МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет промышленных технологий, электроэнергетики и транспорта
Кафедра «Теоретическая и прикладная механика и графика»

Курсовая работа

по дисциплине «Техническая механика»

ПГУ 2.15.03.02.004 ПЗ

Направление подготовки – 15.03.02 Технологические машины и оборудование

Профиль подготовки – Металлообрабатывающее оборудование
и технологическая оснастка

Выполнил: студент гр. 21ЗММ31
_____Горячев-Мостовой С.В.
Руководитель: д.т.н., профессор
_____Литвинов А. Н.

Работа защищена с оценкой _____

Дата защиты _____

Пенза, 2022

Реферат

ГОРЯЧЕВ-МОСТОВОЙ С.В. Расчёт на прочность, жесткость и устойчивость простейших типовых элементов конструкций машиностроительного направления (стержней, балок и валов), работающих на растяжение (сжатие), кручение и изгиб.

Пояснительная записка включает: 33 страниц, 11 рисунков, 7 таблиц, 8 источников.

Ключевые слова: расчет, стержень, кручение, растяжение, сжатие, изгиб, плоское сечение, напряжение, прочность, жёсткость, устойчивость, нагрузка, сила, момент, эпюра, вал., силовые факторы, материал.

Целью курсовой работы по дисциплине «сопротивление материалов» является развитие у студентов навыков самостоятельного решения практических задач по обеспечению прочности, жесткости и устойчивости типовых элементов конструкции машиностроительного направления, и анализ их состояния при действии внешних эксплуатационных и технологических нагрузок.

В пояснительной записке рассмотрены вопросы: расчет статически определимого и неопределимого стержня, расчет геометрических характеристик поперечного сечения, расчет на прочность трансмиссионного вала, расчет на устойчивость, расчет стальной балки на прочность и расчет балки на жесткость.

Содержание

Введение 4

1 Расчет статически определимого стержня 5

2 Расчет статически неопределимого стержня 9

3 Расчет геометрических характеристик поперечного сечения 14

4 Расчет на прочность трансмиссионного вала.....18

5 Расчет на устойчивость.....22

6 Расчет стальной балки на прочность.....24

Заключение.....32

Список литературы. 33

Введение

Сопротивление материалов — инженерная дисциплина, которая является введением в науку о прочности, жесткости и устойчивости конструкций.

Сопротивление материалов — это важнейшая дисциплина в высших технических учебных заведениях.

. Перед началом любого строительства (зданий, сооружений, любых конструкций, машин) разрабатывается проект, выбираются материалы, рассчитываются габариты элементов, основные размеры. В сопромате учитываются величины и характеристики сил, которые будет воспринимать каждый элемент сооружения, условия эксплуатации. Это необходимо, чтобы создаваемая конструкция, раньше времени, не деформировалась и не разрушалась. Имея минимальные размеры отдельных деталей, она должна быть достаточно надежной.

Сопротивление материалов решает указанные задачи прочности основываясь как на теоретических, так и на опытных данных, имеющих в этой науке одинаково важное значение.

1 Расчет статически определимого стержня

Ступенчатый стержень (рисунок 1.1), участки которого имею площади поперечных сечений F_i нагружены продольными силами P_i. Сечения участков стержня – квадрат со стороной a_i, длины участков равны l_i.

Требуется построить эпюры нормальных усилий N и нормальных напряжений σ, вычислить полное удлинение стержня и сделать вывод о его прочности.

Материал стержня – сталь с модулем упругости первого рода $E = 2 * 10^5$ Мпа, и допускаемым напряжением $\sigma = 160$ МПа. Данные для расчета приведены в таблице 1.1. Численные значения равны:

$P = 10$кН; $a = 10$ мм; $l = 500$ мм.

Таблица 1.1

P_i				a_i				l_i			
P_1	P_2	P_3	P_4	a_1	a_2	a_3	a_4	l_1	l_2	l_3	l_4
P	*2P*	*2P*	*2P*	*4a*	*2a*	*a*	*a*	*l*	*l*	*2l*	*l*

Решение:

1) Определение опорных реакций из уравнения равновесия (сумма проекций всех сил на ось Oz:

$\sum Z = -Z_A + P_1 - P_2 + P_3 + P_4 = 0;$

$Z_A = P_1 - P_2 + P_3 + P_4 = 10^4 - 2 * 10^4 + 2 * 10^4 + 2 * 10^4 = 3 * 10^4$ Н;

Опорная реакция Z_A имеет положительное значение, что указывает на то, что её направление сонаправлено предполагаемому.

2) Определение нормальных усилий N_i на каждом участке применяя метод сечений.

В произвольном сечении $i-$го участка нормальное усилие N_i равно алгебраической сумме проекции всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к сечению, т.е. $N_i = \sum_{i=1}^{n} P_i$.

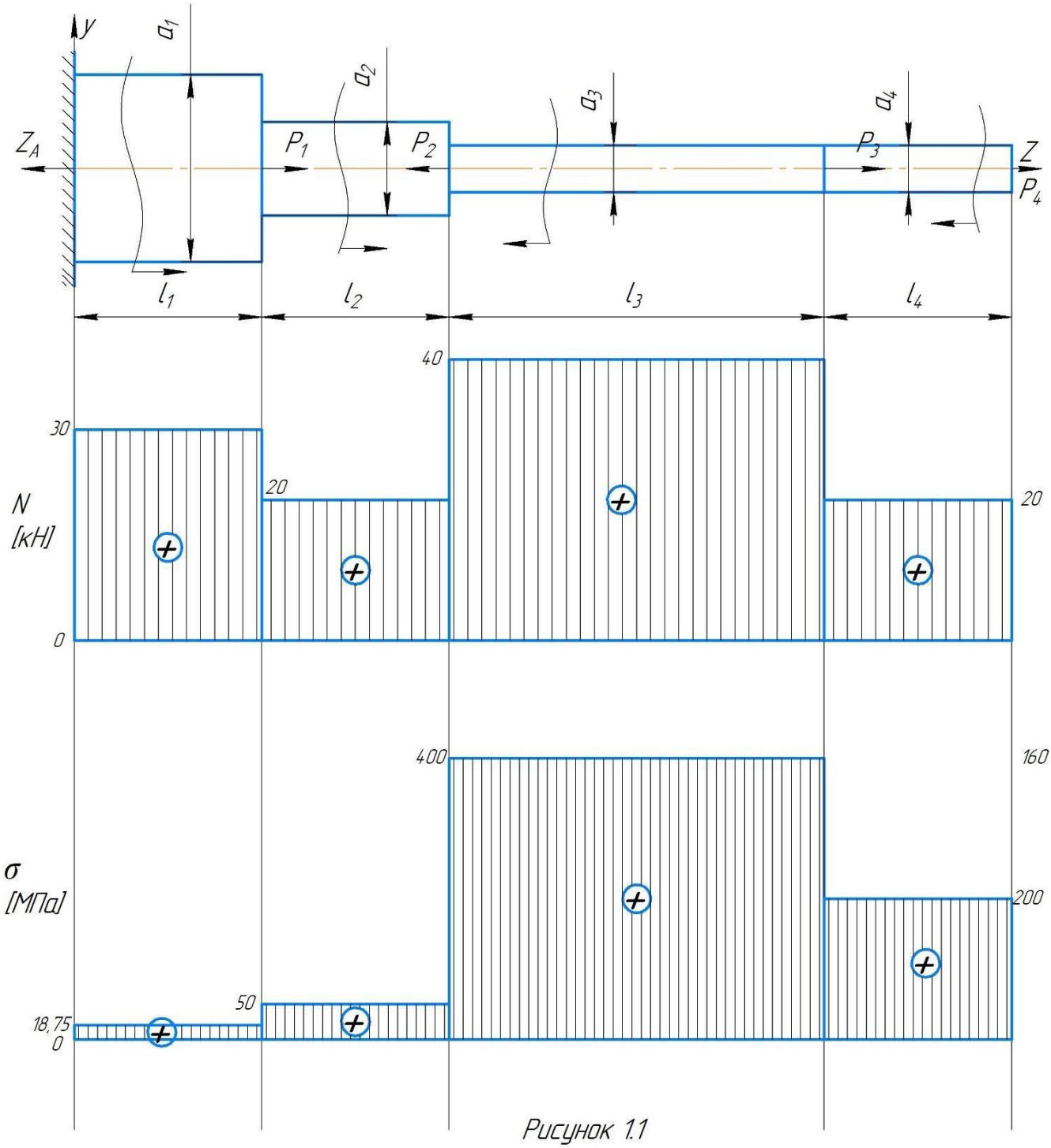

y
a_1
a_2
a_3
a_4
Z_A
P_1
P_2
P_3
Z
P_4
l_1
l_2
l_3
l_4
N
[кН]
30
20
40
20
0
σ
[МПа]
400
160
200
50
18,75
0

Рисунок 1.1

Растягивающие усилия считаются положительными, сжимающие – отрицательными. При составлении уравнений направление внутреннего усилия N_i , полагается растягивающим (положительным), т.е. направлено в сторону внешней нормали к произвольному сечению.

Если в результате расчета усилие N_i примет отрицательное значении, это указывает на то, что направление усилия противоположно предполагаемому.

$N_1 = Z_A = 3 * 10^4\ H;$ I участок;

$N_2 = Z_A - P_1 = 2 * 10^4\ H;$ II участок;

$N_3 = P_3 + P_4 = 4 * 10^4\ H;$ III участок;

$N_4 = P_4 = 2 * 10^4\ H;$ IV участок;

По полученным результатам строится эпюра нормальных усилий N.

3) Определение нормальных напряжений $\sigma_i = \frac{N_i}{F_i}$ на каждом участке.

$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{N_1}{16a^2} = \frac{3*10^4}{16*10^2} = 18{,}75$ Мпа; I участок;

$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{N_2}{4a^2} = \frac{2*10^4}{4*10^2} = 50$ Мпа; II участок;

$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{N_3}{a^2} = \frac{4*10^4}{10^2} = 400$ Мпа; III участок;

$\sigma_4 = \frac{N_4}{F_4} = \frac{N_4}{a^2} = \frac{2*10^4}{10^2} = 200$ Мпа; IV участок.

По полученным значениям строится эпюра нормальных напряжений σ.

Из эпюры σ следует, что наиболее нагружен III участок стержня.

При центральном растяжении условие прочности имеет вид: $\max \sigma \leq [\sigma]$.

Так как $\max\ \sigma = 400$ МПа; $200\text{МПа} > [\sigma]$, то условие прочности не выполняется и требуется выполнить проектный расчет по вычислению геометрических параметров IV участка стержня.

4) Расчет площади поперечного сечения III участка.

$\max \sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma];$

$F \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{4*10^4}{160} = 250$ мм^2; $a \geq \sqrt{F} = 15{,}81$ мм.

$F \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{2*10^4}{160} = 125$ мм^2; $a \geq \sqrt{F} = 11{,}18$ мм.

Таким образом окончательно принимаем $a_3 = 12$ мм; $a_4 = 16$ мм.

5) Определение полной деформации исправленного стержня.

Полная деформация вычисляется как алгебраическая сумма абсолютных деформаций Δl_i, его участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i;$$

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EF_i};$$

$$\Delta l = \frac{1}{E}(\sigma_1 l_1 + \sigma_2 l_2 + \sigma_3 l_3 + \sigma_4 l_4);$$

$$\Delta l = \frac{1}{2*10^5}(18{,}75 * 500 + 50 * 500 + 160 * 1000 + 160 * 500) = 1{,}37 \text{ мм}.$$

Полная деформация стержня равна: $\Delta l = 1{,}37$ мм.

2 Расчет статически неопределимого стержня.

Стержень постоянного круглого поперечного сечения (рисунок 2.1) защемлен обоими торцами и нагружен продольными силами.

Требуется раскрыть статическую неопределимость, построить эпюру нормальных усилий N и эпюру линейных перемещений Δ.

Расчетная схема представлена на рисунке 2.1. Числовые значения для расчета равны: $l = 100$ мм; $P = 10$ кН. Длины участков равны: $l_1 = 0{,}6l$; $l_2 = 1.2l$; $l_3 = 0{,}8l$; $l_4 = l$.

Стержень изготовлен из стали с характеристиками: $E = 2 * 10^5$ МПа; $[\sigma] = 160$ Мпа.

Решение:

1) Определение опорных реакций.

Составляется уравнение равновесия:

$\sum Z = Z_A - P - 4P + 2P + Z_B = 0;$

$3P = Z_A + Z_B;$

Полученное уравнение имеет два неизвестных: Z_A и Z_B, из чего следует, что система один раз статически неопределима.

2) Выбирается основная система. Она получается из заданной путем освобождения от «лишней» связи. Принимаем за «лишнюю» связь, защемленную в опоре В. Основная система нагружается заданными силами и накладывается условие эквивалентности ее заданной системе: перемещение сечения В заданной и основной системах должно быть одинаковым, т.е. $\Delta_B = 0$.

В сечении В прикладывается активная сила $Z = Z_B$, величина которой должна быть такой, чтобы выполнялось условие эквивалентности работы, заданной и основной систем.

3) Раскрытие условие эквивалентности.

Перемещение Δ_B сечения В выражается через приложенные нагрузки, применяя принцип независимости действия сил (нагрузки, вызывающие сжатие, считаются отрицательными):

$\Delta_B = \Delta_B(P_i) + \Delta_B(Z) = 0.$

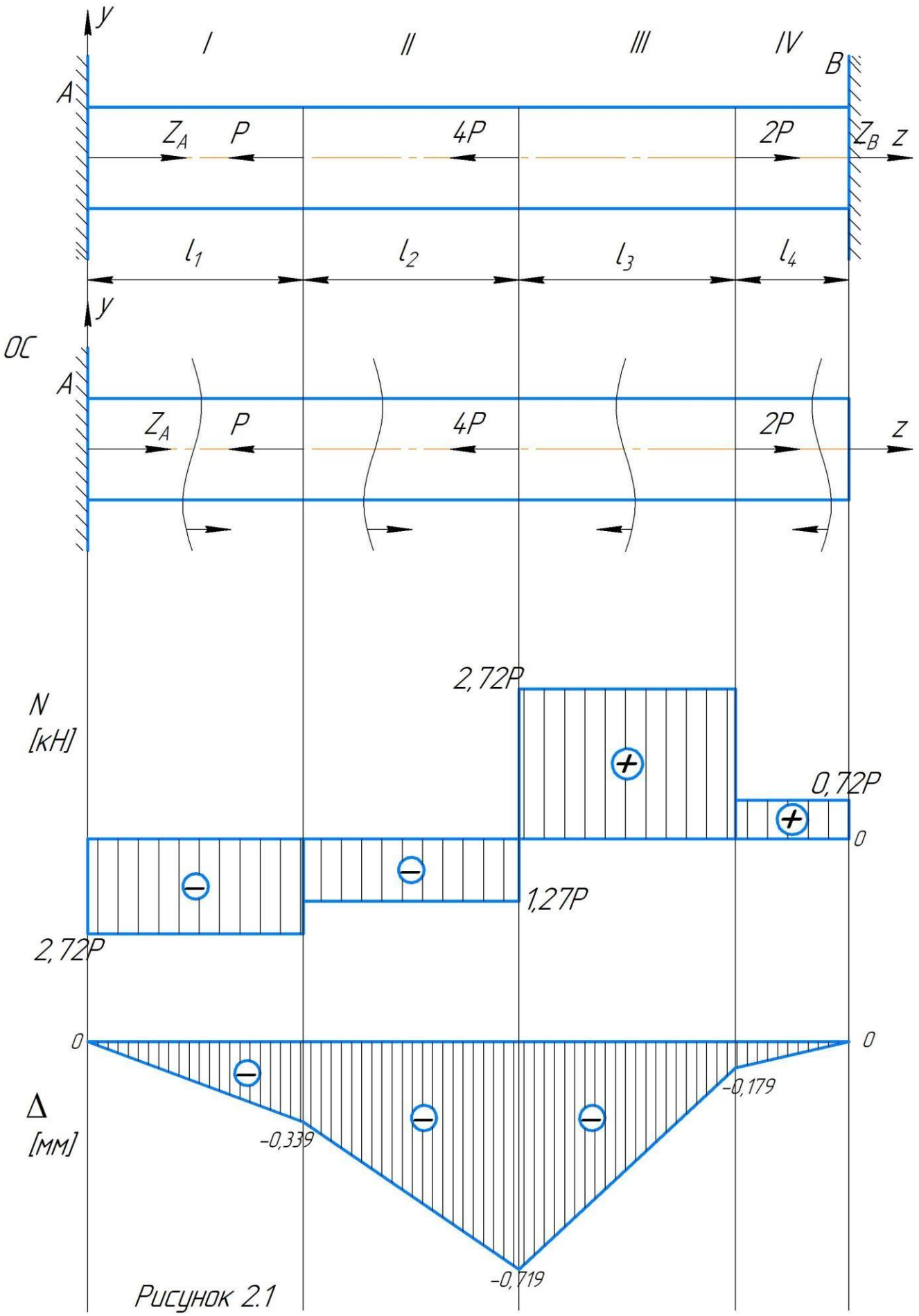

y
I
II
III
IV
A
B
Z_A
P
4P
2P
Z_B
z
l_1
l_2
l_3
l_4
y
ОС
A
Z_A
P
4P
2P
z
N
[кН]
2,72P
0,72P
0
1,27P
2,72P
0
0
Δ
[мм]
-0,339
-0,179
-0,719

Рисунок 2.1

Запишем выражения используя формулу:

$\Delta_B(P_i) = \frac{P_i l_i}{EF}$;

$\Delta_B(P_1) = \frac{-P*0,6l}{EF}$;

$\Delta_B(P_2) = \frac{-4P*1,8l}{EF}$;

$\Delta_B(P_3) = \frac{2P*3,6l}{EF}$;

$\Delta_B(Z) = \frac{Z*4,6l}{EF}$.

В результате получим уравнение совместности деформаций:

$$\frac{-P*0,6l}{EF} + \frac{-4P*1,8l}{EF} + \frac{2P*3,6l}{EF} + \frac{Z*4,6l}{EF} = 0.$$

При составлении уравнения учтено, что стержень имеет постоянное поперечное сечение на всех участках, т.е. $(EF_i) = EF = const$.

Решая это уравнение получим:

$Z = Z_B = 0,7222P$;

Зная Z из уравнения равновесия вычисляется Z_A:

$3P = Z_A + 0,7222P$;

$Z_A = 2,2778P$.

Таким образом статическая неопределимость раскрыта и определены опорные реакции.

4) Определение нормальных усилий N_i методом сечений.

Стержень разбивается на 4участка, для каждого из которых вычисляются нормальные усилия с учетом знаков.

$N_1 = -Z_A = -2,2778\ P$; I участок;

$N_2 = -Z_A - 2P = -1,2778\ P$; II участок;

$N_3 = Z_B + 2P = 2,7222\ P$; III участок;

$N_4 = Z_B = 0,7222\ P$; IV участок;

По полученным значениям строится эпюра нормальных усилий N.

5) Выполнение проектного расчета.

Так как стержень имеет постоянное поперечное сечение, то для определения наиболее нагруженного участка не требуется построение эпюры нормальных напряжений.

Расчет диаметра производится на основе условия прочности.

$$\max \sigma = \sigma_3 = \frac{N_1}{F} = \frac{2{,}72\,P}{F} \leq [\sigma];$$

Отсюда:

$$F \geq \frac{2{,}72\,P}{[\sigma]};$$

$$F \geq \frac{2720}{160} = 170.14 \text{ мм}^2;$$

$$F = \frac{\pi D^2}{4};$$

$$D = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = \sqrt{\frac{4*170.14}{3.14}} = 14.72 \text{ мм};$$

Диаметр принимаем как ближайшее к расчетному наибольшее четное число:

$D_{\text{пр}} = 16$ мм; $F = 201{,}06$ мм^2.

Определение перемещений основной системы.

Определяя перемещения в сечениях, используют следующие правило их подсчета: перемещение сечения в конце участка равно перемещению сечения в начале этого участка плюс его абсолютная «деформация» на участке:

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + \frac{N_i l_i}{(EF)_i};$$

Перемещение сечения 0: $\Delta_0 = 0$;

Перемещение сечения 1: $\Delta_1 = \Delta_0 + \frac{N_1 l_1}{EF} = 0 + \frac{-22778*600}{2*10^5*201{,}06} = -0.339$ мм;

Перемещение сечения 2: $\Delta_2 = -0{,}339 + \frac{-12778*1200}{2*10^5*201{,}06} = -0.719$ мм;

Перемещение сечения 3: $\Delta_3 = -0.719 + \frac{27222*800}{2*10^5*201{,}06} = -0.179$ мм;

Перемещение сечения 4: $\Delta_4 = -0.179 + \frac{7222*1000}{2*10^5*201{,}06} = 0.00012$ мм;

Допустимая погрешность перемещений при вычислениях: $[\delta] \leq 5\%$.

$$\delta = \frac{0.00012}{0{,}179} * 100\% = 0.06\%.$$

Из того, что расчетная погрешность не превышает допустимую следует выполнения принципа эквивалентности, заданной и основной систем.

По рассчитанным перемещениям сечения В строится эпюра Δ (рисунок 2.1).

3 Расчет геометрических характеристик поперечного сечения.

Для заданного поперечного сечения (рисунок 3.1) вычислить геометрические характеристики $J_x, J_y, W_x, W_y, i_x, i_y$ относительно главных центральных осей.

При расчете принять $b_1 = k_1 b;\ b_2 = k_2 b;\ b_3 = k_3 b$.

Значения коэффициентов k_i указаны в таблице 3.1, в соответствии с данным вариантом.

Все геометрические характеристик требуется вычислить через параметр сечения b.

Таблица 3.1

Значения коэффициентов		
k_1	k_2	k_3
1.3	0.7	1.6

Решение:

1) Так как сечение является симметричным, то вертикальная ось симметрии y является главной центральной осью. Для решения задачи по нижней кромке сечения вводится вспомогательная ось x_1.

Для расчета сечение условно делится на простые фигуры. В данном случае это прямоугольник (1) и прямоугольник (2). Для каждой фигуры проводятся собственные главные центральные оси (т.к. сечение имеет вертикальную ось симметрии, то эта ось является главной центральной осью. Следовательно, центр тяжести сечения будет расположен на этой оси.): $x_{C1}, y_{C1}, x_{C2}, y_{C2}$.

Положение центра тяжести сечения определяется по формуле:

$y_C = \frac{F_1 y_{C1} - F_2 y_{C2}}{F_1 - F_2}$; где F_1, F_2 – площади простых фигур, входящих в сечение; y_{C1}, y_{C2} – координаты их центров тяжести относительно оси x_1.

$F_1 = 4{,}7b * 3{,}6\text{b} = 16{,}9b^2$; $y_{C1} = 2{,}35b$;

$F_2 = 2{,}6b * 1{,}6b = 4{,}16b^2$; $y_{C2} = 1{,}3b$.

$$y_C = \frac{16{,}9b^2 * 2{,}35b - 4{,}16b^2 * 1{,}3b}{16{,}9b^2 - 4{,}16b^2} = 3{,}2b.$$

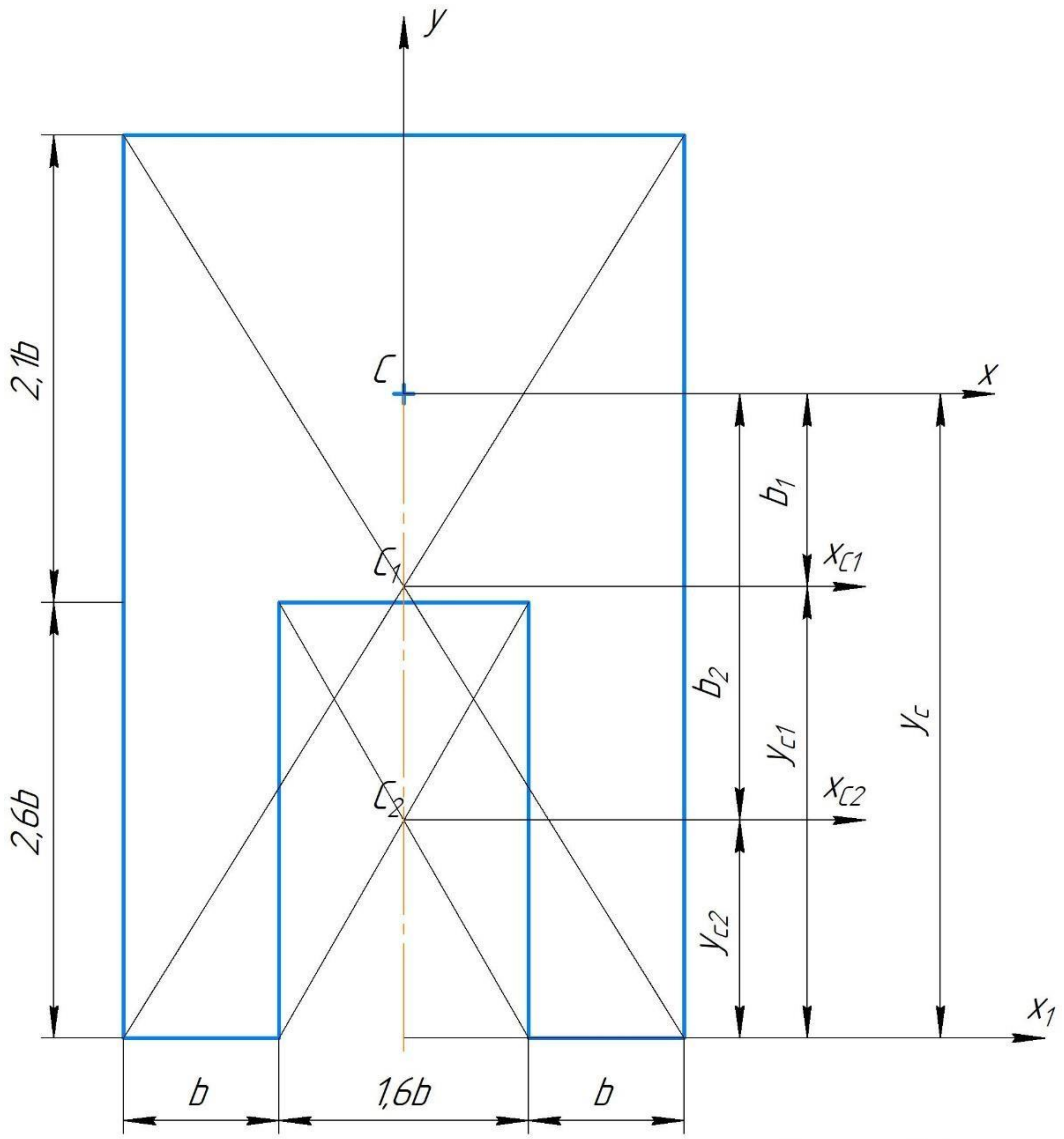


Рисунок 3.1

На эскизе поперечного сечения (рисунок 3.1) штриховка условно не показана.

2) Определение моментов инерции.

Осевой момент инерции сечения относительно оси *x* равен:

$$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)}.$$

Моменты инерции фигур относительно оси *x*:

$$J_x^{(1)} = J_{xC1}^{(1)} + F_1 b_1^2; \qquad J_x^{(2)} = J_{xC2}^{(2)} + F_2 b_2^2;$$

где $J_{xC1}^{(1)}$, $J_{xC2}^{(2)}$ – моменты инерции прямоугольников относительно их собственных главных центральных осей x_{C1} и x_{C2} соответственно; b_1 и b_2 – расстояния между осями x и x_{C1}, аналогично x и x_{C2}.

Из рисунка следует:

$b_1 = y_C - y_{c1} = 3{,}2b - 2{,}35b = 0{,}85b;$

$b_2 = y_C - y_{c2} = 3{,}2b - 1{,}3b = 1{,}9b;$

Моменты инерции каждого прямоугольника относительно его главных осей вычисляются по формуле:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

$J_{xC1}^{(1)} = \frac{3{,}6b*(4{,}7b)^3}{12} = 31{,}15b^4;$

$J_{xC2}^{(2)} = \frac{1{,}6b*(2{,}6b)^3}{12} = 2{,}34b^4$

Момент инерции всего поперечного сечения равен:

$$J_x = (31{,}15b^4 + (0{,}85b)^2 * 16{,}9b^2) - (2{,}34b^4 + (1{,}9b)^2 * 4{,}16b^2) = 26b^4$$

Ось y является осью симметрии всего сечения и фигур, входящих в него, следовательно, главные центральные оси y_{C1} и y_{C2} совпадают с y.

В этом случае момент инерции равен:

$J_y = J_y^{(1)} - J_y^{(2)};$

Где:

$J_y^{(1)} = \frac{hb^3}{12} = \frac{4{,}7b*(3{,}6b)^3}{12} = 18{,}27b^4;$

$J_y^{(2)} = \frac{hb^3}{12} = \frac{2{,}6b*(1{,}6b)^3}{12} = 0{,}89b^4;$

$J_y = J_y^{(1)} - J_y^{(2)} = 18{,}27b^4 - 0{,}89b^4 = 17{,}38b^4;$

3) Определение моментов сопротивления.

Моменты сопротивления сечения равны:

$W_x = \frac{J_x}{y_{max}};$ $\qquad y_{max} = y_c = 3{,}2b;$

$W_y = \frac{J_y}{x_{max}};$ $\qquad x_{max} = \frac{3{,}6b}{2} = 1.8b;$

y_{max} и x_{max} – наиболее удаленные точки от осей x y.

Тогда:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{26b^4}{3{,}2b} = 8{,}13b^3;$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{max}} = \frac{17{,}38b^4}{1{,}8b} = 5{,}66b^3.$$

4) определение радиусов инерции.

Радиусы инерции вычисляются по следующим формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}; \qquad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}};$$

где: F – площадь всего сечения.

$$F = F_1 - F_2 = 16{,}9b^2 - 4{,}16b^2 = 12{,}74b^2;$$

Тогда:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{26b^4}{12{,}74b^2}} = 1{,}43b;$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{5{,}66b^4;}{12{,}74b^2}} = 0{,}67b;$$

Таким образом данное поперечное сечение обладает следующими характеристиками (таблица 3.2):

Таблица 3.2

F	J_x	J_y	W_x	W_y	i_x	i_y
$12{,}74b^2$	$26b^4$	$5{,}66b^4$	$8{,}13b^3$	$5{,}66b^3$	$1{,}43b$	$0{,}67b$

4 Расчет на прочность трансмиссионного вала.

Требуется выполнить проектный расчет трансмиссионного стального вала постоянного поперечного сечения. Вал посажен на подшипниковые опоры. К шкиву 1 подводится мощность N_1, которая передается оборудованию через шкивы 2, 3 и 4 в соответствии с расчетной схемой, представленной на рисунке 4.1.

Вал имеет сплошное поперечное круглое сечение диаметром D и вращается с частотой n мин$^{-1}$. Исходные данные представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

N_2	N_3	N_4	n	l_1	l_2	l_3
кВт	кВт	кВт	мин$^{-1}$	м	м	м
60	30	20	200	0,7	1,0	0,4

Прочие данные для расчета:

Материал вала – сталь;

Модуль сдвига $G = 0.8 * 10^5$ Мпа;

Допускаемые касательные напряжения: $[\tau] = 40$ МПа;

Допускаемый относительный угол закручивания вала $[\Theta] = 0{,}4 \frac{\text{град}}{\text{м}}$

Решение:

1) Определение величины мощности N_1, подводимой к ведущему шкиву 1. Считается, что потери на трение в подшипниковых опорах A и B отсутствуют, т.е.

$N_1 - N_2 - N_3 - N_4 = 0$;

$N_1 = 60 + 30 + 20 = 110$ кВт;

2) Вычисление крутящих моментов, передаваемых на трансмиссионный вал в местах расположения шкивов.

$M_i = 9.55 \frac{N_i}{n}$; где i – номер шкива.

$M_1 = 9.55 \frac{N_1}{n} = 9.55 * \frac{110}{200} = 5{,}3$ кНм;

$M_2 = 9.55 \frac{N_2}{n} = 9.55 * \frac{60}{200} = 2{,}9$ кНм;

$M_3 = 9.55 \frac{N_3}{n} = 9.55 * \frac{30}{200} = 1{,}4$ кНм;

$M_4 = 9.55 \frac{N_4}{n} = 9.55 * \frac{20}{200} = 0{,}9$ кНм.

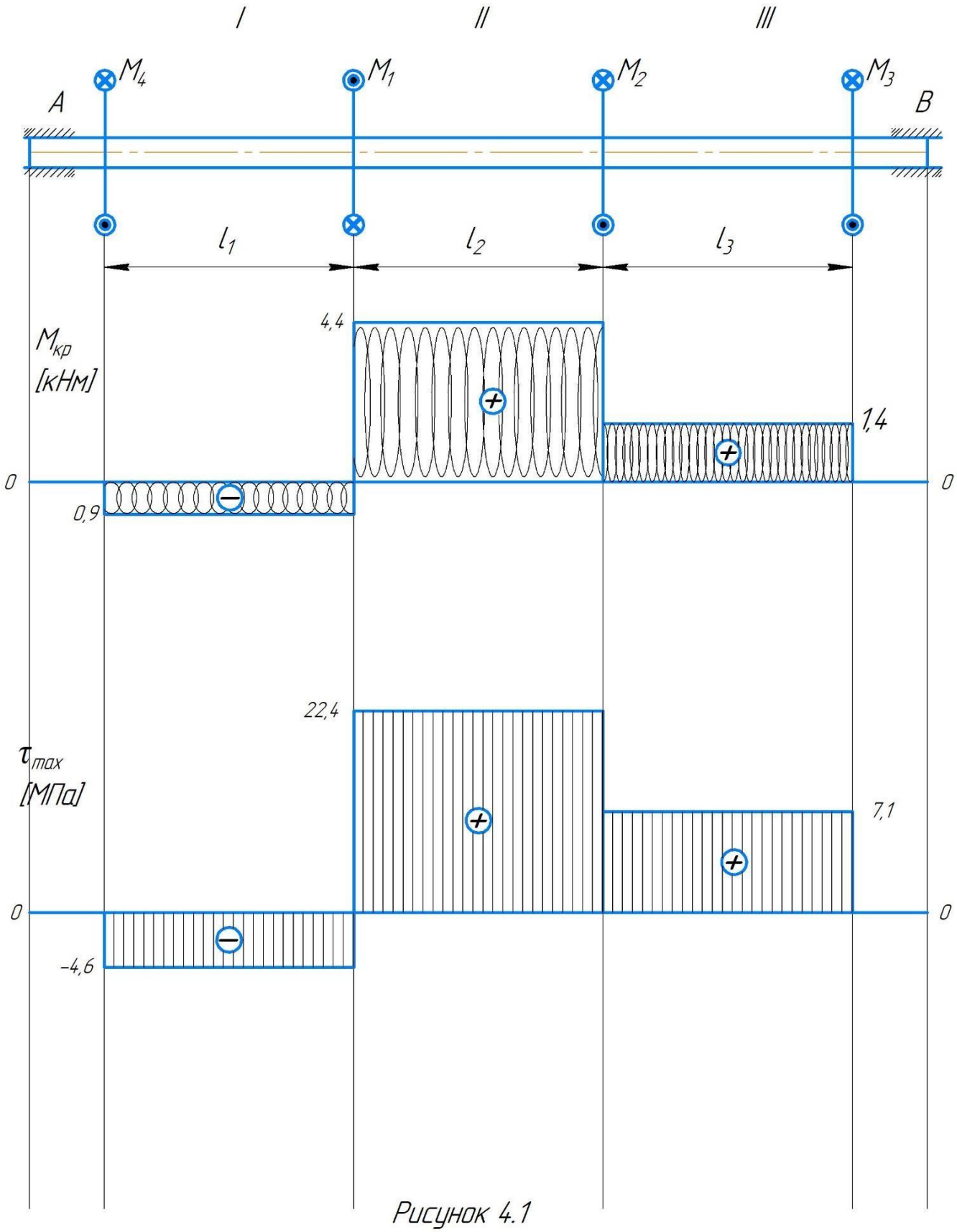

I
II
III
M4
M1
M2
M3
A
B
l1
l2
l3
Mкр
[кНм]
4,4
1,4
0
0,9
0
τmax
[МПа]
22,4
7,1
0
-4,6
0

Рисунок 4.1

3) Вычисление значений крутящих моментов на каждом из участков используя метод сечения.

$M_{\text{кр}\,I} = -M_4 = -0{,}9$ кН;

$M_{\text{кр}\,II} = M_1 - M_4 = 5{,}3 - 0{,}9 = 4{,}4$ кН;

$M_{\text{кр}\,III} = M_3 = 1{,}4$ кН;

На рисунке 4.1 показана эпюра крутящих моментов, построенная по полученным результатам.

4) Вычисление диаметра исходя из допустимого значения касательного напряжения.

Из эпюры крутящих моментов следует, что наиболее нагруженным для вала постоянного поперечного сечения являются сечения, расположенные на втором участке, где крутящий момент достигает максимального значения.

$\max M_{kp} = M_{kp\,II} = 4{,}4$ кНм $= 4{,}4 * 10^6$ Нмм;

Принимая полярный момент сопротивления для вала равным:

$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$;

Записывается условия прочности в виде:

$$\max r = \frac{\max M_{kp}}{W_p} = \frac{16 \max M_{kp}}{\pi D} \leq [r];$$

Из соотношения следует, что диаметр вала должен удовлетворять условию:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 * \max M_{kp}}{\pi[r]}} = \sqrt[3]{\frac{16 * 4{,}4 * 10^6}{3.14 * 40}} = 82{,}45 \text{ мм}.$$

5) Вычисление диаметра исходя из допустимого значения относительного угла закручивания вала.

Определение допустимого относительного угла закручивания вала в $\frac{\text{рад}}{\text{м}}$:

$$[\theta] = \frac{0{,}4° * \pi}{180°} = 6{,}98 * 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{м}} = 6{,}98 * 10^{-6} \frac{\text{рад}}{\text{мм}}.$$

Учитывая, что полярный момент инерции вала $J_P = \frac{\pi D^4}{32}$ из условия жесткости $\max \theta \leq [\theta]$ получим:

$$\max\theta = \frac{\max M_{kp}}{GJ_P} = \frac{32*\max M_{kp}}{G\pi D^4} \leq [\theta];$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32*\max M_{kp}}{G\pi[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32*4{,}4*10^6}{0.8*10^5*3.14*6.98*10^{-6}}} = 94{,}66 \text{ мм;}$$

Таким образом, из условия жесткости следует, что $D \geq 94{,}66$ мм.

6) Сопоставляя результаты расчетов на прочность и жесткость, получим, что должно выполняться условие: $D \geq 94{,}66$ мм.

Округлим это значение диаметра до ближайшего большего из ряда нормальных размеров (ГОСТ 8032-84), окончательно примем диаметр трансмиссионного вала $D = 100$мм.

Тогда вал имеет:

Полярный момент сопротивления:

$$W_P = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3.14*100^3}{16} = 1{,}96 * 10^5 \text{ мм}^3;$$

Полярный момент инерции:

$$J_P = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3.14*100^4}{32} = 9{,}8 * 10^6 \text{ мм}^4;$$

7) Вычисление значений максимальных касательных напряжений на каждом участке для принятого диаметра вала:

$$\max r_1 = \frac{\max M_{kp\,I}}{W_P} = \frac{-0{,}9*10^6}{1{,}96*10^5} = -4{,}6 \text{ Мпа;}$$

$$\max r_2 = \frac{\max M_{kp\,II}}{W_P} = \frac{4{,}4*10^6}{1{,}96*10^5} = 22{,}4 \text{ Мпа;}$$

$$\max r_3 = \frac{\max M_{kp\,III}}{W_P} = \frac{1{,}4*10^6}{1.96*10^5} = 7{,}1 \text{ Мпа;}$$

Эпюра максимальных напряжений показана на рисунке 4.1.

Анализ эпюры напряжений показывает, что на всех участках вала и условие прочности $\max r \leq [r]$ и условие жесткости $\max\theta \leq [\theta]$ выполняется.

5 Расчет на устойчивость.

Определить допускаемое значение силы $[P_y]$ из расчета на устойчивость стержня.

Коэффициенты запаса устойчивости:

– Для стали $n_y = 2{,}5$;

– Для чугуна $n_y = 4$.

Опорные закрепления стержня в обеих главных плоскостях одинаковы.

Данные для расчета приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

l_1, м	b, мм	Коэффициенты Ясинского			μ	Материал	E, МПа	$\sigma_{пц}$
		a, МПа	b, МПа	c, МПа				
2,5	15	300	1,05	0	2	сталь	2,1	190

Данные, применяемые при решении, вычисленные в п.4:

$y_C = 3{,}2b = 48$ мм;

$J_x = 26b^4 = 1{,}2 * 10^6$ мм^4;

$J_y = 5{,}66b^4 = 2{,}9 * 10^5$ мм^4;

$i_{min} = i_y = 0{,}67b = 10{,}05$ мм;

Решение:

1) Так как $J_x > J_y$, а условия закрепления концов одинаковы во всех плоскостях, то потеря устойчивости происходит в плоскости минимально жесткости, т.е. в плоскости чертежа (см. рис. 5.1) относительно оси y, имеем $J_{min} = J_y = 2{,}9 * 10^5$ мм^4. Форма потери устойчивости показана на рисунке 5.1.

2) Определяем гибкость стержня по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{2 * 2500}{10{,}05} = 497{,}5,$$

Где μ – коэффициент приведенной длины; i_{min} – минимальный радиус инерции поперечного сечения.

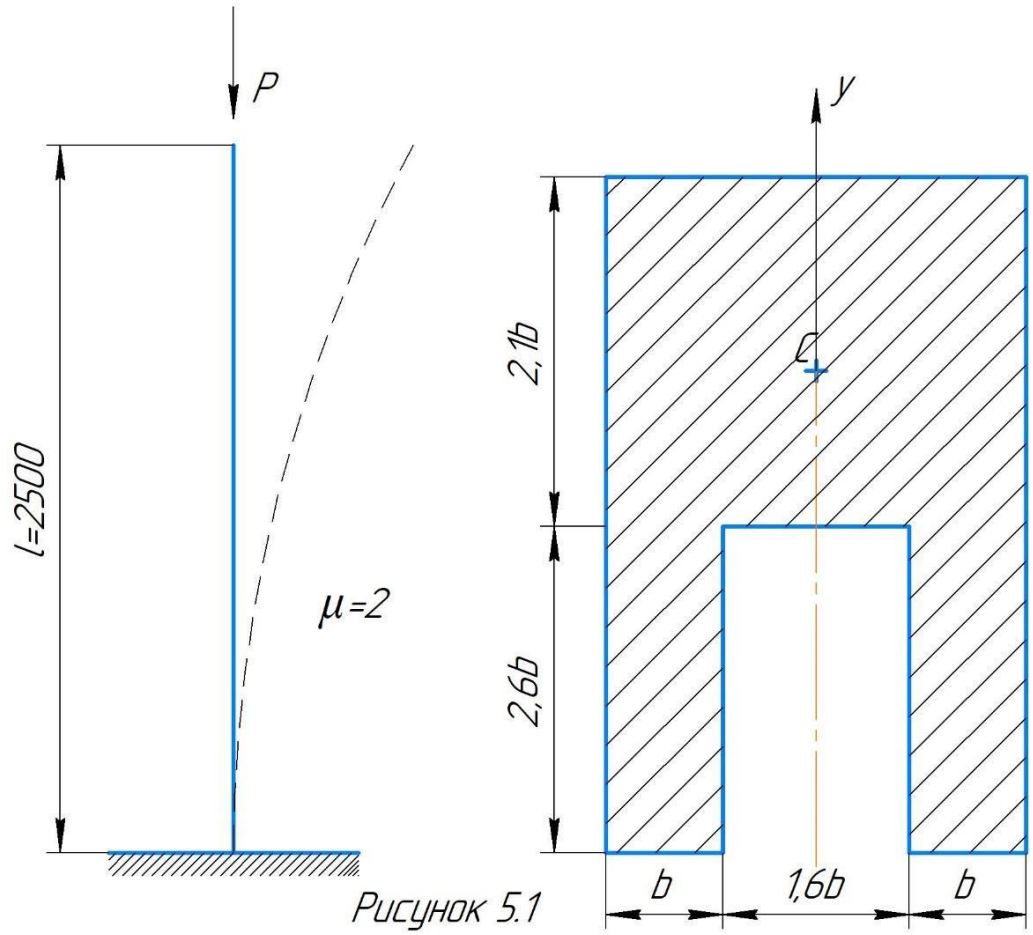


Рисунок 5.1

3) Предельная гибкость для стального стержня равна:

$$\lambda_{\text{пред.}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 * 2{,}1 * 10^5}{190}} = 104{,}4.$$

4) Определение величины критической силы.

Так как $\lambda > \lambda_{\text{пред.}}$ То расчет критической силы проводится по формуле Эйлера.

$$P_{\text{кр}} = P^{\text{Э}}_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 * E * J}{(\mu l)^2} = \frac{3.14^2 * 2.1 * 10^5 * 2{,}9 * 10^5}{(2 * 2500)^2} = 23{,}8 \text{ кН}.$$

5) Допускаемое значение сжимающей силы из расчета на устойчивость определяется выражением:

$$[P_y] = \frac{P_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{23{,}8}{2.5} = 9{,}5 \text{ кН}.$$

6 Расчет стальной балки на прочность.

Для стальной балки, нагруженной в соответствии с расчетной схемой, из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размеры поперечного сечения.

Расчет выполнить для четырех вариантов поперечного сечения:

- двутавр;
- прямоугольное с соотношением сторон $\frac{h}{b} = 2$;
- круглое сплошное с внешним диаметром D;
- кольцевое с соотношением диаметров $c = \frac{d}{D} = 0{,}7$.

Выбрать наиболее рациональное поперечное сечение и для него построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасных поперечных сечениях балки. Исходные данные для расчета даны в таблице 6.1, полагая: P =qa; m = Pa=qa^2; q = 10 кН/м; a = 1 м.

Коэффициент запаса прочности принять $n_т = 1{,}5$; допускаемые касательные напряжения принять $[r] = 0{,}6[\sigma]$.

Таблица 6.1

M_1	q_1	P_1	Материал	$\sigma_т$, МПа.
$2m$	q	P	Сталь 40ХН	900
20 кНм	$10\frac{кН}{м}$	10 кН		

Решение:

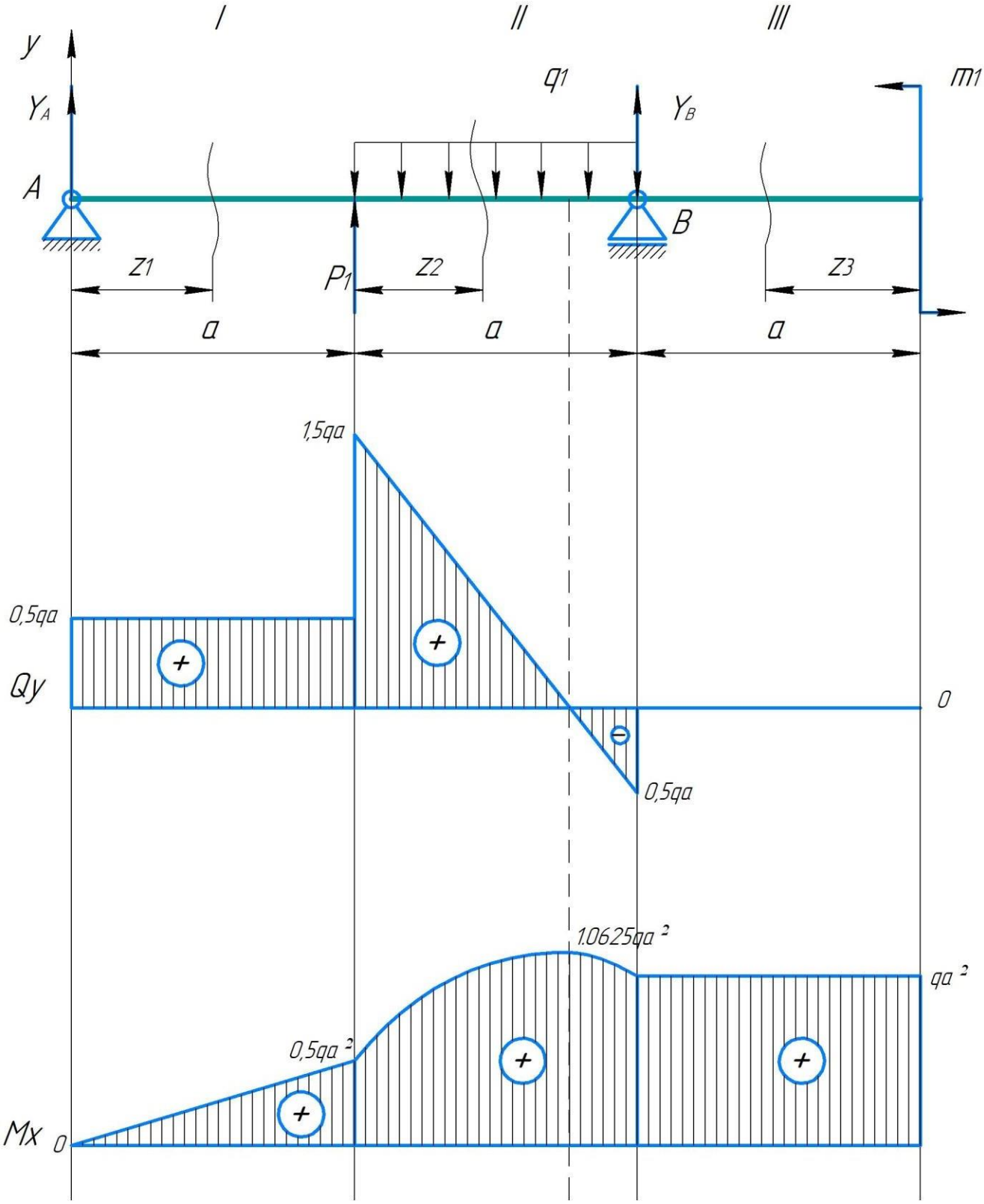
1) определяем опорные реакции Y_A и Y_B из уравнений равновесия:

$$\sum mom_A = 0; \qquad M_1 + Y_B * 2a + P_1 * a - q_1 * a * \frac{3a}{2} = 0;$$

$$Y_B = \frac{-M_1 + q_1 * \frac{3a^2}{2} - P_1 * a}{2a} = 0{,}5\,q;$$

$$\sum mom_B = 0; \qquad M_1 - Y_A * 2a - P_1 * a + q_1 * a * \frac{a}{2} = 0;$$

$$Y_A = \frac{-M_1 - q_1 * \frac{a^2}{2} + P_1 * a}{2a} = 0{,}5qa;$$


I
II
III
y
Y_A
A
q1
Y_B
m1
B
z1
P_1
z2
z3
a
a
a
1,5qa
0,5qa
Qy
+
+
0
−
0,5qa
1,0625qa ²
qa ²
0,5qa ²
+
+
+
Mx
0

Проверка правильности определения опорных реакций проводится по уравнению равновесия:

$\sum y = 0;$ $Y_A + Y_B + P_1 - q_1 * a = 0;$

$0{,}5qa - 2qa + 0{,}5q + qa = 0;$ $0 \equiv 0.$

Тождество показывает, что опорные реакции найдены верно. Положительные значения Y_A и Y_B показывают, что направления опорных реакций соответствуют принятым на рис. 6.1.

2) Строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x. Балку разбиваем на участки I, II и III. Используя метод сечений, для произвольного сечения каждого участка составляем уравнения для определения внутренних усилий Q_y и M_x, в соответствии с которыми они изменяются в пределах каждого участка. Положение сечения определяется текущей координатой z, начало отсчета удобно совмещать с началом участка (см. рис. 6.1).

Рассмотрим поочередно оба участка, используя введенные правила знаков для Q_y и M_x:

I участок: $0 \le z_1 \le a$;

Уравнение для поперечной силы в произвольном сечении с координатой z_i имеет вид:

$$Q_y = Y_A = 0{,}5qa = -5 \text{ кН};$$

График этой функции - прямая, параллельная оси отсчета z.

Уравнение изгибающего момента M_x в произвольном сечении участка I имеет вид

$$M_x = Y_A * z_1 = 0{,}5qa * z_1;$$

Выражение для M_x является линейной функцией координаты z_i, т.е. для построения эпюры достаточно вычислить значения M_x в начале ($z_1 = 0$) и в конце ($z_1 = a$) I участка балки:

- при $z_1 = 0$: $M_x = 0$;
- при $z_1 = a$: $M_x = 0{,}5qa^2 = 5$ кНм.

II участок: $0 \le z_2 \le a$;

Уравнение для поперечной силы в произвольном сечении с координатой z_i имеет вид:

$$Q_y = Y_A + P_1 - q_1 z_2 = q(1{,}5a - 2z_2);$$

Выражение для Q_y является линейной функцией координаты z_i, т.е. для построения эпюры достаточно вычислить значения Q_y в начале ($z_2 = 0$) и в конце ($z_2 = a$) I участка балки:

- при $z_2 = 0$: $Q_y = 1{,}5qa = 15$ кН;
- при $z_2 = a$: $Q_y = -0{,}5qa = -5$ кН.

Уравнение изгибающего момента M_x в произвольном сечении участка II имеет вид:

$$M_x = Y_A(a + z_2) + P_1 * z_2 - q_1 * z_2 * \frac{z_2}{2} = qa(0{,}5a + 1{,}5z_2) - qz_2^2.$$

Получили уравнение кривой второго порядка (параболы), выпуклость которой направлена вверх, кривая имеет экстремум в сечении с координатой $z_2^э$, где $Q_y = 0$. Значение $z_2^э$ получим, приравняв нулю выражение для Q_y на II участке, т.е.

$$q(1{,}5a - 2z_э) = 0;$$

Откуда $z_2^э = 0{,}75a = 0{,}75$ м.

Построить кривую второго порядка можно по трем точкам.

Вычислим значения M_x в начале участка ($z_2 = 0$), в точке экстремума ($z_э = 0{,}75a$) и в конце участка ($z_2 = a$):

- при $z_2 = 0$: $M_x = qa^2 = 10$ кНм;
- при $z_2 = 0.75a$: $M_x = 1.0625qa^2 = 10.625$ кНм;
- при $z_2 = a$: $M_x = qa^2 = 10$ кНм.

III участок: $0 \le z_3 \le a$;

Рассматривая правую отсеченную часть балки, получаем:

$Q_y = 0$;

График этой функции: прямая, лежащая на оси отсчета z

Изгибающий момент M_x в произвольном сечении участка III с координатой z_3 будет определяться следующим выражением:

$M_x = M_1 = qa^2 = 10$ кНм.

График этой функции: прямая, параллельная оси отсчета z. Эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов показаны на рисунке 6.1.

3) определяем размеры поперечного сечения банки. Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение, которое для пластичного материала равно

$$[\sigma] = \frac{\sigma_т}{n_т} = \frac{900}{1{,}5} = 600 \text{ МПа}.$$

W_x- момент сопротивления поперечного сечения.

По эпюре M_x (см. рис. 6.1) находим наиболее нагруженное сечение балки С.

В этом сечении $M_x = \max M_x = qa^2$;

$\max M_x = 10.625$ кНм $= 10.625 * 10^6$ Нмм.

Из формулы находим требуемое значение момента сопротивления для поперечного сечения любой формы:

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]},$$

Т.е. $W_x \geq \frac{10.625*10^6}{600} = 0{,}177 * 10^5$ мм^3 $= 17$ см^3.

По ГОСТ 8239-89 выбираем двутавр № 10 с моментом сопротивления $W_x =$ 39,7 см^3.

Проверим прочность балки по нормальным напряжениям:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} = \frac{10.625 * 10^6}{39{,}7 * 10^3} = 267{,}6 \text{ МПа} > [\delta].$$

Окончательно выбираем двутавр №10 с характеристиками:

$W_x = 39{,}7$ см^3; $F = 12$ см^2.

Определим размеры прямоугольного сечения, для которого момент сопротивления при $h = 2b$ определяется выражением:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{2}{3} b^3.$$

Из условия $W_x \geq 17 \text{см}^3$ получим:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 * 17}{2}} = 2{,}94 \text{ см}.$$

Принимая окончательно b = 3 см, получим высоту $h = 2 * 3 = 6\text{см}$, а площадь поперечного сечения составляет $F = hb = 3 * 6 = 18$ см^2.

Определим требуемый диаметр сплошного круглого поперечного сечения из условия

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \geq 62 \text{ см}^3;$$

Получим $D \geq \sqrt[3]{\frac{32*17}{3{,}14}} = 5{,}57$ см^2;

Окончательно принимаем D = 6 см, тогда площадь поперечного сечения будет равна $F = \frac{1}{4}\pi D^2 = 0{,}25 * 3{,}14 * 6^2 = 28{,}26$ см^2.

Рассмотрим поперечное сечение балки в форме кольца с параметрами $c = \frac{d}{D} = 0{,}7$. В этом случае момент сопротивления равен:

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1 - c^4) = W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1 - 0{,}7^4) = 0{,}075 D^3.$$

Удовлетворяя условию прочности, получим, что:

$$W_x = 0{,}075 D^3 \geq 17 \text{ см}^3;$$

Получим $D \geq \sqrt[3]{\frac{17}{0{,}075}} = 6{,}097$ см^2;

Окончательно принимаем D = 6,2 см, тогда внутренний диаметр сечения $d = cD = 0{,}7 * 6{,}2 = 4{,}34$ см. Площадь поперечного сечения в этом случае составляет $F = \frac{\pi D^2}{4}(1 - c^2) = \frac{3{,}14*6{,}2^2}{4}(1 - 0{,}7^2) = 15{,}39$ см^2.

Наиболее рациональным считается поперечное сечение балки, при котором вес балки будет минимальным. Так как во всех четырех случаях рассматриваемых сечений общая длина балки и материал, из которого она изготовлена, не меняется, то вес каждой балки будет пропорционален площади ее поперечного сечения. В

табл. 6.2 приведены площади сечений для всех рассмотренных вариантов балок. Максимальную площадь сечения имеет балка круглого поперечного сечения $\max F = F_3$.

Таблица 6.2

Вид сечения	Двутавр	Прямоугольник	Круг	Кольцо
№ сечения j	1	2	3	4
F_3, см^2	12	18	6,1	15,4
F_j / F_{max}	0,67	1	0,38	0,85

Анализ полученных результатов (см. табл. 6.2) показывает, что минимальный вес имеет балка с круглым поперечным сечением. При этом это не показывается рациональности использования круга, так как в данном случае при расчетах использовался минимальный из сортамента двутавров, а не рациональный. Другими словами – при большей нагрузке или менее качественном материале наиболее рациональным сечением будет являться двутавр.

4) Построим эпюру нормальных σ напряжений для опасного сечения С (см. рис. 6.1).

Максимальные напряжения в сечении С (рис. 6.2) равны:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} = \frac{10.625 * 10^{6}}{39{,}7 * 10^{3}} = 267{,}6 \text{ МПа}.$$

Так как верхние волокна (вв) двутавра испытывают сжатие, $\sigma_{\text{вв}} = -267{,}6$ МПа (сжатый слой полки двутавра), при этом нижние волокна (нв) испытывают растягивающие напряжения: $\sigma_{\text{нв}} = +267{,}6$ МПа (растянутый слой полки двутавра).

Эпюра σ изображена на рис. 6.2.

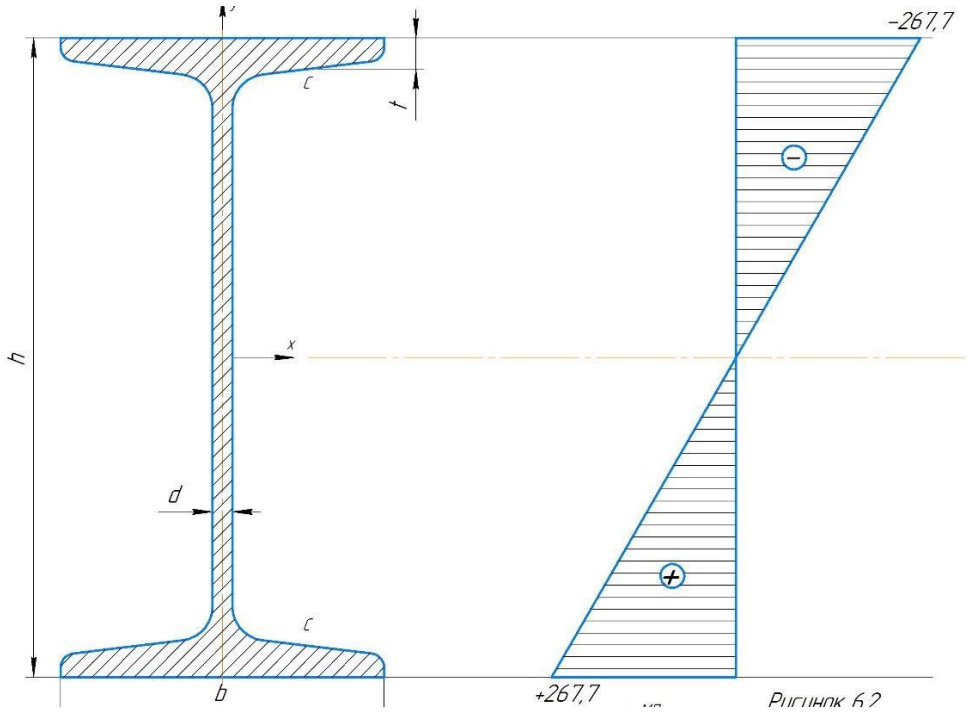


Рисунок 6.2

Балка с двутавровым сечением № 10 удовлетворяет всем условиям прочности при заданных внешних нагрузках.

Заключение

В процессе выполнения данной работы были получены навыки решения типовых задач, изучаемых в курсе сопротивления материалов. Освоены:

- принципы построения эпюр внутренних силовых факторов для элементов конструкций;

- расчёт конструкций по допускаемым напряжениям при напряжённо-деформированных состояниях;

- подбор профиля сечения из условия прочности по допускаемым напряжениям;

- основные методики определения перемещений в интересующих точках конструкции;

- определение опасных сечений и опасных точек в них для балок и консолей.

Список литературы.

1. Александров А.В. и др. Сопротивление материалов: Учебник для студентов вузов – 2-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2008. – 559 с.
2. Бояршинов, С.В. Основы строительной механики машин – М.: Машиностроение, 2006. – 456 с.
3. Гафаров Р.Х. Что нужно знать о сопротивлении материалов: Учебное пособие для вузов обуч. по направлениям подгот, и спец. в области техники и технологии – М.: Машиностроение, 2007. – 275 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2007. – 623 с.
5. Миролюбов И.Н. и др. Пособие по решению задач по сопротивлению материалов: учебное пособие для технических вузов. – М.: Высшая школа, 2007. – 399 с.
6. Степин П.А. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 2008. – 303 с.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для студ-ов высш.техн.учеб.зав. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 588 с.
8. Литвинов, А. Н. Механика материалов и конструкций. Лабораторный практикум: учебн. -метод. пособие: в 2 ч. / А. Н. Литвинов, Н. С. Шорина; под ред. А. Н. Литвинова. -Пенза: Изд-во ПГУ, 2017. - Ч. 1. - 68 с.
9. Литвинов, А. Н. Механика материалов и конструкций. Лабораторный практикум: учеб. -метод. пособие: в 2 ч. /
10. Н. Литвинов, Н. С. Шорина; под ред. А. Н. Литвинова. -Пенза: Изд-во ПГУ, 2017. - Ч. 2. - 61 с;
11. Государственные стандарты (ГОСТ).