МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Координатный метод решения геометрических задач»

Студент 06.05.25 Копейкина Екатерина Андреевна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель 06.05.25 Никитин Н.Д.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 23.06.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой 2.06.25 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 26.06.25 № 3)

Секретарь ГЭК 26.06.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ ... 4

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ ... 6

1 История возникновения метода координат ... 6

2 Векторы и прямоугольная система координат в пространстве ... 7

3 Поверхности и линии в пространстве ... 13

3.1 Уравнение поверхности и уравнение линии в пространстве ... 13

3.2 Различные виды уравнения плоскости ... 14

3.3 Различные виды уравнений прямой в пространстве ... 16

4 Углы между прямыми и плоскостями ... 17

4.1 Угол между прямыми ... 17

4.2 Угол между прямой и плоскостью ... 18

4.3 Угол между плоскостями ... 19

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ ... 21

1 Сущность координатно-векторного метода решения задач ... 21

2 Анализ школьных учебников геометрии ... 22

3 Этапы решения задач методом координат ... 23

4 Координатный метод решения стереометрических задач из ЕГЭ ... 25

ГЛАВА 3 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТНОГО МЕТОДА В СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ» ... 32

1 Программа элективного курса «Применение координатного метода в стереометрических задачах» ... 32

2 Конспект занятия по теме: «Расстояние от точки до плоскости» 36

3 Конспект занятия по теме: «Угол между плоскостями» 42

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 51

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 52

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В рамках изучения геометрии в школе применяются разнообразные подходы к решению задач, каждый из которых имеет свои специфические черты и важную роль в образовательном процессе. К числу таких методов относятся традиционный геометрический метод, метод координат и иные. При этом геометрический метод занимает центральное место в обучении геометрии.

Среди перечисленных способов решения геометрических задач координатный метод занимает особое место благодаря своей эффективности и практичности. Главное преимущество этого метода заключатся в том, что он позволяет находить ответы даже для сложных задач, избегая огромных доказательств и трудоемких построений. Наибольшую эффективность данный метод демонстрирует в стереометрических задачах, которые часто встречаются в ЕГЭ.

Применение координатного метода сводит геометрические задачи к алгебраическим вычислениям, что существенно облегчает их решение. Кроме того, этот метод отличается строгой последовательностью шагов, что делает процесс поиска ответа более структурированным и понятным. Особенно важно его значение в курсе стереометрии, где он способствует развитию у учащихся нестандартного мышления через самостоятельный выбор системы координат. Также он помогает преодолевать трудности, связанные с пространственным воображением и построением сложных чертежей, а также значительно ускоряет процесс решения задач, что является важным в условиях Единого Государственного Экзамена.

Хотя координатный метод значительно упрощает решение задач по стереометрии, в рамках школьного курса он изучается достаточно поверхностно. В результате учащиеся не получают достаточной практики и зачастую не могут в полной мере использовать этот метод на экзамене.

Для решения данной проблемы целесообразно предложить учащимся 11 классов элективный курс. Этот курс должен быть ориентирован на углубленное изучение координатного метода, практическое применение метода к решению задач типа №14 из ЕГЭ и формирование устойчивых навыков работы со стереометрическими задачами.

Объект исследования: процесс обучения школьников геометрии.

Предмет исследования: практическое применение координатного метода.

Целью исследования является разработка элективного курса по теме «Применение координатного метода в стереометрических задачах».

Для реализации поставленной цели необходимо решить следующие *задачи.*

1. Провести анализ научно-методической литературы, посвященной применению метода координат в школьном курсе геометрии.
2. Разработать программу элективного курса, направленного на освоение координатного метода для решения стереометрических задач.
3. Разработать конспекты занятий для элективного курса.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

В первой главе рассмотрен теоретический материал, которым необходимо овладеть обучающимся для дальнейшего решения заданий по данной теме.

Во второй главе рассмотрены методические аспекты изучения метода координат.

В третьей главе представлен элективный курс по теме «Применение координатного метода в стереометрических задачах».

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ

1 История возникновения метода координат

Идея применения метода координат для решения разнообразных задач уходит корнями в глубокую древность. В античную эпоху ученые-астрономы применяли особые системы координат на воображаемой небесной сфере, позволявшие с высокой точностью определять положение наиболее ярких звезд. На основе многолетних наблюдений за траекториями движения Солнца, Луны и планет относительно неподвижных звезд создавались детальные карты звездного неба. В эпоху великих географических открытий моряки стали применять системы географических координат. Это позволяло точно определять местоположение корабля в открытом море и создавать достоверные карты земной поверхности [9]. Первые прототипы прямоугольной системы координат появились еще в древних цивилизациях. Археологические находки свидетельствуют о том, что на стене одной из погребальных камер были обнаружены квадратные сетки, служившие для пространственных измерений.

Значительный вклад в развитие метода координат внес древнегреческий ученый Гиппарх во II веке до н.э. Он предложил использовать числовые значения широты и долготы для определения местоположения точки на поверхности Земли. Однако в течение длительного времени (до XVII века) практическое применение метода узконаправленный характер. Основное направление применения включало определение местоположения различных объектов – как неподвижных (например, гор или мысов), так и движущихся (например, кораблей или планет).

Родоначальником современного метода координат по праву считается французский математик Рене Декарт. В знаменитом трактате "Геометрия" (1637 г.) он совершил революцию в математике, разработав принципиально новый подход к изучению пространственных форм. Декарт ввёл понятие переменной,

и, анализируя различные линии, обнаружил закономерность: координаты любой точки, двигающейся вдоль линии, подчиняются строгой математической зависимости, выражаемой алгебраическим уравнением. Это уравнение, в свою очередь, будет характеризовать данную линии. Эти открытия положили начало аналитической геометрии. Ученым был предложен новый подход к исследованию линий через их алгебраические уравнения, что дало огромный толчок к развитию других математических наук. Особое значение имеет созданная Декартом прямоугольная система координат, повсеместно применяемая под его именем. Он внедрил алгебраический подход в геометрию, установив соответствие между числами и отрезками прямой. Это позволило изображать числа отрезками, представлять зависимости величин в виде графиков на координатной плоскости и выполнять арифметические операции над геометрическими величинами, а также выражать геометрические фигуры алгебраическими функциями. Этот метод, отличавшийся изяществом, простотой и эстетической привлекательностью, был абсолютным новым в истории математики.

Независимо от Декарта значительный вклад в развитие метода координат внес великий математик Пьер Ферма. Однако его научные труды получили признание и обнародованы лишь после его смерти. Стоит отметить, что и Декарт, и Ферма в своих исследованиях рассматривали координатный метод лишь применительно к плоскости. Прорыв в расширении этого метода на трехмерное пространство совершил Леонард Эйлер в XVIII веке [10].

2 Векторы и прямоугольная система координат в пространстве

Метод координат представляет собой универсальный способ, позволяющий точно определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Совокупность таких чисел или символов, однозначно характеризующих положение конкретной точки в пространстве, называется координатами точки. В трехмерном пространстве положение любой точки

определяется расстояниями от трёх координатных плоскостей, которые пересекаются в одной точке под прямыми углами друг к другу.

Среди различных систем координат наиболее используемой является прямоугольная система координат (декартова система координат).

Рассмотрим три взаимно перпендикулярные прямые. Обозначим точку O как точку пересечения этих прямых. Будем считать, что каждая из этих числовых прямых является осью координат с началом в точке O и равными единичными отрезками. Назовем каждую из этих прямых: ось Ox – ось абсцисс, ось Oy – ось ординат и ось Oz – ось аппликат. Эти три взаимно перпендикулярные прямые задают прямоугольную систему координат в пространстве (Рисунок 1).

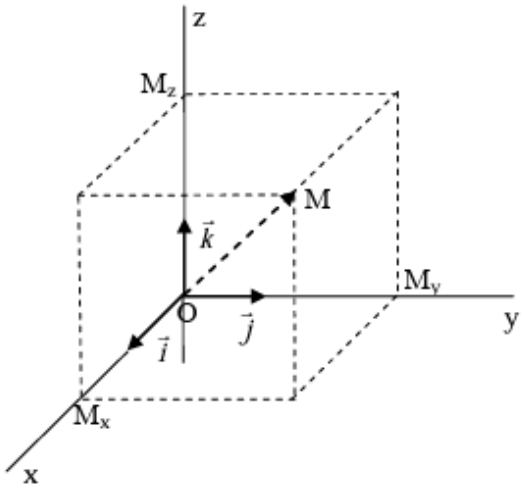


Рисунок 1

Возьмем произвольную точку M. M_x, M_y, M_z – проекции точки M на координатные оси. Тогда $x = \pm OM_x, y = \pm OM_y, z = \pm OM_z$. Координаты точки M могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Это определяется положением ее проекций на координатных осях. Если проекция попадает на положительную полуось, соответствующая координата будет иметь знак «+», а если на отрицательную полуось – знак «-».

Расстояние между двумя точками в пространстве можно определить по формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Вектором в трехмерном пространстве принято считать отрезок с заданным направлением.

Существует два основных способа сложения векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора и точка A начало вектора $\vec{a}$, а точка B его конец. Перенесем начало вектора $\vec{b}$ в точку B, сохраняя его направление и длину. В результате получим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный исходному вектору $\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Данный способ сложения векторов называется правилом треугольника (Рисунок 2).

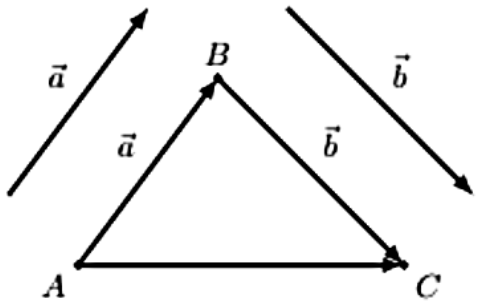


Рисунок 2

Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выходят из одной точки. Если на двух векторах как на смежных сторонах построить параллелограмм, то его диагональ, выходящая из общей точки начала векторов, даст их сумму. Такой способ сложения векторов называется правилом параллелограмма (Рисунок 3).

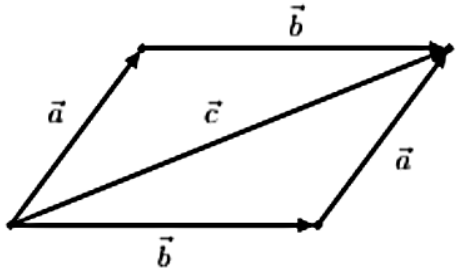


Рисунок 3

Произведением вектора $\vec{a}, \vec{a} \neq \vec{0},$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$ и $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$, $\vec{b} = \vec{0}$, если $\lambda = 0$;

2) $\left|\vec{b}\right| = |\lambda||\vec{a}|$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \vec{0} = \vec{0}$.

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат в пространстве (Рисунок 4). На каждой оси Ox, Oy, Oz отложим от начала координат единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Эти векторы называются координатными векторами.

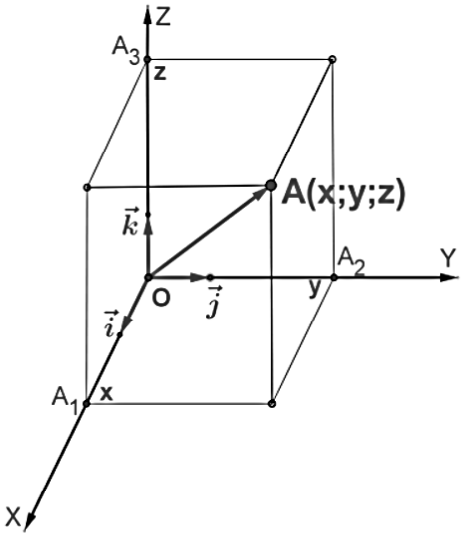


Рисунок 4

Любой вектор в пространстве можно разложить единственным образом по координатным векторам. Тогда вектор $\overrightarrow{OA}$ представляется в виде линейной комбинации: $\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Коэффициенты x, y, z принято называть координатами вектора $\overrightarrow{OA}$, а также координатами точки A.

Вектор, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с данной точкой, называется радиус-вектором данной точки.

В координатной форме сложение векторов можно представить в виде: $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$, где $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда разность векторов можно представить как сумму первого вектора и вектора, противоположного второму, т.е. $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

В координатной форме разность векторов можно представить в виде: $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}$, где $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$.

В координатной форме произведение вектора на число можно представить в виде: $\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$, где $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\lambda \neq 0$.

Определение координат вектора осуществляется посредством вычитания координат начальной точки от координат конечной точки. Так, для точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, вектор $\overrightarrow{AB}$ будет иметь координаты $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Деление отрезка в данном отношении. Пусть в пространстве даны M_1, M_2 – две разные точки. Они определяют направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$. Точка $M \in (M_1M_2)$ делит отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ в отношении $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1$, если $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$ (Рисунок 5).

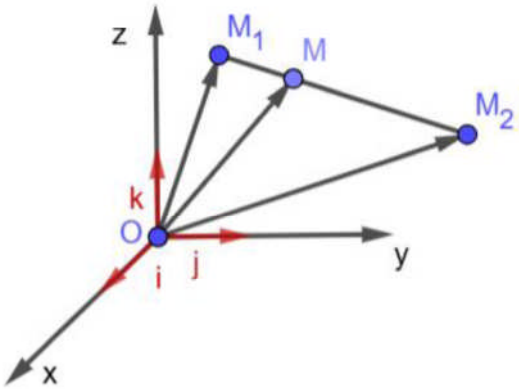


Рисунок 5

Пусть в прямоугольной системе координат точки M_1, M_2, M имеют координаты: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M(x, y, z)$. Тогда $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}$, $\lambda\overrightarrow{MM_2} = \{\lambda(x_2 - x), \lambda(y_2 - y), \lambda(z_2 - z)\}$.

Сравнивая одноименные координаты в обеих частях векторного равенства $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$ получим:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), y - y_1 = \lambda(y_2 - y), z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Из этих равенств выразим координаты точки M, делящей в отношении λ отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

При $\lambda = 1$ равенства

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

определяют координаты середины отрезка $\overrightarrow{M_1 M_2}$

Скалярное произведение двух векторов. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается следующим образом:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos \varphi.$$

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ принято называть скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя: $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$. Отсюда следует, что длина $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются взаимно перпендикулярными тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\vec{a}\overrightarrow{b} = 0$.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. Переместительное свойство (коммутативность): $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.
2. $\lambda\left(\vec{a}\vec{b}\right) = (\lambda\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(\lambda\vec{b})$.
3. Распределительное свойство (дистрибутивность): $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

Пусть в ортонормированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты: $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\} \Rightarrow \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\} \Rightarrow \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Так как $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = \vec{k}$ =1 и учитывая свойство 3, получим, что скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Отсюда следует, длина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Косинус угла между векторами определяется формулой:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2}\sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2}}.$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов выражается равенством:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Пусть точки M_1, M_2 в ортонормированном репере $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ имеют координаты $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_{2(}(x_2, y_2, z_2)$. Расстояние $\rho(M_1,M_2)$ между точками M_1, M_2 определяется как длина вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$,

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\rho(M_1, M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3 Поверхности и линии в пространстве

3.1 Уравнение поверхности и уравнение линии в пространстве

Любая поверхность в геометрии определяется как множество всех точек пространства, которые связаны конкретным соотношением. Для произвольной точки M с координатами $M(x, y, z)$, лежащей на поверхности, запишем это соотношение, которое связывает координаты точки M:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ – функция переменных x, y, z. Данное соотношение называется уравнением поверхности в пространстве.

Таким образом, уравнение поверхности в заданной системе координат представляет собой уравнение с тремя переменными. Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой поверхности.

Поверхность, определяемая алгебраическим уравнением n-й степени относительно декартовых координат, называется поверхностью n-го порядка. Так, сфера принадлежит к поверхностям второго порядка, так как ее уравнение является уравнением второй степени.

В трехмерном пространстве любую линию L можно рассматривать как пересечение двух поверхностей. Если данные поверхности определяются одним из уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

то координаты x, y, z произвольной точки M, принадлежащей линии L, должны удовлетворять каждому из этих уравнений, т.к. эта точка лежит на обеих поверхностях. Таким образом, линия L задается системой двух уравнений. Эта система называется уравнениями линии L в пространстве.

3.2 Различные виды уравнения плоскости

В пространстве существует несколько способов задания плоскости плоскость, каждому из которых соответствует свой вид уравнения.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору.

Нормалью к плоскости называется любой ненулевой вектор $\vec{n}$, перпендикулярный данной плоскости.

Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости α и $\vec{n} = \{A, B, C\}$ вектор нормали к этой плоскости. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости α тогда и только тогда, когда скалярное произведение $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = \vec{0}$.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости α.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и параллельной двум векторам.

Рассмотрим точку $A(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащую плоскости, и два неколлинеарных вектора $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, параллельные этой плоскости. Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ на плоскости. Поскольку векторы $\overrightarrow{AM}, \vec{a}, \vec{b}$ компланарны, то они линейно зависимы. Существуют такие

$u, v \in \mathbb{R}$, что $\overrightarrow{AM} = u\vec{a} + v\vec{b}$. Отсюда следует, что определитель матрицы, строками которой являются координаты векторов $\overrightarrow{AM}, \vec{a}, \vec{b}$ равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Сравнивая одноименные координаты в левых и правых частях векторного равенства $\overrightarrow{AM} = u\vec{a} + v\vec{b}$, получим:

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1, \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2, \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Уравнения (1) называются параметрическими уравнениями плоскости.

Общее уравнение плоскости. В пространстве плоскость задается уравнением вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты A, B, C, D не обращаются в нуль одновременно.

Рассмотрим частные случаи расположения плоскости (Таблица 1).

Таблица 1 – Частные случаи расположения плоскости

№п/п	Коэффициенты	Уравнение плоскости	Расположение плоскости
1	$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	Проходит через начало координат
2	$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	Параллельна оси Oz
3	$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	Параллельна оси Oy
4	$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	Параллельна оси Ox
5	$C = 0, B = 0$	$Ax + D = 0$	Параллельна координатной плоскости Oyz
6	$C = 0, A = 0$	$By + D = 0$	Параллельна координатной плоскости Oxz
7	$A = 0, B = 0$	$Cz + D = 0$	Параллельна координатной плоскости Oxy

Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Пусть даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой (Рисунок 6).

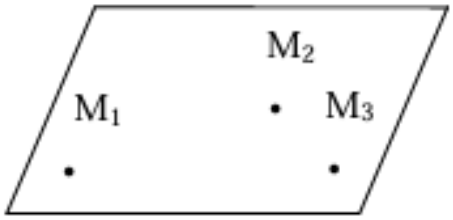


Рисунок 6

Тогда уравнение плоскости, проходящей через эти точки, можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Это равенство выражает компланарность трех векторов. Следовательно, уравнение плоскости можно задать не только тремя точками, но и комбинацией точек и векторов, лежащих в этой плоскости.

3.3 Различные виды уравнений прямой в пространстве

Прямую в пространстве можно задать несколькими способами. Рассмотрим основные из них.

Векторно-параметрическое уравнение прямой.

Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный ей. Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ прямой. Тогда $r = r_0 + at$, где $r = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, $r_0 = \overrightarrow{OM_0}$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, t – переменная величина (параметр) (Рисунок 7).

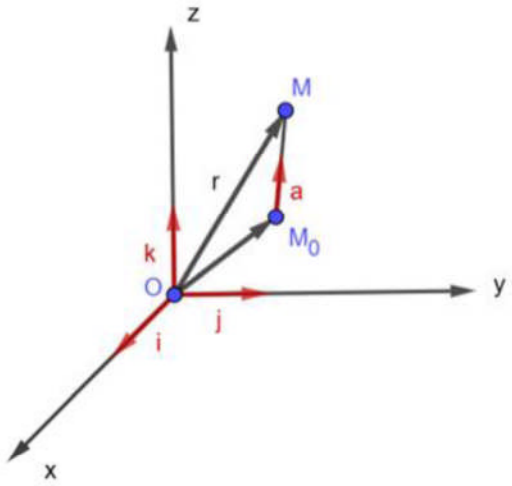


Рисунок 7

Сравнивая одноименные координаты в левых и правых частях векторного равенства $r = r_0 + at$, получим:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 t, \\ y &= y_0 + a_2 t, \\ z &= z_0 + a_3 t. \end{aligned} \qquad (2)$$

Уравнения (2) называются параметрическими уравнениями прямой.

Каноническое уравнение прямой. Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Тогда каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Если даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{M_1 M_2}$. Тогда уравнение имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1}.$$

4 Углы между прямыми и плоскостями

4.1 Угол между прямыми

В пространстве две прямые могут пересекаться, быть параллельными или скрещивающими.

Рассмотрим две прямые l_1 и l_2, которые заданы точкой и направляющим вектором. Пусть эти прямые располагаются относительно друг друга произвольным образом.

$$l_1: \begin{matrix} M_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1 \\ \vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \vec{a} \parallel l_1 \end{matrix}$$

$$l_2: \begin{matrix} M_2(x_2, y_2, z_2) \in l_2 \\ \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \vec{b} \parallel l_2 \end{matrix}$$

Пусть прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке Н, образуя четыре угла, попарно равных между собой. Углом между такими прямыми принято считать любой из этих образовавшихся углов. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки. Тогда угол между этими векторами будет углом между прямыми l_1 и l_2.

Рассмотрим три случая:

1. Прямые l_1 и l_2 параллельны. Тогда угол между прямыми l_1 и l_2 будет равен нулю.

2. Прямые l_1 и l_2 пересекаются. Тогда угол между прямыми l_1 и l_2 будет вычисляться по формуле:

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}.$$

3. Прямые l_1 и l_2 скрещиваются. Тогда угол между прямыми l_1 и l_2 будет вычисляться по формуле:

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}.$$

4.2 Угол между прямой и плоскостью

Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

Пусть даны плоскость $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая l, заданная посредством точки $M(x_0, y_0, z_0)$ и направляющего вектора $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

$\vec{n} = \{A, B, C\}$ – вектор нормали к плоскости.

Тогда синус угла β между прямой и плоскостью вычисляется по формуле:

$$\sin\beta = \frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4.3 Угол между плоскостями

Пусть в пространстве заданы две плоскости α_1и α_2, определяющиеся уравнениями:

$$\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Две плоскости в пространстве образуют две пары равных между собой двугранных углов. Меньший из этих углов называется углом между плоскостями и его величина равна величине соответствующего линейного угла.

Пусть векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ – векторы нормали к плоскостям α_1 и α_2. Тогда векторы $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ перпендикулярны сторонам линейного угла двугранного угла. Углы с взаимно перпендикулярными сторонами равны, следовательно, угол между плоскостями будет равен углу между векторами нормали к этим плоскостям (Рисунок 8).

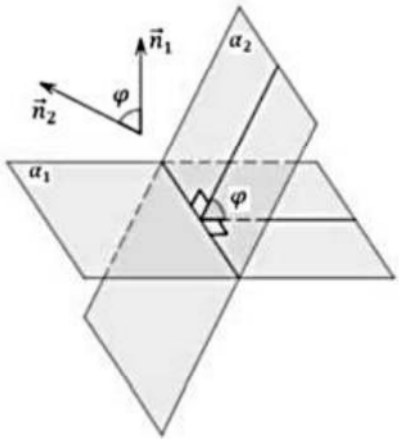


Рисунок 8

Тогда косинус угла между плоскостями α_1и α_2 вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2}\cdot\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

где $\overrightarrow{n_1} = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\overrightarrow{n_2} = \{A_2, B_2, C_2\}$.

Расстояние от точки до плоскости. Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не принадлежащая плоскости, плоскость $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и $\vec{n} = \{A, B, C\}$ – вектор нормали к плоскости α (Рисунок 9).

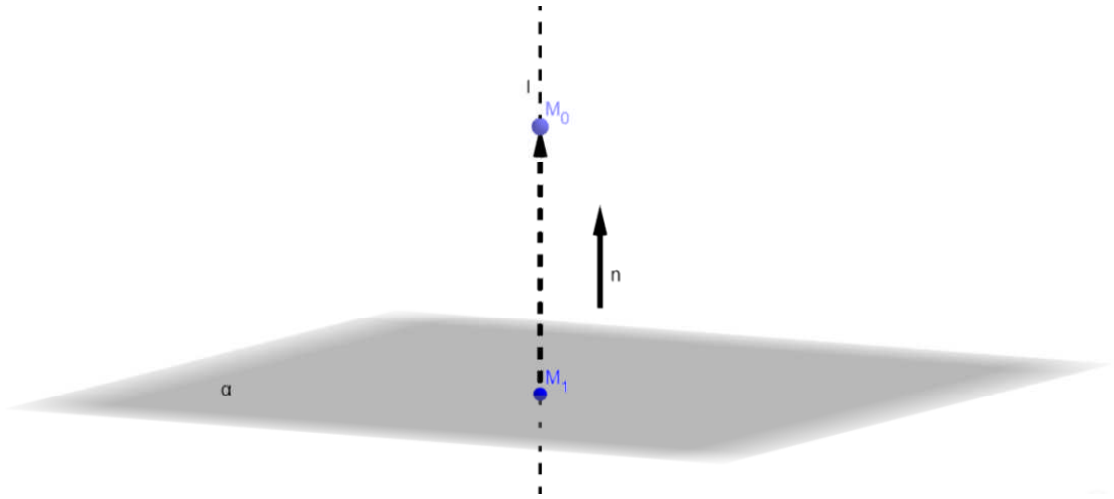


Рисунок 9

Рассмотрим прямую l, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с направляющим вектором $\vec{n}$. Пусть $M_1 = l \cap \alpha$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Тогда $\rho(M_0, \alpha) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$, $\overrightarrow{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$.

Так как $\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}' = \begin{cases} \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|, \ \overrightarrow{M_1M_0} \uparrow\uparrow \vec{n}', \\ -\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|, \ \overrightarrow{M_1M_0} \uparrow\downarrow \vec{n}', \end{cases}$ где $\vec{n}' = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$,

то $\rho(M_0, \alpha) = \left|\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}'\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Таким образом, $\rho(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ

1 Сущность координатно-векторного метода решения задач

Метод координат основан на взаимосвязи алгебры и геометрии: с помощью уравнений можно задавать геометрические объекты, а их свойства выражать через числовые значения координат. Такой подход позволяет переводить геометрические задачи в алгебраические и обратно – интерпретировать уравнения и функции в виде геометрических образов.

Применяя координатный метод к решению стереометрических задач, мы сначала преобразуем условие данной геометрической задачи в алгебраическую форму. Далее, с помощью соответствующих формул аналитической геометрии, находим алгебраических уравнений, неравенств или их систем. После этого интерпретируем полученный в координатной форме результат на язык геометрии точек, прямых и плоскостей, и, наконец, получаем искомый ответ к данной задаче.

Важнейшее преимущество метода заключается в установлении прочной связи между алгеброй и геометрией. Это взаимодействие дает новые возможности для решения задач, которые трудно или невозможно решить чисто геометрическими методами. В школьном курсе координатный метод часто предоставляет более рациональные и изящные способы доказательств и решений.

Однако следует отметить, что эффективность метода напрямую связана с правильным выбором системы координат. Одно и то же геометрическое условие может принимать разную аналитическую форму в зависимости от выбора системы координат. Поэтому ключевое значение приобретает умение выбирать оптимальную систему координат, что приходит с опытом решения подобных задач.

2 Анализ школьных учебников геометрии

Метод координат занимает важное место в школьном курсе геометрии, однако в программе ему уделяется недостаточно внимания. Рассмотрим, как метод координат представлен в различных школьных учебниках.

В учебнике А.В. Погорелова «Геометрия. Учебник для 10-11 классов» теме координат посвящен §4 «Декартовы координаты и векторы в пространстве» [8]. Изучение темы в 10 классе начинается с ознакомления с прямоугольной декартовой системой координат в пространстве. После этого последовательно рассматриваются пункты, связанные с координатным методом: «Расстояние между точками», «Координаты середины отрезка», «Угол между скрещивающимися прямыми», «Угол между прямой и плоскость», «Угол между плоскостями», «Векторы в пространстве», «Действия над векторами в пространстве», «Разложение вектора по трем некомпланарным векторам», «Уравнение плоскости».

После теоретического объяснения каждой темы автор приводит задачи с пошаговым решением, что облегчает процесс усвоения материала. Каждый пункт завершается специально подобранными практическими заданиями и контрольными вопросами, позволяющими учащимся самостоятельно проверить уровень понимания пройденного материала.

Л.С. Атанасян в своем учебнике «Геометрия. Учебник для 10-11 классов» подходит к изучению метода координат через введение векторной алгебры [1]. В рамках рабочей программы координатный метод изучается в 11 классе. Данной теме посвящены 2 главы: Глава VI. Векторы в пространстве, Глава VII. Метод координат в пространстве. Движения.

В главе 6 подробно рассматриваются основные понятия о векторах, операции с векторами (сложение, вычитание, умножение на число), компланарные векторы и их разложение. Следующая глава(глава 7) посвящена непосредственно методу координат и его практическом применении в решении геометрических задач. В данном учебнике ключевые понятия и определения

выделены специальным шрифтом, пояснения сопровождаются цветными рисунками. Каждый параграф завершается блоком контрольных вопросов и задач. Можно утверждать, что в этом учебнике метод координат является одним из основных подходов к решению геометрических задач.

Иная ситуация наблюдается в учебнике И.Ф. Шарыгина «Геометрия 10-11 класс. Базовый уровень», где метод координат не является приоритетным [13]. Данный метод изучается в 8 главе под названием «Координаты и векторы в пространстве». В данной главе рассматриваются лишь основные понятия: формула расстояния между точками, уравнения основных поверхностей и линий, элементарные операции с векторами. При этом отсутствуют формулы для вычисления углов между геометрическими объектами. Система упражнений учебника разработана с учетом принципов дифференцированного обучения. Она включает в себя как базовые задачи, так и задачи повышенной сложности, помеченные звездочкой, также выделены полезные задачи (П), важные задачи (В) и трудные задачи (Т). Изучение метода координат происходит в конце 11 класса, что значительно сокращает время на его освоение.

Проанализировав задачи, которые представлены в рассмотренных учебниках, можно сделать вывод о том, что они охватывают основные аспекты метода координат.

Таким образом, наиболее полное и систематическое изложение метода координат представлено в учебнике Атанасяна, где он действительно является одним из основных методов решения геометрических задач.

3 Этапы решения задач методом координат

Метод координат представляет собой эффективный инструмент для решения широкого круга геометрических задач. Его применение осуществляется по следующему алгоритму:

1. Преобразование условия задачи из геометрической формы в координатную.

2. Выбор и построение подходящей системы координат.

3. Определение координат необходимых точек и векторов, составление уравнения плоскости.

4. Выполнение вычислений с применением соответствующих формул.

5. Перевод полученных результатов на геометрический язык.

Стоит подчеркнуть, что представленная последовательность действий носит универсальный характер. В зависимости от специфики задачи могут быть добавлены дополнительные шаги.

Пример. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AD_1E и D_1FC, где точки E и F – середины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.

Решение:

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке $A(0,0,0)$ (Рисунок 10).

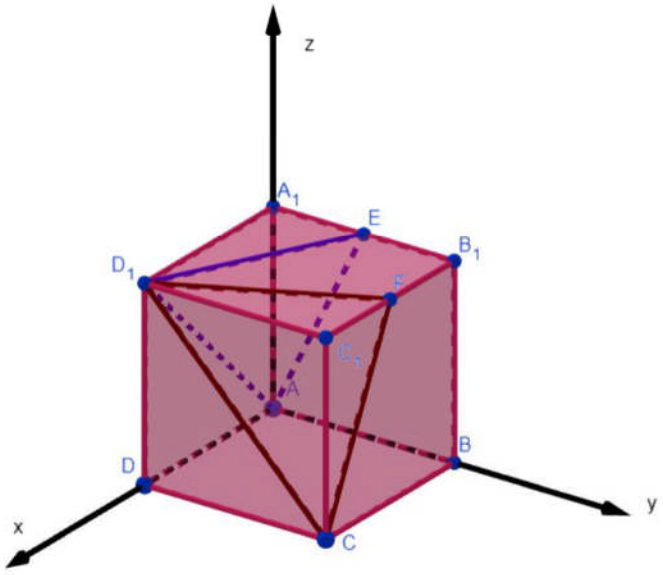


Рисунок 10

Найдем координаты точек, которые необходимы для составления уравнения плоскости: $D_1(1,0,1,)$, $E(0,\frac{1}{2},1)$, $C(1,1,0)$, $F(\frac{1}{2},1,1)$.

Составим уравнение плоскости (AD_1E), используя уравнение $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. Подставим координаты всех трех точек в это уравнение и решим систему, состоящую из трех уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D = 0, \\ A \cdot 0 + B \cdot \frac{1}{2} + C \cdot 1 + D = 0. \end{cases}$$

Получим, что $A = -C, B = -2C, D = 0$.

Таким образом, уравнение имеет вид: $x + 2y - z = 0$, следовательно, $A_1 = 1,\ B_1 = 2, C_1 = -1$.

Составим уравнение плоскости (D_1FC), используя уравнение $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Подставим координаты всех трех точек в это уравнение и решим систему, состоящую из трех уравнений:

$$\begin{cases} A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + D = 0, \\ A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D = 0, \\ A \cdot \frac{1}{2} + B \cdot 1 + C \cdot 1 + D = 0. \end{cases}$$

Получим, что $B = C, A = 2C, D = -3C$.

Таким образом, уравнение имеет вид: $2x + y + z - 3 = 0$, следовательно, $A_2 = 2,\ B_2 = 1, C_2 = 1$.

По формуле: $\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$. Тогда $\angle(\alpha, \beta) = 60°$.

4 Координатный метод решения стереометрических задач из ЕГЭ

Приведем примеры стереометрических задач из ЕГЭ, решаемых координатным методом [5; 12].

Задача 1. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что угол между прямыми BE и AD равен углу CBE.

б) Найдите угол между прямыми BE и AD.

Решение:

Предположим, что длина ребра куба равна 2. Введем систему координат с началом в точке A (Рисунок 11).

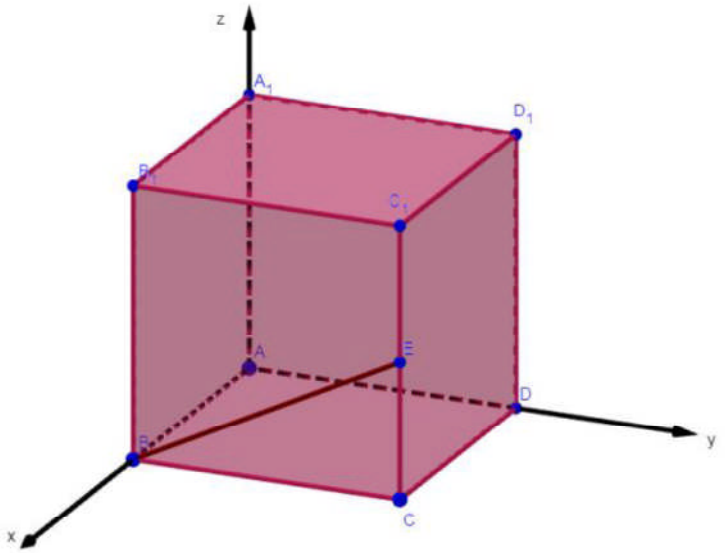


Рисунок 11

а) Определим координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,2,0)$, $D(0,2,0)$, $A_1(0,0,2)$, $B_1(2,0,2)$, $C_1(2,2,2)$, $D_1(0,2,2)$.

Найдем координаты точки E. Так как точка E- середина CC_1, то $E\left(\frac{2+2}{2},\frac{2+2}{2},\frac{0+2}{2}\right) \Longrightarrow E(2,2,1)$.

$\angle(BE,AD) = \angle(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AD})$, $\angle CBE = \angle(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE})$. Докажем, что эти углы равны.

Найдем векторы $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BE} = \{2-2, 2-0, 1-0\} = \{0,2,1\},$$

$$\overrightarrow{AD} = \{0-0, 2-0, 0-0\} = \{0,2,0\},$$

$$\overrightarrow{BC} = \{2-2, 2-0, 0-0\} = \{0,2,0\}.$$

Угол между $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AD}\right) = \frac{0\cdot 0 + 2\cdot 2 + 1\cdot 0}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Угол между $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BE}$:

$$\cos\angle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)=\frac{0\cdot 0+2\cdot 2+0\cdot 1}{\sqrt{0^2+2^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+2^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Тогда $\cos\angle\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AD}\right)=\cos\angle CBE=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\angle\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AD}\right)=\angle CBE$.

б) Из пункта а) следует, что $\cos\angle\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Тогда $\angle\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AD}\right)=\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Задача 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1=3$, $AB=4$, $BC=4$.

Решение:

Введем систему координат с началом в точке A (Рисунок 12).

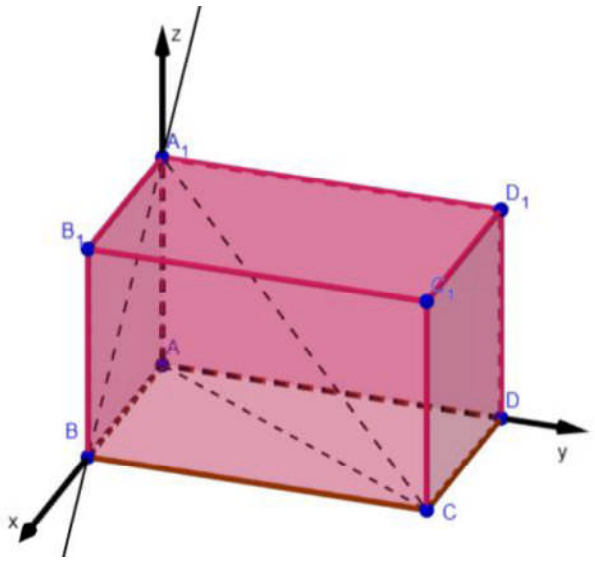


Рисунок 12

а) Найдем координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$, $C(4,4,0)$, $D(0,4,0)$, $A_1(0,0,3)$, $B_1(4,0,3)$, $C_1(4,4,3)$, $D_1(0,4,3)$.

Найдем уравнение плоскости (AA_1C): $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -12x+12y=0\Rightarrow -x+y=0$.

Найдем вектор $\overrightarrow{A_1B}$:

$\overrightarrow{A_1B}=\{4-0,0-0,0-3\}=\{4,0,-3\}$.

Тогда $\angle(A_1B,(AA_1C)) = \sin\frac{|-1\cdot4+1\cdot0+0\cdot(-3)|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}} = \sin\frac{|-4|}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}} = \sin\frac{4}{5\sqrt{2}} = \sin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Следовательно, $\angle(A_1B,(AA_1C)) = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

Задача 3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Точки M и T — середины ребер AD и A_1B_1 соответственно.

а) Докажите, что $A_1C_1 \perp MT$.

б) Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT.

Решение:

Введем систему координат с началом в точке A (Рисунок 13).

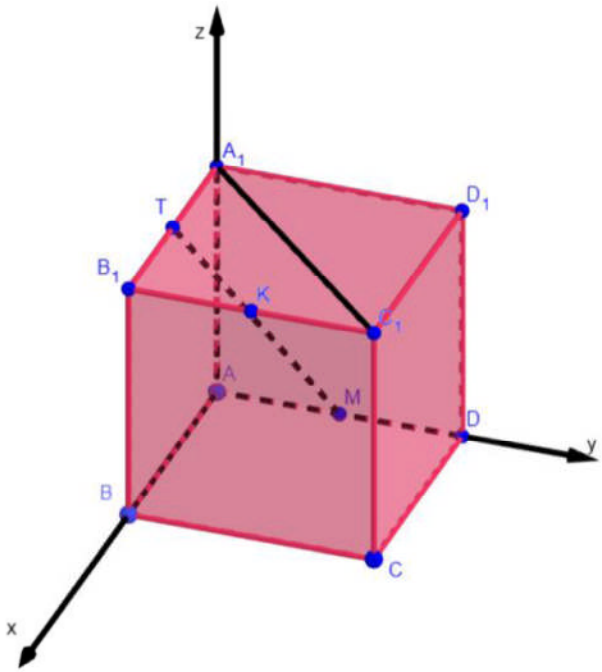


Рисунок 13

а) Найдем координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(2\sqrt{2},0,0)$, $C(2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$, $D(0,2\sqrt{2},0)$, $A_1(0,0,2\sqrt{2})$, $B_1(2\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$, $C_1(2\sqrt{2},2\sqrt{2},2\sqrt{2})$, $D_1(0,2\sqrt{2},2\sqrt{2})$.

Найдем координаты точек M и T. Так как точка M – середина AD, то $M\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+2\sqrt{2}}{2},\frac{0+0}{2}\right) \Rightarrow M(0,\sqrt{2},0)$. Так как точка T – середина A_1B_1, то $T\left(\frac{0+2\sqrt{2}}{2},\frac{0+0}{2},\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow T(\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$.

Найдем векторы $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{MT}$:

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \{2\sqrt{2}-0, 2\sqrt{2}-0, 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\} = \{2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0\},$$

$$\overrightarrow{MT} = \{\sqrt{2}-0, 0-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-0\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}.$$

Проверим перпендикулярность векторов. Для этого найдем их скалярное произведение:

$$\overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{MT} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + 0 \cdot 2\sqrt{2} = 4 - 4 + 0 = 0.$$

Так как скалярное произведение равно нулю, то векторы перпендикулярны: $\overrightarrow{A_1C_1} \perp \overrightarrow{MT}$.

б) Точка K – середина B_1C_1. Найдем координаты точки K:

$$K(\tfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2},\tfrac{0+2\sqrt{2}}{2},\tfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow K(2\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{2}).$$

Рассмотрим треугольник KTM:

$$KT = \sqrt{(\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2 + (0-\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$KM = \sqrt{(0-2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 + (0-2\sqrt{2})^2} = 4,$$

$$TM = \sqrt{(0-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}-0)^2 + (0-2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}.$$

Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$$p = \frac{2\sqrt{3}+4+2}{2} = 3+\sqrt{3},$$

$$S = \sqrt{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3}-2\sqrt{3})(3+\sqrt{3}-4)(3+\sqrt{3}-2)} = 2\sqrt{3}.$$

$$\rho(K, MT) = \frac{2S}{MT} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 2.$$

Ответ: 2

Задача 4. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD с основанием ABCD точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC.

а) Докажите, что прямые SB и MK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если AB = 8, SC = 6.

Решение:

Введем систему координат с началом в точке A (Рисунок 14).

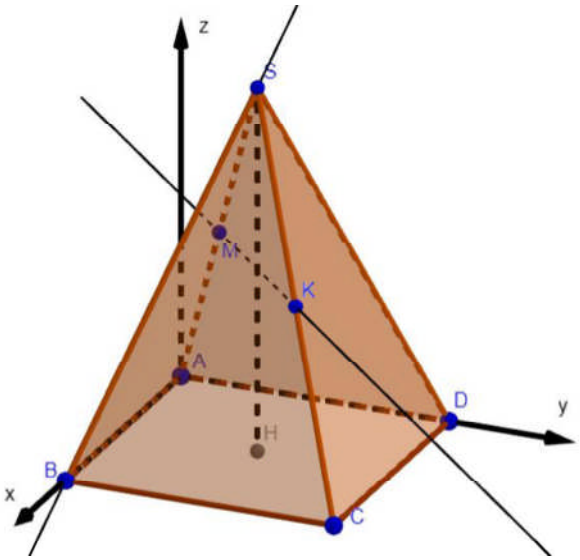


Рисунок 14

Найдем координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(8,0,0)$, $C(8,8,0)$, $D(0,8,0)$.

Вершина пирамиды S имеет координаты $S(4,4,h)$. Найдем h, для этого найдем расстояние от S до C и приравняем к длине бокового ребра SC: $\rho(S,C) = \sqrt{(8-4)^2 + (8-4)^2 + (0-h)^2} = \sqrt{16+16+h^2} = \sqrt{32+h^2}$, $\sqrt{32+h^2} = 6 \Rightarrow 32 + h^2 = 36 \Rightarrow h^2 = 4 \Rightarrow h = 2$. Таким образом, $S(4,4,2)$.

Найдем координаты точек M и K. Так как точка M – середина SA, то $M\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow M(2,2,1)$. Так как точка K – середина SC, то $K\left(\frac{8+4}{2}, \frac{8+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow K(6,6,1)$.

Прямые СВ и МК перпендикулярны, если скалярное произведение направляющих их векторов $\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{MK}$ равно нулю. Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{SB} = \{8-4,0-4,0-2\} = \{4,-4,-2\},$$

$$\overrightarrow{MK} = \{6-2,6-2,1-1\} = \{4,4,0\},$$

$$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{MK} = 4 \cdot 4 + (-4) \cdot 4 + (-2) \cdot 0 = 16 - 16 + 0 = 0.$$

Так как скалярное произведение равно нулю, то векторы перпендикулярны: $\overrightarrow{SB} \perp \overrightarrow{MK}$. Следовательно, $SB \perp MK$.

б) Найдем уравнение плоскости (BMK): $\begin{vmatrix} x-8 & y & z \\ -6 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 8z - 8 = 0.$

Найдем уравнение плоскости (ABC): $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0.$

Тогда $\cos\angle\big((BMK),(ABC)\big) = \frac{|1\cdot 0+(-1)\cdot 0+8\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+8^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{1}} = \frac{8}{\sqrt{66}} = \frac{8\sqrt{66}}{66} = \frac{4\sqrt{66}}{33}$.

Следовательно, $\angle\big((BMK),(ABC)\big) = \arccos\frac{4\sqrt{66}}{33}$.

Ответ: $\arccos\frac{4\sqrt{66}}{33}$.

ГЛАВА 3 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТНОГО МЕТОДА В СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ»

1 Программа элективного курса «Применение координатного метода в стереометрических задачах»

Пояснительная записка

Стереометрия является одним из наиболее сложных разделов школьного курса геометрии, требующим развитого пространственного мышления и умения визуализировать трехмерные объекты. Многие учащиеся испытывают значительные трудности при решении стереометрических задач классическими геометрическими методами. В связи с этим координатный метод представляет собой мощный инструмент, позволяющий переводить геометрические задачи в алгебраическую форму, что существенно упрощает процесс их решения. Особенно эффективен данный метод при вычислении расстояний между геометрическими объектами, определении величин углов и доказательстве свойств пространственных фигур.

Курс является предметно-ориентированным и актуален для учащихся 11 класса, изучающих математику на профильном уровне. Особую практическую ценность курс приобретает в рамках подготовки к Единому Государственному Экзамену, где координатный метод часто оказывается наиболее эффективным способом решения задач из второй части экзаменационной работы.

Основная цель курса заключается в изучении, углублении и расширении знаний о методе координат, а также в формировании у обучающихся умения применять координатный метод для решения широкого круга стереометрических задач.

Для достижения этой цели предусматривается решение следующих задач:

– познакомить учащихся с основами координатного метода в пространстве;

– развить умение применять аппарат координатного метода к решению геометрических задач;

– подготовить учащихся к решению задач высокого уровня сложности, встречающихся в ЕГЭ.

Требование к уровню усвоения курса

В результате усвоения курса обучающиеся должны овладеть комплексом теоретических знаний и практических умений, необходимых для успешного решения стереометрических задач координатным методом.

Прежде всего, учащимся необходимо усвоить основные формулы для решения задач методом координат: расстояние между двумя точками в пространстве, расстояние от точки до плоскости в пространстве, угол между прямыми в пространстве, угол между плоскостями в пространстве, угол между прямой и плоскостью в пространстве. Особое внимание уделяется знанию основных свойств геометрических фигур и умению применять эти знания на практике. Учащимся необходимо четко понимать последовательность действий при решении задач методом координат.

На практическом уровне обучающиеся должны уметь правильно определять координаты вершин многогранников и точек, расположенных на их ребрах и гранях. Не менее важным навыком является составление уравнений прямых и плоскостей в заданной системе координат. Особое значение имеет умение строить правильные и наглядные чертежи пространственных фигур, точно отражающие условия задачи. Развитие логического мышления проявляется в умении строить последовательные рассуждения, обосновывать каждый свой шаг решения и грамотно записывать решение с использованием математического языка.

Эти знания и умения составляют основу для успешного решения стереометрических задач координатным методом.

Структура программы

Данный элективный курс рассчитан на 24 часа и включает четыре основных содержательных модуля: «Векторы и прямоугольная система координат в пространстве», «Матрицы, определитель матрицы», «Прямые и плоскости в пространстве», «Решение стереометрических задач координатным методом». Методика проведения занятий сочетает различные формы работы для достижения наилучших результатов обучения. Теоретическая часть материала излагается в ходе лекционных занятий, где подробно разбираются основные понятия и формулы. Практическая составляющая реализуется через практикумы, на которых учащиеся отрабатывают навыки решения задач. Также значение придается и самостоятельной работе учащихся, включающей как решение задач дома, так и работу с дополнительными материалами. Основной акцент в организации учебного процесса делается именно на практическую деятельность, поэтому большинство занятий проводится в форме практикумов.

Система контроля знаний построена по многоуровневому принципу и включает текущий и итоговый контроль. Текущий контроль осуществляется в процессе изучения каждой темы через устные опросы и проверку выполнения практических заданий. Итоговый контроль проводится в конце курса в виде контрольной работы, охватывающей все изученные темы. Оценка результатов обучения проводится по системе «зачет»/«незачет», где для получения зачета учащийся должен продемонстрировать уверенное владение теоретическим материалом, учение применять его к решению задач.

Учебно-тематический план

№п/п	Тема	Кол-во часов
1	Векторы и прямоугольная система координат в пространстве	4
2	Матрицы, определитель матрицы	3
3	Прямые и плоскости в пространстве	10

4	Решение стереометрических задач координатным методом	7
	Итого	24

Календарно-тематический план

№п/п	Тема	Кол-во часов	Форма проведения занятия
Векторы и прямоугольная система координат в пространстве			
1	Понятие вектора в пространстве. Операции над векторами (сложение, вычитание векторов, умножение вектора на число).	1	Лекция, практикум
2	Компланарные векторы. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.	1	Лекция, практикум
3	Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора. Связь между координатами вектора и координатами точек.	1	Лекция, практикум
4	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.	1	Практикум
Матрицы, определитель матрицы			
5	Понятие матрицы и определителя квадратной матрицы.	2	Лекция, практикум
6	Свойства определителя матрицы.	1	Лекция, практикум
Прямые и плоскости в пространстве			
7	Уравнение прямой и плоскости в пространстве	2	Лекция
8	Решение задач на составление уравнения	2	Практикум

	прямой и плоскости		
9	Угол между прямой и плоскостью	1	Лекция
10	Решение задач на нахождение угла между прямыми и плоскостями	1	Практикум
11	Расстояние от точки до плоскости	1	Лекция
12	Решение задач на нахождение расстояния от точки до плоскости	2	Практикум
13	Решение задач на нахождение расстояния между двумя плоскостями	1	Практикум
Решение стереометрических задач координатным методом			
14	Решение стереометрических задач координатным методом	6	Практикум, повторение
15	Контроль изученного	1	Контрольная работа
	Итого	24 часа	

2 Конспект занятия по теме: «Расстояние от точки до плоскости»

Цель: формирование умений решать задачи на нахождение расстояния от точки до плоскости координатным методом.

Задачи:

– актуализировать знания основных понятий (уравнение плоскости, координаты точки, вектор нормали);

– расширить знания учащихся о нахождении расстояния от точки до плоскости;

– развить умение применять изученную теорию на практике через решение типовых задач.

Тип урока: урок изучения нового материала.

Используемые интерактивные технологии: интерактивная доска, презентация.

Ход занятия.

I. Организационный момент.

- Здравствуйте, ребята! Сегодня мы продолжим увлекательное изучение координатного метода для решения стереометрических задач.

II. Актуализация знаний.

- Давайте вспомним, как задается плоскость в пространстве? (Плоскость задается уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где (A, B, C) – вектор нормали)

- Как проверить, принадлежит ли точка плоскости? (Чтобы проверить принадлежит ли точка плоскости нужно подставить ее координаты в уравнение плоскости. Если равенство выполняется, то точка лежит в плоскости.)

- Как найти расстояние между двумя точками в пространстве? (Расстояние между двумя точками можно найти по формуле: $\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.)

- Какой вектор называется вектором нормали? (Вектор нормали – это вектор, перпендикулярный плоскости.)

- Как связаны координаты вектора нормали к плоскости с коэффициентами уравнения этой плоскости? (Координаты вектора нормали – коэффициенты A, B, C в уравнении плоскости.)

- Дано уравнение плоскости $2x + 3y - 4z + 5 = 0$. Какой из векторов является вектором нормали к плоскости?

1) $\overrightarrow{n_1} = \{3,2,-4\}$,

2) $\overrightarrow{n_2} = \{2,3,-4\}$,

3) $\overrightarrow{n_3} = \{4,6,-8\}$.

III. Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся.

- Представьте: в компьютерной игре нужно определить, как далеко находится персонаж (точка) от стены (плоскости). Перед нами встает вопрос: как это расстояние? (Ученики предлагают свои варианты.)

- Сегодня мы выведем формулу нахождения расстояния от точки до плоскости и научимся ее применять.

- Открываем тетради и записываем тему нашего урока: «Расстояние от точки до плоскости». (Ученики записывают тему в тетрадь.)

- Теперь сформулируем цель и задачи занятия. Чему мы должны научиться? (Цель: научиться находить расстояние от точки до плоскости. Задачи: вывести формулу нахождения расстояния от точки до плоскости; научиться применять формулу при решении задач.

IV. Открытие нового знания. Первичное усвоение.

- Пусть даны плоскость $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Расстояние ρ от точки до плоскости – это длина перпендикуляра, опущенного из M_0 на α. Тогда $\rho(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

- Докажем это (схематично на доске). Рассмотрим прямую l, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с направляющим вектором $\vec{n}$. Пусть $M_1 = l \cap \alpha$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (Рисунок 15).

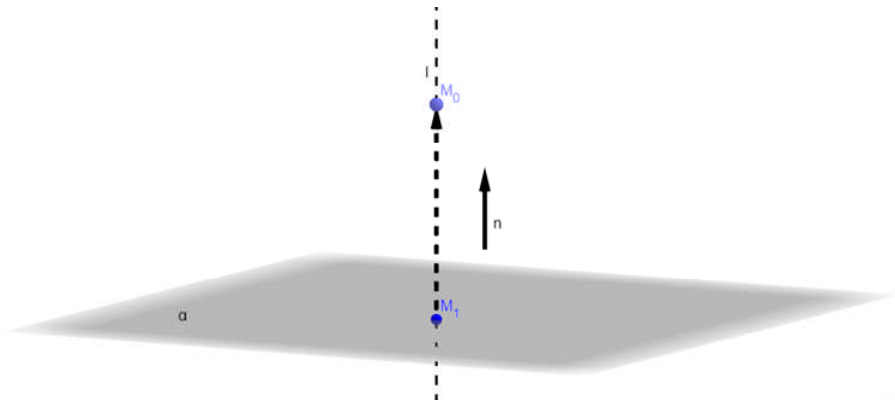


Рисунок 15

Тогда $\rho(M_0, \alpha) = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$, $\overrightarrow{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$.

Так как $\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \vec{n}' = \begin{cases} \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|, \overrightarrow{M_1M_0} \uparrow\uparrow \vec{n}', \\ -\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|, \overrightarrow{M_1M_0} \uparrow\downarrow \vec{n}', \end{cases}$ где $\vec{n}' = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}$,

то $\rho(M_0,\alpha)=\left|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}'\right|=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B+(z_0-z_1)C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Таким образом, $\rho(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

- Пользуясь формулой решим следующую задачу:

Найдите расстояние от точки $M(1,-2,3)$ до плоскости $\alpha: 2x-y+2z+5=0$.

Решение.

Подставим известное в формулу: $\rho(M,\alpha)=\frac{|2\cdot1+(-1)\cdot(-2)+2\cdot3+5|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{15}{3}=5$.

V. Применение полученных знаний.

Рассмотрим задачу:

Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1.

а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости ACD_1.

б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

Решение.

Сделаем рисунок в тетради и оформим условие задачи.

а) Введем систему координат с началом в точке A (Рисунок 16).

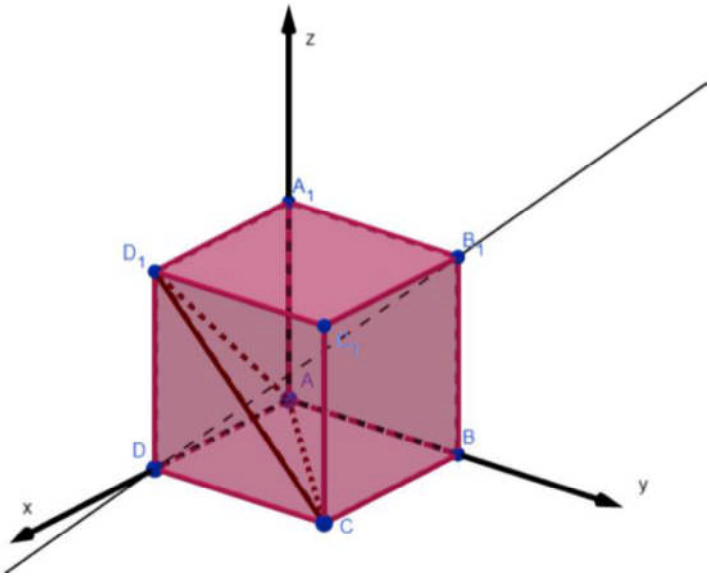


Рисунок 16

Тогда вершины имеют координаты: $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $A_1(0,0,1)$, $B_1(1,0,1)$, $C_1(1,1,1)$, $D_1(0,1,1)$.

Зададим прямую вектором $\overrightarrow{B_1D} = \{0-1, 1-0, 0-1\} = \{-1,1,-1\}$ и найдем векторы, лежащие в плоскости (ACD_1):

$$\overrightarrow{AC} = \{1-0, 1-0, 0-0\} = \{1, 1, 0\},$$

$$\overrightarrow{AD_1} = \{0-0, 1-0, 1-0\} = \{0, 1, 1\},$$

Проверим перпендикулярность B_1D к плоскости (ACD_1). Для этого убедимся, что $\overrightarrow{B_1D}$ перпендикулярен обоим векторам $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD_1}$:

$$\overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = -1 + 1 + 0 = 0,$$

$$\overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{AD_1} = (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Так как скалярное произведение равно нулю, то $B_1D \perp (ACD_1)$.

б) Найдем уравнение плоскости (ACD_1): $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + z = 0.$

$\vec{n} = \{1, -1, 1\}$. Тогда $\rho(B, (ACD_1)) = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

VI. Рефлексия.

- Наше занятие подходит к концу. Предлагаю подвести небольшой итог. Что нового мы сегодня узнали? Чему научились? Понравилось ли вам занятие? Все ли было понятно? (Ученики делятся своими мыслями, отвечают на вопросы, делятся впечатлениями, задают интересующие их вопросы.)

Домашнее задание:

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S все ребра равны 6. Найдите расстояние от точки A до плоскости SCD.

Решение задачи:

Задача 1.

Введем систему координат с началом в точке A (Рисунок 17).

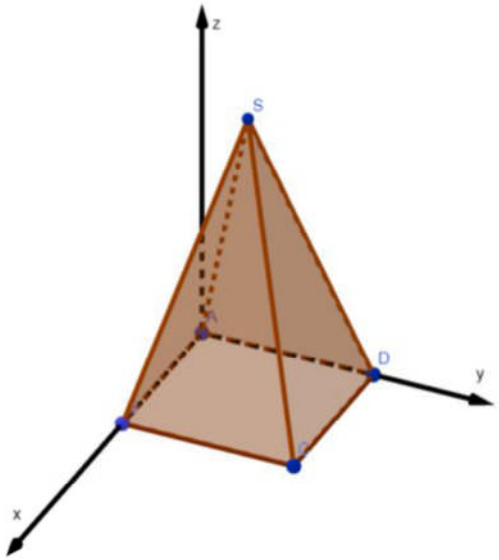


Рисунок 17

Найдем координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(6,0,0)$, $C(6,6,0)$, $D(0,6,0)$.

Так как пирамида правильная, вершина S проецируется в центр O квадрата $ABCD$. Центр O имеет координаты $O(3,3,0)$, поэтому вершина S имеет координаты $S(3,3,h)$. Найдем h, для этого найдем расстояние от S до A и приравняем к длине бокового ребра SA:

$\rho(S,A)=\sqrt{(0-3)^2+(0-3)^2+(0-h)^2}=\sqrt{9+9+h^2}=\sqrt{18+h^2}$,

$\sqrt{18+h^2}=6\Rightarrow 18+h^2=36\Rightarrow h^2=18\Rightarrow h=3\sqrt{2}$. Таким образом, $S(3,3,3\sqrt{2})$.

Найдем уравнение плоскости (SCD), для этого найдем векторы $\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{SD}$:

$$\overrightarrow{SC}=\{6-3,6-3,0-3\sqrt{2}\}=\{3,3,-3\sqrt{2}\},$$

$$\overrightarrow{SD}=\{0-3,6-3,0-3\sqrt{2}\}=\{-3,3,-3\sqrt{2}\}.$$

Подставим: $\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-3\sqrt{2} \\ 3 & 3 & -3\sqrt{2} \\ -3 & 3 & -3\sqrt{2} \end{vmatrix}=0\Rightarrow \sqrt{2}y+z-6\sqrt{2}=0.$

Вектор нормали $\vec{n}$ имеет координаты $\vec{n}=\{0,\sqrt{2},1\}$. Тогда $\rho(A,(SCD))=\frac{|-6\sqrt{2}|}{\sqrt{0+2+1}}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}$.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

3 Конспект занятия по теме: «Угол между плоскостями»

Цель: формирование умений решать задачи на нахождение угла между плоскостями координатным методом.

Задачи:

– актуализировать знания основных понятий (уравнение плоскости, координаты точки, вектор нормали);

– расширить знания учащихся о нахождении угла между плоскостями;

– развить умение применять изученную теорию на практике через решение типовых задач.

Тип урока: урок закрепления знаний.

Раздаточный материал: карточки с заданиями.

Используемые интерактивные технологии: интерактивная доска, презентация.

Ход занятия.

I. Организационный момент.

- Добрый день, ребята! Сегодня мы продолжим изучать, как решать задачи с помощью координатного метода.

II. Актуализация знаний.

- Давайте вспомним, что называется углом между двумя плоскостями? (Угол между плоскостями – это угол между их нормалями или линейный угол двугранного угла, образованного этими плоскостями.)

- Верно! А как можно найти этот угол? (Если известны уравнения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то угол между ними находится по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{(A_1)^2+(B_1)^2+(C_1)^2}\cdot\sqrt{(A_2)^2+(B_2)^2+(C_2)^2}}.)$$

III. Постановка цели урока. Мотивация учебной деятельности учащихся.

- Сегодня мы научимся вычислять угол между двумя плоскостями, используя координатный метод. Запишем в тетрадях тему занятия: «Угол между плоскостями».

- Прежде чем приступить к работе, давайте сформулируем цель сегодняшнего занятия. Как вы думаете, чему мы должны научиться в ходе занятия? (Цель: освоить алгоритм нахождения угла между плоскостями.)

IV. Закрепление полученных знаний.

Задача 1.

В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 1$.

а) Докажите, что вершины A_1 и C равноудалены от плоскости BED_1.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решение.

Введем систему координат с началом в точке A (Рисунок 18).

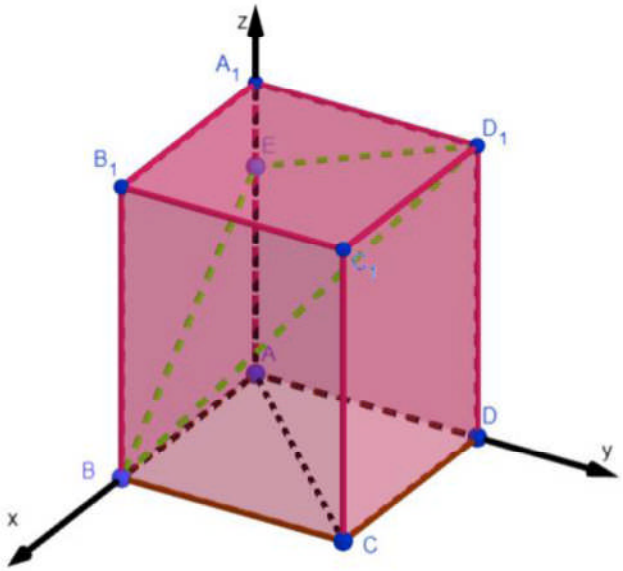


Рисунок 18

а) Найдем координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $A_1(0,0,5)$, $B_1(1,0,5)$, $C_1(1,1,5)$, $D_1(0,1,5)$.

Так как $AE:EA_1 = 2:1$, то точка E имеет координаты $E\left(0,0,\frac{2\cdot5+1\cdot0}{2+1}\right) = (0,0,\frac{10}{3})$.

Найдем уравнение плоскости (BED_1). Пусть $Ax+By+Cz+D=0$ уравнение этой плоскости. Подставим координаты точек $B(1,0,0), E\left(0,0,\frac{10}{3}\right), D_1(0,1,5)$в это уравнение и решим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} A\cdot1+B\cdot0+C\cdot0+D=0, \\ A\cdot0+B\cdot0+C\cdot\frac{10}{3}+D=0, \\ A\cdot0+B\cdot1+C\cdot5+D=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+D=0, \\ \frac{10}{3}C+D=0, \\ B+5C+D=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=-A, \\ C=\frac{3}{10}A, \\ B=-\frac{1}{2}A. \end{cases}$$

Отсюда имеем: $Ax-\frac{1}{2}Ay+\frac{3}{10}A-A=0$. Так как $A\neq0$, то разделив обе части уравнения $Ax-\frac{1}{2}Ay+\frac{3}{10}A-A=0$ на А, получим: $x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{10}-1=0$, $10x-5y+3z-10=0$.

Вектор нормали $\overrightarrow{n_1}$ имеет координаты $\overrightarrow{n_1}=\{10,5,3\}$.

Найдем расстояния от точек A_1 и C до плоскости BED_1:

$$\rho\left(A_1,(BED_1)\right)=\frac{|10\cdot0+5\cdot0+3\cdot5-10|}{\sqrt{10^2+5^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{134}},$$

$$\rho\left(C,(BED_1)\right)=\frac{|10\cdot1+5\cdot1+3\cdot0-10|}{\sqrt{10^2+5^2+3^2}}=\frac{5}{\sqrt{134}}.$$

Следовательно, $\rho\left(A_1,(BED_1)\right)=\rho\left(C,(BED_1)\right)$.

б) Найдем уравнение плоскости (ABC), для этого найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=\{1-0,0-0,0-0\}=\{1,0,0\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{1-0,1-0,0-0\}=\{1,1,0\}.$$

Подставим: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0\Rightarrow z=0.$

Вектор нормали $\overrightarrow{n_2}$ имеет координаты $\overrightarrow{n_2}=\{0,0,1\}$.

Тогда $\cos\angle((BED_1),(ABC)) = \frac{3}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{10^2+5^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{134}} = \frac{3}{\sqrt{134}}$.

Следовательно, $\angle\big((BED_1),(ABC)\big) = \arccos\frac{3}{\sqrt{134}}$.

Ответ: $\arccos\frac{3}{\sqrt{134}}$.

Задача 2.

В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* точка *S* — вершина. Точка *M* — середина ребра *SA*, точка *K* — середина ребра *SC*.

а) Докажите, что прямые *SB* и *MK* перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями *BMK* и *ABC*, если $AB = 10$, $SC = 8$.

Решение.

Введем систему координат с началом в точке *A* (Рисунок 19).

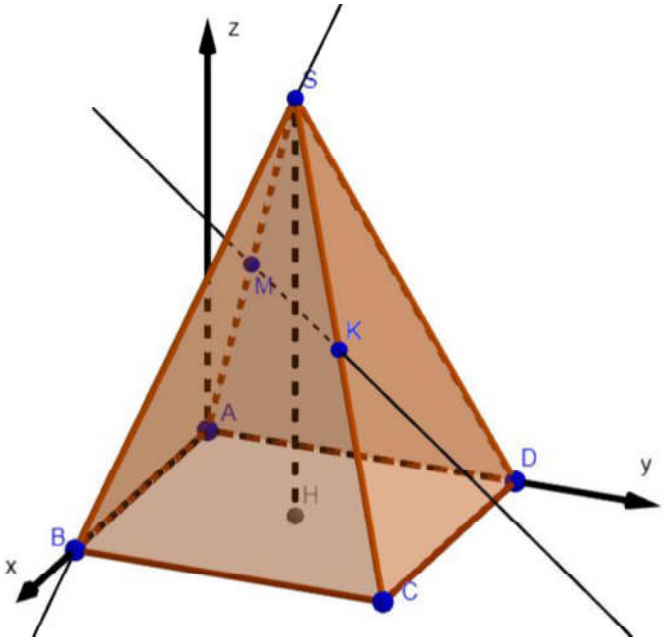


Рисунок 19

а) Найдем координаты точек: $A(0,0,0)$, $B(10,0,0)$, $C(10,10,0)$, $D(0,10,0)$.

Вершина пирамиды S имеет координаты $S(5,5,h)$. Найдем h, для этого найдем расстояние от S до C и приравняем к длине бокового ребра SC: $\rho(S,C) = \sqrt{(10-5)^2+(10-5)^2+(0-h)^2} = \sqrt{25+25+h^2} = \sqrt{50+h^2}$, $\sqrt{50+h^2} = 8 \Rightarrow 50+h^2 = 6436 \Rightarrow h^2 = 14 \Rightarrow h = \sqrt{14}$. Таким образом, $S(5,5,\sqrt{14})$.

Найдем координаты точек M и K. Так как точка M – середина SA, то $M\left(\frac{0+5}{2},\frac{0+5}{2},\frac{0+\sqrt{14}}{2}\right) \Rightarrow M(2.5,2.5,\frac{\sqrt{14}}{2})$. Так как точка K – середина SC, то $K\left(\frac{10+5}{2},\frac{10+5}{2},\frac{0+\sqrt{14}}{2}\right) \Rightarrow K(7.5,7.5,\frac{\sqrt{14}}{2})$.

Зададим прямые векторами и найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{SB} = \{10-5,0-5,0-\sqrt{14}\} = \{5,-5,-\sqrt{14}\},$$

$$\overrightarrow{MK} = \left\{7.5-2.5,7.5-2.5,\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{14}}{2}\right\} = \{5,5,0\},$$

$$\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{MK} = 5\cdot 5+(-5)\cdot 5+\left(-\sqrt{14}\right)\cdot 0 = 25-25+0 = 0.$$

Так как скалярное произведение равно нулю, то векторы перпендикулярны: $\overrightarrow{SB} \perp \overrightarrow{MK}$. Следовательно, $SB \perp MK$.

б) Найдем уравнение плоскости (BMK), для этого найдем векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BK}$:

$$\overrightarrow{BM} = \left\{2.5-10,2.5-0,\frac{\sqrt{14}}{2}-0\right\} = \left\{-7.5,2.5,\frac{\sqrt{14}}{2}\right\},$$

$$\overrightarrow{BK} = \left\{7.5-0,7.5-0,\frac{\sqrt{14}}{2}-0\right\} = \left\{-2.5,7.5,\frac{\sqrt{14}}{2}\right\}.$$

Подставим: $\begin{vmatrix} x-10 & y & z \\ -7.5 & 2.5 & \frac{\sqrt{14}}{2} \\ -2.5 & 7.5 & \frac{\sqrt{14}}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sqrt{14}x-\sqrt{14}y+20z-10\sqrt{14} = 0.$

Вектор нормали $\overrightarrow{n_1}$ имеет координаты $\overrightarrow{n_1} = \{\sqrt{14},-\sqrt{14},20\}$.

Найдем уравнение плоскости (ABC), для этого найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{10-0,0-0,0-0\} = \{10,0,0\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{10-0,10-0,0-0\} = \{10,10,0\}.$$

Подставим: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 10 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0.$

Вектор нормали $\overrightarrow{n_2}$ имеет координаты $\overrightarrow{n_2} = \{0,0,1\}$

Тогда $\cos\angle\big((BMK),(ABC)\big)=\frac{20}{\sqrt{14+14+400}}=\frac{20}{\sqrt{428}}=\frac{20}{2\sqrt{107}}=\frac{10}{\sqrt{107}}=\frac{10\sqrt{107}}{107}$.

Следовательно, $\angle\big((BMK),(ABC)\big)=\arccos\frac{10\sqrt{107}}{107}$.

Ответ: $\arccos\frac{10\sqrt{107}}{107}$.

V. Домашнее задание.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между плоскостями A_1BD и CC_1D, если $\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{A}D=5$, $\mathrm{AA}_1=3$.

2. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ найти угол между плоскостями ABS и SCD, если стороны основания равны 1, а боковое ребро 2.

Решение:

Задача 1.

Введем систему координат с началом в точке A (Рисунок 20).

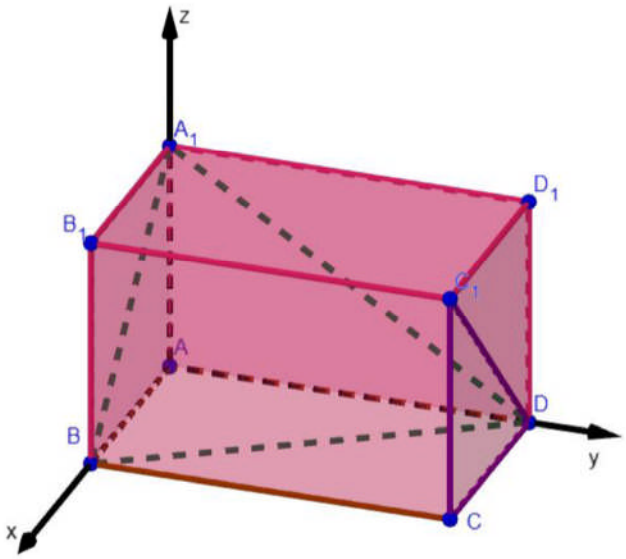


Рисунок 20

Найдем координаты вершин: $A(0,0,0)$, $B(4,0,0)$, $C(4,5,0)$, $D(0,5,0)$, $A_1(0,0,3)$, $B_1(4,0,3)$, $C_1(4,5,3)$, $D_1(0,5,3)$.

Найдем уравнение плоскости (A_1BD), для этого найдем векторы $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1D}$:

$$\overrightarrow{A_1B}=\{4-0,0-0,0-3\}=\{4,0,-3\},$$

$$\overrightarrow{A_1D} = \{0-0, 5-0, 0-3\} = \{0, 5, -3\}.$$

Подставим: $\begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 15x + 12y + 20z - 60 = 0.$

Вектор нормали $\overrightarrow{n_1}$ имеет координаты $\overrightarrow{n_1} = \{15, 12, 20\}$.

Найдем уравнение плоскости (CC_1D), для этого найдем векторы $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{CD}$:

$$\overrightarrow{CC_1} = \{4-4, 5-5, 3-0\} = \{4, 0, -3\},$$

$$\overrightarrow{CD} = \{0-4, 5-5, 0-0\} = \{-4, 0, 0\}.$$

Подставим: $\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z \\ 4 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12y - 60 = 0.$

Вектор нормали $\overrightarrow{n_2}$ имеет координаты $\overrightarrow{n_2} = \{0, 12, 0\}$.

Тогда

$$\cos\angle((A_1BD), (CC_1D)) = \frac{|15\cdot 0 + 12\cdot 12 + 20\cdot 0|}{\sqrt{(15)^2+(12)^2+(20)^2}\cdot\sqrt{(12)^2}} = \frac{144}{\sqrt{225+144+400}\cdot\sqrt{144}} = \frac{12\sqrt{769}}{769}.$$

Следовательно, $\angle\big((A_1BD), (CC_1D)\big) = \arccos\frac{12\sqrt{769}}{769}$

Ответ: $\arccos\frac{12\sqrt{769}}{769}$.

Задача 2.

Введем систему координат с началом в точке O (Рисунок 21).

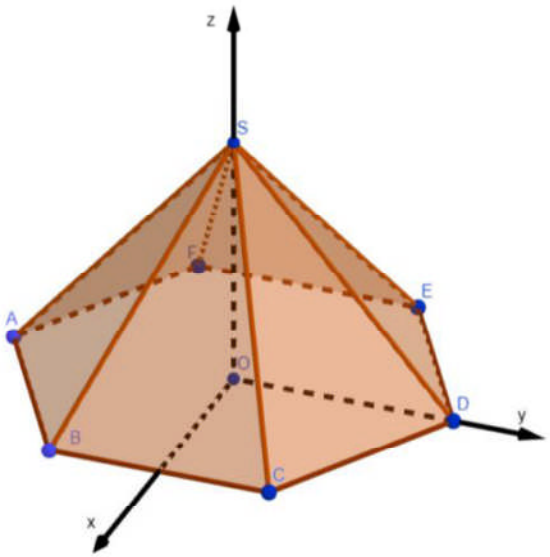


Рисунок 21

Найдем координаты точек: $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $C(0,1,0)$, $D(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$. Так как S лежит на оси Oz, то ее координаты $S(0,0,h)$, где h – высота пирамиды. Найдем h по теореме Пифагора из треугольника SOA:

$$SA^2 = SO^2 + OA^2,$$
$$2^2 = h^2 + 1^2,$$
$$h = \sqrt{3}.$$

Таким образом, $S(0,0,\sqrt{3})$.

Найдем уравнение плоскости (ABS), для этого найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AS}$:

$$\overrightarrow{AB} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2}),0-0\right\} = \{0,1,0\},$$
$$\overrightarrow{AS} = \left\{0-\frac{\sqrt{3}}{2},0-(-\frac{1}{2}),\sqrt{3}-0\right\} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}\right\}.$$

Подставим: $\begin{vmatrix} x-\frac{\sqrt{3}}{2} & y-(-\frac{1}{2}) & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{3}{2} = 0.$

Вектор нормали $\overrightarrow{n_1}$ имеет координаты $\overrightarrow{n_1} = \left\{\sqrt{3},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Найдем уравнение плоскости (SCD), для этого найдем векторы $\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{SD}$:

$$\overrightarrow{SC} = \{0-0,1-0,0-\sqrt{3}\} = \{0,1,-\sqrt{3}\},$$
$$\overrightarrow{SD} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}-0,\frac{1}{2}-0,0-\sqrt{3}\right\} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-\sqrt{3}\right\}.$$

Подставим: $\begin{vmatrix} x & y & z-\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{3}{2} = 0.$

Вектор нормали $\overrightarrow{n_2}$ имеет координаты $\overrightarrow{n_2} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Тогда $\cos\angle((ABS),(SCD)) = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+0\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(0)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} =$

$\frac{3}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. Следовательно, $\angle\left((ABS),(SCD)\right) = \arccos\frac{1}{5}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{5}$.

VI. Поведение итогов урока.

- Наше занятие подходит к концу. Давайте подведем итоги. Поделитесь своими впечатлениями, используя одну из предложенных формулировок:

1. «Испытывал(а) трудности при…».
2. «В целом разобрался(ась), но нужно уточнить…».
3. «Было все понятно».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Координатный метод играет важную роль в изучении геометрии в школе. Данный метод не только облегчает решение геометрических задач, но и помогает ученикам хорошо подготовиться к Единому Государственному Экзамену. Метод координат, являясь мощным инструментом, особенно эффективен в стереометрии, где традиционные геометрические методы часто требуют громоздких построений и доказательств. Его применение позволяет значительно сократить ход решения.

В рамках данной работы был осуществлен анализ содержания учебников по геометрии для 10-11 классов, рассмотрены типовые задачи ЕГЭ, которые можно решить координатным методом, а также разработана программа элективного курса «Применение координатного метода в стереометрических задачах».

Таким образом, цель работы была достигнута, все поставленные задачи были решены. Применение координатного метода в школьном курсе геометрии не только облегчает усвоение материала, но и способствует развитию логического мышления и повышает математическую грамотность учащихся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л. С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия : 10–11-й классы : базовый и углублённый уровни : учебник : издание в pdf-формате / Л. С. Атанасян [и др.]. 12-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 287 с.
2. Бурмистрова Т. А. Геометрия. Сборник примерных рабочих программ. 10—11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / Т. А. Бурмистрова. 4-е изд. М. : Просвещение, 2020. 159 с.
3. Гельфанд И. М. Метод координат : учебное пособие / И. М. Гельфанд [и др.]. 7-е изд., стер. М. : МЦНМО, 2009. 184 с.
4. Клековкин Г. А. Решение геометрических задач векторным методом: учебное пособие для учащихся 10-11 классов / Г. А. Клековкин. Самара : СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016. 180 с.
5. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Сдам ГИА: Решу ЕГЭ». URL: https://math-ege.sdamgia.ru/. Заглавие с экрана (дата обращения 26.04.25).
6. Паньженский В. И. Аналитическая геометрия на плоскости : учеб. пособие / В. И. Паньженский [и др.]. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 120 с.
7. Паньженский В. И. Аналитическая геометрия евклидова пространства : учеб. пособие / В. И. Паньженский [и др.]. Пенза : Изд-во ПГУ, 2021. 254 с.
8. Погорелов А. В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия : 10–11-е классы : базовый и углублённый уровни : учебник : издание в pdf-формате / А. В. Погорелов. 18-е изд., стер. М. : Просвещение, 2022. 174 с.
9. Соловкина И. В. Аналитическая геометрия в пространстве : учебное пособие / И. В. Соловкина [и др.]. Горно-Алтайск : ГАГУ, 2023. 202 с.

10. Темербекова, А. А. Аналитическая геометрия: практикум по решению задач : учебное пособие / А. А. Темербекова. Горно-Алтайск : ГАГУ, 2019. 159 с.

11. Усова Л. Б. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие /Л. Б. Усова [и др.]. Оренбургский гос. ун-т. Оренбург : ОГУ, 2010.181 с.

12. Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений». URL: https://fipi.ru/. Заглавие с экрана (дата обращения 29.04.25).

13. Шарыгин И. Ф. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия : 10—11-е классы : базовый уровень : учебник : издание в pdf-формате / И. Ф. Шарыгин. 10-е изд., стер. М. : Просвещение, 2022. 237 с.

14. Ященко И. В. Алгебра и начала математического анализа 10–11-е классы, универсальный многоуровневый сборник задач, учебное пособие / И. В. Ященко [и др.]. 7-е изд., стер. М. : Просвещение, 2025. 239 с.

15. Ященко И. В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень : типовые экзаменационные варианты : 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. М. : Издательство «Национальное образование», 2025. 224 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024 г.
Паньженский В.И

Задание

По ВКР студента Копейкиной Екатерины Андреевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Координатный метод решения геометрических задач»

Утверждена приказом по Университету от «25.12» 2024 г. № 1350/0

Срок сдачи студентом законченной работы «6» мая 2025 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов:	Сроки выполнения этапов	Примечания
1	Подбор и изучение литературы	Сентябрь – октябрь 2024	Выполнено
2	Изучение теоретического материала по теме исследования	Ноябрь – декабрь 2024	Выполнено
3	Написание первой главы	Январь 2025	Выполнено
4	Анализ школьных учебников и заданий ЕГЭ по теме работы	Февраль 2025	Выполнено
5	Оформление второй главы	Март 2025	Выполнено
6	Разработка элективного курса	Март – апрель 2025	Выполнено
7	Оформление работы	Апрель – май 2025	Выполнено

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель _____ Никитин М.Ю.
(подпись)

Задание принял к исполнению _____ Копейкина Е.А.
(подпись)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Копейкиной Екатерины
Андреевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Копейкина Екатерина Андреевна,
Ф.И.О. студента
студент (ка) 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Координатный метод решения геометрических задач»,
выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

Е.Копейкина
подпись
04.05.2025
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 04.05.2025
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР _____ Никутин Н.Д.
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Координатный метод решения геометрических задач»

студентки 4 курса Копейкиной Екатерины Андреевны

Ф.И.О.

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля «Математика»

Руководитель ВКР Никитин Николай Дмитриевич

Ф.И.О.

АНТИПЛАГИАТ

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://pnzgu.antiplagiat.ru

Отчет о проверке

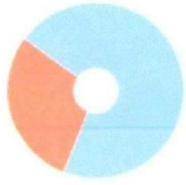
Автор: Копейкина Екатерина Андреевна

Название документа: ВКР Копейкина

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения 28.68%

Оригинальность 71.32%

Цитирования 0%

Самоцитирования 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 88.44% текста документа, исключено из проверки: 11.56% текста документа. Разделы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» - это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы, библиография, фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 112

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 04.05.2025 19:42:05

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 42

Символов в тексте: 56379

Слов в тексте: 7900

Число предложений: 2174

04.05.25 _____ Никитин Н.Д.

дд.мм.гггг. подпись И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Координатный метод решения геометрических задач»
студентки Копейкиной Екатерины Андреевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Работа Копейкиной Екатерины Андреевны посвящена применению координатного метода к решению стереометрических задач. Среди различных способов решения стереометрических задач координатный метод занимает особое место. Этот метод помогает преодолевать трудности, связанные с пространственным воображением и построением сложных чертежей, а также значительно ускоряет процесс решения задач, что является важным в условиях Единого Государственного Экзамена. Хотя координатный метод значительно упрощает решение задач по стереометрии, в рамках школьного курса он изучается не достаточно. В результате учащиеся не получают достаточной практики и зачастую не могут в полной мере использовать этот метод при решении задач.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. В первой главе рассмотрен теоретический материал, которым необходимо овладеть обучающимся для дальнейшего решения заданий по данной теме. Во второй главе рассмотрены методические аспекты изучения метода координат. В частности, здесь проанализированы школьные учебники по геометрии, выделены этапы решения задач координатным методом. В третьей главе представлен элективный курс по теме «Применение координатного метода в стереометрических задачах», разработано два конспекта занятий элективного курса. Работа Копейкиной Екатерины Андреевны является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Копейкиной Екатерины Андреевны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР Никитин Николай Дмитриевич, доцент кафедры «Математическое образование», к.ф.-м.н. _____