому можно найти $a(\alpha + \beta)$. $\alpha + \beta$ – известны, значит найдём a , а отсюда и третий корень γ .

Ответ: да.

Задание 2. (Московская математическая олимпиада – 2021, 11 класс.)

Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, наибольший из которых равен сумме двух других. Докажите, что $c > ab$.

Решение:

Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ – корни многочлена $P(x)$. Из условия получаем $x_3 = x_1 + x_2$. Видим, что $x_1 > 0$, так как в противном случае $x_3 \leq x_2$, что противоречит условию.

Применим формулы Виета для многочленов:

$$c - ab = -x_1x_2x_3 + (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -x_1x_2(x_1 + x_2) + 2(x_1 + x_2) \cdot (x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2) = (x_1 + x_2)(x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)^2) > 0.$$

Значит $c > ab$.

Доказательство завершено.

Задание 3. (Росатом – 2021, 11 класс.)

Коля написал в своей тетради многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и предложил Вите угадать его степень. Витя задал Коле два вопроса: «Чему равно значение многочлена при $x = -3$?» и «Чему равен остаток от деления многочлена на $x - n$, где n – его степень?». Получив ответы 1 и 6 соответственно, Витя уверенно назвал степень многочлена. Как он это сделал? Какова степень многочлена?

Решение:

Значение многочлена при $x = -3$ равно 1 запишем в следующем виде:
 $P(-3) = 1$.

Остаток от деления $P(x)$ на $x - n$ равен 6 представим в виде:
 $P(x) = (x - n) \cdot Q(x) + 6$. Подставим n в данное равенство и получим $P(n) = 6$.
Используем теорему Безу:

$$P(n) - P(-3) = 6 - 1 = 5 \text{ кратно } n + 3.$$

Так как $n \geq 0$, то $n + 3 = 5$. В противном случае n – отрицательное число.
 $n + 3 = 5$. Следовательно $n = 2$.

Ответ: степень многочлена $P(x)$ равна 2.

Задание 4. (Росатом – 2021, 11 класс.)

Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при $x = 2$ принимает значение 3, а при $x = 4$ его значение равно 1. Известно, что уравнение $P(n) = n - 1$ имеет целое решение. Найдите это решение.

Решение:

В первую очередь заметим, что $P(n) - P(2) = n - 4$ делится на $n - 2$, что может быть только при $n = 1; 3; 4$.

Аналогично, $P(n) - P(4) = n - 2$ делится на $n - 4$. При $n > 6$ выполняются неравенства: $0 < n - 4 < n - 2 < 2 \cdot (n - 4)$. Из этого следует $n \leq 6$.

С помощью перебора получаем, что делимость возможна только при $n = 2; 3; 5$. Учитывая первое условие, получаем только один возможный вариант $n = 3$.

Ответ: $n = 3$.

Занятие 7. Решение олимпиадных задач.

Задачи

Задание 1. (Турнир Ломоносова – 2020, 11 класс.)

На доске записан квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b$. Вова написал на одной стороне бумажки его корни, а с другой стороны этой же бумажки – его

коэффициенты a и b . Все написанные числа являются целыми и отличными от нуля. Затем Вова отдал эту бумажку Маше, которая сказала, что Вова скорее всего ошибся, так как на обеих сторонах бумажки написаны одни и те же числа. Определите, действительно ли ошибся Вова, или если он всё-таки всё сделал правильно, то какие числа написаны на бумажке?

Задание 2. (Алфутова Н.Б., Устинов А.В. «Алгебра и теория чисел – 2002.» [6])

Пусть x_1 и x_2 – наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$.

Задание 3. (Алфутова Н.Б., Устинов А.В. «Алгебра и теория чисел – 2002.» [6])

Пусть $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите $a^4 + b^4 + c^4$.

Задание 4. (Всероссийская олимпиада школьников – 2023, 10 класс.)

Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geq 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?

Методические указания

Задание 1. (Турнир Ломоносова – 2020, 11 класс.)

На доске записан квадратный трёхчлен $x^2 + ax + b$. Вова написал на одной стороне бумажки его корни, а с другой стороны этой же бумажки – его коэффициенты a и b . Все написанные числа являются целыми и отличными от нуля. Затем Вова отдал эту бумажку Маше, которая сказала, что Вова скорее всего ошибся, так как на обеих сторонах бумажки написаны одни и те же числа. Определите, действительно ли ошибся Вова, или если он всё-таки всё сделал правильно, то какие числа написаны на бумажке?

Решение:

С помощью подбора можно найти уравнение $x^2 + x - 2$ с корнями 1 и -2 .

Покажем, что никаких других чисел не могло быть написано. С обеих сторон бумажки должны быть написаны числа a и b . Значит a и b – корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$. Подставим b в уравнение:

$b^2 + ab + b = 0$. Полученное равенство можно сократить на b (по условию b не равно 0). Получим:

$a + b = -1$. Но по теореме Виета $a + b = -a$. Следовательно $a = 1$. Откуда $b = -2$.

Ответ: Вова написал числа 1 и -2 .

Задание 2. (Алфутова Н.Б., Устинов А.В. «Алгебра и теория чисел – 2002.» [6])

Пусть x_1 и x_2 – наибольшие корни многочленов $f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4$ и $g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$ соответственно. Найдите $\frac{x_1}{x_2}$.

Решение:

1 способ. Заметим, что $g(2x) = 16f(x)$. Тогда x_1 – корень $f(x)$ тогда и только тогда, когда $2x_1$ – корень $g(x)$. Тогда можем найти $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

2 способ. Сравним коэффициенты многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

В соответствии с формулами Виета корни многочлена $g(x)$ являются удвоенными корнями многочлена $f(x)$. Тогда получаем $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Задание 3. (Алфутова Н.Б., Устинов А.В. «Алгебра и теория чисел – 2002.» [6])

Пусть $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите $a^4 + b^4 + c^4$.

Решение:

Заметим, что $a + b + c = \frac{(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2} = -\frac{1}{2}$. Преобразуем $a^4 + b^4 + c^4$:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2((ab + bc + \\ &+ ac)^2 - 2(abc(a + b + c))) = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(ab + bc + ac)^2 + 4abc(a + b + c) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.

Задание 4. (Всероссийская олимпиада школьников – 2023, 10 класс.)

Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geq 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?

Решение:

Заметим, что если $b = 1$, то любой многочлен с коэффициентами от 0 до $b-1$ является нулевым.

Пусть $b > 1$. Представим $a - b$ в виде многочлена:

$$a - b = c_n b^n + \dots + c_1 b + c_0, \text{ где } c_i \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}.$$

Так как $a - b \geq b$, то в полученной записи $n \geq 1$.

Покажем, что $P(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$ удовлетворяет условию. По теореме Безу для любого многочлена f с целыми коэффициентами выполняется: $f(a) - f(b)$ делится на $a - b$. Следовательно, $P(a) - P(b)$ делится на $a - b = P(b)$. Значит и $P(a) = (P(a) - P(b)) + P(b)$ делится на $P(b)$.

Ответ: такой многочлен существует при $b > 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения данной работы была достигнута поставленная цель – разработаны факультативные занятия для обучения по теме «Многочлены», направленные на углублённое изучение материала и подготовку обучающихся к решению олимпиадных задач и задач повышенной сложности.

В первой главе проведён теоретический анализ ключевых понятий алгебры многочленов, рассмотрены цели их изучения в школьном курсе, а также проанализировано содержание учебников базового и углублённого уровней для 7-11 классов. Особое внимание уделено олимпиадным задачам, что позволило выявить наиболее сложные для понимания аспекты темы и определить направления для дополнительной проработки.

Во второй главе представлена практическая реализация работы – разработано содержание факультативных занятий, включающих в себя подборку задач разного уровня сложности (от базовых до олимпиадных), указания к решению и само решение.

Таким образом, данная работа подтверждает актуальность выбранной темы и демонстрирует её востребованность в современном школьном образовании. Разработанные занятия способствуют более эффективному усвоению тем алгебры многочленов и создают прочную основу для дальнейшего изучения математики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральная рабочая программа основного общего образования по математике (базовый уровень). М. : Просвещение, 2023. 106 с.
2. Федеральная рабочая программа основного общего образования по математике (углублённый уровень). М. : Просвещение, 2023. 101 с.
3. Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов [и др.] . 20-е изд. М. : Просвещение, 2014. 255 с.
4. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений и школ с углубл. изучением математики / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. 9-е изд., дораб. М. : Просвещение, 2010. 303 с.
5. Алгебра. 9 класс : учебник для учащихся 9 классов с углублённым изучением математики / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. 7-е изд. М. : Просвещение, 2006. 345 с.
6. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М. : МЦНМО, 2002. 264 с.
7. Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углублённый уровень). 18-е изд., стереотип. М. : Мнемозина, 2014. 312 с.
8. Винберг Э. Б. Алгебра многочленов. Учебное пособие для студентов-заочников III-IV курсов физико-математических факультетов педагогических институтов. М. : Просвещение, 1980. 176 с.
9. Куликов Л. Я., Москаленко А. И., Фомин А. А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М. : Просвещение, 1993. 289 с.
10. Математика. Алгебра : 7-й класс : базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 16-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 255 с.

11. Математика. Алгебра : 8-й класс : базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 17-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 319 с.
12. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. 21-е изд., доп. М. : Мнемозина, 2013. 175 с.
13. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. 12-е изд., доп. М. : Мнемозина, 2010. 215 с.
14. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра и начала анализа. 11 класс : учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень). В 2 ч. Ч. 1. М. : Мнемозина, 2007. 287 с.
15. Муравин Г. К., Муравин К. С., Муравина О. В. Алгебра. 7 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений. 9-е изд., стереотип. М. : Дрофа, 2013. 285 с.
16. Муравин Г. К., Муравин К. С., Муравина О. В. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений. 15-е изд., стереотип. М. : Дрофа, 2013. 254 с.
17. Муравин Г. К., Муравин К. С., Муравина О. В. Алгебра. 9 кл. : учебник. 5-е изд., стереотип. М. : Дрофа, 2018. 319 с.
18. Никольский С. Н. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы : пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. М. : Просвещение, 2010. 287 с.
19. Прасолов В. В. Многочлены. 3-е изд, исправленное. М. : МЦНМО, 2003. 336 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 30 » 10 2024 г.
Пенз Пальчиковский В.И.

Задание

По ВКР студента Страховой Екатерины Сергеевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Элементы алгебры многочленов на факультативе по
математике»

Утверждена приказом по Университету от « 25.12 » 2024 г. № 1350/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 6 » мая 2025 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения этапов	Примечания
1	Изучение основных понятий.	Сентябрь - октябрь 2024	Выполнено
2	Анализ Федеральной рабочей программы основного общего образования по математике (базовый и углублённый уровни).	Ноябрь 2024	Выполнено
3	Изучение учебной литературы по теме работы.	Ноябрь - декабрь 2024	Выполнено
4	Обзор олимпиадных задач.	Январь - февраль 2025	Выполнено
5	Подбор и систематизация материала для факультативных занятий.	Февраль - марта 2025	Выполнено
6	Оформление методических указаний.	Март - апрель 2025	Выполнено
7	Оформление работы. Подготовка к защите.	Май - июнь 2025	Выполнено

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель Мож Моисеевна
(подпись)

Задание принял к исполнению Ефр Страхова Е.С.
(подпись)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Страховой Екатерины
Сергеевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Страхова Екатерина Сергеевна,

Ф.И.О. студента

студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Элементы алгебры многочленов на факультативе по математике», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



подпись

14.05.25

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку

14.05.25

ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР



подпись

О.А. Монахова

И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Элементы алгебры многочленов на факультативе по математике»

студентки 4 курса Страховой Екатерины Сергеевны

направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

профиля «Математика»

Руководитель ВКР Монахова Оксана Александровна



СПРАВКА

о результатах проверки текстового документа
на наличие заимствований

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования "Пензенский государственный
университет"

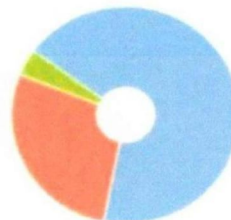
ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНА В СИСТЕМЕ АНТИПЛАГИАТ.ВУЗ

Автор работы: Страхова Екатерина Сергеевна
Самоцитирование
рассчитано для: Страхова Екатерина Сергеевна
Название работы: Элементы алгебры многочленов на факультативе по математике
Тип работы: Выпускная квалификационная работа
Подразделение: направление подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование" профиль подготовки "Математика"

РЕЗУЛЬТАТЫ

СОВПАДЕНИЯ		27.77%
ОРИГИНАЛЬНОСТЬ		68.23%
ЦИТИРОВАНИЯ		4.01%
САМОЦИТИРОВАНИЯ		0%

ДАТА ПОСЛЕДНЕЙ ПРОВЕРКИ: 14.05.2025



14.05.2025

дд.мм.гггг.

подпись

О.А. Монахова

И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Элементы алгебры многочленов
на факультативе по математике»
студентки Страховой Екатерины Сергеевны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Выпускная квалификационная работа «Элементы алгебры многочленов на факультативе по математике» студентки Страховой Екатерины Сергеевны посвящена методическим аспектам изучения алгебры многочленов в школьном курсе математики. В ходе работы была разработана программа факультативного курса для 10 класса, направленная на углубленное изучение этой темы.

Задания факультативного курса ориентированы на систематизацию и углубление знаний о многочленах, изучение стандартных и нестандартных методов решения задач. Для каждого занятия подобраны задания тренировочного характера для уточнения теоретических понятий и подготовки к самостоятельному решению задач повышенной сложности. На каждом занятии предлагается 1-2 задачи повышенной сложности по рассматриваемой теме. Для каждой задачи приведено подробное решение или даны указания для самостоятельного выполнения. Все задачи повышенной сложности приведены с решением.

Работа Страховой Е.С. заслуживает оценки «хорошо» и может быть использована в учебном процессе учителем при подготовке обучающихся.

Руководитель ВКР:

Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,
доцент, кандидат физико-математических наук

