

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методические аспекты изучения тригонометрических уравнений»

Студент

Елбутова Е.Н. 18.03.26
(подпись, дата)

Улбутова Елизавета Николаевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Монахова О.А. 18.05.26
(подпись, дата)

Монахова О. А.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева Е.Г. 15.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И.о. заведующего кафедрой

Паньженский В.И. 01.06.26
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 25.06.26 № 10)

Секретарь ГЭК

Журавлева Е.Г. 25.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	6
1.1 Исторический обзор развития тригонометрии.....	6
1.2 Классификация тригонометрических уравнений и методы их решений.....	9
1.3 Тригонометрические уравнения высокого уровня сложности и методы их решения.....	12
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ФОРМИРОВАНИЯ НАВЫКОВ РАСПОЗНАНИЯ ТИПА И МЕТОДА.....	23
2.1 Особенности тригонометрических уравнений в системе школьного курса уравнений.....	23
2.2 Анализ содержания темы «Решение тригонометрических уравнений» в учебниках по алгебре и началам математического анализа для 10–11 классов.....	26
2.3 Система заданий на распознавание типа и метода решения тригонометрических уравнений.....	29
2.4 Фрагменты конспектов урока по теме «Решение тригонометрических уравнений различными способами».....	44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	54
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	55

ВВЕДЕНИЕ

Работа состоит из введения и двух глав. В первой главе «Теоретические основы решения тригонометрических уравнений» представлена история развития тригонометрии, приведена классификация тригонометрических уравнений и систематизация методов их решений, а также рассмотрены уравнения высокого уровня сложности. Во второй главе «Методические особенности обучения решению тригонометрических уравнений на основе формирования навыков распознавания типа и метода» выделены особенности тригонометрических уравнений, выполнен анализ школьных учебников, представлен комплекс заданий на распознавание типа и метода решения.

Тригонометрические уравнения занимают особое место в школьном курсе алгебры и начал математического анализа. С одной стороны, они опираются на богатейший аппарат тригонометрических тождеств, формул и свойств функций, что делает их мощным инструментом развития математической культуры учащихся. С другой – именно тригонометрические уравнения традиционно вызывают у школьников серьёзные затруднения, что подтверждается ежегодными результатами ЕГЭ[8].

Одна из главных причин этих затруднений кроется в большом количестве формул и разнообразии методов, которые могут быть использованы при решении тригонометрических уравнений. Получив уравнение, ученик часто не может ответить на ключевой вопрос – «С чего начать?». Школьные учебники строят изложение материала по принципу «от метода к уравнению»: после объяснения нового метода дается серия однотипных уравнений. В реальной ситуации – на контрольной, олимпиаде, экзамене – тип уравнения заранее не известен, и школьник вынужден самостоятельно проводить структурный анализ, чтобы определить является ли уравнение простейшим, сводится ли оно к квадратному, однородное ли

оно или неоднородное, какой метод решения окажется наиболее рациональным. Именно этот навык, распознавания типа уравнения и выбор метода, оказывается наименее сформированным.

Таким образом, проблема заключается в противоречии между объективной потребностью в формировании у учащихся умения распознать тип и метод решения тригонометрических уравнений и недостаточной разработанностью системы заданий, целенаправленно формирующих это умение в школьном курсе.

Для решения этой проблемы была поставлена **цель работы**: разработать комплекс заданий, способствующих формированию у учащихся умения классифицировать тригонометрические уравнения по типу и методу решения.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Рассмотрены тригонометрические уравнения и систематизированы стандартные и нестандартные методы их решения.
2. Выделены особенности тригонометрических уравнений, значимые для методики обучения.
3. Выполнен сравнительный анализ изложения темы «Решение тригонометрических уравнений» в учебниках по алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов различных авторов.
4. Разработаны задания, направленные на формирование у учащихся умения распознавать тип уравнения и выбирать метод решения.

Объект работы: процесс изучения темы «Тригонометрические уравнения» в курсе алгебры и начал математического анализа 10–11 классов.

Предмет работы: методические условия формирования у учащихся умения распознавать типы тригонометрических уравнений и выбирать рациональный метод их решения (на примере комплекса специальных заданий).

Материал работы может быть использован учителем для индивидуальной и фронтальной работы на уроках математики и во внеурочной деятельности. Формирование навыков распознавания типа уравнения и выбора метода решения будет способствовать повышению качества знаний при обучении решению тригонометрических уравнений.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1 Исторический обзор развития тригонометрии

Становление тригонометрии как научной отрасли неразрывно связано с прикладной деятельностью человека. Потребность в точном расчете характеристик геометрических объектов по данным непосредственных замеров (в геодезии, астрономии и зодчестве) стала основным стимулом для разработки математического аппарата этой дисциплины.

Развитие тригонометрии было обусловлено запросами астрономии, в рамках которой она долгое время существовала как прикладной метод. Процесс выделения тригонометрии в независимую математическую дисциплину занял значительный период. Основоположником этой науки, возникшей во II в. до н. э., считается древнегреческий ученый Гиппарх, чей вклад позволил математически систематизировать результаты астрономических наблюдений.

Труды Птолемея, жившего во второй половине II века н. э., содержали описания свойств хорд, которые по своему значению полностью совпадают с современными формулами синуса для суммы и разности двух углов, а также их кратных и половинных значений.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha.$$

В период V-XII веков существенный прогресс в тригонометрии был достигнут индийскими математиками. Ключевым нововведением стал переход от использования полных хорд, характерных для греческой школы, к вычислению полухорд (фактически — современной линии синусов). Составленные ими таблицы для углов от 0° до 90° , где значения полухорд

измерялись в минутах дуги, отличались более высокой точностью по сравнению с расчетами Птолемея [17].

Опираясь на индийские математические традиции, арабские ученые внесли значительный вклад в развитие тригонометрии. Термин «синус» возник как латинский перевод арабского слова «джайб», обозначавшего линию синусов, а «косинус» развился из выражения «complementisinus» (синус дополнения). Понятия тангенса и котангенса первоначально были связаны с практической гномонокой (искусством измерения теней) и именовались «обращенной» и «плоской» тенями. Эти названия объясняются тем, что данные функции рассматривались как тени, отбрасываемые гномоном (вертикальным шестом) на разные плоскости. Зная высоту гномона (L) и длину его тени (l), можно вычислить угловую высоту Солнца (h), что в современной математике выражается так:

$$\operatorname{tg} h = \frac{L}{l}$$

Соотношения между длиной гномона и тени, изучавшиеся гномоникой, являются, по существу, тригонометрическими. Поэтому гномоника была одним из источников тригонометрии).

С XI по XIII век ученые Востока и Индии заложили основы тригонометрии как отдельной науки. К её обособлению подтолкнули нужды географии, картографии и военного ремесла. Однако развитие этой области шло медленно, так как в трудах того времени еще не использовалась специальная математическая символика.

В XV веке тригонометрией начали всерьез заниматься в Европе. Большую роль в этом сыграл Иоганн Мюллер (известный как Региомонтан), который в своей книге «Пять книг о треугольниках всех видов» представил тригонометрию как отдельную науку. Со временем математики разработали четкие обозначения и собрали множество формул. В этот процесс были вовлечены великие ученые, такие как Николай Коперник, Тихо Браге и Иоганн Кеплер.

Эволюцию тригонометрии можно разделить на два основных этапа. Первый этап зародился в эпоху античности, а второй, фундамент которого заложил Франсуа Виет, нашел свое полное воплощение в работах школы Леонарда Эйлера. Благодаря прогрессу в алгебраической символике тригонометрические зависимости приобрели вид формул. Использование отрицательных чисел позволило перейти к изучению направленных углов и дуг, что трансформировало понятие тригонометрических линий в универсальные функции числового аргумента. Это послужило основой для создания современной аналитической теории тригонометрических функций.

Накопление значительного объема данных привело к тому, что с XVIII столетия началась активная систематизация тригонометрических знаний. Это способствовало выделению тригонометрии в практически автономную математическую дисциплину.

Современный облик тригонометрии сформировался благодаря трудам выдающегося математика, академика Российской академии наук Леонарда Эйлера (1707-1783). Именно он заложил основы функционального подхода и внедрил общепринятую сегодня символику. Рассматривая $\sin x$ и $\cos x$ как функции числового аргумента (радианной меры угла), Эйлер вывел дисциплину на новый аналитический уровень. Его открытие связи между тригонометрическими функциями и экспонентой комплексного аргумента позволило упростить сложные формулы, сведя их к правилам арифметики комплексных чисел. Кроме того, ученый систематизировал и ввел в употребление обратные тригонометрические функции [17].

Таким образом, именно Эйлер заложил фундамент тригонометрии как науки о функциях. Он представил ее в аналитическом виде, выстроив логическую цепочку, где сложные формулы вытекают из нескольких простейших. Благодаря предложенной им системе обозначений сторон и углов, математический язык стал прозрачным и гармоничным. Эйлер предложил определять тригонометрические функции как безразмерные величины (числа), принимая радиус круга за единицу.

Его исследования обогатили науку новыми соотношениями: он выявил связь функций с показательной формой, ввел правила знаков и обобщил формулы приведения. На базе его работ была сформирована классическая методика преподавания тригонометрии, принятая и по сей день.

1.2 Классификация тригонометрических уравнений и методы их решений

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции, называется тригонометрическим.

Тригонометрическое уравнение – это такое уравнение, в котором неизвестное является аргументом, либо входит в состав аргумента тригонометрической функции. Эти неизвестным является угол (дуга). (Мордкович А. Г.)

Существуют следующие виды тригонометрических уравнений:

1. Элементарные тригонометрические уравнения.
2. Уравнения, решаемые при помощи замены суммы произведением.
3. Однородные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$.
4. Уравнения, сводящиеся к выражениям вида $a \cos x + b \sin x$.
5. Уравнения, решаемые с использованием формул двойного или тройного аргумента.
6. Тригонометрические уравнения, содержащие одну и ту же функцию одного и того же аргумента и решаемые методом подстановки.

Подробнее рассмотрим каждый из них.

1. Элементарные тригонометрические уравнения:

Уравнения $f(x) = a$, где $f(x)$ одна из тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ имеют следующие виды решений, представленные в таблице 1.

Таблица 1 – Решение элементарных тригонометрических уравнений

Общий вид решений	Ограни- чения	Частные случаи		
1. $\sin x=a$, где $ a \leq 1$, $x=(-1)^n \arcsin a+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	Если $ a >1$, то корней нет	При $a=1$, $\sin x = 1$, тогда $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$	При $a=0$, $\sin x = 0$, тогда $x=\pi n, n\in\mathbb{Z}$	При $a=-1$, $\sin x = -1$, тогда $x=-\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$
2. $\cos x=a$, где $ a \leq 1$, $x=\pm \arccos a+2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	Если $ a >1$, то корней нет	При $a=1$, $\cos x = 1$, тогда $x=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$	При $a=0$, $\cos x = 0$, тогда $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$	При $a=-1$, $\cos x = -1$, тогда $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$
3. $\operatorname{tg} x = a$, $x=\arctan a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	-	-	-	-
4. $\operatorname{ctg} x = a$, $x=\operatorname{arccot} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	-	-	-	-

2. Уравнения, решаемые при помощи замены суммы произведением:

Решение уравнений данного класса основывается на условии равенства произведения нулю, т. е. оно выполняется тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, остальные при этом определены на всей области допустимых значений.

Пример: $2 \sin x \cos x + 2 \sin x + \cos x + 1 = 0$.

Сгруппируем слагаемые и получим: $(2 \sin x + 1)(\cos x + 1) = 0$, вспоминаем о произведении нескольких множителей равных нулю и получаем два уравнения:

$$\sin x = -\frac{1}{2},$$

$$\cos x = -1.$$

3. Однородные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$:

Такие уравнения имеют общий вид:

$$a_0 \cdot \sin^n x + a_1 \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x + a_2 \cdot \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x + \dots + a_{n-1} \cdot \sin x \cdot \cos^{n-1} x + a_n \cdot \cos^n x.$$

Пусть $\cos x \neq 0$ ($\sin x \neq 0$), тогда $x \neq -\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

В каждом из многочленов сумма степеней $\cos x$ и $\sin x$ составляет одно и то же число n .

Для нахождения решения необходимо обе части разделить либо на $\sin^n x$, либо на $\cos^n x$. Получим уравнение n -ой степени относительно $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$.

4. Уравнения, сводящиеся к выражениям вида $a \cos x + b \sin x$:

Пусть γ – угол, задаваемый равенствами: $\sin \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Для любых a и b такой угол существует.

Получаем $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \gamma)$.

5. Уравнения, решаемые с использованием формул двойного или тройного аргумента:

Для решения таких уравнений, необходимы знания нужных формул:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{tg} x}$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}, x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

6. Тригонометрические уравнения, содержащие одну и ту же функцию одного и того же аргумента и решаемые методом подстановки:

Уравнения такого вида решаются с помощью замены переменной t .

Пример: $\sin^2(x + 1) - \sin(x + 1) = 0$.

В данном уравнение $\sin(x + 1)$ заменим на t , получаем обычное квадратное уравнение, которое необходимо решить.

$$t^2 - t = 0$$

$$t(t - 1) = 0$$

$$t_1 = 0, t_2 = 1$$

Возвращаемся к замене и решаем группу простейших уравнений.

$$\sin(x + 1) = 0, \sin(x + 1) = 1$$

Можно отметить, что решение тригонометрических уравнений открывают возможности для применения обширного инструмента математических подходов. Обычный курс содержит такие методы, но олимпиадные задачи более широко используют другие методы.

1.3 Тригонометрические уравнения высокого уровня сложности и методы их решения

Раздел тригонометрия включен в кодификатор основных тем олимпиадных заданий по математике. Их содержание может быть направлены на развитие различных аспектов:

- 1) применение знаний в новых ситуациях;
- 2) применение давно изученных знаний по геометрии, алгебре при решении тригонометрических уравнений;
- 3) формирование способности генерировать новые идеи при решении, с помощью творческих заданий.

Тригонометрические уравнения играют важную роль и в формировании умений школьника генерировать несколько идей решения

задачи, потому что не обязательно решать эквивалентно, можно решить различными способами.

Анализируя олимпиадные тригонометрические задания можно выделить следующие признаки отличия от стандартных:

1. Отсутствие алгоритма решения.
2. Поиск решения уравнения с помощью нетривиальных способов, изучение которых не предусмотрено в школьной программе.
3. Обманчивая простота формулировки задания.

Изучение олимпиадных заданий прошлых лет позволило структурировать и сформировать методическую базу для решения задач по категориям.

1. Применение тригонометрических функций как аналитического метода в геометрических исследованиях

Встречаются задачи, решение которых сводятся к рассмотрению прямоугольного треугольника, где соотношение сторон и углов может выражаться с помощью тригонометрии.

Пример 1 Докажите, что треугольник, углы α и β которого удовлетворяют соотношению $\sin \alpha - \cos \alpha = \cos \beta - \sin \beta$, является прямоугольным.

Решение: представим данное выражение в следующем виде:

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \cos \beta - \sin \alpha \Leftrightarrow (\sin \alpha + \sin \beta) - (\cos \alpha + \cos \beta) = 0;$$

$$2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 0;$$

$$2 \cos \frac{\alpha-\beta}{2} (\sin \frac{\alpha+\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2}) = 0.$$

$$\cos \frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0, \text{ т.к. в противном случае } \alpha - \beta = \pi, \text{ тогда наше}$$

выражение можно разделить на $\cos \frac{\alpha-\beta}{2}$, получим:

$$\sin \frac{\alpha+\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} (1).$$

Но синус и косинус одного угла могут быть равны 0 одновременно, поэтому (1) можно разделить либо на $\sin \frac{\alpha+\beta}{2}$, либо на $\cos \frac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда мы

можем получить, что либо $tg \frac{\alpha+\beta}{2} = 1$, либо $ctg \frac{\alpha+\beta}{2} = 1$, но везде мы получим $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Обозначим третий угол треугольника за γ , мы можем его вычислить используя теорему о сумме углов треугольника, получим $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Мы получили, что угол γ прямой, следовательно, треугольник прямоугольный.

2. Решение уравнений с помощью тождеств содержащих четные степени тригонометрических функций ($\cos^{2n}x + \sin^{2n}x$)

Для этого необходимо знать следующие формулы:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x, \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

Пример 2 Решите уравнение $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16} \cos^2 x$.

Решение: преобразуем левую часть уравнения:

$$\begin{aligned} \sin^8 x + \cos^8 x &= (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8} \sin^4 2x. \end{aligned}$$

В правой части представим $\cos^2 x = 1 - \sin^2 2x$.

Данное уравнение можем записать в виде:

$$1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8} \sin^4 2x = \frac{17}{16} (1 - \sin^2 2x).$$

Пусть $\sin^2 2x = t$, тогда получим:

$$1 - t + \frac{1}{8} t^2 = \frac{17}{16} (1 - t) \Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0.$$

$$t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -1 - \text{не подходит, получим, что } \sin^2 2x = \frac{1}{2}.$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z.$$

3. Решение тригонометрических уравнений и их систем с последующим отбором корней на ограниченном промежутке

Традиционно тригонометрическое уравнение решается через его упрощение до базовой формы. В процессе обучения школьники осваивают

стандартный набор техник: замену, специфические тригонометрические преобразования (однородность, половинный угол) и т. д. При переходе к комбинированным задачам (с логарифмами, корнями или модулями) центр тяжести смещается на общеалгебраическую подготовку. Здесь требуется предельное внимание к области определения функции и умение виртуозно применять технику преобразований: от группировки слагаемых до использования формул сокращенного умножения [15].

Пример 3 Решите уравнение $\sin x + x = 0$.

Решение: представим уравнение в виде: $\sin x = -x$ и построим в одной системе координат графики $y = \sin x$ и $y = -x$.

Увидим, что графики пересекутся в центре системы координат, в точке $(0;0)$, следовательно, $x=0$.

Ответ: $x=0$.

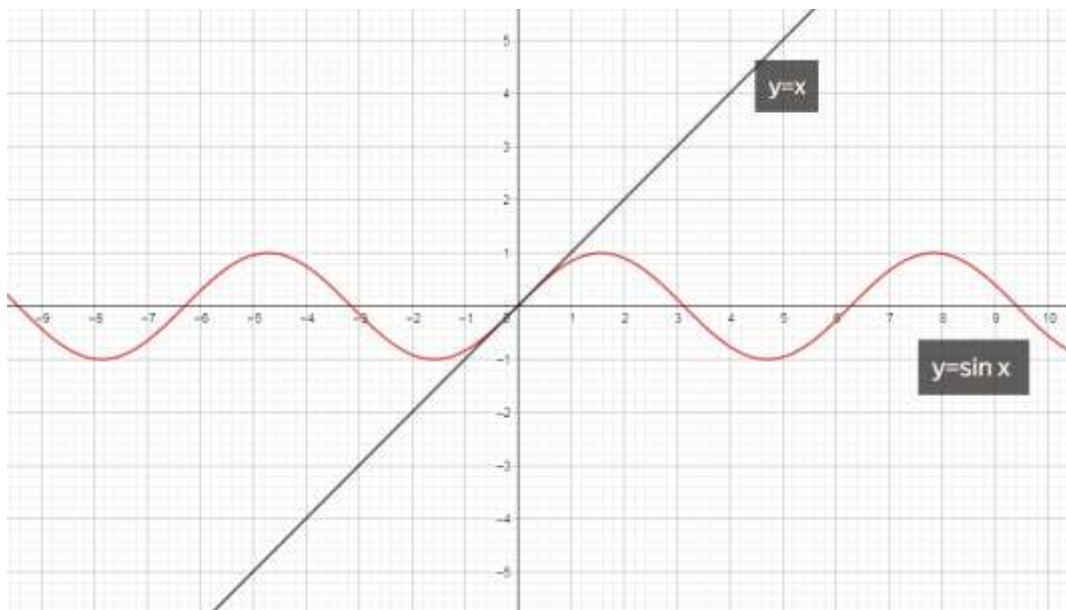


Рисунок 1 – Решение уравнения $\sin x + x = 0$ с помощью функционально-графического метода

Но данный способ не является универсальным, потому что не все графики легко построить, или точка пересечения графиков может оказаться за пределами системы координат. Поэтому чаще всего лучше пользоваться алгебраическими или тригонометрическими преобразованиями, например,

тождественные преобразования, умножение или прибавление к обеим частям тригонометрической функции и т.д.

Пример 4 Решите уравнение:

$$\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} = \sqrt{3}.$$

Решение: введем векторы $\vec{a} \{ \sin x; \cos x \}$ и $\vec{b} \{ \sqrt{1 + \cos^2 x}; \sqrt{1 + \sin^2 x} \}$, получим:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} \leq \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + 2}.$$

$$\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x + 2} \leq \sqrt{3},$$

$$\text{тогда } \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x} \leq \sqrt{3}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \text{ можно записать как: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, \text{ при этом } \sin(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 0.$$

Тогда эти вектора коллинеарные. Значит их соответствующие координаты пропорциональны: $\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$

По свойству пропорций получим:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

$$\sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} = \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin^4 x = \cos^2 x + \cos^4 x \Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \cos^4 x - \sin^4 x \Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x \cos 2x + \sin^2 x.$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}.$$

Из первоначального уравнения следует, что $\sin x \geq 0, \cos x \geq 0$. Поэтому $x = \pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

4. Анализ функций

Если случай сводится к тому, что уравнение нельзя преобразовать к стандартному виду, т. е. $f(x) = g(x)$, то используется монотонность, ограниченность и т.д. функции. К примеру, если одна из функций убывает,

а другая возрастает на промежутке I , то при наличии у уравнения на этом промежутке единственного корня, тогда и его можно найти отбором. Но если $f(x)$ ограничена сверху, где $\max f(x)=A$, $g(x)$ ограничена снизу и $\min g(x)=A$, то данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Пример 5 Решите уравнение $\sin x \frac{x}{x^2+1} + \sin x \frac{1}{x^2+x+2} = 0$.

Решение: пусть $\sin x = f(x)$, $\frac{x}{x^2+1} = g(x)$, $\frac{1}{x^2+x+2} = h(x)$, тогда данное уравнение можно записать так:

$$f(g(x)) + f(h(x)) = 0.$$

Т. к. $\sin x = f(x)$ нечетная функция, то $-f(h(x)) = f(-h(x))$.

Подставим в уравнение:

$$f(g(x)) = f(-h(x)).$$

Т. к. $|g(x)| \leq \frac{1}{2}$, $0 < h(x) \leq \frac{4}{7}$ и $f(x)$ монотонна на $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то уравнение $f(g(x)) = f(-h(x)) \Leftrightarrow g(x) = -h(x)$. Следовательно, $\frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{x^2+x+2}$ и его единственный корень x равен -1 [15].

Ответ: $x=-1$.

5. Расчет тригонометрических выражений и доказательство тригонометрических тождеств

Основные тригонометрические тождества и формулы часто встречаются и в обычных заданиях, поэтому для успешного прохождения олимпиадных заданий, ученикам необходимо знать формулы тройного аргумента, формулы преобразования тригонометрических функций в сумму и разность, формулу дополнительного угла и т.д.

Пример 6 Вычислите: $tg(\frac{\pi}{46}) tg(\frac{2\pi}{46}) + tg(\frac{2\pi}{46}) tg(\frac{3\pi}{46}) + tg(\frac{3\pi}{46}) tg(\frac{4\pi}{46}) + \dots + tg(\frac{k\pi}{46}) tg(\frac{(k+1)\pi}{46}) + \dots + tg(\frac{2024\pi}{46}) tg(\frac{2025\pi}{46})$ [19].

Для решения данного задания необходимо знать формулу разности тангенсов и правило приведения.

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Решение: из формулы разности тангенсов выразим $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} - 1.$$

$$\text{Тогда } \operatorname{tg}\left(\frac{(k+1)\pi}{46}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{46}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{46} - \operatorname{tg}\frac{k\pi}{46}}{\operatorname{tg}\left(\frac{(k+1)\pi}{46} - \frac{k\pi}{46}\right)} - 1 = \frac{\operatorname{tg}\frac{(k+1)\pi}{46} - \operatorname{tg}\frac{k\pi}{46}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{46}\right)} - 1.$$

Складывая равенства для всех k от 1 до 2024, получим:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{2025\pi}{46}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{46}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{46}\right)} - 2024 \quad (1).$$

$\operatorname{tg}\left(\frac{2025\pi}{46}\right)$ можем записать используя формулу приведения:

$\operatorname{tg}\left(\frac{2025\pi}{46}\right) = \operatorname{tg}\left(44\pi + \frac{\pi}{46}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{46}\right)$ из этого следует, что выражение (1) равно -2024.

Ответ: -2024.

6. Исследование тригонометрических функций на четность, периодичность и поиск $y_{\max}$ и $y_{\min}$

В заданиях данного типа обычно необходимо осуществить замену и решать по функции с новой переменной [15].

Пример 7 Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$.

Решение: данная функция непрерывна и дифференцируема на множестве $\mathbb{R}$. Проведем исследование:

1) найдем производную $f(x)$:

$$f'(x) = -\sin x \cdot \sin(\cos x) \cdot \sin(\cos(\cos x));$$

2) найдем критические точки:

$$f'(x) = 0$$

$$-\sin x \cdot \sin(\cos x) \cdot \sin(\cos(\cos x)) = 0;$$

3) решим следующую совокупность:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin(\cos x) = 0 \\ \sin(\cos(\cos x)) = 0 \end{cases}$$

Первое уравнение простейшее тригонометрическое $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Остальные уравнения решим методом оценки:

$$\sin(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \pi k, k \in \mathbb{Z}. |\cos x| \leq 1 \Rightarrow k = 0. \quad \text{Тогда} \\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin(\cos(\cos x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(\cos x) = \pi l, l \in \mathbb{Z}. \quad |\cos x| \leq 1 \Rightarrow l = 0. \\ \text{Тогда } \cos(\cos x) = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}. |\cos x| \leq 1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\pi}{2}, \text{ т. к. } \frac{\pi}{2} > 1, \text{ то это уравнение не имеет решения.}$$

Получаем:

$$x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Вернемся к исходной функции, в точках x_1 и x_2 равны $\cos(\cos 1)$ и $\cos 1$ соответственно.

Т. к. $0 < \cos 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$, $\cos(\cos 1) > \cos 1$. Получаем, что $\cos(\cos 1)$ наибольшее значение, а $\cos 1$ наименьшее значение.

Ответ: $y_{\text{наиб}} = \cos(\cos 1)$, $y_{\text{наим}} = \cos 1$.

7. Использование неравенства Коши

К нестандартным методам также относится применение классических неравенств, таких как неравенство Коши (о среднем арифметическом и среднем геометрическом). Для неотрицательных чисел a и b справедливо $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, причем равенство достигается при $a=b$.

Пример 8 Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\cos 8x$.

Решение: левая часть уравнения определена при $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Применим неравенство Коши к положительным числам $|\operatorname{tg} x|$ и $|\operatorname{ctg} x|$.

Однако заметим, что знаки тангенса и котангенса всегда одинаковы, поэтому их сумма либо положительна (если оба положительны), либо отрицательна (если оба отрицательны). Рассмотрим модуль суммы:

$$|tgx + ctgx| = |tgx| + |ctgx| \geq 2\sqrt{|tgx| \cdot |ctgx|} = 2.$$

Таким образом, $tgx + ctgx \leq -2$ или $tgx + ctgx \geq 2$. Левая часть по модулю не меньше двух.

Правая часть: $2\cos 8x$ принимает значения от -2 до 2 .

Равенство возможно в двух случаях:

1. $tgx + ctgx = 2$ и $2\cos 8x = 2$.
2. $tgx + ctgx = -2$ и $2\cos 8x = -2$.

Рассмотрим первую систему. Уравнение $tgx + ctgx = 2$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 2,$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = 1.$$

Получаем $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение системы: $\cos 8x = 1$.

Подставим найденные x : $8x = 8\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = 2\pi + 8\pi n = 2\pi(1 + 4n)$. Тогда $\cos(2\pi(1 + 4n)) = 1$. Условие выполняется.

Рассмотрим вторую систему: уравнение $tgx + ctgx = -2$:

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = -2 \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = -1.$$

Следовательно, $2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение системы: $\cos 8x = -1$. Подставим:

$$8x = 8\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = -2\pi + 8\pi n = 2\pi(4n - 1). \text{ Тогда:}$$

$\cos(2\pi(4n - 1)) = 1$, а не -1 . Следовательно, вторая система решений не дает [17].

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

8. Метод вспомогательного угла в нестандартной оценке

Иногда метод вспомогательного угла используется не для непосредственного решения, а для оценки выражения.

Пример 9 Решить уравнение $\sin x - \sin 15x \cdot \cos x = 1,5$.

Решение: применим метод вспомогательного угла к левой части:

$$\sin x - \sin 15x \cdot \cos x = \sqrt{1 + \sin^2 15x} \cdot \sin(x - \varphi), \text{ где}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 15x}}\right)$$

Оценим модуль левой части:

$$|\sin x - \sin 15x \cdot \cos x| \leq \sqrt{1 + \sin^2 15x} \leq \sqrt{2} \approx 1,414$$

Но правая часть уравнения равна 1,5 что больше 1,414. Следовательно, уравнение не имеет решений.

9. Метод функциональной подстановки

Иногда олимпиадные уравнения решаются с помощью неочевидных замен, например, $x = \cos t$ или $x = \operatorname{tg} t$, что позволяет свести алгебраическое уравнение к тригонометрическому.

Пример 10 Решить уравнение $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$.

Решение: область определения: $|x| \leq 1$. Сделаем подстановку $x = \cos t, t \in [0; \pi]$. Тогда $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t$ (неотрицательный на $[0; \pi]$). Правая часть: $4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$ (формула тройного угла). Получаем решение: $\sin t = \cos 3t = \sin(\frac{\pi}{2} - 3t)$.

Далее решаем простейшее тригонометрическое уравнение и возвращаемся к переменной x [17].

10. Использование ограниченности тригонометрических функций

Этот прием основан на том, что $\sin x$ и $\cos x$ принимают значения только из отрезка $[-1; 1]$. Часто уравнение вида $F(\sin x, \cos x) = a$ решается переходом к системе, использующей эти ограничения.

Пример 11 Решите уравнение $\cos 4x = 2 - \sin \frac{5x}{3}$.

Решение: запишем уравнение так: $\cos 4x + \sin \frac{5x}{3} = 2$. Т.к. $\cos 4x \leq 1$ и $\sin \frac{5x}{3} \leq 1$, то сумма 2 может получиться только в одном случае:

$$\begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \sin \frac{5x}{3} = 1 \end{cases}$$

При решении получим:

$$\begin{cases} 4x = 2\pi n, \\ \frac{5x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{10} + \frac{6\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Приравнивая выражения, находим целые числа n и m , при которых равенство выполняется. После преобразований получаем серию решений.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ФОРМИРОВАНИЯ НАВЫКОВ РАСПОЗНАНИЯ ТИПА И МЕТОДА

2.1 Особенности тригонометрических уравнений в системе школьного курса уравнений

Линия уравнений проходит через весь школьный курс математики. К основным видам уравнений, изучаемых в школе, относятся:

1. линейные;
2. квадратные;
3. дробно-рациональные;
4. иррациональные;
5. тригонометрические;
6. показательные;
7. логарифмические.

Изучение уравнений происходит всегда по одному алгоритму: вводится понятие вида уравнения, дается алгоритм решения, закрепление. Кроме этого, всегда обговариваются условия.

Типовые уравнения предполагают алгоритмический подход, и у каждого типа есть свой алгоритм решений. Но всегда существуют нетиповые уравнения. Например, в линейных уравнениях такими являются уравнения, которые либо не имеют решений, либо имеют бесконечное множество решений:

$0 \cdot x = 3$ – нет решений;

$0 \cdot x = 0$ – бесконечное множество решений.

Нетиповые уравнения требуют глубокого анализа, самостоятельного поиска метода решения, что приводит к затруднениям у некоторых учеников при встрече с такими уравнениями. Задача учителя заключается в формировании опыта решения таких уравнений, создании условий

накопления общих методов и подходов при решении нестандартных задач у обучаемых.

Рассматривая тригонометрические уравнения, можно выделить ряд особенностей, которые характерны именно для таких уравнений.

1. Тригонометрические уравнения подразделяются на несколько типов, от которых непосредственно зависит метод их решения:

- 1) простейшие;
- 2) уравнения, приводимые к квадратным;
- 3) однородные;
- 4) неоднородные.

2. Одной из важных особенностей является необходимость выполнения преобразований тригонометрических выражений, опирающихся на систему тригонометрических тождеств.

3. Всякое разрешимое тригонометрическое уравнение обладает бесконечным множеством корней, но все эти корни могут быть описаны с помощью замкнутых выражений, содержащих параметр из множества целых чисел.

4. Ограниченность области значений тригонометрических функций. Синус и косинус по модулю не превосходят единицы. Это свойство во многих случаях позволяет установить отсутствие решений без каких-либо дальнейших преобразований.

5. Неединственность формы записи ответа. Ответ при решении тригонометрического уравнения во многих случаях может быть записан различными способами, что также создает определенные трудности при проверке.

Перечисленные особенности делают изучение темы «Тригонометрические уравнения» объективно более трудным для обучающихся по сравнению с уравнениями других видов.

Существуют общие методы решения тригонометрических уравнений: группировка, замена переменной, вынесение общего множителя за скобку.

Однако даже при владении этими методами, необходимы знания формул или учет других особенностей. Встречаются уравнения, которые требуют нестандартного решения, что, в свою очередь, обуславливают потребность в более глубоком понимании свойств тригонометрических функций и в освоении дополнительных методов.

Рассмотрим общую схему решения тригонометрических уравнений:

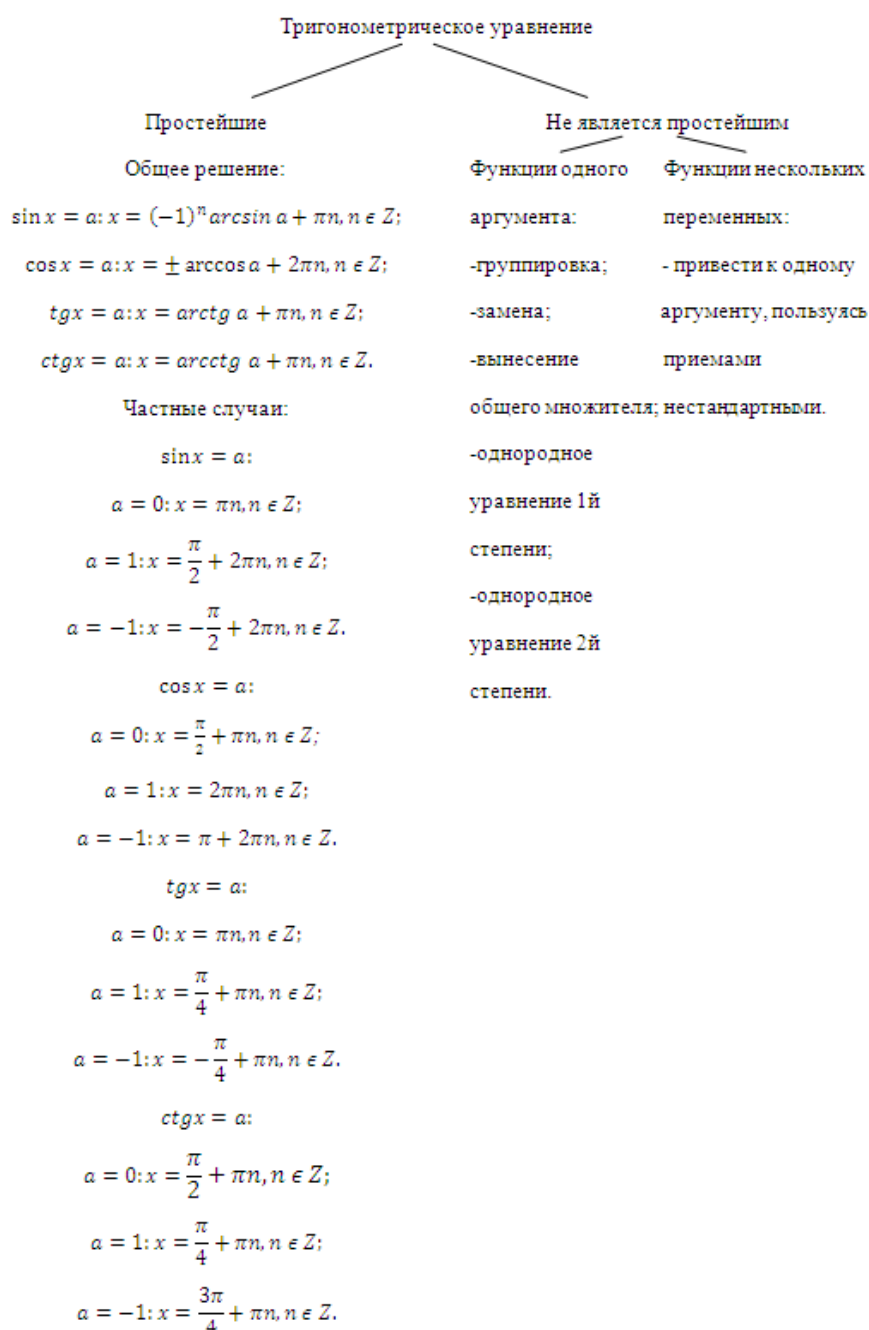


Рисунок 2 – Общая схема решения тригонометрических уравнений

Группа стандартных методов является достаточной для решения заданий предлагаемых на ЕГЭ. В связи с этим особую значимость

приобретает умение обучающихся распознавать тип тригонометрического уравнения и определять метод его решения. Для формирования данного умения в работе предлагается система специально разработанных заданий.

2.2 Анализ содержания темы «Решение тригонометрических уравнений» в учебниках по алгебре и началам математического анализа для 10–11 классов

Нормативно-правовую основу для определения места и объема темы «Решение тригонометрических уравнений» в школьном курсе математики составляют Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) и Примерная основная образовательная программа. Данные документы позиционируют тригонометрические уравнения не просто как отдельный раздел, а как один из ключевых содержательных компонентов курса алгебры и начал математического анализа для 10–11 классов. Это обусловлено тем, что овладение методами решения тригонометрических уравнений является необходимым условием для успешного изучения смежных тем (производная, интеграл, преобразование графиков функций) и выполнения итоговой аттестации.

Объектами анализа выступили учебники следующих авторских коллективов: А.Г. Мордковича, П. В. Семенов, А.Н. Колмогорова и др., Ш.А. Алимова и др., Г.К. Муравина, О.В. Муравиной, а также С.М. Никольского и др. Критериями сравнения стали: место темы в общей структуре курса (последовательность изучения блоков «функции», «преобразования», «уравнения»); количество учебных часов, отводимое на изучение; полнота представления теоретического материала и методов решения уравнений; доступность изложения для самостоятельного изучения; характер и разнообразие систем упражнений.

Наиболее методически проработанным и удобным признаётся учебник А.Г. Мордковича и П. В. Семенов. Авторы предлагают схему изучения материала: «функция $\rightarrow$ уравнения $\rightarrow$ преобразования». Вначале учащиеся знакомятся с тригонометрическими функциями и числовой окружностью, затем, на этой базе, в отдельной главе изучают простейшие уравнения и методы введения новой переменной и разложения на множители. И только после этого, в следующей главе, осваивают тригонометрические формулы и их применение для преобразования выражений при решении более сложных уравнений. Такая логика позволяет избежать механического заучивания формул и способствует осознанному решению. К достоинствам УМК также следует отнести наличие отдельного задачника с трехуровневой системой упражнений и подробное, доступное для самостоятельного понимания изложение теории.

Принципиально иной подход реализован в учебнике под редакцией А.Н. Колмогорова. Структура этого учебника построена по схеме «преобразования $\rightarrow$ функция $\rightarrow$ уравнения». Это означает, что учащиеся сначала знакомятся с тригонометрическими формулами и выполняют тождественные преобразования, затем, знакомятся с решением уравнений.

Учебник Ш.А. Алимова и др., напротив, отличается введением темы. Изучение простейших уравнений здесь начинается с наглядной иллюстрации на единичной окружности, что способствует глубокому пониманию материала. На изучение темы отводится достаточно времени, однако, понятия арксинуса, арккосинуса и арктангенса вводятся без должного разъяснения их практической необходимости.

Учебники Г.К. Муравина и О.В. Муравиной и С.М. Никольского и др. решают разные задачи. УМК Муравиных, предназначенный для углубленного уровня, отличается детальным разбором примеров, что может позволить учащимся подробно и самостоятельно изучать темы. Учебник С. М. Никольского и др. подходит для базового и углубленного изучения. В

нем предусмотрено большое количество трудных задач и задач для развития творческого подхода.

Количественные параметры учебного времени, отведенного на данную тему, четко регламентированы Примерным тематическим планированием. В общей сложности на освоение блока, объединяющего тригонометрические уравнения и непосредственно связанные с ними тригонометрические функции, отводится 22 часа [4]. Оставшееся время в рамках данного блока распределяется на изучение свойств тригонометрических функций, а также на проведение текущего контроля, диагностики и последующей коррекции знаний учащихся.

В ходе анализа теоретического блока было установлено, что все перечисленные УМК в полном объеме освещают фундаментальные понятия, необходимые для освоения темы. В частности, детально проработаны темы, связанные с возникновением и применением обратных тригонометрических функций («арксинус, арккосинус, арктангенс числа»), что является необходимым пропедевтическим этапом перед введением общих формул корней. Далее следует систематическое изложение методов решения основных классов уравнений: от безусловно базовых — «Простейшие тригонометрические уравнения ($\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$)»

— через дидактически оправданное усложнение к «Однородным уравнениям» и «Уравнениям, сводимым к квадратным». Завершением в большинстве рассматриваемых учебников выступает раздел «Решение систем тригонометрических уравнений», требующий от учащихся синтеза полученных знаний.

Изложение материала в анализируемых источниках подчинено классическому принципу постепенного нарастания сложности (от репродуктивных заданий к частично-поисковым). Авторы учебников активно используют визуализацию.

Основная масса упражнений, получает достаточную тренировку в решении уравнений стандартных видов. Однако ученик оказывается не готов

к ситуациям, где требуется самому определить метод решения тригонометрического уравнения. Это связано с тем, что в учебнике даются упражнения подобранные под тему.

Проведенный анализ содержания учебников по математике для 10-11 классов позволяет сделать следующий вывод. Изложение темы «Тригонометрические уравнения» во всех рассмотренных учебниках строится по единому принципу: за теоретическим описанием метода сразу следует серия однотипных уравнений, которые этим методом решаются. Такой подход формирует у учащихся устойчивую, но ограниченную установку: тип уравнения задан разделом параграфа, и задача сводится к применению готового алгоритма. При этом задания, в которых требовалось бы самостоятельное определение типа уравнения и соответствующего метода решения, в учебниках практически отсутствуют. В результате вне ситуации привязки метода к разделу учащийся испытывает затруднения. Поэтому у школьников может отсутствовать умение классифицировать тригонометрические уравнения и выбирать рациональный метод их решения.

2.3 Система заданий на распознавание типа и метода решения тригонометрических уравнений

Как показывает анализ школьных учебников, традиционная методика обучения решению тригонометрических уравнений строится по принципу «от метода к уравнению», то есть сначала объясняется метод, затем предлагается серия уравнений, решаемых изученным методом. В реальных условиях, когда тип или метод уравнения заранее не известен, школьник может теряться, потому что формируется установка о том, что какой метод проходили на уроке, таким и решается данное уравнение.

Таким образом, возникает потребность в заданиях, формирующие навык умения определять тип уравнения по внешнему виду и выбирать наиболее рациональный метод решения.

1. Задания на распознавание простейших тригонометрических уравнений

Главным когнитивным барьером ученика является запись $f(x)=a$, т.е. если внутри скобок стоит не простое, а выражение $kx+b$ вызывает затруднение. Данные задания направлены на разрушение такого «стереотипа» и на формирование аналитического восприятия структуры уравнения.

1) «Черный ящик»

Учащимся предлагается десять тригонометрических уравнений, относящиеся к двум различным типам. Задача обучающегося состоит в том, чтобы определить, какие из предложенных уравнений являются простейшими. На каждое уравнение отводится ограниченное время, в течение которого ученик должен письменно или устно зафиксировать тип уравнения (простейшее или не является простейшим) и кратко обосновать свое решение.

Данное задание целесообразно использовать на завершающем этапе изучения темы, когда у учащихся уже сформированы представления о том, что простейшее тригонометрическое уравнение содержит одну тригонометрическую от одного аргумента, приравненную к числу, а уравнение распадающееся на несколько простейших, относятся к более сложным типам и требуют иных методов решения.

Задания [16]:

1. Найдите наименьшее значение параметра a , при котором уравнение $2 \cos 7x = 5a + 9$ имеет решение.

2. При каком наименьшем положительном значении a функция $y = \cos(6x + \frac{a\pi}{3})$ имеет минимум в точке $x_0 = \frac{\pi}{9}$.

3. Решите уравнение $\cos x + 2 \sin x = 0$.
4. Найти значения параметра a , при которых уравнение $\sin^2 x + a \cos x = 3a - 2a^2$.
5. Точка движется по прямой, причем её пройденный путь определяется формулой $S(t) = 2 \sin\left(4\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$, $t > 0$. Найдите наименьший момент времени, в которой скорость точки равна 4π .
6. Найдите наибольшее значение параметра b , при котором уравнение $3 \sin 7x = 7b - 4$ имеет решение.
7. Решите уравнение $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$.
8. Найдите все решения уравнения $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству:

$$(x - \arcsin(\cos \frac{19\pi}{4}))(x - \operatorname{arccotg}(\operatorname{tg} \frac{21\pi}{8})) > 0.$$
9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a-2}{a+1}$ имеет точно два различных решения на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$.
10. Решите уравнение $\sin(0,5x - 30^\circ) = a$.

2) «Таможня»

Учащимся предлагается набор заданий, содержащих как простейшие тригонометрические уравнения, так и уравнения, требующие применения основных тригонометрических формул. Особенность задания заключается в том, что среди предложенных уравнений присутствуют такие, которые внешне могут выглядеть достаточно просто либо, наоборот, производить впечатление громоздких, но анализ области допустимых значений позволяют установить, что уравнение решений не имеет. Таким образом, от обучающегося требуется не механическое выполнение преобразований, а предварительная оценка разрешимости уравнения на основе его структуры и ограничений, задаваемых входящими в него функциями.

Примеры[19]:

1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{5}{3}$ (у функции синуса есть ограничения $[-1;1]$, а справа стоит число, которое больше 1, поэтому решений нет);

2. $\cos^2 t + \sin^2 t = 1,3$ (основное тригонометрическое тождество дает 1, поэтому уравнение неверно при любом t);

3. $\sin 5x \cos 3x + \cos 5x \sin 3x = 8$ (уравнение свернется по формуле сложения синуса двух углов, но получается, что $\sin 8x = 8$, 8 не принадлежит отрезку $[-1;1]$, следовательно, решений нет);

4. $\sin x = \frac{\pi}{2}$ (выглядит довольно просто, но решений тут не будет, т.к. $\frac{\pi}{2} > 1$);

5. $\sqrt{(\cos x - 2)} = \sin x$ (ОДЗ: $\cos x - 2 \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 2$ – это невозможно, решений нет);

6. $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + 1$ (область значений $\arcsin x$ отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а $\frac{\pi}{2} + 1 > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ решений нет);

7. $2\sin^2 x + 3\cos^2 x = 4$ (если левую часть преобразовать так $2(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 2 + \cos^2 x$ можно заметить, что данное выражение не будет превышать 3, а правая часть равна 4, следовательно, решения здесь не будет);

8. $\sin 2x = 1 + \cos^2 x$ (левая часть не превышает 1, а правая часть $1 + \cos^2 x \geq 1$. Равенство возможно если одновременно $\sin 2x = 1$ и $\cos^2 x = 0$, но из этого следует, что $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. При этом $\sin 2x = \sin(\pi + \pi n) = 0 \neq 1$ – противоречие, следовательно, решений нет).

3) «Как уравнению стать простейшим?»

Целью задания является применение одной из тригонометрических формул – двойного угла, приведение, основное тригонометрическое тождество – позволяющее свести исходное уравнение к простейшему виду. Данное задание рекомендуется выполнять совместно с учителем в ходе фронтальной работы у доски. Педагог задает наводящие вопросы,

направляющие внимание учащихся на особенности уравнения и выбор формулы. Такой формат взаимодействия способствует более глубокому осознанию и прочному запоминанию приема сведения сложного на первый взгляд уравнения к простейшему.

1. $1 - \cos^2 x = 0,25$. Указание: заметить в левой части основное тригонометрическое тождество.

2. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$. Указание: заметить в левой части тождество.

3. $\sin(\frac{\pi}{2} - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Указание: использовать формулу приведения.

4. $\sin^2 3x - \cos^2 3x = \frac{1}{2}$. Указание: использовать формулу двойного угла для косинуса.

5. $\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Указание: заметить формулу двойного угла синуса (умножить обе части уравнения на 2).

6. $\sin(270^\circ - x) = \cos x$.

Указание: использовать формулу приведения.

7. $\operatorname{tg} x \cdot \sin 2x = 0,5$. Указание: преобразовать и заметить формулу двойного угла для синуса.

8. $2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{2}$.

Указание: заметить основное тригонометрическое тождество.

2. Задания на распознавание тригонометрических уравнений, приводимых к квадратным

Ученику важно уметь распознать в тригонометрическом уравнении квадратную структуру относительно некоторой функции. Это ключевой этап, потому что здесь требуется двойная замена восприятия:

1. Увидеть, что все функции можно свести к одной.

2. Понять, что эта функция играет роль переменной t , и уравнение превращается в $at^2 + bt + c = 0$.

1) «Сортировка уравнений»

Задание направлено на формирование у обучающихся умения распознавать тригонометрические уравнения, решаемые методом замены переменной, и уравнения, решаемые методом вынесения общего множителя. Учащимся необходимо установить соответствие между каждым уравнением и одним из этапов его решения. Результатом выполнения задания является фиксация номеров уравнений после таблицы, распределенных по указанным способам решения (замена переменной/вынесение общего множителя).

Пример:

Таблица 2 – Задание «Сортировка уравнений»

Уравнение	Шаг решения
1. $4\sin^2 x + 4\cos x - 1 = 0$	Превратить одно из слагаемых в $\frac{1}{tgx}$.
2. $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$	Сгруппировать.
3. $3\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$	Получить уравнение, левая часть которого распадется на множители.
4. $tg x + ctg x = 2$	Использовать основное тригонометрическое тождество.
5. $tg^3 x - 3tg^2 x - tg x + 3 = 0$	Разделить на $\cos^2 x$.

Замена: 1, 3, 4;

Вынесение общего множителя: 2, 3.

2) «Собери уравнение сам»

Предлагается практическое задание, в котором на основе заданных параметров учащимся необходимо составить тригонометрическое уравнение, сводящееся к квадратному. Благодаря различным параметрам, в памяти учащихся закрепляются типологические признаки таких уравнений, формируется навыкоперативного выбора способа их решения.

Примеры:

1. Придумай уравнение, сводящееся к квадратному, содержащее функцию $\cos 2x$.

2. Придумай уравнение содержащее функцию $tg2x$, где после замены получается неполное квадратное уравнение.

3. Придумай уравнение, которое сводится квадратному $2t^2 - t - 1 = 0$ относительно $\sin x$.

4. Придумай уравнение «обманку», которое выглядит как квадратное относительно $\sin x$, но на самом деле таким не является (например, аргумент x встречается вне функции: $\sin^2 x + \sin x = x^2 - 4$).

5. Придумай уравнение содержащее функцию $tg \frac{x}{2}$, а соответствующее квадратное уравнение будет иметь корни 1 и -3 (например, $tg^2 \frac{x}{2} + 2tg \frac{x}{2} - 3 = 0$).

6. Придумай уравнение, которое на первый взгляд требует замены и решения квадратного уравнения, но на самом деле является тождеством и верно для всех x , кроме точек разрыва (например, $tg^2 x + ctg^2 x = (tg x + ctg x)^2 - 2$ —это тождество, уравнение обращается в $0=0$).

7. Придумай уравнение, которое на вид кажется линейным относительно тригонометрических функций, но после применения формулы двойного угла превратится в квадратное относительно $\sin x$ (например, $\cos 2x = 3 \sin x - 1$).

8. Придумай уравнение, в котором присутствует $\sin x$, $\cos x$, но с помощью основного тригонометрического тождества все сводится к квадратному относительно $\cos x$.

9. Придумай уравнение, которое после замены $t = \cos x$ дает квадратное уравнение $t^2 - 4t + 3 = 0$, но при этом корень $t = 3$ нужно будет отбросить (например, $\cos^2 x - 4 \cos x + 3 = 0$).

10. Придумай уравнение содержащее $\cos x$, которое после замены становится квадратным и имеет равно одно решение на промежутке $[0; \pi]$ за счет отбора корней (например, $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$, получим, что $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$. На отрезке $[0; \pi]$ будет 2

решения, а для ровно одного: $\cos^2 x + 2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$).

3. Задания на распознавание тригонометрических однородных и неоднородных уравнений

Главная трудность учащихся – не техника решения однородного уравнения, а этап распознавания:

- увидеть одинаковую суммарную степень слагаемых;
- заметить «скрыто» число и понять, что его можно заменить выражением нужной степени через основное тождество;
- отличить однородное уравнение от неоднородного, которое решается совсем другим методом (вспомогательный угол, универсальная подстановка).

Предложенная система заданий формирует этот навык поэтапно. Главная методическая идея в том, что ученик не просто решает, но и классифицирует уравнения.

1) «Распределение уравнений»

Такое задание позволит обучающимся увидеть структуру однородного уравнения (все слагаемые имеют одинаковую суммарную степень относительно $\sin x$, $\cos x$, а правая часть – ноль).

Задание представляет собой список несколько уравнений однородных или неоднородных, которые нужно распределить, у однородных уравнений необходимо записать степень однородности относительно $\sin x$, $\cos x$.

Таблица 3 – Пример выполненного задания «Распределение уравнений»

Однородное	Степень однородности	Неоднородное
$3\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$	2	$\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$
$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$	1	$3 \sin x - 4 \cos x = 5$

$\sin^3 x + \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0$	3	$\sin x \cdot \cos x = 1$
$\sin x + \cos x = 0$	1	$\sin 2x + \cos 2x = 1$
$5\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$	2	$2\sin^2 x = 4 \sin x$
$2\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x \cos^2 x = 0$	3	$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 4$

2) «Структурный паспорт»

В данном задании подразумевается работа с таблицей, а именно нужно для каждого уравнения заполнить «паспорт» не решая его.

Таблица 4 – Пример выполненного задания «Структурный паспорт»

Уравнение	Степени однородности (если есть)	Из чего состоит	Можно ли превратить в однородное?	Если да – как именно?
$\sin x \cdot \cos x = 0$	2	Произведение функций.	Это не однородное уравнение (нет суммы), а распадающееся.	Не требуется.
$3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$	2	Три слагаемых степени 2.	Уже однородное.	-
$3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 1$	Слева 2, справа 0	Три слагаемых степени 2 и число.	Можно.	-1 перенесем, получим +1. После этого можно заменить на $\sin^2 x +$

				$\cos^2 x$.
$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$	1	Два слагаемых степени 1.	Уже однородное.	-
$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$	Слева 1, справа 0	Два слагаемых степени 1 и число.	Нельзя.	Воспользо- ваться методом вспомога- тельного угла.

3) «Создай уравнение по его описанию»

Целью упражнения является создать уравнение по заданному параметру.

Примеры:

1. Однородное уравнение первой степени с функциями $\sin x, \cos x$.

Возможный вариант: $2 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.

2. Однородное уравнение второй степени, которое после деления на $\cos^2 x$ даст $t^2 - 4t + 3 = 0$ ($t = \operatorname{tg} x$).

Возможный вариант: $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$.

3. Уравнение, которое выглядит как однородное второй степени, но имеет «лишнее» слагаемое $\sin x$ первой степени.

Возможный вариант: $\sin^2 x + \sin x \cos x + \sin x = 0$.

4. Неоднородное уравнение, которое можно свести к однородному второй степени.

Возможный вариант: $\sin 2x + \cos^2 x = 2$.

5. Уравнение, которое является одновременно и однородным второй степени, и квадратным относительно $\sin x$.

Возможный вариант: $\sin^2 x = 0$.

6. Учитель попросил составить однородное уравнение второй степени. Ученик написал: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$. Прав ли он? Если нет, то запишите свое уравнение.

Возможный вариант: $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

7. Составьте однородное уравнение, которое при делении на $\cos^2 x$ дает квадратное уравнение с дискриминантом, равным нулю.

Возможный вариант: $\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

8. Составьте неоднородное уравнение с тангенсом и котангенсом.

Возможный вариант: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

4. Задания на распознавание метода решений тригонометрических уравнений

У тригонометрических уравнений существует большое количество методов решений. В процессе решения таких уравнений ученики могут перебирать различные методы, поэтому их важно научить распознавать, сформировать связь «вижу признак» значит «знаю метод».

1) «Главные признаки»

Учащимся предлагается таблица, в каждой строке которой содержится один пропуск: отсутствует название метода, его главный внешний признак либо пример уравнения. Задача обучающегося – заполнить пустые ячейки, восстановив недостающие элементы.

Данное задание допускает различные варианты организации: можно оставить незаполненным только столбец с примерами или столбец с названиями методов – в зависимости от конкретной дидактической цели. Выполнение подобной работы способствует установлению устойчивой связи между визуальным образом уравнения и соответствующим методом его решения.

Таблица 5 – Пример выполненного задания «Главный признак»

Метод	Главный признак	Пример уравнения
Замена переменной	Одна и та же функция от одного аргумента в разных степенях.	$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$
Разложение на множители	Общий множитель и группировка.	$\sin 2x + \sin x = 0$
Деление на степень косинуса	Все слагаемые одной суммарной степени, правая часть равна 0.	$3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$
Вспомогательный угол	$\sin x$ и $\cos x$ в первой степени; +свободный член.	$3\sin x + 4\cos x = 5$
Универсальная подстановка	Разные функции; +разные аргументы, ничего другое не работает.	$\sin x + \cos 2x = 1,5$
Оценка (ограниченность)	Сумма/разность функций, ограниченных по модулю, равна числу больше границы.	$\sin x + \cos x = 3$
Графический	Уравнение не решается аналитически, или просят определить количество корней.	$\sin x = \frac{x}{2}$

2) «Группировка»

Основная цель данного задания заключается в формировании у обучающихся умения замечать, что однотипные по структуре уравнения, содержащие различные тригонометрические функции, решаются одним и

тем же методом. Учащимся необходимо классифицировать предложенные уравнения, распределив их по группам таким образом, чтобы для каждой группы применялся один и тот же метод решения. При этом требуется не только правильно сгруппировать уравнения, но и правильно назвать метод для каждой из получившихся групп.

Уравнения:

1. $\sin^2 x + 2 \sin x - 3 = 0$;
2. $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$;
3. $\operatorname{ctg}^2 x + 2 \operatorname{ctg} x - 3 = 0$;
4. $2 \sin 2x \cos x = 3 \cos 2x$;
5. $2 \sin x + \cos x = 2$;
6. $3 \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \sin x \cos x$;
7. $2 \sin^2 x + \sin x \cos x = 0$;
8. $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
9. $\cos^2 x + 2 \cos x - 3 = 0$;
10. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$.

Группы:

- А) Замена на квадратное относительно одной функции: 1, 3, 8, 9;
Б) Однородное (делим на $\cos^2 x$): 2, 6;
В) Вынесение общего множителя: 4, 7;
Г) Метод вспомогательного угла: 5, 10.
З) «*Определи метод, отвечая да/нет*»

В данном задании, отвечая на вопросы да или нет, ученик определяет метод решения. Протестировав такую схему на разных уравнениях, можно записать «маршрут» решения для каждого. Для этого предоставлен список вопросов:

1. Все ли слагаемые имеют одинаковую суммарную степень относительно $\sin x / \cos x$, и правая часть равна 0?
 - да $\rightarrow$ однородное уравнение. Дели на $\cos x$ в старшей степени;

- нет → вопрос 2.
- 2. Можно ли все выразить через одну функцию одного аргумента?
- да → замена переменной;
- нет → вопрос 3.
- 3. Есть ли общий множитель или можно применить формулу суммы/разности?
- да → разложение на множители;
- нет → вопрос 4.
- 4. Содержит ли уравнение $\sin x / \cos x$ в первой степени и число?
- да → метод вспомогательного угла;
- нет → вопрос 5.
- 5. Можно ли оценить левую и правую части (ограниченность)?
- да → метод оценки;
- нет → универсальная подстановка/графический метод.

4) «Почему так нельзя?»

Дано уравнение, выбор метода или один шагов решения ученика, но на самом деле он нерационален или неприменим. Задача ученика объяснить, почему выбранный метод или шаг не подойдет.

1. Для уравнения $\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$ ученик выбрал универсальный метод подстановки. Вы согласны с этим выбором?

Указание: данный метод приведет к уравнению 4-ой степени, проще разделить на $\cos^2 x$.

2. Для уравнения $\sin x + \cos x = 1$ ученик решил, что для сведения его к простейшему уравнению относительно $\operatorname{tg} x$ достаточно разделить обе части уравнения на $\cos x$. Вы согласны с его мнением?

Указание: после деления получится $\operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x}$, простейшее уравнение не получится, поэтому лучше выбрать метод вспомогательного угла.

3. Для уравнения $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$ ученик предложил метод замены переменной. Вы согласны с этим методом?

Указание: согласны, решить можно, еще один способ это—сгруппировать и воспользоваться формулой преобразования суммы в произведение.

4. Для уравнения $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ ученик решил, что для получения квадратного уравнения относительно $\operatorname{tg} x$ достаточно разделить обе части на $\cos^2 x$. Вы согласны с учеником?

Указание: нет, это не будет достаточным условием, мы не получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$.

5. Для уравнения $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$ ученик решил, что с помощью замены $t = \cos x$ его можно преобразовать к виду $t^2 + 5t + 3 = 0$. Вы согласны с учеником?

Указание: нет, замена выполнена не корректно.

6. Для уравнения $2\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$ ученик предложил метод группировки (разложение на множители). Вы согласны, что это единственный способ решения?

Указание: нет, еще можно обе части разделить на $\cos^2 x$.

7. Для уравнения $\sin 2x - \cos x = 0$ ученик решил, что правильным вариантом будет разделить обе части на $\cos x$. Вы согласны с учеником?

Указание: так делать нельзя, потому что ученик потеряет корни для $\cos x$. В данном случае можно воспользоваться методом разложения на множители.

8. Для уравнения $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$ ученик предложил разделить обе части на $\cos^2 x$ и решить полученное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$ с помощью замены. Вы согласны с учеником?

Указание: да, согласны.

Разработанные задания на распознавание типа и метода, описанные выше, решают важную, но промежуточную задачу, потому что они учат школьников ориентироваться в многообразии тригонометрических уравнений. Однако классификация – это первый шаг, следующий, не менее значимый этап – формирование у учащегося способности сравнивать методы между собой, оценивать их, находить «ловушки» и ограниченность каждого метода. Для решения этой задачи рассмотрим фрагменты уроков.

2.4 Фрагменты конспектов урока по теме «Решение тригонометрических уравнений различными способами»

Далее представлены фрагменты уроков, на которых формируется навык распознавания методов решения тригонометрических уравнений. При составлении фрагментов конспектов использован методический прием «Урок одного уравнения». Его суть заключается в том, что классу предъявляется одно уравнение и предлагается найти как можно больше способов его решения. Затем организуется коллективное обсуждение, где учащиеся рассуждают, какие методы оказались наиболее рациональными, короткими, где возникло наибольшее количество сложностей, какой способ можно считать наиболее оптимальным.

Конспект фрагмента урока для уравнения $\sin x - \cos x = 1$

Тема: «Решение тригонометрических уравнений различными способами».

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний.

Цель: создать условия для закрепления и систематизации знаний о различных методах решения тригонометрических уравнений, формирование умения выбирать наиболее рациональный способ решения в зависимости от вида уравнения и применять его на практике.

Задачи:

1. Организовать повторение формул и методов.

2. Провести классификацию уравнений.
3. Организовать практикум по решению уравнений.
4. Обеспечить самопроверку и рефлексия.

Планируемые результаты:

1. Понимать каким методом решается определенный тип уравнения.

2. Решать тригонометрические уравнение методами: замены, разложение, графическим, вспомогательный аргумент и т.д.

3. Сравнивать разные способы и выбирать оптимальный.

- Ребята, давайте определим тип уравнения $\sin x - \cos x = 1$ и подумаем, какими способами его можно решить?

- Можно ли перейти к простейшему тригонометрическому уравнению с помощью формул сложения тригонометрических функций?

- Для этого сначала распишем косинус с помощью формулы приведения $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Подставим в исходное уравнение:

$$\sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 1.$$

Используя формулу разности синусов, получим: $\frac{2\sin(x - \frac{\pi}{2} + x)}{2\cos((x + \frac{\pi}{2} - x)/2)} = 1.$

Преобразуем это уравнение до: $2\sin(2x - \frac{\pi}{4}) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 1$ и подставим значение $\cos \frac{\pi}{4}$: $2\sin(x - \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$

$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ получили простейшее тригонометрическое уравнение, корень которого:

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in Z,$$

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z,$$

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

Покажем решение на единичной окружности:

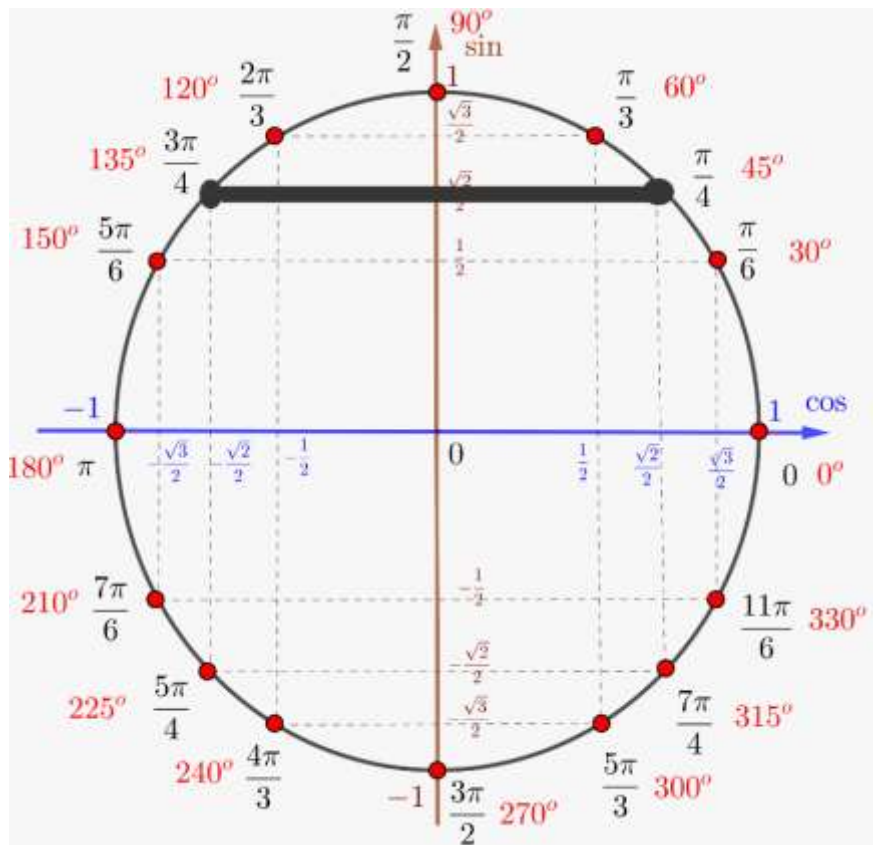


Рисунок 3 – Единичная окружность

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

- Можно ли использовать другие методы? Например, сведение уравнения к рациональному относительно какой-нибудь тригонометрической функции?

- Какая подстановка поможет это сделать?

- Какая опасность применения универсальной тригонометрической подстановки?

- Используем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\sin a = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}, \cos a = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}.$$

Перейдем к уравнению:

$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = 1 \mid \cdot (1 + tg^2\frac{x}{2})$; преобразуем $2tg\frac{x}{2} - 1 + tg^2\frac{x}{2} = 1 + tg^2\frac{x}{2}$, получаем: $2tg\frac{x}{2} = 2 \Rightarrow tg\frac{x}{2} = 1$.

- Можем найти один корень уравнения $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

- Заметим, что в решении предыдущим методом ответа было два, в данном методе корень один потерян. Поэтому универсальной тригонометрической подстановки дополнительной проверки требует значение переменной x , при котором не существуют выражения подставленные в уравнения.

- Какой еще метод можно использовать для неоднородного уравнения первой степени?

- Решим уравнение методом введения вспомогательного угла.

У нас уравнение вида $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$, для начала, чтобы перейти к методу вспомогательного угла нужно найти $\sqrt{a^2 + b^2}$:

1. $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$;

2. Делим почленно на $\sqrt{2}$ обе части уравнения: $\frac{\sin x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$;

3. Обозначим $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Получаем, что $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$;

4. Подставим: $\cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Свернем по формуле синуса разности двух углов: $\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Корни уравнения: $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$.

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z, x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, x = \pi + 2\pi n, n \in Z$.

- Для неоднородного уравнения первой степени возможен переход к однородному уравнению второй степени?

- Какие формулы можно использовать для такого перехода?

- Правильно! Можно решить методом разложения на множители, но для начала нужно воспользоваться формулами двойного угла:

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) = 1 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Разложим на множители:

$$2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

Произведение нескольких множителей равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другие при этом определены.

$$\cos \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0 \quad | : \cos \frac{x}{2} \neq 0$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

- Ребята, давайте сделаем вывод. Какой метод для такого уравнения был более рационален и почему?

- Верно! Самым рациональным методом для нашего неоднородного уравнения оказался метод введения вспомогательного угла. Другие методы тоже показали правильный результат, кроме метода универсальной замены, но для их использования нам потребовалось использование других тригонометрических формул.

Конспект фрагмента урока одного уравнения $\sin 6x + \sin 3x = 0$

Тема: «Решение тригонометрических уравнений различными способами».

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний.

Цель: создать условия для закрепления и систематизации знаний о различных методах решения тригонометрических уравнений, формирование умения выбирать наиболее рациональный способ решения в зависимости от вида уравнения и применять его на практике.

Задачи:

1. Организовать повторение формул и методов.
2. Провести классификацию уравнений.
3. Организовать практикум по решению уравнений.
4. Обеспечить самопроверку и рефлексия.

Планируемые результаты:

1. Понимать каким методом решается определенный тип уравнения.

2. Решать тригонометрические уравнение методами: замены, разложение, графическим, вспомогательный аргумент и т.д.

3. Сравнивать разные способы и выбирать оптимальный.

- Давайте посмотрим, что это за уравнение и предложим несколько способов его решения.

- Как можно представить $\sin 6x$?

- Чем будет являться в этом уравнении $\sin 3x$? Тогда каким методом можно решить данное уравнение?

- Верно! Один из способов метод группировки, но сначала, как мы и сказали, одно слагаемых нужно расписать по формуле двойного угла.

Получим уравнение:

$$2 \sin 3x \cos 3x + \sin 3x = 0.$$

$$\sin 3x (2 \cos 3x + 1) = 0.$$

Произведение нескольких множителей равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другие при этом определены.

$$\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2 \cos 3x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2}.$$

Из этого уравнения мы получим два корня. Первый $3x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$. Второй корень $3x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

- Как можно преобразовать сумму синусов двух углов?

- Решим уравнение используя формулу суммы синусов:

$$2 \sin \frac{6x+3x}{2} \cdot \cos \frac{6x-3x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{9x}{2} \cos \frac{3x}{2} = 0.$$

Произведение равно 0:

$$\sin \frac{9x}{2} = 0.$$

Получаем корень: $\frac{9x}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}$.

$$\cos \frac{3x}{2} = 0.$$

Получаем корень: $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

- Если мы запишем уравнение так:

$$\sin 6x = -\sin 3x \Leftrightarrow \sin 6x = \sin(-3x),$$

то как решить с помощью условия равенства одноименной тригонометрической функции (синуса)?

- Правильно! Используем условие:

$$\sin A = \sin B \Rightarrow A = B + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$A = \pi - B + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

У нас $A=6x$, $B=-3x$. Значит, получаем корни:

$$6x = -3x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z},$$

$$6x = \pi + 3x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

- Сравним все наши способы решения и ответы этого уравнения и сделаем вывод.

Конспект фрагмента урока одного уравнения

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

Тема: «Решение тригонометрических уравнений различными способами».

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний.

Цель: создать условия для закрепления и систематизации знаний о различных методах решения тригонометрических уравнений, формирование умения выбирать наиболее рациональный способ решения в зависимости от вида уравнения и применять его на практике.

Задачи:

1. Организовать повторение формул и методов.
2. Провести классификацию уравнений.
3. Организовать практикум по решению уравнений.
4. Обеспечить самопроверку и рефлексия.

Планируемые результаты:

1. Понимать каким методом решается определенный тип уравнения.
 2. Решать тригонометрические уравнение методами: замены, разложение, графическим, вспомогательный аргумент и т.д.
 3. Сравнивать разные способы и выбирать оптимальный.
- Определим тип уравнения.
 - Каким самым стандартным способ решается такое уравнение?
 - Самый стандартный метод решения такого уравнения – это замена.

Решим уравнение таким способом:

Пусть $t = \cos x$, получим квадратное уравнение вида:

$$2t^2 - 3t + 1 = 0.$$

$$D = 1 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Вернемся к замене:

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

- Для того, что понять, каким еще способом можно решить данное уравнение, давайте его видоизменим, как?

- Предположения верны, разложение на множители (через дискриминант или подбор).

$$(2 \cos x - 1)(\cos x - 1) = 0.$$

Произведение нескольких множителей равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другие при этом определены.

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

- Давайте вернемся к первому способу и посмотрим на наше уравнение после замены $t = \cos x$. Графиком чего является такое уравнение?

- Молодцы! Поэтому данное уравнение можно решить и графическим способом, но только после замены. У нас получается уравнение: $2t^2 - 3t + 1 = 0$, его решение на рисунке:

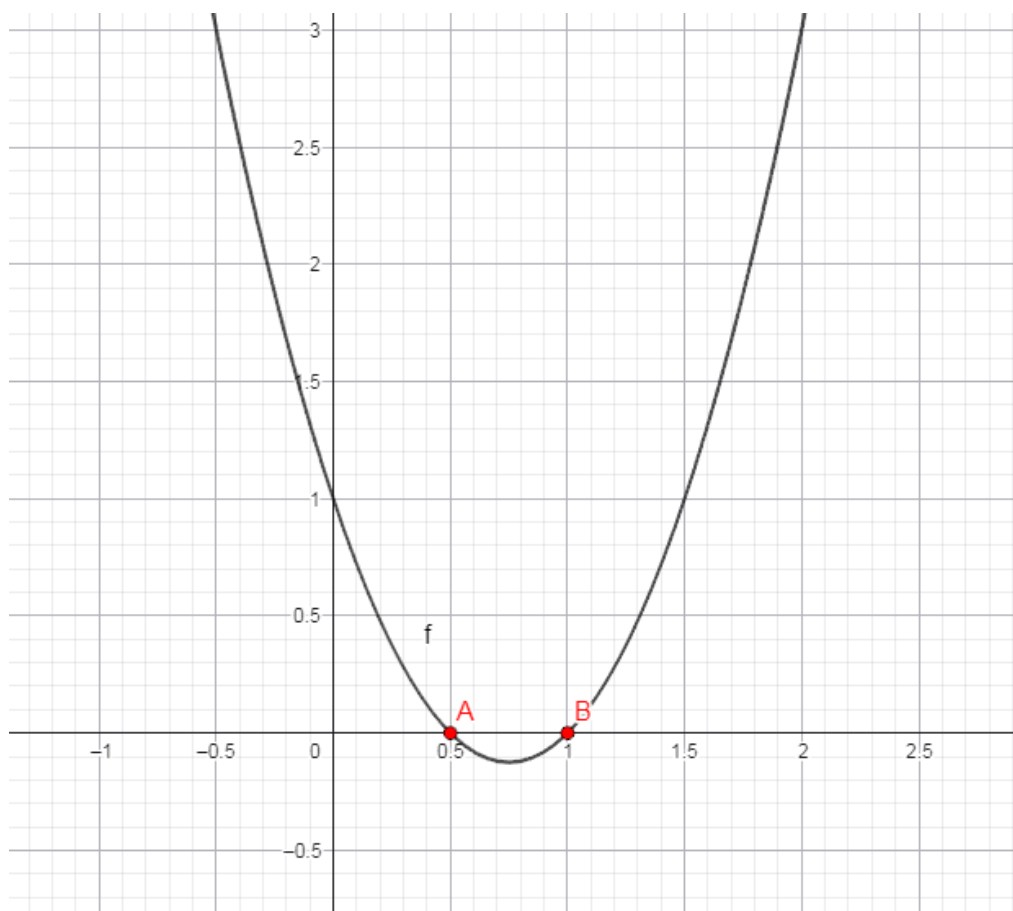


Рисунок 4 – Графический способ решение уравнения $2t^2 - 3t + 1 = 0$

То есть $t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}$. Возвращаемся к замене и получаем корни.

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

- Как думаете, какой способ для данного уравнения более рационален?

- Верно! Метод замены. Тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному, обычно решается таким методом.

Такой подход переводит знание о методах из формального в деятельностный: ученик не просто помнит приемы, но и приобретает опыт их осознанного выбора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тригонометрические уравнения традиционно вызывают у школьников серьёзные затруднения. Причин тому несколько: большой объем материала, высокая степень абстракции понятий, отсутствие заданий на распознавание типов тригонометрических уравнений и методов их решений. Несмотря на это, тригонометрия занимает важное место как в ЕГЭ по математике, так и на олимпиадах.

Успешное выполнение таких заданий напрямую зависит от сформированности у учащихся умения различать типы уравнений и быстро понимать, каким методом рациональнее решить каждое конкретное уравнение. Однако анализ школьных учебников показал, что традиционная методика не уделяет должного внимания этапу распознавания.

Разработанный комплекс заданий на распознавание типа тригонометрических уравнений и методов их решения направлен именно на формирование умения ориентироваться в уравнении до начала преобразований. Они помогают учащимся достичь главной цели — быстро и верно определять метод решения.

Таким образом, цель исследования достигнута, разработанный продукт рекомендуется к внедрению в практику работы учителей математики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Нормативно-правовые акты:

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования : приказ Минпросвещения России № 254, утв. приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г., зарегистрировано в Минюсте России № 63795. М., 2021. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/Приказ-№-287-от-31.05.2021-ФГОС_ООО.pdf. Заглавие с экрана(дата обращения: 16.12.2025)

2. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования : приказ Минпросвещения России № 413, утв. приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 17 мая 2012 г., зарегистрировано в Минюсте России № 24480.М., 2012. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/Приказ-№-413-от-17.05.2012-ФГОС_СОО.pdf. Заглавие с экрана(дата обращения: 16.12.2025)

3. Федеральный перечень учебников. URL: <https://fpu.edu.ru/>. Заглавие с экрана. (дата обращения: 18.12.2025)

4. Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика». 10-11 классы (базовый уровень). М., 2025. URL: https://docviewer.yandex.ru/view/1061515949/?*=tV9SoINaMD%2Fo9ZLQasSE%2FAEXF%2B97InVybc&lang=ru. Заглавие с экрана (дата обращения: 16.12.2025)

5. Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика». 10-11 классы (углублённый уровень). М., 2025. URL: https://docviewer.yandex.ru/view/1061515949/?page=1&*=A3BulZA7aKAglkfVqifMJH4o9F7InVybcI6Imh0dHBzOi8vZWRzb28ucnUvd3AtY29udGVudC91cGxvYru. Заглавие с экрана (дата обращения: 16.12.2025)

Учебная литература и периодические издания:

6. Алимов А. Ш. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углублённый уровни : учебник / А. Ш. Алимов [и др.] ; М. : Просвещение, 2016. 469 с.

7. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных организаций / А. Н. Колмогоров [и др.] ; М. : Просвещение, 2014. 388 с.

8. Малышев И. Г. Тригонометрия как наиболее сложный раздел в школьной математике // Образовательная система: теория и практика. 2013. № 3. С. 63-66.

9. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. М. : Мнемозина, 2019. 457 с.

10. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. М. : Мнемозина, 2014. 313 с.

11. Муравин Г. К. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : базовый уровень : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. М. : Дрофа, 2019. 279 с.

12. Муравин Г. К. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : углублённый уровень : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. М. : Дрофа, 2014. 320 с.

13. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : базовый и углублённый уровни : учебник / С. М. Никольский [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 431 с.

14. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : базовый и углублённый уровни : учебник / С. М. Никольский [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 464 с.

15. Ким Д. Х. Нестандартные способы решения тригонометрических уравнений // Юный ученый : науч-метод. журнал. 2023. №4(67). URL: <https://moluch.ru/young/archive/67/3595>. Заглавие с экрана (дата обращения 21.03.2026).

16. Сломинский Л. И. Математика в таблицах и схемах для подготовки к ЕГЭ : учебное пособие. М. : АСТ, 2020. 193 с.

17. Старова О. А. Тригонометрия // Математика. Все для учителя! : науч-метод. журнал. 2012. №4. URL: https://docviewer.yandex.ru/view/1061515949/?page=3&*=fmVPjJZUiAfef7ZKYcNA94rC6QZ7InVybCI6Imh0dHBzOi8vd3d3LmUtb3Nub3ZhLnJ1L1BERi9vc25vdmFfM18xNl8yMDM5LnBkZiJ9&lang=ru. Заглавие с экрана (дата обращения 3.02.2026).

18. Яковлев И. В. Тригонометрические уравнения // Подготовка к ЕГЭ по математике : науч-метод. журнал. 2022. № 17. URL: https://docviewer.yandex.ru/view/1061515949/?page=1&*=w0meCJBH0hLjM6%2FhpAJHSJlXt5BMWExMjYzZWRhZjczMmM5NTBjZmQ5ODhkYj&lang=ru. Заглавие с экрана (дата обращения 19.01.2026).

19. Подготовка к олимпиадам, ДВИ и ЕГЭ по математике и физике. URL: <https://mathus.ru/olymp/index.php>. Заглавие с экрана (дата обращения 4.05.2026).

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«12» 09 2025 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Улбутовой Елизаветы Николаевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методические аспекты изучения тригонометрических уравнений».

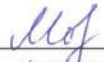
Утверждена приказом по университету от «25.09» 2025 г. № 1103/0

Срок сдачи студентом законченной работы «18» 05 2026 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
	Изучить учебную литературу о тригонометрических уравнениях.	Сентябрь – октябрь 2025	выполнено
	Выявить роль и место тригонометрических уравнений в школьном курсе.	Ноябрь – декабрь 2025	выполнено
	Определить особенности тригонометрических уравнений.	Январь – февраль 2026	выполнено
	Разработать задания на распознавания типов тригонометрических уравнений и методов их решений	Март – май 2026	выполнено
	Подготовка к защите ВКР.	Июнь 2026	выполнено

Дата выдачи задания «11» 09 2025г.

Руководитель  Монахова О. А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

 Улбутова Е. Н.
(подпись) (Ф.И.О.)

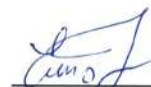
И.о. ректора Пензенского
государственного университета
Васину С.М.
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
группы 22ФПМ1 Улбутовой
Елизаветы Николаевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Улбутова Елизавета Николаевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методические аспекты изучения тригонометрических уравнений», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


подпись

14.05.26

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 14.05.26
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  
подпись И.О.Ф.

Протокол
проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему: «Методические аспекты
изучения тригонометрических уравнений»
студентки 4 курса Улбутовой Елизаветы Николаевны
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Монахова О. А.



АНТИПЛАГИАТ
обнаружение заимствования

Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://pnzgu.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

Автор: Улбутова Елизавета Николаевна

Название документа: ВКР Улбутова (1)

Проверяющий: Султанов Адгам Яхиевич

Организация: Федеральное государственное
бюджетное образовательное учреждение высшего
образования "Пензенский государственный
университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
20,25%



Цитирования:
2,51%



Оригинальность:
77,24%



Самецитирования:
0%



ИИ-контент:
0%



«Совпадения», «Цитирования», «Самецитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 96,56% текста документа, исключено из проверки: 3,44% текста документа.
Разделы и элементы, отключенные пользователем: Таблицы

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 386

Тип документа: Не указано

Дата проверки: 16.05.2026 08:34:49

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 56

Символов в тексте: 71270

Слов в тексте: 9570

Число предложений: 1701

Комментарий: не указано

Дата 16.05.26 Монахова О. А. Мoj

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические аспекты изучения
тригонометрических уравнений»
студентки Улбутовой Елизаветы Николаевны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 22ФПМ1

Работа посвящена обучению решению тригонометрических уравнений в школе. Проведён анализ истории развития тригонометрии, классификация тригонометрических уравнений и систематизация стандартных и нестандартных методов их решения. Выделены особенности тригонометрических уравнений, значимые для методики обучения. Выполнен сравнительный анализ изложения темы в учебниках по алгебре и началам математического анализа для 10–11 классов разных авторов.

Основной практический результат – разработка комплекса заданий, направленного на формирование у учащихся умения распознавать тип уравнения и выбирать метод решения. Составленные задания учат школьника проводить структурный анализ уравнения и выбирать наиболее рациональный метод, что особенно важно в условиях контрольной работы, олимпиады или экзамена, где тип уравнения заранее не известен.

Комплекс заданий может быть использован учителем для индивидуальной и фронтальной работы на уроках математики, а также во внеурочной деятельности. Формирование навыков распознавания типа и выбора метода решения будет способствовать повышению качества знаний при обучении решению тригонометрических уравнений.

Работа выполнена на высоком методическом уровне, имеет чёткую практическую направленность, соответствует требованиям к ВКР, заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР:
Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,
доцент, кандидат физико-математических наук