МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико–математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Изучение неравенств в школьном курсе математики»

Студент Изюмина 15.05.26 Изюмина Дарья Сергеевна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель 15.05.26 Никитина О. Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 15.06.26 Журавлева Е. Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

Заведующий кафедрой 01.0626 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 25.06.26 № 3)

Секретарь ГЭК 25.0626 Журавлева Е. Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..... 3

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ..... 5

1.1 История развития понятия «неравенство»..... 5

1.2 Виды неравенств и методы их решения..... 7

1.3 Содержательно–методическая линия изучения неравенств в школьном курсе математики..... 25

1.4 Элективные курсы в системе школьного математического образования..... 29

ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «НЕРАВЕНСТВА: ОТ ПРОСТОГО ДО УРОВНЯ ЕГЭ» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССА..... 31

2.1 Элективный курс «Неравенства: от простого до уровня ЕГЭ» для обучающихся 10-11 класса..... 31

2.2 Конспекты занятий элективного курса..... 35

2.3 Апробация элективного курса..... 43

ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... 47

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ..... 48

ПРИЛОЖЕНИЕ 1..... 50

ПРИЛОЖЕНИЕ 2..... 51

ВВЕДЕНИЕ

Содержательная линия неравенств представляет собой одну из основных во всем курсе математики. Её изучение способствует развитию познавательных процессов обучающихся, обобщенного мышления. Работа по изучению неравенств ведется на протяжении всех лет обучения, так как уже в начальной школе обучающимся предлагается сравнивать числа, в последующие годы знания по теме расширяются, путем изучения различных типов неравенств и их свойств. Умение решать неравенства является важным компонентом при проведение единого государственного экзамена, а также обязательным предметным результатом освоения математики среднего общего образования.

Неравенствам в школьном курсе уделяется достаточный объем материала, но даже несмотря на это, решение некоторых типов неравенств, особенно нестандартных, вызывает трудности у обучающихся, именно в этом заключена актуальность выбранной темы.

В учебниках по математике уделяется внимание примерам, которые направлены на отработку базового алгоритма, а более сложные и нестандартные методы решения рассматриваются недостаточно. В этом заключена проблема исследования.

Цель исследования: разработать элективный курс по решению неравенств для обучающихся 10–11 классов.

Объект исследования: процесс обучения математики в 10–11 классах.

Предмет исследования: процесс обучения решению неравенств в старшей школе.

Для реализации поставленной цели, необходимо решить ряд задач.

1. Изучить и систематизировать имеющуюся литературу по выбранной теме.

2. Выделить основные типы неравенств, изучаемые в школе.

3. Определить основные методы решений неравенств.

4. Разработать элективный курс по решению неравенств «Неравенства: от простого до уровня ЕГЭ».

5. Привести конспекты занятий элективного курса.

Работа состоит из двух глав. В первой главе рассматриваются теоретические основы изучения неравенств в школьном курсе математики. В частности, рассмотрена история развития понятия «неравенство», виды неравенств и методы их решения. Проанализирована содержательно–методическая линия изучения неравенств в школьном курсе математики и роль элективных курсов при обучении математике.

Вторая глава посвящена разработке элективного курса «Неравенства: от простого до уровня ЕГЭ» для обучающихся 10-11 класса. В частности, приведены конспекты двух занятий разработанного курса.

Во время написания работы были применены разнообразные методы исследования: анализ и сравнение методических источников, изучение педагогического опыта.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования разработанного элективного курса при работе в школе.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 История развития понятия «неравенство»

Понятие неравенства является одним из фундаментальных в математике, обеспечивая формальный аппарат для сравнения величин и установления границ их возможных значений. В отличие от своего социально–философского аналога, математическое неравенство развивалось как инструмент строгого количественного анализа.

Первые проявления идеи неравенства носили сугубо прикладной характер и не были формализованы.

– в Древнем Египте и Вавилоне в папирусах и клинописных табличках (например, в задачах на определение площадей) постоянно подразумевается операция сравнения – какая величина больше, какая меньше. Речь шла о констатации факта или выборе решения, но не о записи отношения в виде формулы. Например, в вавилонской математике встречаются задачи, где необходимо найти стороны прямоугольника при заданном соотношении, что фактически является решением системы условий, включающих неравенства.

– Античная Греция: геометрический подход. Греческие математики, особенно в школе Евдокса (IV в. до н.э.), заложили основы теории отношений, изложенной в «Началах» Евклида (Книга V). Хотя акцент делался на равенстве отношений (пропорции), был разработан аппарат для сравнения любых величин (геометрических отрезков, площадей) через принцип исчерпывания. Этот метод, по сути, позволял доказывать, что одна величина меньше другой, демонстрируя их разность. Однако запись в символическом виде ($a < b$) отсутствовала [2].

Переход к алгебраическому мышлению стал решающим для формализации неравенства.

В «Арифметике» Диофанта (III в.) уже встречаются словесные указания на то, что некое число должно быть больше или меньше другого как условие задачи. Арабские учёные (аль–Хорезми, IX в.) в своих трактатах систематически рассматривали условия положительности корней уравнений, что является неявной формой работы с неравенствами.

Ключевой прорыв во введении знаков неравенства произошёл в начале XVII века. Английский математик Томас Гарриот в работе «Artis Analyticae Praxis» (1631г.) впервые систематически использовал символы «>» (больше) и «<» (меньше) в их современном смысле. Независимо от него, француз Пьер Эригон применял сходные обозначения. Это позволило компактно записывать соотношения между величинами и манипулировать ими как алгебраическими объектами.

С появлением математического анализа неравенства превратились из вспомогательного инструмента в объект глубокого самостоятельного изучения.

Леонард Эйлер и Жозеф Луи Лагранж активно использовали неравенства в задачах анализа, теории чисел и вариационного исчисления. Они разрабатывали методы оценок, например, для приближения функций и сумм рядов.

Французский математик Огюстен Луи Коши в своём курсе «Алгебраический анализ» (1821г.) придал теории неравенств строгий, систематический вид. Им были доказаны и широко применены фундаментальные неравенства, носящие теперь его имя: неравенство Коши о средних, неравенство Коши–Буняковского (в интегральной форме), задающее ключевую оценку для скалярного произведения. Он же чётко сформулировал и доказал основные свойства неравенств, связанные с операциями сложения, умножения и возведения в степень [15].

На рубеже XIX – XX веков теория неравенств достигла высшей степени абстракции и нашла новые приложения. В рамках программ по обоснованию математики (Дедекинд, Гильберт) были строго определены

свойства отношения порядка на множестве вещественных чисел. Эти свойства (транзитивность, антисимметричность, совместимость с арифметическими операциями) легли в основу современной аксиоматики, превратив работу с неравенствами в логически безупречную процедуру.

История математических неравенств – это путь от интуитивного сравнения конкретных величин к созданию мощного абстрактного языка, позволяющего формулировать и доказывать утверждения о границах и взаимосвязях в самых разных математических контекстах. Формализация знаков сравнения, разработка аналитического аппарата для доказательств и окончательная аксиоматизация заложили фундамент для их применения далеко за пределами чистой математики – в физике, экономике, теории управления и информационных технологиях.

1.2 Виды неравенств и методы их решения

1. Линейные неравенства.

Неравенство вида (или приводимое к виду) $ax + b \vee 0$, где a и b – числа, x – переменная, $\vee$ – один из знаков неравенств $(>, <, \geq$ или $\leq)$, называют линейным.

Пример 1. Решить неравенство $2(x - 5) - 2 > 3(x - 2) - 4(x + 1)$.

$$2x - 12 > 3x - 6 - 4x - 4$$

$$3x - 2 > 0$$

$$3x > 2$$

$$x > \frac{2}{3}$$

Ответ к неравенству может быть записан и по-другому:

$$x \in (\frac{2}{3}; +\infty)$$

2. Квадратные неравенства.

Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2 + bx + +c \vee 0$, где $a, b, c -$ числа, $x -$ переменная, $\vee -$ один из знаков неравенств $(>, <, \geq$ или $\leq)$.

Иначе, квадратное неравенство – это неравенство, в левой части которого находится квадратный трёхчлен, а в правой части – нуль.

Дискриминантом квадратного трёхчлена называют такое число D, которое вычисляется по формуле $D = b^2 - 4ac$.

В зависимости от значения дискриминанта выделяют следующие случаи:

– $D < 0$, квадратный трехчлен не имеет корней;

– $D = 0$, квадратный трехчлен имеет один корень;

– $D > 0$, квадратный трехчлен имеет два корня.

Одним из способов решения квадратного неравенства является использование графика квадратичной функции.

Пример 2. Решить неравенство $x^2 + 2x - 8 < 0$.

Рассмотрим функцию: $y = x^2 + 2x - 8$ – квадратичная функция, график – парабола (ветви вверх, т.к. a>0)

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$D = 4 + 32 = 36 > 0 =>$ два корня.

$x_1 = \frac{4}{2} = 2;$

$x_2 = \frac{-8}{2} = 4.$

Решим неравенство графически (Рисунок 1)

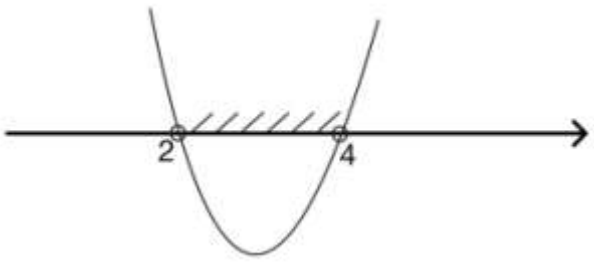


Рисунок 1 – Графическое решение неравенства

Ответ: $x \in (2; 4)$.

Если квадратный трёхчлен в квадратном неравенстве имеет два различных корня, то решение квадратного неравенства можно свести к решению системы линейных неравенств, разложив левую часть на множители.

Пример 3. Решить неравенство $-3x^2 + 5x - 2 < 0$.

$D = 25 - 24 = 1$.

$x_1 = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$

$x_2 = \frac{-6}{-6} = 1$

Таким образом: $-3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 1) < 0$.

Данное неравенство можно преобразовать в две системы:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3} < 0,; \\ x - 1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - \frac{2}{3} > 0, \\ x - 1 > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} x < \frac{2}{3},; \\ x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{2}{3}, \\ x > 1. \end{cases}$$

Откуда $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. Все числа данных интервалов являются решением исходного неравенства.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Ещё одним способом решения квадратных неравенств является метод интервалов.

Пример 4. Решить неравенство $4x^2 - 3x - 1 > 0$.

$D = 9 + 16 = 25 > 0$ => квадратный трехчлен имеет два корня:

$x_1 = \frac{8}{8} = 1;\ x_2 = \frac{-2}{8} = -0{,}25$.

Определяем знаки на промежутках (Рисунок 2):

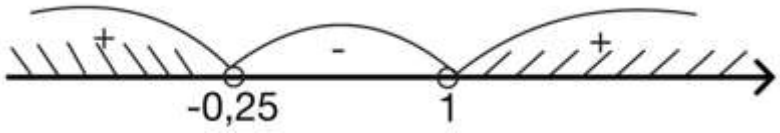


Рисунок 2 – Решение неравенства методом интервалов

Ответ: $x \in (-\infty; -0{,}25) \cup (1; +\infty)$.

3. Дробно–рациональные неравенства

Под дробно–рациональными неравенствами понимают неравенства вида: $f(x) \vee 0$ или $f(x) \vee g(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ – алгебраические дроби или суммы нескольких алгебраических дробей. Такие неравенства имеют смыл не при любом значении переменной, так как знаменатели алгебраических дробей должны быть отличны от нуля.

Среди всех дробно–рациональных неравенств выделяют простейшие неравенства, которые имеют вид: $\frac{a}{f(x)} \vee 0$ или $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$, где a – отличное от нуля действительное число, $f(x)$, $g(x)$ – многочлены первой или второй степени. Простейшие дробно–рациональные неравенства решаются приведением к линейным или квадратным неравенствам [3].

Пример 5. Решить неравенство:

$$\frac{45}{8x^2 - 41x + 5} \leq 0.$$

Числитель дроби, стоящей в левой части неравенства, является положительным, поэтому неравенство выполняется только в том случае, когда знаменатель дроби является отрицательным, то есть $8x^2 - 41x + 5 < 0$. Необходимо разложить квадратный трехчлен левой части на множители, для этого найдем корни соответствующего квадратного уравнения: $8x^2 - 41x + 5 = 0, D = 41^2 - 4 \cdot 8 \cdot 5 = 1681 - 160 = 1521 = 39^2$

$$x_1 = \frac{41 - 39}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}, \qquad x_2 = \frac{41 + 39}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

Значит, $8\left(x - \frac{1}{8}\right)(x - 5) < 0$. Следовательно, $x \in \left(\frac{1}{8}; 5\right)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{8}; 5\right)$.

Дробно рациональное неравенства вида $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$ можно решить путем сведения неравенства к системам неравенств, но наиболее рациональным способом решения является применение метода интервалов. Важно помнить, что знаменатель никогда не обращается в нуль. Нули числителя и

знаменателя разбивают всю числовую ось на несколько интервалов. Определив знак дроби на каждом из полученных интервалов, получим решение неравенства.

Пример 6. Решить неравенство:

$$\frac{5x^2-13x-6}{3x^2-8x-3} \geq 0.$$

Необходимо разложить на множители квадратные трёхчлены числителя и знаменателя дроби. Корни трехчлена $5x^2-13x-6$: $x_1 = -\frac{2}{5}, x_2 = 3$. Корни трёхчлена $3x^2-8x-3$: $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 3$. Следовательно, данное неравенство примет вид: $\frac{5(x+\frac{2}{5})(x-3)}{3(x+\frac{1}{3})(x-3)} \geq 0$. Разделим неравенство на $\frac{5}{3}$, сократим на $(x-3)$ при условии $x \neq 3$, тогда получим равносильную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x+\frac{2}{5}}{x+\frac{1}{3}} \geq 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Применим метод интервалов (Рисунок 3):

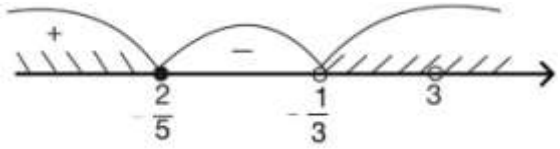


Рисунок 3 – Решение неравенства методом интервалов

Таким образом, $x \in (-\infty; -\frac{2}{5}] \cup (-\frac{1}{3}; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{2}{5}] \cup (-\frac{1}{3}; 3) \cup (3; +\infty)$.

4. Неравенства с модулем.

Под неравенствами с модулями понимают неравенства вида: $|f(x)| \vee b$, где b – действительное число, $f(x)$ – многочлен первой или второй степени. Такие неравенства можно решать переходом к равносильной системе:

$$|f(x)| < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < b \\ f(x) > -b \end{cases}, \qquad |f(x)| > b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x) > b \\ f(x) < -b \end{bmatrix}.$$

Еще одним способом решения неравенств с модулем, если $b > 0$, является возведение в квадрат обеих частей неравенства:

$$|f(x)| \vee b \Leftrightarrow \big(f(x)\big)^2 \vee b^2 \Leftrightarrow (f(x)-b)(f(x)+b) \vee 0.$$

Если $b \leq 0$, то вывод о множестве решений неравенства делается на основании знака неравенства с учетом того, что модуль неотрицателен.

Если $b < 0$, то неравенства $|f(x)| < b$ и $|f(x)| \leq b$ не имеют решений, $|f(x)| > b$ и $|f(x)| \geq b$ имеют решения при любом значении переменной.

Если $b = 0$, то неравенство $|f(x)| < 0$ не имеет решений, $|f(x)| \leq 0$ равносильно уравнению $f(x) = 0$, $|f(x)| > 0$ равносильно $f(x) \neq 0$, $|f(x)| \geq 0$ имеет решение при любом значении переменной.

Пример 7. Решить неравенство: $|3x + 4| \geq 5$.

Неравенство равносильно совокупности двух неравенств:

$$\begin{bmatrix} 3x + 4 \geq 5, \\ 3x + 4 \leq -5. \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \geq \frac{1}{3}, \\ x \leq -3. \end{bmatrix}$$

Таким образом, $x \in (-\infty; 3] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

5. Иррациональные неравенства.

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} \vee g(x)$, где $f(x), g(x)$ – многочлены, зависящие от переменной x, $\vee$ – один из знаков неравенств $(>, <, \geq$ или $\leq)$, называют иррациональными.

В большинстве случаев решение сводится к избавлению от корня путём возведения частей неравенства в квадрат. Однако данная операция возможна при заведомо неотрицательных значениях левой и правой части неравенства.

Решение данного вида неравенств можно алгоритмизировать для двух возможных случаев:

– неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2 \end{cases};$$

– неравенство $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \leq (g(x))^2 \end{cases};$$

– неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) > \big(g(x)\big)^2 \end{cases} \end{array}\right.;$$

– неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \leq 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \geq \big(g(x)\big)^2 \end{cases} \end{array}\right.;$$

Пример 8. Решить неравенство: $\sqrt{x^2 - x - 12} < x$.

Решение. Составим систему, равносильную данному неравенству:

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geq 0, \\ x > 0, \\ x^2 - x - 12 < x^2. \end{cases}$$

Решение первого неравенства системы:

$$x^2 - x - 12 \geq 0,$$

$$x^2 - x - 12 = 0,$$

$$x_1 = -3, x_2 = 4,$$

$$x \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty).$$

Решение третьего неравенства системы:

$$x^2 - x - 12 < x^2,$$

$$-x - 12 < 0,$$

$$x > -12.$$

Получаем

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 3] \cup [4; +\infty), \\ x > 0, \\ x > -12. \end{cases}$$

Ответ: $x \geq -4$.

Пример 9. Решить неравенство: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$.

Решение.

Составим систему, которая равносильна исходному неравенству:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 3 < 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 3x + 2 > (x + 3)^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение первой системы в совокупности

$$\begin{cases} x < -3, \\ x \leq 1, x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x < 3.$$

Решение второй системы совокупности:

$$\begin{cases} x \geq -3, \\ x \leq 1, x \geq 2, \\ x < -\frac{7}{9}. \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x < -\frac{7}{9}.$$

При объединении решений получаем, что $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{9}\right]$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{9}\right]$.

6. Тригонометрические неравенства

В школьной программе находят место простейшие тригонометрические неравенства, которые имеют вид: $\sin x \vee a$, $\cos x \vee a$, $\operatorname{tg} x \vee a$, $\operatorname{ctg} x \vee a$, где – действительное число. Решать неравенства такого вида целесообразно с использованием единичной окружности.

1. Неравенство $\sin x \vee a$.

Синусом x называется ордината точки единичной окружности, которая получена поворотом точки $P_0(1; 0)$вокруг начала координат на угол x радиан

против часовой стрелки, в случае x > 0, или на x радиан по часовой стрелки, в случае x < 0. В таком случае, чтобы решить неравенство $\sin x < a$ (или $\sin x \leq$ a), необходимо найти все точки единичной окружности, ордината каждой из которых меньше (или не больше) a (Рисунок 4).

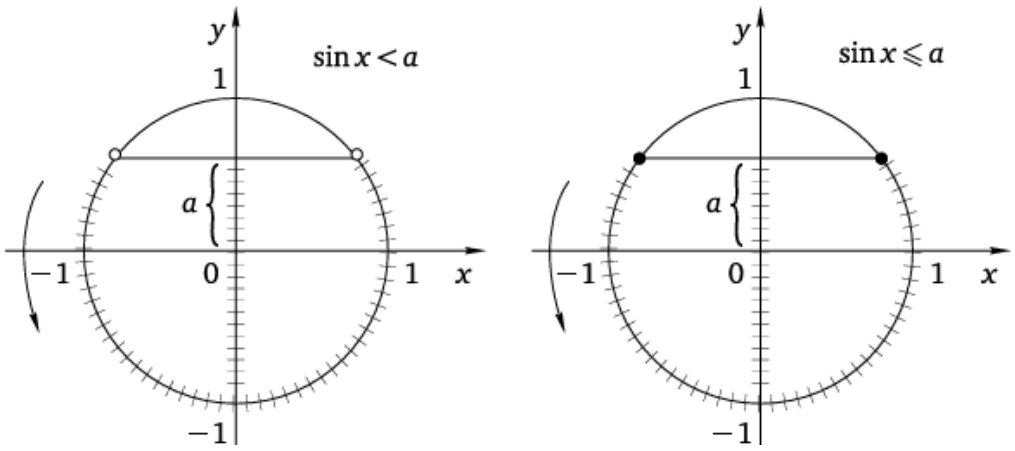


Рисунок 4 – Решение тригонометрических неравенств

$\sin x < a$ и $sinx \leq a$

Далее следует записать ответ, используя заштрихованную дугу окружности, учитывая при этом угол поворота:

$$\sin x < a \Leftrightarrow \pi - arcsina + 2\pi k < x < 2\pi + arcsina + 2\pi k, k \in Z;$$

$$\sin x \leq a \Leftrightarrow \pi - \arcsin a + 2\pi k \leq x \leq 2\pi + \arcsin a + 2\pi k, k \in Z.$$

Чтобы решить неравенство $\sin x > a$ (или $\sin x \geq a$), необходимо найти все точки единичной окружности, ордината каждой из которых больше (или не меньше) a (Рисунок 5).

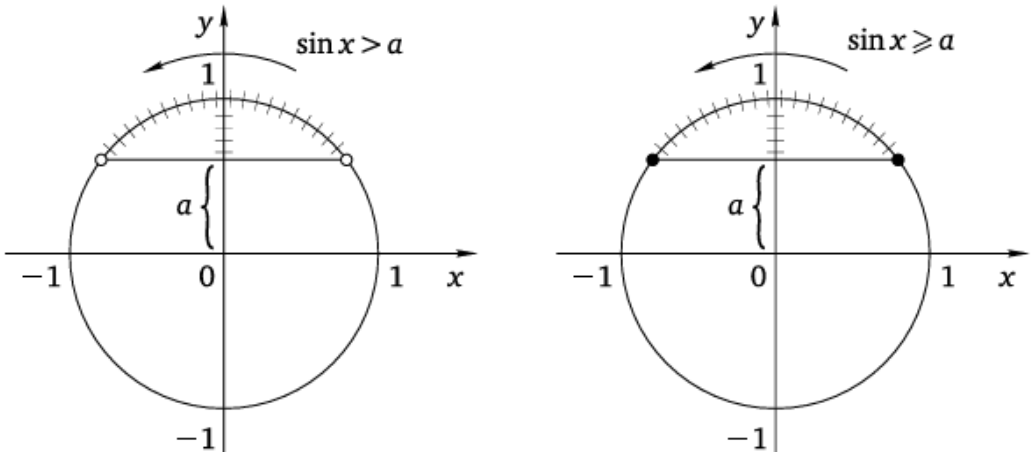


Рисунок 5 – Решение тригонометрических неравенств

$\sin x > a$ и $sinx \geq a$

Далее следует записать ответ, используя заштрихованную дугу окружности, учитывая при этом угол поворота:

$$\sin x > a \Leftrightarrow arcsin a + 2\pi k < x < \pi - arcsin a + 2\pi k, k \in Z;$$

$$\sin x \geq a \Leftrightarrow \arcsin a + 2\pi k \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z.$$

При $a < -1$ неравенства $\sin x < a$ (или $\sin x \leq a$) не имеют решений, $\sin x > a$ (или $\sin x \geq a$) справедливы для любого действительного значения переменной.

При $a > 1$ неравенства $\sin x > a$ (или $\sin x \geq a$) не имеют решений, $\sin x < a$ (или $\sin x \leq a$) справедливы при любом действительном значении переменной.

Пример 10. Решить неравенство: $\sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Необходимо изобразить на единичной окружности дугу, которая соответствует решению неравенства (Рисунок 6):

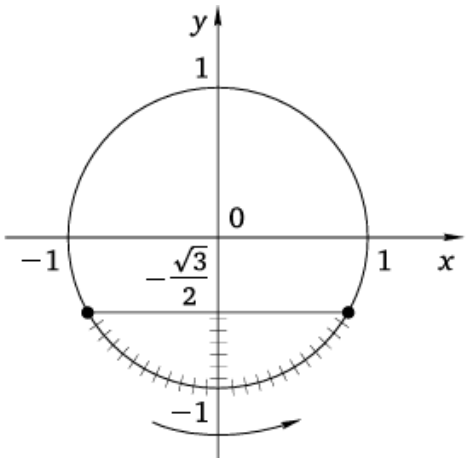


Рисунок 6 – Решение тригонометрического неравенства

В соответствии с заштрихованной дугой, запишем ответ:

$$x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right], k \in Z.$$

2. Неравенство $\cos x \vee a$

Косинусом x называется абсцисса точки единичной окружности, которая получена поворотом точки $P_0(1; 0)$ вокруг начала координат на угол x радиан против часовой стрелки, в случае $x > 0$, или на x радиан по часовой

стрелки, в случае x < 0. В таком случае, чтобы решить неравенство cosx < a (или cosx ≤ a), необходимо найти все точки единичной окружности, абсцисса каждой из которых меньше (или не больше) a (Рисунок 7).

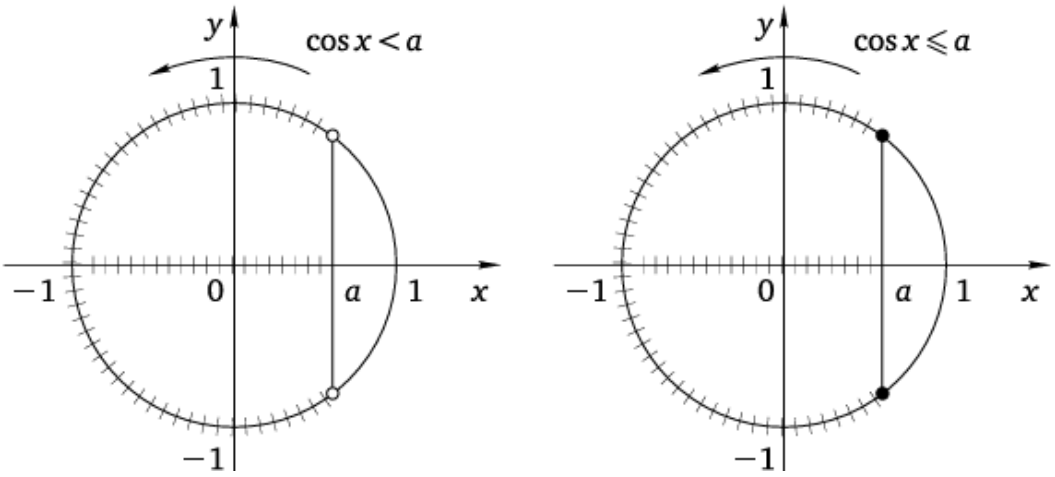


Рисунок 7 – Решение тригонометрических неравенств

cosx < a и $cosx \leq a$

Далее следует записать ответ, используя заштрихованную дугу окружности, учитывая при этом угол поворота:

cosx < $a \Leftrightarrow arccosa + 2\pi k < x < 2\pi - arccosa + 2\pi k, k \in Z$;

cosx ≤ a ⇔ arccosa + 2πk ≤ x ≤ 2π− arcsina + 2πk, k ϵ Z.

Чтобы решить неравенство cosx > a (или cosx ≥ a), необходимо найти все точки единичной окружности, ордината каждой из которых больше (или не меньше) a (Рисунок 8).

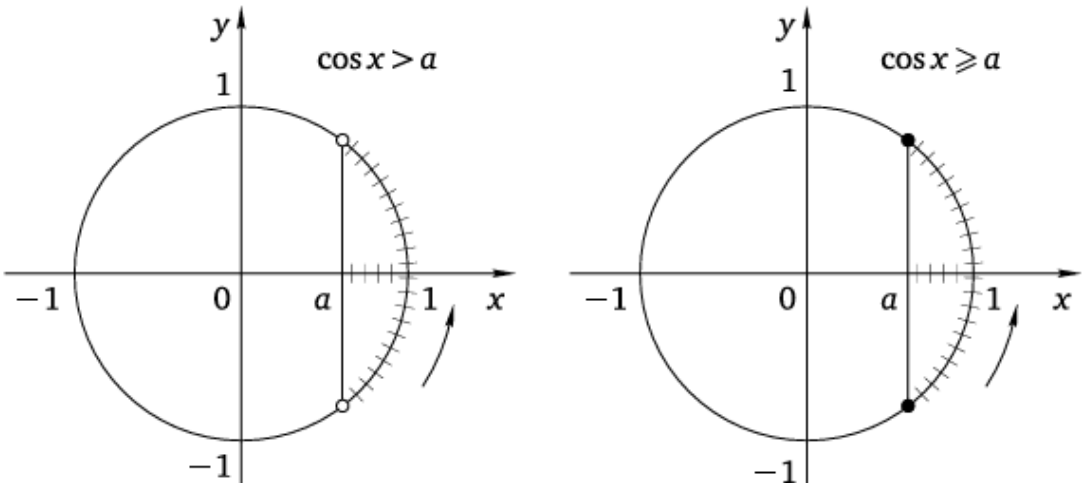


Рисунок 7 – Решение тригонометрических неравенств

cosx > a и cosx ≥ a

Далее следует записать ответ, используя заштрихованную дугу окружности, учитывая при этом угол поворота:

$$\cos x > a \Leftrightarrow -arccosa + 2\pi k < x < arccosa + 2\pi k, k \in Z;$$

$$\cos x \geq a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi k \leq x \leq \arccos a + 2\pi k, k \in Z.$$

При $a < -1$ неравенства $\cos x < a$ (или $\cos x \leq a$) не имеют решений, $\cos x > a$ (или $\cos x \geq a$) справедливы для любого действительного значения переменной [9].

При $a > 1$ неравенства $\cos x > a$ (или $\cos x \geq a$) не имеют решений, $\cos x < a$ (или $\cos x \leq a$) справедливы при любом действительном значении переменной.

Пример 11. Решить неравенство: $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Необходимо изобразить на единичной окружности дугу, которая соответствует решению неравенства (Рисунок 8):

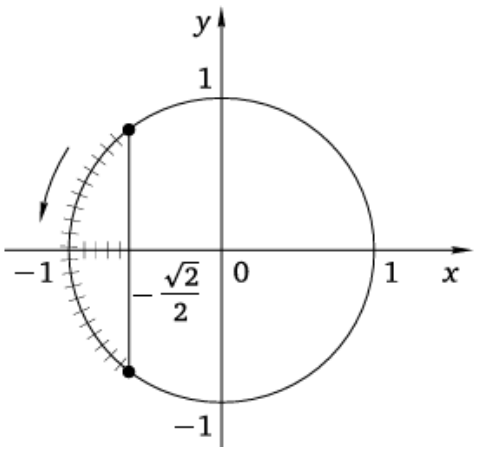


Рисунок 8 – Решение тригонометрического неравенства

В соответствии с заштрихованной дугой, запишем ответ:

$$x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in Z.$$

3. Неравенство $\operatorname{tg} x \vee a$

Линия тангенсов – касательная к единичной окружности, которая проходит через точку $P_0(1; 0)$.

Чтобы решить неравенство $\text{tgx} < a$ (или $\text{tgx} \leq \text{a}$), необходимо отметить все дуги на единичной окружности, которые соответствуют части линии тангенса, лежащей ниже (или не выше) А (Рисунок 9).

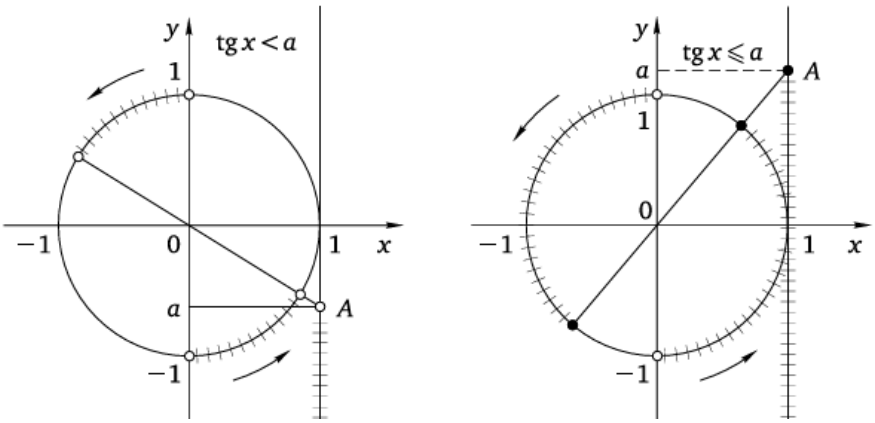


Рисунок 9 – Решение тригонометрических неравенств

$\text{tgx} < \text{a}$ и $\text{tgx} \leq \text{a}$

Далее следует записать ответ, используя заштрихованную дугу окружности, учитывая при этом угол поворота:

$$\text{tgx} < a \iff -\frac{\pi}{2} + \pi\text{k} < x < arctga + \pi k, k \in Z;$$

$$\text{tgx} \leq \text{a} \iff -\frac{\pi}{2} + \pi\text{k} < x \leq arctga + \pi k, k \in Z.$$

Чтобы решить неравенство $\text{tgx} > a$ (или $\text{tgx} \geq \text{a}$), необходимо отметить все дуги на единичной окружности, которые соответствуют части линии тангенса, лежащей выше (или не ниже) А (Рисунок 10).

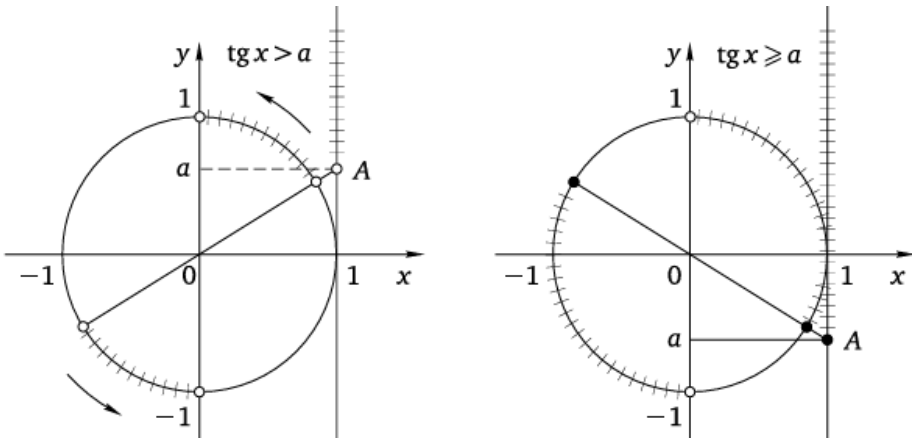


Рисунок 10 – Решение тригонометрических неравенств

$\text{tgx} > \text{a}$ и $\text{tgx} \geq \text{a}$

Далее следует записать ответ, используя заштрихованную дугу окружности, учитывая при этом угол поворота:

$$\mathrm{tgx} > \mathrm{a} \Leftrightarrow \mathrm{arctga} + \pi\mathrm{k} < x < \frac{\pi}{2} + \pi\mathrm{k}, \mathrm{k} \in \mathrm{Z};$$

$$\mathrm{tgx} \geq \mathrm{a} \Leftrightarrow \mathrm{arctga} + \pi\mathrm{k} \leq \mathrm{x} < \frac{\pi}{2} + \pi\mathrm{k}, \mathrm{k} \in \mathrm{Z}.$$

Пример 12. Решить неравенство: $\mathrm{tgx} \geq -1$

Необходимо изобразить на единичной окружности дугу, которая соответствует решению неравенства (Рисунок 11):

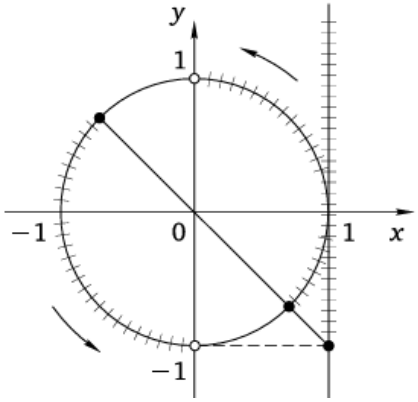


Рисунок 11 – Решение тригонометрического неравенства

В соответствии с заштрихованной дугой, запишем ответ:

$$\mathrm{x} \in [-\frac{\pi}{4} + \pi\mathrm{k};\ \frac{\pi}{2} + \pi\mathrm{k}), \mathrm{k} \in \mathrm{Z}.$$

4. Неравенство $\mathrm{ctgx} \vee \mathrm{a}$

Линия котангенсов – касательная к единичной окружности, которая проходит через точку $\mathrm{M}(0; 1)$.

Чтобы решить неравенство $\mathrm{ctgx} < a$ (или $\mathrm{ctgx} \leq \mathrm{a}$), необходимо отметить все дуги на единичной окружности, которые соответствуют части линии котангенса, лежащей левее (или не правее) A (Рисунок 12).

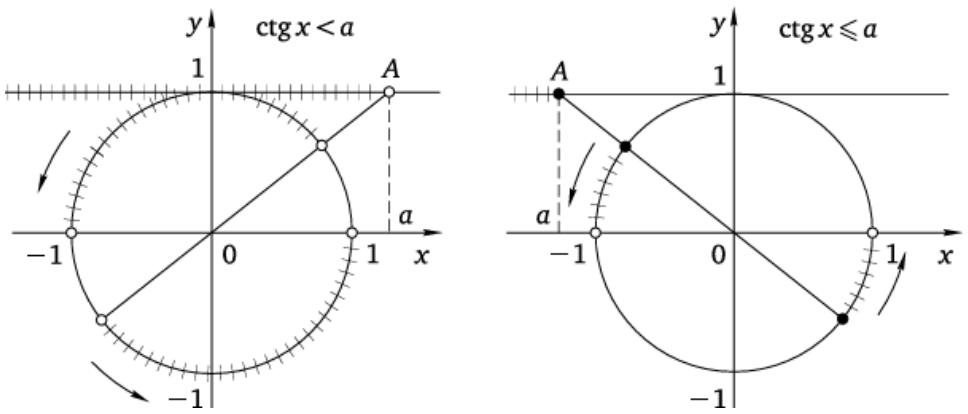


Рисунок 12 – Решение тригонометрических неравенств

$\mathrm{ctg}x < a$ и $\mathrm{ctg}x \leq a$

Далее следует записать ответ, используя заштрихованную дугу окружности, учитывая при этом угол поворота:

$$\mathrm{ctg}x < a \iff \mathrm{arcctg}a + \pi k < x < \pi + \pi k, k \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}x \leq a \iff \mathrm{arcctg}a + \pi k \leq x < \pi + \pi k, k \in Z.$$

Чтобы решить неравенство $\mathrm{ctg}x > a$ (или $\mathrm{ctg}x \geq a$), необходимо отметить все дуги на единичной окружности, которые соответствуют части линии котангенса, лежащей правее (или не левее) А (Рисунок 13).

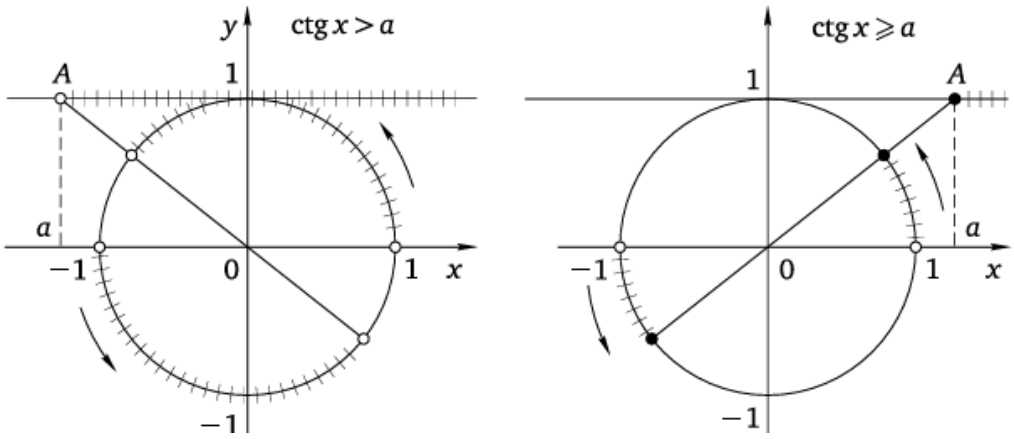


Рисунок 13 – Решение тригонометрических неравенств

$\mathrm{ctg}x > a$ и $\mathrm{ctg}x \geq a$

Далее следует записать ответ, используя заштрихованную дугу окружности, учитывая при этом угол поворота:

$$\mathrm{ctg}x > a \iff \pi k < x < arcctga + \pi k, k \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}x \geq a \iff \pi k < x \leq arcctga + \pi k, k \in Z.$$

Пример 13. Решить неравенство $\mathrm{ctg}x \geq \sqrt{3}$

Необходимо изобразить на единичной окружности дугу, которая соответствует решению неравенства (Рисунок 14):

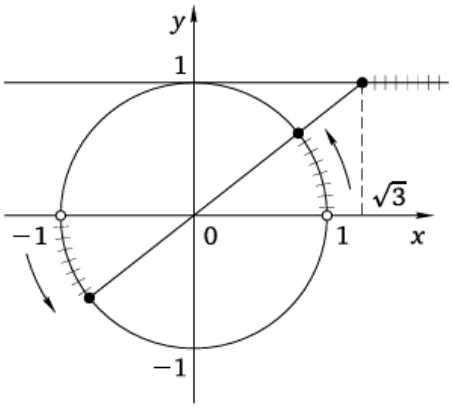


Рисунок 14 – Решение тригонометрического неравенства

В соответствии с заштрихованной дугой, запишем ответ:

$$x\epsilon\left(\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right],k\epsilon Z.$$

7. Показательные неравенства

Показательными неравенствами называются неравенства вида: $a^{f(x)} \vee a^{b}$ или $a^{f(x)} \vee a^{g(x)}$, где a и b – действительные числа, $a > 0, a \neq 1$, f(x) и g(x) – многочлены первой или второй степени. В основе решения показательных неравенств лежит монотонность показательной функции:

1. При $a > 1$ функция $y = a^{t}$ возрастает на всей числовой прямой, тогда $a^{t_1} < a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 < t_2,\ a^{t_1} \leq a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 \leq t_2$.

2. При $0 < a < 1$ функция $y = a^{t}$ убывает на всей числовой прямой, тогда

$a^{t_1} < a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 > t_2,\ a^{t_1} \leq a^{t_2} \Leftrightarrow t_1 \geq t_2$.

Любое показательное неравенство необходимо привести к указанному виду. В некоторых случаях для этого необходимо провести преобразование левой и правой частей неравенства.

Пример 14. Решить неравенство $2^{x^2+2x} \leq 0{,}5$

Необходимо привести обе части неравенства к одному основанию. Запишем правую часть в виде степени с основанием 2: $0{,}5 = 2^{-1}$.

Следовательно, $2^{x^2+2x} \leq 2^{-1}$

Учитывая, что a > 1, получим: $x^2 + 2x \leq -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Ответ: $x = -1$

В качестве методов решения показательных неравенств более сложного уровня можно выделить следующие:

– применение равносильных преобразований, которые обычно связаны с применением свойств степени, методов разложения на множители;

– метод знакотождественных множителей и метод интервалов;

– метод введения новой переменной;

– применение свойств функции.

Пример 15. Решить неравенство $4^x - 7 \cdot 2^x + 10 \leq 0$.

Для решения неравенства необходимо сделать замену: $t = 2^x, t > 0$, получим квадратное уравнение относительно t. Корнями соответственного квадратного уравнения являются: $x_1 = 2, x_2 = 5$. Получим: $(t-2)(t-5) \leq 0 \Leftrightarrow t \in [2;5]$. Сделав обратную замену, получим:

$$2 \leq 2^x \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \log_2 5$$

Ответ: $x \in [1; \log_2 5]$

8. Логарифмические неравенства

Неравенства, у которых одна или обе части содержат логарифмические выражения, называются логарифмическими. Логарифмические неравенства представляют собой самый широких класс неравенств. Основой решения таких неравенств является применение свойств логарифмов и использование монотонности логарифмической функции.

Простейшими логарифмическими неравенствами называются неравенства вида: $\log_a f(x) \vee b$ или $\log_a f(x) \vee \log_a g(x)$, где a и b – действительные числа, $a > 0, a \neq 1$, f(x) и g(x) – многочлены первой или второй степени.

1. При a > 1 функция $y = \log_a t$ возрастает на $(0; +\infty)$, тогда

$$\log_a t_1 < \log_a t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 < t_2, \\ t_1 > 0. \end{cases}$$

2. При $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a t$ возрастает на $(0; +\infty)$, тогда

$$\log_a t_1 < \log_a t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 > t_2, \\ t_2 > 0 \end{cases}$$

Таким образом, при потенцировании неравенств (освобождении от логарифмов) знак неравенства сохраняется в то случае, если основание логарифма больше 1, меняется на противоположный, если основание логарифма положительно и менее 1.

Многие логарифмические неравенства можно привести к указанному виду путем нескольких преобразований, основанных на свойствах логарифмов, с помощью замены переменной, использовании метода рационализации.

Пример 16. Решить неравенство $\log_5(20-\frac{9}{x}) + \log_{0,2}(4-\frac{x}{5}) \geq 1$.

Для решения неравенства необходимо привести логарифмы к одинаковому основанию: $0,2 = 5^{-1}$, получим:

$$\log_5\left(20-\frac{9}{x}\right) - \log_5\left(4-\frac{x}{5}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \log_5\left(20-\frac{9}{x}\right) \geq 1 + \log_5\left(4-\frac{x}{5}\right).$$

В правой части применим формулу перехода суммы логарифмов к логарифму произведения, предварительно представив $1 = \log_5 5$.

$$\log_5(20-\frac{9}{x}) \geq \log_5(5(4-\frac{x}{5})) \Leftrightarrow \log_5(20-\frac{9}{x}) \geq \log_5(20-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20-\frac{9}{x} \geq 20-x \\ 20-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-9}{x} \geq 0 \\ x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-3)(x+3)}{x} \geq 0 \\ x < 20 \end{cases}.$$

Первое неравенство системы решим с помощью метода интервалов, нанесем решение каждого неравенства на одно числовую ось (Рисунок 15):

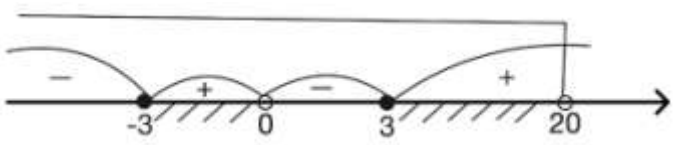


Рисунок 15 – Решение неравенства методом интервалов

1.3 Содержательно–методическая линия изучения неравенств в школьном курсе математики

Содержательно–методическая линия «Неравенства» берет свой начало еще в начальной школе и развивается на протяжении всех лет обучения в школе, тесно связна с линией «Уравнения». Содержание данной линии направлено на формирование у обучающихся прочного математического аппарата, необходимого для решения различных задач.

В начальной школе обучающиеся знакомятся со знаками «больше», «меньше», узнают понятия «увеличить», «уменьшить», сравнивают числа и некоторые величины. Большое внимание уделяется усвоению таких терминов как «меньше «на», «больше «на».

В 5–7 классах обучающиеся закрепляют навыки, которые были приобретены в начальных классах, а также приобретают новые. Ученики 5 класса сравнивают натуральные числа, обыкновенные дроби, десятичные дроби, изучают способы сравнения. В 6 классе при изучении дробей уделяется внимание их сравнению. В этом же году обучающиеся учатся сравнивать положительные и отрицательные числа, знакомятся с числовыми промежутками. В 7 классе при работе с рациональными числами обучающиеся должны уметь сравнивать и упорядочивать их. При изучении функций должны приобрести навык записи числовых промежутков на алгебраическом языке.

В 8 классе линия неравенств содержит следующие темы: числовые неравенства и их свойства, неравенство с одной переменной, равносильные неравенства, линейные неравенства с одной переменной, системы линейных неравенств с одной переменной. В результате освоения тем учащиеся должны уметь применять свойства числовых неравенств для осуществления сравнения и оценки, решать линейные неравенства, а также их системы, графически иллюстрировать множество решений неравенств, их систем. В

соответствии с федеральной образовательной программой на изучении раздела «Неравенства» отводится 12 часов.

В 9 классе происходит дальнейшее развитие содержательно–методической линии в результате освоения тем: числовые неравенства и их свойства, решение линейных неравенств с одной переменной и их систем, квадратные неравенства. На данном этапе обучающиеся должны решать линейные и квадратные неравенства, изображать их решения на координатной прямой, записывать его символьно, решать системы неравенств, уметь применять неравенства при решении различных задач. В соответствии с федеральной образовательной программой на изучении раздела «Неравенства» отводится 16 часов.

Проведем анализ содержательной линии «Неравенства» в школьных учебниках. Выбор учебников соответствует федеральному перечню учебников 2025–2026 учебного года [14].

1. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешков К. И. Математика. Алгебра: 7–й класс: базовый уровень.

2. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешков К. И. Математика. Алгебра: 8–й класс: базовый уровень.

3. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешков К. И. Математика. Алгебра: 9–й класс: базовый уровень.

4. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачёва М. В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 класс.

В УМК Макарычева Ю. Н. за 7 класс линия неравенств встречается в нескольких параграфах.

1. В параграфе 4 «Сравнение значений выражений» вводится понятие двойного неравенства, используется для решения различных задач. Отмечаются понятия строгого и нестрогого неравенств.

2. В параграфе 11 «Числовые промежутки» в начале изучения темы «Функции и их графики» проводится изложение понятий: числовой отрезок,

полуинтервал, интервал, замкнутый луч, открытый луч. Упражнения данного параграфа направлены на задание различных числовых промежутков в виде неравенств и изображение числовых промежутков на координатной прямой, заданных неравенствами.

3. В параграфе 46 для любознательных «Линейные неравенства с двумя переменными и их системы» обучающиеся смогут узнать, что называют решением линейных неравенств с двумя переменными. Производится разбор различных примеров решения неравенств графическим методом.

В УМК Макарычева Ю. Н. за 8 класс неравенствам отводится целая глава. Изучение начинается с числовых неравенств, где отмечается понятие, основные свойства. Свойства числовых неравенств изложены в виде теорем. Особое внимание уделяется сложению и умножению числовых неравенств. Параграф «Числовые промежутки» позволяет обучающимся актуализировать информацию, изученную в 7 классе. В параграфе 39 «Решение неравенств с одной переменной» дано определение понятию решение неравенства, перечислены свойства неравенств, а также введено понятие «линейное неравенство», приведены примеры. После решение неравенств осуществляется переход к изучению систем неравенств с одной неизвестной. Автор уделяет внимание доказательству неравенств, описывает один из приемов, а именно, составление разности левой и правой частей неравенства [5].

В УМК Макарычева Ю. Н. за 9 класс впервые с неравенствами обучающиеся встречаются при изучении темы «Решение неравенств второй степени с одной переменной», в рамках которой вводится определение «неравенство второй степени с одной переменной», решаются неравенства с использованием графического метода, рассматривается алгоритм решения такого вида неравенств. Отдельный пункт выделен на решение неравенств методом интервалов. Неравенства с двумя переменными, их системы также разбираются автором [6].

Изучение показательных, логарифмических и тригонометрических неравенств осуществляется в 10–11 классах.

В соответствии с учебником Алимова Ш. А., Колягина Ю. М., Ткачёвой М. В. выделяют следующую последовательность изучения неравенств: иррациональные неравенства, показательные неравенства, логарифмические неравенства, тригонометрические неравенства. Изучение иррациональных неравенств производится посредством разбора примеров решения различных типов. Разбор показательных неравенств осуществляется сразу после тем показательная функция и показательные уравнения [1]. Показательные неравенства изучаются по плану.

1. Определение.

2. Способ решение неравенств, основанный на свойстве возрастания и убывания показательной функции

3. Решение основных типов показательных неравенств.

Логарифмические неравенства разбираются на конкретных примерах, где в каждом автор даёт алгоритм решения.

Таким образом, изучение темы «Неравенства» в школьных учебниках осуществляется по следующему плану, что демонстрирует таблица 1.

Таблица 1 – Изучение темы «Неравенства» в школьных учебниках

Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. «Математика. Алгебра: 8–й класс: базовый уровень»	Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. «Математика. Алгебра: 9–й класс: базовый уровень»	Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 класс»
Последовательность рассматриваемого материала		
– числовые неравенства; – свойства числовых неравенств; – множества, их пересечение и объединение; – числовые промежутки; – неравенства с одной	– неравенства второй степени с одной переменной; – метод интервалов; – неравенства с двумя переменными; – система неравенств с двумя переменными;	– иррациональные неравенства; – показательные неравенства; – системы показательных неравенств; – логарифмические неравенства;

переменной, их свойства; – линейные неравенства с одной переменной; – системы неравенств с одной переменной; – доказательство неравенств	– приёмы решений систем уравнений второй степени с двумя переменными	– простейшие тригонометрические неравенства

1.4 Элективные курсы в системе школьного математического образования

Одним из основных аспектов организации обучения является реализация элективных курсов в образовательном процессе. Их создание – важнейшая часть обеспечения обучения. Данная форма работы представляет собой обязательные для посещения занятия по выбору.

Отличительная черта элективных курсов состоит в том, что обучающийся может выбрать только те направления, которые ему интересны или будут необходимы в будущей профессии. Каждый курс является нормативным, то есть учащийся обязан посещать его постоянно и, по окончанию, выполнить установленную отчетную работу (сдать зачет, написать контрольную работу, защитить проект и т.д.).

На основе учебного плана школа самостоятельно определяет объем изучаемых элективных курсов. При построении занятий немалую роль играют следующие принципы:

– практический подход к овладению материала (практическая направленность);

– дифференцированный подход;

– использование новых педагогических и информационных технологий в обучении.

Рассмотрим некоторые типы элективных курсов. По классификации В.А. Орлова среди элективных курсов можно выделить [11]:

– предметные;

– межпредметные (интегративные);

– курсы, не входящие в базисный учебный план.

Предметные элективные курсы по математике делятся еще на две большие группы:

– к первой группе можно отнести элективные курсы повышенного уровня сложности, направленные на серьезное глубокое изучения предмета. При этом, обязательно согласование данных элективных курсов с базовым курсом математики. В этом случае все разделы математики углубляются более или менее равномерно. В качестве примера можно привести следующие курсы: «Обоснования в математике (от Евклида до компьютера)» или «Алгебра плюс: элементарная алгебра с точки зрения высшей математики». Содержание рассчитано на учащихся профильных физико–математических или естественнонаучных классов. Очевидно, что и требования к учителю в таком случае предъявляются повышенные, поскольку уровень сложности предлагаемых для решения задач в курсе очень высокий. Содержание некоторых курсов может служить хорошей основой для обобщения и систематизации математических знаний учащихся и подготовки к единому государственному экзамену

– ко второй группе относятся элективные курсы, в которых углубленно изучаются лишь отдельные разделы математики, входящие, как правило, в обязательную программу. Такими курсами являются: «Красавицы функции и их графики», «Избранные вопросы геометрии: обобщения и применения теоремы Пифагора», «Основы комбинаторики», «Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения», «Элементы теории вероятностей», «Элементы логики» и др.

ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «НЕРАВЕНСТВА: ОТ ПРОСТОГО ДО УРОВНЯ ЕГЭ» ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ 10-11 КЛАССА

2.1 Элективный курс «Неравенства: от простого до уровня ЕГЭ» для обучающихся 10-11 класса

Пояснительная записка

Неравенства являются важной темой всего школьного курса математики, они изучаются на разных этапах освоения предмета. Линия неравенств ведется в каждом учебном году, начиная с начальной школы, углубляясь из года в год. Обязательным требованием к освоению неравенств является умение решать основные их типы, а именно: линейные неравенства, квадратичные, логарифмические, показательные, тригонометрические. При проведении итоговой аттестации в формате ЕГЭ обязательным компонентом является неравенство, как в профильном, так и базовом уровне.

Цель элективного курса: углубить знания по теме «Неравенства» и научиться решать неравенства разного уровня сложности.

Планируемые результаты.

1. Предметные.

– Расширить знания о классических методах решения неравенств.

– Решить основные виды неравенств, необходимые для сдачи ЕГЭ.

– Применять различные методы решения неравенств для основных изучаемых типов.

2. Познавательные.

– Структурировать и углубить знания, полученные по теме на учебных занятиях.

– Формулировать цели собственной деятельности и достигать их.

3. Регулятивные.

– Корректировать ошибки собственной деятельности, в результате проведения рефлексии.

– Формировать траекторию собственной деятельности и следовать намеченному плану.

4. Коммуникативные.

– Уметь осуществлять деловую коммуникацию, посредством обсуждения задач.

– Уметь развернуто излагать мнение по различным предметным вопросам.

5. Личностные.

– Развить личностные положительные характеристики.

– Научиться добиваться поставленной цели.

Элективный курс рассчитан на два года (68 часов) для обучающихся 10-11 классов (10 класс – 1 занятие в неделю, 11 класс – 1 занятие в неделю).

Разработанный курс включает в себя решение всех типов неравенств, которые изучаются в школьном курсе математики. После первого года обучения обучающимся предстоит сдать коллоквиум по изученному материалу, который содержит как теоретические вопросы, так и задания практического содержания, после второго года обучения проверкой полученных знаний станет сдача единого государственного экзамена.

Структура элективного курса выстроена таким образом, что каждая последующая тема тесно связана с предыдущей. В течение первого года ученикам необходимо актуализировать и углубить знания по неравенствам, которые были ими изучены в основной школе. В течении второго года изучаются неравенства старшей школы.

При реализации программы элективного курса должны быть использованы разнообразные методы: наглядные (демонстрация решений, памятки с теорией), словесные (объяснение материала), практические.

Основными видами занятий являются практикумы и семинары, так как именно практические занятия способствуют глубокому освоению и

запоминанию материала. Программа элективного курса представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Программа элективного курса

№ занятия	Тема	Вид занятия	Количество часов
	10 класс		
1–2	Линейные неравенства	Лекция	2
		Практикум	
3–4	Разложение на множители квадратного трехчлена	Семинар-практикум	2
5–6	Теорема Виета	Семинар-практикум	2
7–8	Неполные квадратные неравенства	Семинар-практикум	2
9–11	Квадратные неравенства общего вида	Лекция	3
		Практикум	
12–13	Системы и совокупности неравенств	Лекция	2
		Практикум	
14–16	Простой метод интервалов без кратных корней	Семинар-практикум	3
17–19	Метод интервалов с кратными корнями	Семинар-практикум	3
20–22	Рациональные дроби в неравенствах	Практикум	3
23–25	Метод замены переменной в неравенствах	Семинар-практикум	3
26–27	Деление многочлена на многочлен в неравенствах	Семинар-практикум	2
28–30	Неравенства с модулем	Лекция	3

		Практикум	
31–33	Иррациональные неравенства	Лекция	3
		Практикум	
34	Итоговый контроль	Коллоквиум	1
	11 класс		
1–2	Простейшие показательные неравенства и сводящиеся к ним	Лекция	2
		Практикум	
3–4	Показательные неравенства, сводящиеся к квадратичным	Практикум	2
5–7	Замена переменных в показательных неравенствах	Практикум	3
8–9	Однородные показательные неравенства	Мини-лекция	2
		Практикум	
10–11	Простейшие логарифмические неравенства	Лекция	2
		Практикум	
12–13	Логарифмические неравенства (сравнение логарифмов двух функций)	Семинар-практикум	2
14–15	Замена переменной в логарифмическом неравенстве	Практикум	2
16–18	Логарифмические неравенства, решаемые равносильным переходом	Практикум	3
19–21	Логарифмические неравенства с четными степенями аргументов	Семинар-практикум	3

22–24	Логарифмические неравенства с переменным основанием, сводящиеся к постоянному основанию	Семинар-практикум	3
25–28	Метод рационализации в показательном неравенстве	Лекция	4
		Семинар-практикум	
29–32	Метод рационализации в логарифмическом неравенстве	Лекция	4
		Семинар-практикум	
33-34	Показательно-степенные неравенства	Практикум	2
			Итого: 68

2.2 Конспекты занятий элективного курса

Урок 1 (№ 28 в элективном курсе в 10 классе).

Тема: «Неравенства с модулем»

Тип занятия: урок систематизации знаний

Этап I. Организационный

Осуществляется проверка готовности к занятию.

Этап II. Актуализация опорных знаний

С понятием модуля мы знакомы еще с 6 класса, именно там мы впервые узнали, что такое модуль и как работать с ним при решении различных заданий. В дальнейшем мы решали уравнения с модулем и неравенства. Сегодня мы вспомним алгоритм, которым должны руководствоваться при решении заданий, но прежде, чем перейти к решению, обратимся к рабочему листу, который лежит на парту у каждого.

На рабочем листе предложены задания, направленные на актуализацию знаний по теме «Модуль».

Обучающиеся работают парами. Время на выполнение: 10 минут. После решения осуществляется устная проверка. Задача: заполнить пропуски.

Рабочий лист

I. Вспомним определение

1.

$$|a| = \begin{cases} _____, \text{если } a \geq 0, \\ _____, \text{если } a < 0. \end{cases}$$

2. Раскрыть модуль по определению:

$$|x + 14| = \begin{cases} _____, \text{если } x \geq __, \\ _____, \text{если } x < __. \end{cases}$$

3. Вычислить:

$|5| = _____$

$|-12| = _____$

$|6{,}5| = _____$

$\left|\sqrt{3}-2\right| = _____$

II. Решим простейшие неравенства

1. Получить формулы для решения неравенств с модулем

$|X| < a \Leftrightarrow _____ < X < _____$

$|X| > a \Leftrightarrow X < _____$ или $X > _____$

2. Решить неравенства:

2.1 $\left|2x-1\right| \leq 5$

2.2 $|x + 3| > 12$

2.3 $\left||x|-2\right| \leq 3$

III. Построим график функции

1. Построить график функции $y = \left|x-3\right|$

Ответы к заданиям:

I. 1. a, –a

2. x+14 при $x \geq -14$

–x–14 при x<–14

3. 5; 12; 6,5; $2-\sqrt{3}$

II. 1. $-a < X < a$

$X < -a$ или $X > a$

2. 2.1 $-5 \leq 2x-1 \leq 5 \Rightarrow x\epsilon[-2;3]$

2.2 $\begin{bmatrix} x+3<-12 \\ x+3>12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x<-15 \\ x>9 \end{bmatrix} \Rightarrow x\ \epsilon\ (-\infty;\ -15) \cup (9;+\infty)$

2.3 Замена: $|x| = t\ \Rightarrow |t-2| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq t-2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq t \leq 5 \Rightarrow$

$-1 \leq\ |x| \leq 5\ \Rightarrow x\ \epsilon\ [-5;5]$

3. Рисунок 16

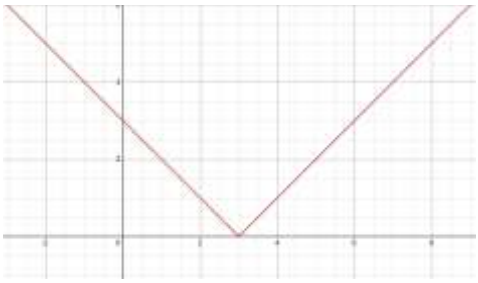


Рисунок 16 – График функции

Этап III. Применение знаний в новой ситуации

После повторения обучающиеся приступают к решению неравенств более сложного уровня. Работают совместно с учителем, по цепочке выходя к доске. Каждое неравенство подобрано таким образом, что демонстрирует различные способы решения задания.

1. $\left|3-\left|x-2\right|\right| \leq 1$

Решение данного неравенства необходимо начинать с рассмотрения внешнего модуля: $-1 \leq 3-\left|x-2\right| \leq 1 \Rightarrow -4 \leq \left|x-2\right| \leq -2 \Rightarrow 2 \leq \left|x-2\right| \leq 4$

Для решения полученного неравенства применим геометрический смысл модуля, получим:

$$\begin{bmatrix} -4 \le x-2 \le -2 \\ 2 \le x-2 \le 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \le x \le 0 \\ 4 \le x \le 6 \end{bmatrix} \Rightarrow x \epsilon [-2;0] \cup [4;6]$$

2. $|x-1| + |x+3| < 6$

Для решения неравенства рассмотрим различные случаи раскрытия модуля, для этого необходимо узнать в каких точках подмодульные выражения обращаются в нуль: $x = 1, x = -3$. Точки разобьют всю числовую прямую на три числовых промежутка. На каждом из промежутков определим знаки подмодульных выражений, получим (Рисунок 17):

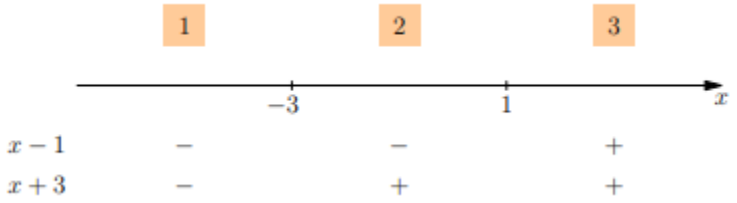


Рисунок 17 – Знаки модулей на числовых промежутках

Рассмотрим каждый случай отдельно:

1. $x < -3$. Каждый модуль раскроется с отрицательным знаком:

$$-x + 1 - x - 3 < 6 \Rightarrow x > -4$$

Таким образом, $x \epsilon (-4; -3)$

2. $-3 \le x \le 1$. Первый модуль раскроется с отрицательным знаком, второй с положительным:

$$-x + 1 + x + 3 < 6 \Rightarrow 4 < 6$$

Таким образом, $x \epsilon [-3; 1]$

3. $x > 1$. Каждый модуль раскроется с положительным знаком:

$$x - 1 + x + 3 < 6 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2$$

Таким образом, $x \epsilon (1; 2)$

Следовательно, объединив получившиеся промежутки: $x \epsilon (-4; 2)$

3. $\left|2x^2 + \frac{19}{8}x - \frac{1}{8}\right| \ge 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{19}{8}$

Для решения воспользуемся равносильным переходом:

$$\begin{bmatrix} 2x^2+\frac{19}{8}x-\frac{1}{8} \geq 3x^2+\frac{1}{8}x-\frac{19}{8} \\ -2x^2-\frac{19}{8}x+\frac{1}{8} \geq 3x^2+\frac{1}{8}x-\frac{19}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x^2-\frac{9}{4}x-\frac{9}{4} \leq 0 \\ x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \leq 0 \end{bmatrix}$$

Разложим на множители каждое квадратичное неравенство, получим:

$$\begin{bmatrix} (x-3)(x+\frac{3}{4}) \leq 0 \\ (x+1)(x-\frac{1}{2}) \leq 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом, $x \in [-1;3]$

4. При каких значениях параметра а неравенство $|x-4|+|x+2|<a$ имеет ровно 7 целых решений?

Чтобы ответить на вопрос воспользуемся графическим методом решения. Необходимо построить график левой и правой частей неравенства:

$y=|x-4|+|x+2|$ и $y=$ а. Исследуя решение неравенств при различных значениях а, получим (Рисунок 18):

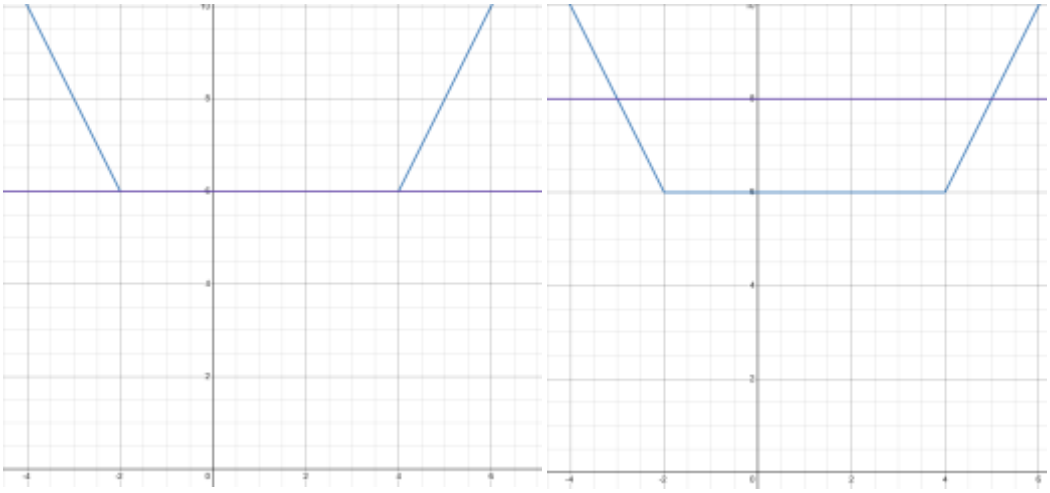


Рисунок 18 – Графичекая интерпретация неравенства

При $a \in (6;8]$ неравенство имеет ровно 7 целых решений.

Этап IV. Рефлексия

Сегодня состоялся первый урок на курсе по новой теме. Какие методы решения неравенств мы применяли для решения? (Раскрытие модуля по определению, геометрическая интерпретация модуля, применение равносильных переходов).

Какой метод для вас является наиболее легким? Наиболее сложным?

На следующем уроке продолжается работа по решению неравенств с модулями, где рассматриваются задания, представляющиеся наиболее трудными для учеников.

Урок 2 (№1 в элективном курсе для 11 класса)

Тема: «Простейшие показательные неравенства»

Тип занятия: урок систематизации знаний

Этап I. Организационный

Осуществляется проверка готовности к занятию.

Этап II. Актуализация опорных знаний

На уроках познакомились с простейшими показательными неравенствами, дали определение и вывели алгоритм решения такого типа неравенств.

Для повторения изученного материала на школьных занятиях выполняется интерактивное задание «Найти пару» (Рисунок 19, 20).

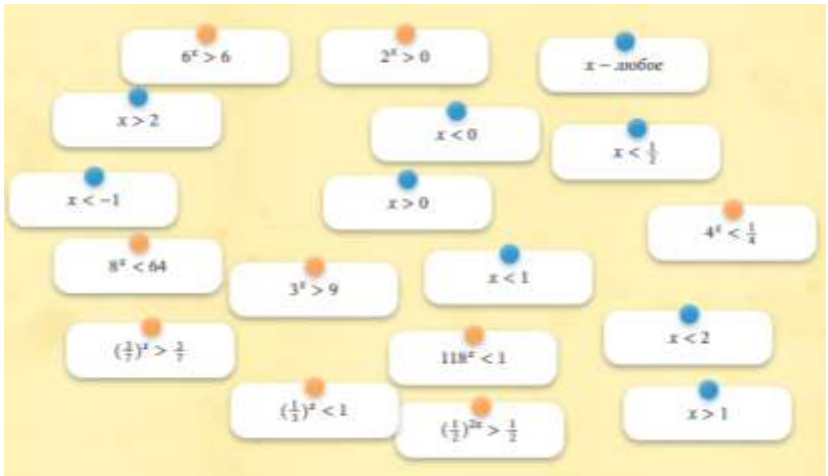


Рисунок 19 – Задание «Найти пару»

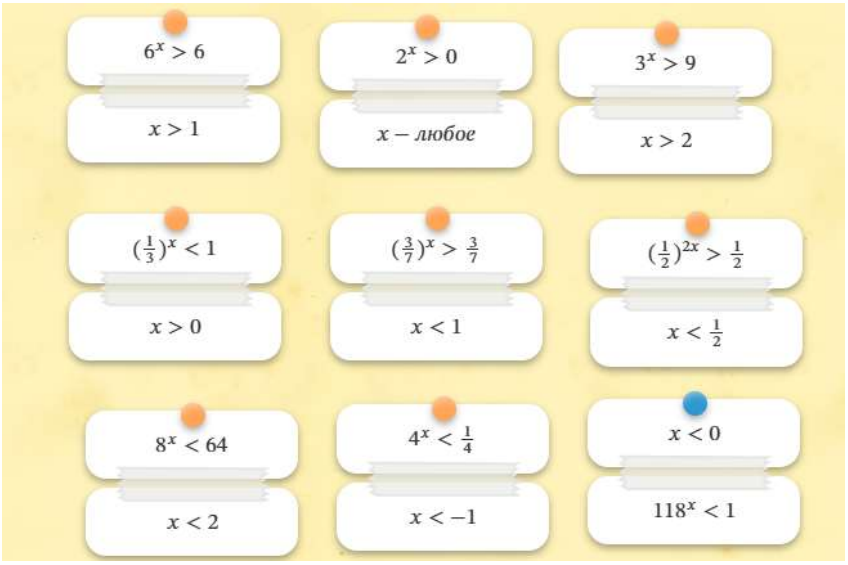


Рисунок 20 – Решение к заданию «Найти пару»

Этап III. Применение знаний в новой ситуации

Блок 1.

Начнем занятие с решения неравенств методами, которые были рассмотрены на уроке:

1. $0{,}09^{5x-1} > 0{,}3^{x+7}$

Приводим обе части неравенства к одинаковому основанию:

$$(0{,}3)^{2(5x-1)} > 0{,}3^{x+7} \Rightarrow 2(5x-1) < x+7 \Rightarrow x > 1$$

2. $2^x + 2^{x+2} \leq 20$

Чтобы решить неравенство также стремимся привести обе части к одному основанию, в данном случае к 2:

$$2^x + 4 \cdot 2^x \leq 20 \Rightarrow 5 \cdot 2^x \leq 20 \Rightarrow 2^x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$$

3. $0{,}36^{\frac{7x+1}{2-x}} < 1$

Чтобы привести к одному основанию, вспомним, что при возведении любого числа в нулевую степень, получим 1.

$$\frac{7x+1}{2-x} > 0$$

Для решения воспользуемся методом интервалов, получим: $x \in (-\frac{1}{7}; 2)$

Блок 2.

Рассмотрим неравенства, обе части которого невозможно привести к одному основанию

1. $5^x > 3^{x+1}$

В данном случае необходимо разделить неравенство на положительное выражение: 3^x

Получим: $\left(\frac{5}{3}\right)^x > 3$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию $\frac{5}{3}$:

$x > \log_{\frac{5}{3}} 3$

2. $2^x > x + 1$ при x > 0

Данное неравенство встречается обучающимся впервые, поэтому сначала учитель слушает предположения о способах решения.

Одним из методов решения неравенства может служить метод перебора значений.

При x=0, 1>1, что неверно.

При x=1, 2>2, что неверно.

При x=2, 4>3, что верно.

При x=3, 8>4, что верно.

Таким образом, при x>2 неравенство будет выполняться.

3. $x^{2x} > x^{x+3}$

Неравенство содержит одинаковое основание в обеих частях, но оно является переменным, а это влияет на решение. Необходимо рассмотреть все случаи решения:

1. Если x>1, то показательная функция возрастает, тогда знак неравенства не изменяется: 2x>x+3, x>3.

2. Если 0<x<1, то показательная функция убывает, тогда знак неравенства изменится на противоположный: 2x<x+3, x<3. Учтем, что 0<x<1, получим 0<x<1.

3. Если x=1, то получим неверное утверждение.

Объединим решения: $x \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$

После совместного решения ряда неравенств ученикам предлагаются неравенства для самостоятельного решения с взаимопроверкой.

1. $13^{|x-1|} > 169$

$$|x-1| > 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x < -1 \\ x > 3 \end{bmatrix}$$

2. $7^{x-1} + 7^x \leq 8$

$7^{x-1}(1+7) \leq 8 \Rightarrow x-1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$

Этап IV. Рефлексия

Заполним карту настроения, чтобы описать, как прошел урок, что на нем было понятного, а что вызвало особые трудности (Рисунок 21).

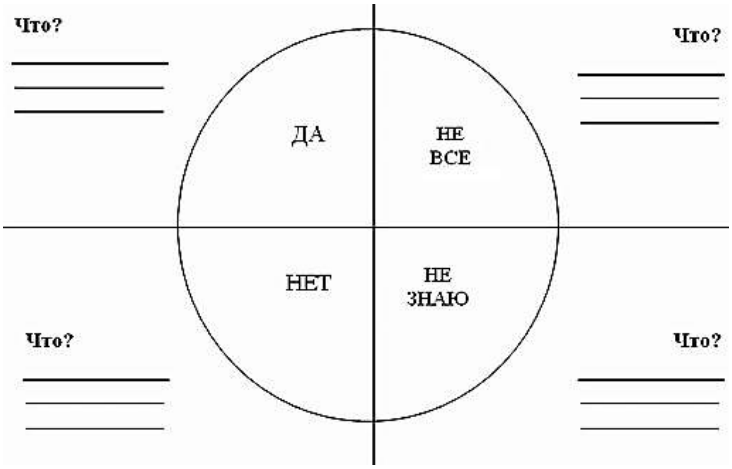


Рисунок 21 – Лист для рефлексии

2.3 Апробация элективного курса

Часть элективного курса «Неравенства: от простого до уровня ЕГЭ» была апробирована на учениках 10 класса МБОУ гимназии № 1 г. Кузнецка. Апробация проводилась в соответствии с программой первого года обучения курса (для 10 класса).

Элективный курс осваивали 15 обучающихся из числа тех, кто намерен сдавать в 11 классе ЕГЭ по математике профильного уровня.

Было проведено 13 занятий по 2 раза в неделю.

На вводном занятии была предложена входная контрольная работа (Приложение 1), которая позволила оценить остаточные знания обучающихся по теме «Неравенства» после 9 класса. Предлагаемая работа проверяет владение основными способами решения линейных, квадратных неравенств, способствует выявлению типичных ошибок.

Результаты проведения контрольной работы демонстрирует диаграмма (Рисунок 22).

Рисунок 22 – Результаты входной контрольной работы

Как видно из диаграммы, лучше всего обучающиеся справились с решением линейного неравенства. Квадратные и рациональные неравенства вызывают ряд сложностей при решении, что демонстрирует рисунок 23.

Рисунок 23 – Ошибки при решении контрольной работы

Освоения курса обучающимися начинается с повторения линейных неравенств, так как решение неравенств данного типа служит фундаментом для остальных видов, поскольку именно на простых неравенствах лучше всего отработать типичные свойства и минимизировать ошибки. При решении неравенств, которые с помощью преобразований сводятся к линейным, у обучающихся наблюдалась особая заинтересованность.

Квадратные неравенства общего вида сложностей у большинства обучающихся не вызвали. При нахождении корней соответствующего квадратного уравнения было обращено внимание на использование теоремы Виета, так как она способствует ускорению решения. Но даже несмотря на ускоренный метод нахождения корней многие из учеников отказывались её применять.

Непрост в освоении оказался урок, связанный с использованием систем и совокупностей. Обучающиеся часто путались в записи конечного результата.

Особый интерес вызвал метод интервалов при решении неравенств с кратными корнями, одновременно с этим и ряд трудностей. При решении таких неравенств возникает ряд вопросов: «нужно ли возводить в квадрат?», «можно ли сократить?», «нужно ли делать замену?».

Каждый новый урок был насыщен большим количеством практических заданий.

После освоения тем, была предложена итоговая контрольная работа (Приложение 2), которая демонстрирует уровень знаний обучающихся. Результаты написания контрольной работы можно увидеть на рисунке 24.

Рисунок 24 – Результаты контрольной работы

Таким образом, большинство обучающихся получили оценки «4» или «5» (73%), что свидетельствует о достаточно хорошем уровне освоения темы, этому способствовало и заинтересованность учеников, и объем проделанной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение неравенств представляет собой достаточно трудоёмкий и сложный процесс, включает в себя большое количество знаний, так как существуют различные их типы и методы решения. Не всегда стандартный алгоритм приводит к верному результату, необходимо использовать нешаблонный подход, скомбинировать несколько методов, чтобы неравенство было решено. При решении стоит акцентировать внимание на полученном результате, оценить его, чтобы исключить возможную ошибку.

При подготовке к занятиям учителю необходимо заранее продумать систему, которая направлена на системное изучение, чтобы у обучающихся выстроилась полное представление об изучаемой теме.

В ходе написания работы были получены следующие результаты.

1. Изучена методическая литература по выбранной теме, сделаны выводы на ее основе.

2. Выделены основные типы неравенств и способы их решения.

3. Разработан элективный курс по математике, который затрагивает все темы по неравенствам, изучаемым в школе.

4. Приведены два конспекта занятий элективного курса.

5. Проведена апробация курса для первого года обучения.

При составлении элективного курса были взяты во внимание темы, которые изучаются в школе. В процессе разработки курса было проанализировано большое количество разнообразных неравенств, которые имеют различные способы решения, для того, чтобы курс получился системным и отражал все аспекты изучаемой темы. Таким образом, элективный курс позволит обучающимся разобраться во всех аспектах и тонкостях неравенств.

Цель исследования достигнута, о чем свидетельствуют результаты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачёва М. В., Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы : базовый и углублённый уровни : учебник. М. : Просвещение, 2023. 464 с.

2. Кузнецов А. А. Базовые и профильные курсы: цели, функции, содержание // Педагогика. 2014. № 2. С. 28–33.

3. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Задачник практикум по алгебре. М. : Школа-Пресс, 2007. 320 с.

4. Математика. Алгебра : 7-й класс : базовый уровень : учебник. / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С.А. Теляковского. М. : Просвещение, 2023. 255 с.

5. Математика. Алгебра : 8-й класс : базовый уровень : учебник. / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С.А. Теляковского. М. : Просвещение, 2023. 319 с.

6. Математика. Алгебра : 9-й класс : базовый уровень : учебник. / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С.А. Теляковского. М. : Просвещение, 2023. 255 с.

7. Прокофьев А. А., Соколова Т. О. О методике подготовки к решению задания 15 ЕГЭ // Математика, 2020. № 10. С. 43-51.

8. Прокофьев А. А., Корянов А. Г. Математика. ЕГЭ. Решение неравенств с одной переменной (типовое задание 15): учебно-методическое пособие. Ростов н/Д : Легион, 2021.

9. Севрюков П. Ф., Смоляков А. Н. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства: учебное пособие. М. : Илекса, 2008. 352 с.

10. Селевко Г. К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2-х т. Т.1. М. : Народное образование, 2005. 556 с.

11. Сысоева И. П. Элективные курсы и их значение в профильном обучении // Проблемы и перспективы развития образования в России, 2021. С. 36-38

12. Федеральная образовательная программа среднего общего образования. Математика. URL: https://static.edsoo.ru/projects/fop/index.html

13. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: [утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г.]. М. : Просвещение, 2021. 62 с.

14. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования : [утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 26 июня 2025 г.]. М. : Просвещение, 2025. 810 с.

15. Харди Г. Г., Литлвуд Дж. И., Пойа Г. Неравенства. М. : Гос. изд-во иностр. лит., 2006. 456 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Входная контрольная работа по теме «Неравенства»

1. $3(x-2)-5(2x+1) \geq 4-x$
2. $-2x^2+3x+2<0$
3. $\frac{(x+3)(x-1)}{4-x} \leq 0$
4. $\frac{x^2-8x+15}{x-3} \leq 0$
5. $\begin{cases} x^2-4x \leq 0 \\ \frac{x-5}{x+2} > 0 \end{cases}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Итоговая контрольная работа

1. $\frac{27-3x}{2}+9<\frac{2x-7}{4}-2x$
2. $x^2+5x-7>0$
3. $\left[\begin{array}{l}1-x^2\geq 0\\ x^2-4x+3\geq 0\end{array}\right.$
4. $\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-4}\geq 0$
5. $\frac{2x-3}{x}\geq\frac{3-2x}{2x^2-4x}$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«12» 09 2025 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Изюминой Дарьи Сергеевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение неравенств в школьном курсе математики»

Утверждена приказом по университету от «25.09» 2025 г. № 1103/0

Срок сдачи студентом законченной работы «15» 05 2026 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение и анализ литературы по теме исследования	Ноябрь-декабрь 2025 г.	Выполнено
2.	Изучение требований к освоению темы «Изучение неравенств в школьном курсе»	Январь 2026 г.	Выполнено
3.	Анализ видов неравенств и методов их решения	Февраль-март 2026 г.	Выполнено
4.	Рассмотрение содержательно-методической линии изучения неравенств, а также элективных курсов в системе школьного математического образования	Март 2026 г.	Выполнено
5.	Разработка конспектов урока для элективного курса	Март-апрель 2026 г.	Выполнено
6.	Оформление библиографического списка	Май 2026 г.	Выполнено
7.	Оформление работы, подготовка презентации и выступления	Май-июнь 2026 г.	Выполнено

Дата выдачи задания «11» 09 2025г.

Руководитель _____ Никитина О. Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Изюмина Д.С.
(подпись) (Ф.И.О.)

И.о. ректора Пензенского
государственного университета
Артамонову Д.В.
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Изюминой Дарьи Сергеевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Изюмина Дарья Сергеевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Изучение неравенств в школьном курсе математики», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

Изюмина
подпись
06.05.2026
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 06.05.2026
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР _____ О.Г. Никитина
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему **«Изучение неравенств в школьном курсе математики»** студентки 4 курса **Изюминой Дарьи Сергеевны**
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»
Руководитель ВКР Никитина О.Г.

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - http://penzgu.antiplagiat.ru

Отчет о проверке

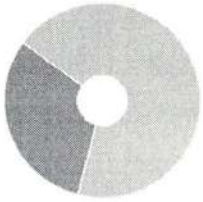
Автор: Изюмина Дарья Сергеевна

Название документа: ВКР_Изучение неравенств в школьном курсе математики

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения: 30,63%

Оригинальность: 69,37%

ИИ-контент: 0%

Цитирования: 0%

Самоцитирования: 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 90,65% текста документа, исключено из проверки: 9,35% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография, Таблицы

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» - это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» - это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 134

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 06.05.2026 14:54:41

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 51

Символов в тексте: 51193

Слов в тексте: 6859

Число предложений: 1540

06.05.2026 — ДД.ММ.ГГГГ

подпись

О.Г. Никитина — И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Изучение неравенств в школьном курсе математики»
студентки Изюминой Дарьи Сергеевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 22ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Изюминой Дарьи Сергеевны посвящена вопросам изучения неравенств в школьном курсе.

Актуальность темы исследования обусловлена тем, что неравенства – ключевой раздел математики, но многие ученики испытывают трудности при их решении. Неравенствам в школьном курсе уделяется достаточный объем материала. Но, несмотря на это, решение некоторых типов неравенств, особенно нестандартных, вызывает трудности у обучающихся. Именно в этом заключена актуальность выбранной темы.

В учебниках по математике уделяется внимание примерам, которые направлены на отработку базового алгоритма, а более сложные и нестандартные методы решения рассматриваются недостаточно.

Цель работы состоит в разработке элективного курса по решению неравенств для обучающихся 10–11 классов.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения, списка использованных источников и приложений.

Основная часть состоит из двух глав. В первой главе рассматриваются теоретические основы изучения неравенств в школьном курсе математики. В частности, рассмотрена история развития понятия «неравенство», виды неравенств и методы их решения. Проанализирована содержательно–методическая линия изучения неравенств в школьном курсе математики и роль элективных курсов при обучении математике.

Вторая глава посвящена разработке элективного курса «Неравенства: от простого до уровня ЕГЭ» для обучающихся 10-11 класса. В частности, приведены конспекты двух занятий разработанного курса. Здесь также приведены результаты апробации элективного курса.

Работа Изюминой Д.С. является самостоятельным исследованием. Практическая значимость исследования в том, что результаты работы могут быть использованы при проведении элективных курсов по математике.

Выпускная квалификационная работа Изюминой Дарьи Сергеевны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна, доцент кафедры «Математическое образование», к.ф.-м.н. _____