

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет вычислительной техники

Курсовая работа
по дисциплине «Функциональный анализ»
на тему «Прямые произведения систем множеств и мер.
Теорема Фубини»

Направление подготовки – 01.03.01 Математика

Выполнил студент: _____ Чалышов Г.В.

Группа: _____ 17ВМ1

Руководитель:

к.ф.- м.н., доцент _____ Цупак А.А.

Работа защищена с оценкой _____

Дата защиты _____

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Зав. кафедрой МСМ, д.ф-м.н.

_____ Ю.Г. Смирнов

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине «Функциональный анализ»

Тема: «Прямые произведения систем множеств и мер. Теорема Фубини»

- а) Изучить литературу по теме курсовой работы.
- б) Изложить реферативно изученный по теме теоретический материал.
- в) Самостоятельно придумать и решить задачи по теме курсовой работы.
- г) Привести примеры, иллюстрирующие связь темы курсовой работы с другими разделами дисциплины.

Руководитель работы, доцент

Цупак А.А

Оглавление

Введение	2
1 Измеримые функции	4
2 Простые функции	6
3 Интеграл Лебега для простых функций	7
4 Общее определение интеграла Лебега на множестве бесконечной меры	9
5 Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана	11
6 Произведение систем множеств	13
7 Произведение мер	15
8 Выражение плоской меры через интеграл линейной меры сечений и геометрическое определение интеграла Лебега	20
9 Теорема Фубини	23
10 Практическая часть	25
10.1 Пример 1	25
10.2 Пример 2	26
10.3 Пример 3	26
10.4 Пример 4	26
10.5 Пример 5	27
Заключение	29
Литература	30

Введение

Функциональный анализ посвящён изучению различных структур, определенных на бесконечномерных линейных пространствах. Нормированные, банаховы и топологические векторные пространства, гильбертово пространство, пространства функций, банаховы алгебры, пространства операторов - вот весьма неполный перечень основных объектов функционального анализа. Хотя некоторые результаты, относящиеся к данному направлению, появлялись и раньше, в самостоятельную дисциплину функционального анализа выделился в 20-30-х годах XX века. Усилиями многих математиков функциональный анализ развился в одно из интереснейших направлений современной математики, в направление, активное развитие которого продолжается и в наши дни.

В основе анализа лежит геометрический подход к изучению аналитических по своей природе объектов: функций, уравнений, рядов, последовательностей. Этот подход, позволяющий применять геометрическую интуицию в сложных аналитических задачах, оказался весьма продуктивным. Благодаря этому в рамках функционального анализа возникли и развились мощные методы, нашедшие применения в разнообразных математических дисциплинах.

Фубини был учеником Луиджи Бьянки. Бьянки занимался дифференциальной геометрией однородных римановых многообразий, и получил их классификацию в размерности 3. Диссертацию Фубини (1902) была посвящена дифференциальной геометрии однородных многообразий, но сразу после защиты тезиса он занялся анализом на симметрических пространствах, и опубликовал работу о гармонических функциях. Фубини успешно работал во множестве отраслей математики, физики и инженерного дела. Он открыл и доказал теорему Фубини о кратных интегралах и метрики Фубини-Штуди, полезные в комплексной алгебраической геометрии.

В данной курсовой будет рассмотрена теорема Фубини и прямые

произведения систем множеств и мер.

1 Измеримые функции

Пусть X и Y - два произвольных множества и пусть в них выделены две системы подмножеств $\mathfrak{A}_x$ и $\mathfrak{B}_y$ соответственно. Функция $y = f(x)$ с областью определения X , принимающая значения на Y , называется $(\mathfrak{A}_x, \mathfrak{B}_y)$ - измеримой, если из $A \in \mathfrak{B}_y$ вытекает, что $f^{-1}(A) \in \mathfrak{A}_x$

Определение 1. Пусть X - множество, в котором задана σ - аддитивная мера μ , определенная на σ - алгебре $\mathfrak{S}_\mu$. Действительная функция $f(x)$ на X называется μ - измеримой, если для всякого борелевского множества A числовой прямой

$$f^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\mu$$

Аналогично комплексная функция $\phi(x)$, определенная на X , называется μ - измеримой, если $\phi^{-1}(A) \in \mathfrak{S}_\mu$ для всякого борелевского подмножества комплексной плоскости.

Числовая функция, заданная на прямой, называется борелевской (или B - измеримой), если прообраз каждого борелевского множества есть борелевское множество.

Теорема 1. Пусть X, Y и Z - произвольные множества с выделенными в них системами подмножеств $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{B}_y$ и $\mathfrak{C}_z$ соответственно и пусть определенная на X функция $y = f(x)$ $(\mathfrak{A}_x, \mathfrak{B}_y)$ - измерима, а определенная на Y функция $z = g(y)$ $(\mathfrak{B}_y, \mathfrak{C}_z)$ - измерима. Тогда функция

$$z = \phi(x) = g(f(x))$$

$(\mathfrak{A}_x, \mathfrak{C}_z)$ - измерима.

Доказательство. Если $A \in \mathfrak{C}_z$, то в силу $(\mathfrak{B}_y, \mathfrak{C}_z)$ - измеримости функции g имеем: $g^{-1}(A) = B \in \mathfrak{B}_y$. В свою очередь в силу $(\mathfrak{A}_x, \mathfrak{B}_y)$ - измеримости функции f множества $f^{-1}(B)$ принадлежит $\mathfrak{A}_x$, т.е. $f^{-1}(g^{-1}(A)) = \phi^{-1}(A) \in \mathfrak{A}_x$, т.е. функция ϕ $(\mathfrak{A}_x, \mathfrak{C}_z)$ - измерима. $\square$

Следствие 1. Борелевская функция от μ - измеримой числовой функции μ - измерима. В частности, непрерывная функция от μ - измеримой μ - измерима.

Теорема 2. *Для того чтобы действительная функция $f(x)$ была измерима, необходимо и достаточно, чтобы при любом действительном c множество $\{x : f(x) < c\}$ было измеримо.*

Доказательство. Необходимость условия ясна, так как полупрямая $(-\infty, c)$ есть борелевское множество. Для доказательства достаточности заметим прежде всего, что σ - алгебра, порожденная системой Σ всех полупрямых $(-\infty, c)$ совпадает с σ - алгеброй всех борелевских множеств на прямой. Отсюда следует, что прообраз каждого борелевского множества принадлежит σ - алгебре, порожденной прообразами полупрямых, принадлежащих Σ , т.е. измерим.

□

Доказанное условие часто принимают за определение измеримости, т.е. называют функцию $f(x)$ измеримой, если все множества $\{x : f(x) < c\}$ измеримы.

2 Простые функции

Определение 2. Функция $f(x)$, определенная на некотором пространстве X с заданной на нем мерой, называется простой, если она измерима и принимает не более , чем счётное число значений.

Структура простых функций характеризуется следующей теоремой.

Теорема 3. *Функция $f(x)$, принимающая не более чем счетное число различных значений*

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots,$$

измерима в том и только том случае, если все множества

$$A_n = x : f(x) = y_n$$

измеримы.

Доказательство. Необходимость условия ясна, так как каждое A_n есть прообраз одноточечного множества $\{y_n\}$, а всякое одноточечное множество является борелевским. Достаточность следует из того, что в условиях теоремы прообразах $f^{-1}(B)$ любого борелевского множества есть объединение $\bigcup_{y_x \in B} A_n$ не более чем счетного числа измеримых множеств A_n , т.е. измерим. □

Теорема 4. *Для измеримости функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде последовательности простых измеримых функций.*

Доказательство. Достаточность следует из того, что предел сходящейся последовательности измеримых функций измерим. Для доказательства необходимости рассмотрим произвольную измеримую функцию $f(x)$ и положим $f_n(x) = \frac{m}{n}$, если $\frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{(m+1)}{n}$ (здесь m - целые, а n - целые положительные). Ясно, что функции $f_n(x)$ простые; при $n \rightarrow \infty$ они равномерно сходятся к $f(x)$, так как $|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$. □

3 Интеграл Лебега для простых функций

Введем понятие интеграла Лебега сначала для простых функций, т.е. измеримых функций, принимающих конечное или счетное число значений.

Пусть f - некоторая простая функция, принимающая значения

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots; y_i \neq y_j,$$

и пусть A - некоторое измеримое подмножество X .

Естественно определить интеграл от функции f по множеству A равенством

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n), \quad (1)$$

где $A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$. Если ряд справа сходится, то это приводит к следующему определению.

Определение 3. Простая функция f называется интегрируемой или суммируемой (по мере μ) на множестве A , если ряд (1) абсолютно сходится. Если f интегрируема, то сумма (1) называется интегралом от f по множеству A .

В этом определении предполагается, что все y_n различны. Можно, представить значение интеграла от простой функции в виде суммы произведений вида $c_k \mu(B_k)$ и не предполагая, что все c_k различны. Это позволяет сделать следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $A = \bigcup_k B_k$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и пусть на каждом множестве B_k функция f принимает только одно значение c_k ; тогда

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_k c_k \mu(B_k), \quad (2)$$

причем функция f интегрируема на A тогда и только тогда, когда ряд (2) абсолютно сходится.

Доказательство. Легко видеть, что каждое множество

$$A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$$

является объединением тех B_k , для которых $c_k = y_n$. Поэтому

$$\sum_n y_n \mu(A_n) = \sum_n y_n \sum_{c_k=y_n} \mu(B_k) = \sum_k c_k \mu(B_k).$$

Так как мера неотрицательна, то

$$\sum_n |y_n| \mu(A_n) = \sum_n |y_n| \sum_{c_k=y_n} \mu(B_k) = \sum_k |c_k| \mu(B_k).$$

т.е. ряды $\sum_n y_n \mu(A_n)$ и $\sum_k c_k \mu(B_k)$ абсолютно сходятся или расходятся одновременно. Лемма доказана. $\square$

Установим некоторые свойства интеграла Лебега от простых функций:

1. Справедливо

$$\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu,$$

причем из существования интегралов в правой части равенства следует существование интегралов в левой.

2. Для любого постоянного k

$$\int_A k f(x) dx = k \int_A f(x) dx,$$

причем из существования интеграла в правой части следует существование интеграла в левой части.

3. Ограниченная на множестве A простая функция f интегрируема на A , причём, если $|f(x)| \leq M$ на A , то

$$\left| \int_A f(x) d\mu \right| \leq M \mu(A).$$

4 Общее определение интеграла Лебега на множестве бесконечной меры

Определение 4. Назовём функцию f интегрируемой (суммируемой) на множестве A , если существует последовательность простых интегрируемых на A функций $\{f_n\}$, сходящаяся равномерно к f . Предел

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu,$$

и обозначим

$$\int_A f(x) d\mu$$

и назовём интегралом функции f по множеству A .

Это определение корректно, если выполнены следующие условия:

1. Предел для любой равномерно сходящейся последовательности простых интегрируемых на A функций существует.
2. Этот предел при заданной функции f не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$.
3. Для простых функций определение интегрируемости и интеграла равносильно данному в пункте 3.

Все эти условия действительно выполнены.

Установим основные свойства интеграла Лебега. Непосредственно из определения следует, что:

1. $\int 1 d\mu = \mu(A)$.
2. Для постоянного k

$$\int_A k f(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu,$$

причем из существования интеграла в правой части вытекает существование интеграла в левой.

3. Аддитивность

$$\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu,$$

причём из существования интеграла в правой части вытекает существование интеграла в левой.

4. Ограниченная на множестве A функция f интегрируема на A .

5. Монотонность: если $f(x) \geq 0$, то

$$\int_A f(x) d\mu \geq 0.$$

6. Из 5 следует, что если $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_A f(x) d\mu \geq \int_A g(x) d\mu,$$

а из этого следует, что, если $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in A$, то

$$m\mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq M\mu(A).$$

7. Если $\mu(A) = 0$, то $\int_A f(x) d\mu = 0$.

8. Если $f(x) = g(x)$ почти всюду, то

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu,$$

причём оба интеграла существуют или не существуют одновременно.

9. Если функция ϕ интегрируема на A и почти всюду $|f(x)| \leq \phi(x)$, то f также интегрируема на A

10. Интегралы

$$I_1 = \int_A f(x) d\mu, \quad I_2 = \int_A |f(x)| d\mu$$

существуют или не существуют одновременно.

5 Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана

Выясним связь между интегралами Лебега и Римана. При этом мы ограничимся простейшим случаем линейной меры Лебега на прямой.

Теорема 5. *Если существует интеграл Римана*

$$I = (R) \int_a^b f(x) dx,$$

то f интегрируема на $[a, b]$ по Лебегу и

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I.$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ на 2^n частей точками

$$x_k = a + \frac{k}{2^n}(b - a)$$

и соответствующие этому разбиению суммы Дарбу:

$$\Omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} M_n k, \quad \omega_n = \frac{b-a}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} m_n k,$$

где $M_n k$ - верхняя грань f на отрезке

$$x_{k-1} \leq x \leq x_k,$$

а $m_n k$ - нижняя грань f на том же отрезке. По определению интеграла Римана.

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n.$$

Положим

$$\bar{f}_n(x) = M_n k,$$

при $x_{k-1} \leq x < x_k$,

$$\underline{f}_n(x) = m_n k,$$

при $x_{k-1} \leq x < x_k$. В точке $x = b$. функции $\bar{f}_n$ и $\underline{f}_n(x)$ можно доопределить произвольно. Легко вычислить, что

$$\int_{[a,b]} \bar{f}_n(x) d\mu = \Omega_n, \quad \int_{[a,b]} \underline{f}_n(x) d\mu = \omega_n.$$

Так как последовательность $\{\bar{f}_n\}$ не возрастает, а последовательность $\{\underline{f}_n\}$ не убывает, то почти всюду

$$\bar{f}_n(x) \rightarrow \bar{f}(x) \geq f(x), \quad \underline{f}_n(x) \rightarrow \underline{f}(x) \leq f(x).$$

По теореме Б. Леви

$$\int_{[a,b]} \bar{f}(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = I = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \int_{[a,b]} \underline{f}(x) d\mu.$$

Поэтому

$$\int_{[a,b]} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)| d\mu = \int_{[a,b]} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x)) d\mu = 0$$

и, следовательно, почти всюду

$$\bar{f}(x) - \underline{f}(x) = 0,$$

т.е.

$$\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$$

и

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = I.$$

Теорема доказана. □

6 Произведение систем множеств

Множество Z упорядоченных пар (x, y) , где $x \in X$, $y \in Y$, называется прямым произведением множеств X и Y и обозначается $X \times Y$. Аналогично, множество Z упорядоченных конечных последовательностей $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_k \in X_k$, называется прямым произведением множеств $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и обозначается

$$Z = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_k X_k,$$

В частном случае, когда

$$X_1 = \dots = X_n = X,$$

множество Z есть n -я степень множества X :

$$Z = X^n.$$

Координатное n -мерное пространство $\mathbf{R}^n$ есть n -я степень числовой прямой $\mathbf{R}$. Единичный куб I^n , то есть, множество $\mathbf{R}^n$ с координатами, подчиненными условия

$$0 \ll x_k \ll 1, k = \overline{1, n},$$

является n -й степенью единичного сегмента $I^1 = [0, 1]$. Если $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_n$ -системы подмножеств множеств $X_1, \dots, X_n$, то

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \times \dots \times \mathfrak{S}_n,$$

обозначает систему подмножеств множества $X = \prod_k X_k$, которые можно представить в виде

$$A = A_1 \times \dots \times A_n,$$

где $A_k \in \mathfrak{S}_k$. Если $\mathfrak{S}_1 = \dots = \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{R}$ есть n -я степень системы $\mathfrak{S}_1$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}^n.$$

Система параллелепипедов в $\mathbf{R}^1$.

Теорема 6. Если $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ - полукольца, то и $\mathfrak{R} = \prod_k \mathfrak{S}_k$ есть полукольцо.

Доказательство. Согласно определению полукольца проверим, что если $A, B \in \mathfrak{R}$, и если, кроме того, $B \subset A$ то $A = \bigcup_{i=1}^m C_i$, где $C_1 = B$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $C_i \in \mathfrak{R}$ ($i = \overline{1, n}$).

Рассмотрим случай при $n = 2$.

1. Пусть $A \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2, B \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$; это означает, что

$$\begin{aligned} A &= A_1 \times A_2, & A_1 &\in \mathfrak{S}_1, & A_2 &\in \mathfrak{S}_2, \\ B &= B_1 \times B_2, & B_1 &\in \mathfrak{S}_1, & B_2 &\in \mathfrak{S}_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2),$$

и так как

$$A_1 \cap B_1 \in \mathfrak{S}_1, \quad A_2 \cap B_2 \in \mathfrak{S}_2,$$

то

$$A \cap B \in \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2.$$

2. Предположим, что

$$B_1 \subset A_1, \quad B_2 \subset A_2;$$

в силу того, что $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ - полукольца, имеют место разложения:

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \cup B_1^{(1)} \cup \dots \cup B_1^{(k)}, \\ A_2 &= B_2 \cup B_2^{(1)} \cup \dots \cup B_2^{(l)}. \end{aligned}$$

Но тогда

$$\begin{aligned} A &= A_1 \times A_2 = (B_1 \times B_2) \cup \dots \cup (B_1 \times B_2^{(l)}) \cup \dots \cup (B_1^{(1)} \times B_2^{(l)}) \cup \dots \\ &\quad \dots \cup (B_1^{(k)} \times B_2) \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(1)}) \cup \dots \cup (B_1^{(k)} \times B_2^{(l)}). \end{aligned}$$

Первым членом разложения служит $B_1 \times B_2 = B$, и все члены принадлежат система $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$. Теорема доказана. $\square$

Однако из предложения, что система $\mathfrak{S}_k$ суть кольца (или σ -алгебры), ещё не следует, что произведение $\prod_k \mathfrak{S}_k$ будет кольцом (соответственно σ -алгеброй).

7 Произведение мер

Пусть на полукольце $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$ заданы меры

$$\mu_1(A_1), \dots, \mu_n(A_n), \quad A_k \in \mathfrak{S}_k,$$

Будем считать данные меры конечными, хотя излагаемые ниже рассуждения и факты справедливы на случай σ -конечный мер.

Лемма 2. *Какова бы ни была конечная система множества $A_1 \dots A_n$, принадлежащих полукольцу $\mathfrak{S}$, в $\mathfrak{S}$ найдется такая конечная система попарно непересекающихся множеств $B_1 \dots B_t$, что каждое A_k может быть представлено в виде суммы*

$$A_k = \bigcup_{s \in M_k} B_s$$

некоторых из множеств B_t .

Определим на полукольце

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}_1 \times \dots \times \mathfrak{S}_n \tag{3}$$

меру

$$\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_n \tag{4}$$

формулой

$$\mu(A) = \mu_1(A_1) \dots \mu_n(A_n), \tag{5}$$

где

$$A = A_1 \times \dots \times A_n.$$

Следует доказать, что $\mu(A)$ - действительно мера, то есть, что эта функция множества аддитивна. Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть дано разложение

$$A = A_1 \times A_2 = \bigcup_k B^{(k)},$$

$$B^{(i)} \cap B^{(j)} = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$B^{(k)} = B_1^{(k)} \times B_2^{(k)}.$$

В силу леммы 2 существуют такие разложения

$$A_1 = \bigcup_m C_1^{(m)}, \quad A_2 = \bigcup_n C_2^{(n)},$$

что множества $B_1^{(k)}$ являются объединениями некоторых $C_1^{(m)}$, и множества $B_2^{(k)}$ - объединениями некоторых $C_2^{(n)}$. Очевидно, что

$$\mu(A) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \sum_n \sum_m \mu_1(C_1^{(m)})\mu_2(C_2^{(n)}), \quad (6)$$

$$\mu(B^{(k)}) = \mu_1(B_1^{(k)})\mu_2(B_2^{(k)}) = \sum_n \sum_m \mu_1(C_1^{(m)})\mu_2(C_2^{(n)}), \quad (7)$$

причем в (7) справа сумма берется по всем $C_1^{(m)} \subset B_1^{(k)}$ и $C_2^{(n)} \subset B_2^{(k)}$, а в правой части равенства (6) стоят по одному разу все члены, появляющиеся в правых частях равенств (7). Поэтому

$$\mu(A) = \sum_k \mu(B_k),$$

что и требовалось доказать. Таким образом, в частности, аддитивность элементарных мер в n -мерном евклидово пространстве следует из аддивности линейной меры на прямой. Мера (4), заданная на полукольце (3) формулой (5), называется произведением $\mu_1 \dots \mu_n$.

Теорема 7. (Б. Леви). Пусть на множестве A

$$f_1(x) \ll \dots \ll f_n(x) \ll \dots,$$

причем функции f_n интегрируемы и их интегралы ограничены в совокупности

$$\int_A f_n(x) d\mu \ll K.$$

Тогда почти всюду на A существует (конечный) предел

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad (8)$$

функция f интегрируема на A и

$$\int_A f_n(x) d\mu \rightarrow \int_A f(x) d\mu.$$

Доказательство. Предположим, что $f_1(x) \gg 0$, тогда общий случай легко сводится к данному, путем перехода к функциям

$$\overline{f_n} = f_n - f_1.$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{x : x \in A, f_n(x) \gg \infty\}.$$

Замети, что

$$\Omega = \bigcap_r \bigcup_n \Omega_n^{(r)},$$

где

$$\Omega_n^{(r)} = \{x : x \in A, f_n(x) > r\}.$$

В силу неравенства Чебышева

$$\mu(\Omega_n^{(r)}) \ll \frac{K}{r}.$$

Так как

$$\Omega_1^{(r)} \subset \dots \subset \Omega_n^{(r)} \subset \dots,$$

то

$$\mu\left(\bigcup_n \Omega_n^{(r)}\right) \ll \frac{K}{r};$$

но при любом r

$$\Omega \subset \bigcup_n \Omega_n^{(r)},$$

поэтому

$$\mu(\Omega) \ll \frac{K}{r}.$$

Ввиду произвольности r следует, что

$$\mu(\Omega) = 0;$$

Таким образом, доказана, что монотонная последовательность $\{f_n(x)\}$ почти всюду на A имеет конечный предел $f(x)$.

Обозначим через A , множество тех точек $x \in A$, для которых

$$r - 1 \ll f(x) < r, \quad r = \overline{1, n},$$

и положим $\varphi(x) = r$ на A_r .

Докажем интегрируемость $\varphi(x)$ на A . Положим

$$B_s = \bigcup_{r=1}^s A_r.$$

Так как на B_s функции f_n и f ограничены и всегда

$$\varphi(x) \ll f(x) + 1,$$

то

$$\int_{B_s} \varphi(x) d\mu \ll \int_{B_s} f(x) d\mu + \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_s} f_n(x) d\mu + \mu(A) \ll K + \mu(A).$$

Но

$$\int_{B_s} \varphi(x) d\mu = \sum_{r=1}^s r\mu(A_r).$$

Ограниченность же этих сумм означает сходимость ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} r\mu(A_r) = \int_A \varphi(x) d\mu.$$

Следовательно, интегрируемость φ на A доказана. $\square$

Условие монотонного неубывания функций $f_n(x)$ в данной теореме можно заменить условием их монотонного возрастания.

Следствие 2. Если на заданном множестве предел (8) не существует, тогда функцию f можно задать произвольно, положив $f(x) = 0$.

Следствие 3. Если $\psi(x) \gg 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) d\mu < \infty$, то почти всюду на A ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)$ сходится и

$$\int_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \psi_n(x) d\mu.$$

Теорема 8. Если меры $\mu_1, \dots, \mu_n$ σ - аддитивны, то σ - аддитивна и мера $\mu = \mu_1 \times \dots \times \mu_n$.

Доказательство. Рассмотрим случай при $n = 2$. Обозначим через λ_1 лебегово продолжение меры μ_1 . Пусть $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, где $C_n \cap C_m = \emptyset$ при $b \neq m$, причем C и C_n входят в $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$, то есть

$$C = A \times B, \quad A \in \mathfrak{S}_1, \quad B \in \mathfrak{S}_2$$

$$C_n = A_n \times B_n, \quad A_n \in \mathfrak{S}_1, \quad B_n \in \mathfrak{S}_2.$$

Пусть множества A и $A_1, \dots, A_n$ лежат в пространстве X . Положим для $x \in X$

$$f_n(x) = \begin{cases} \mu_2(B_n), & \text{если } x \in A_n, \\ 0, & \text{если } x \notin A_n. \end{cases}$$

Заметим, что для $x \in A$

$$\sum_n f_n(x) = \mu_2(B),$$

поэтому в силу следствия 3 из теоремы Б. Леви

$$\sum_n \mu(C_n) = \mu(C).$$

Если $\mu_1, \dots, \mu_n$ σ -аддитивные меры, заданные соответственно на σ -алгебрах $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n$, то их произведение называется лебеговым продолжением меры $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$. Будем обозначать его символом

$$\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n = \otimes \mu_k.$$

В частности, при

$$\mu_1 = \dots = \mu_n = \mu$$

получаем n -ю степень меры μ :

$$\mu^n = \otimes \mu_k, \quad \mu_k = \mu.$$

Теорема доказана □

Заметим, что произведение мер является полным (даже если меры $\mu_1, \dots, \mu_n$ были неполны).

8 Выражение плоской меры через интеграл линейной меры сечений и геометрическое определение интеграла Лебега

Пусть область G на плоскости (x, y) ограничена вертикалями $x = a$, $x = b$ и кривыми $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. Площадь области G выражается интегралом

$$V(G) = \int_a^b \{\varphi(x) - \psi(x)\} dx.$$

Разность $\varphi(x_0) - \psi(x_0)$ равна длине сечения области G вертикально $x = x_0$. Требуется перенести данный способ измерения площадей на произвольные меры-произведения

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y.$$

Предположим, что меры μ_x и μ_y определены на σ -алгебрах, являются σ -аддитивными и обладают свойством полноты: если $B \subset A$ и $\mu(A) = 0$, то B измеримо. Введем обозначения

$$\begin{aligned} A_x &= \{y : (x, y) \in A\} \quad (x \text{ фиксировано}), \\ A_y &= \{x : (x, y) \in A\} \quad (y \text{ фиксировано}). \end{aligned}$$

Если X и Y - числовые прямые, а $X \times Y$ - плоскость, то A_{x_0} называется проекцией на ось Y сечения множества A вертикальной прямой $x = x_0$.

Теорема 9. *В перечисленных выше предположениях для любого μ -измеримого множества A*

$$\mu(A) = \int_X \mu_y(A_x) d\mu_x = \int_Y \mu_x(A_y) d\mu_y.$$

Доказательство. Достаточно доказать равенство

$$\mu(A) = \int_X \varphi_A(x) d\mu_x, \quad \varphi_A(x) = \mu_y(A_x), \quad (9)$$

так как второе утверждение теоремы вполне аналогично первому. Заметим, что теорема включает в себя утверждение: при почти всех x (в смысле меры μ_x) множества A измеримы относительно меры μ_y и что функция $\varphi_A(x)$

измерима относительно меры μ_x . Без этого формула (9) не имела бы смысла. Мера μ - это лебегово продолжение меры $m = \mu_x \times \mu_y$, определенной на системе $\mathfrak{S}_m$ множества вида $A = A_{y_0} \times A_{x_0}$. Для таких множеств равенство (9) имеет вид

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \mu_y(A_{x_0}), & \text{если } x \in A_{y_0}, \\ 0, & \text{если } x \notin A_{y_0}. \end{cases}$$

Равенство (9) также можно определить на множестве из $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, которые разложимы в конечную сумму попарно непересекающихся множеств из $\mathfrak{S}_m$.

Лемма 3. *Для любого μ -измеримого множества A существует множество B вида*

$$B = \bigcap_n B_n, \quad B_1 \supset \dots \supset B_n \supset \dots, \\ B_n = \bigcup_k B_{nk}, \quad B_{n1} \subset \dots \subset B_{nk} \subset \dots,$$

где множества B_{nk} принадлежат $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$, причем $A \subset B$ и

$$\mu(A) = \mu(B). \quad (10)$$

Доказательство. По определению измеримости, при любом n множество A можно вложить в множество $C_n = \bigcup_r \Delta_{nr}$ - объединение множеств Δ_{nr} из $\mathfrak{S}_m$ так, что

$$\mu(C_n), \mu(A) + \frac{1}{n}.$$

Положим $B_n = \bigcap_{k=1}^n C_k$, тогда множества B_n имеют вид

$$B_n = \bigcup_s \delta_{ns},$$

где δ_{ns} принадлежит $\mathfrak{S}_m$. Положив, $B_{nk} = \bigcup_{s=1}^k \delta_{ns}$, мы получим систему множеств B_{nk} с нужными свойствами. Лемма доказана. $\square$

Равенство (9) можно переопределить с множеств $B_{nk} \in \mathfrak{R}(\mathfrak{S}_m)$ на множестве B_n и B при помощи теоремы 7 (Б.Леви), так как

$$\varphi_{B_n}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{B_{nk}}(x), \quad \varphi_{B_{n1}} \ll \dots \ll \varphi_{B_{nk}}, \\ \varphi_B(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{B_n}(x), \quad \varphi_{B_1} \gg \dots \gg \varphi_{B_n}.$$

В силу непрерывности меры данные равенства имеют место в каждой точке x . Если $\mu(A) = 0$, то $\mu(B) = 0$ и почти всюду

$$\varphi_B(x) = \mu_y(B_x) = 0.$$

Так как $A_x \subset B_x$, то для почти всех x множество A_x измеримо и

$$\begin{aligned}\varphi_A(x) &= \mu_y(A_x) = 0, \\ \int \varphi_A(x) d\mu_x &= 0 = \mu(A).\end{aligned}$$

Следовательно, для множества A меры нуль формула (9) верна. Представим A в виде $B \setminus C$, где из равенства (10) следует, что

$$\mu(C) = 0.$$

Если формула (9) верна для множеств B и C , следовательно, она верна и для самого множества A . Теорема доказана. $\square$

Пусть Y - числовая прямая, μ_y - линейная мера Лебега, а множество A есть множество точек (x, y) вида

$$\{(x, y) : x \in M, 0 \leq y \leq f(x)\}, \quad (11)$$

где M - μ_x -измеримое множество, а $f(x)$ - интегрируемая неотрицательная функция. Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_y(A_x) &= \begin{cases} f(x), & \text{при } x \in M, \\ 0, & \text{если } x \notin M, \end{cases} \\ \mu(A) &= \int_M f(x) d\mu_x.\end{aligned}$$

Теорема 10. *Интеграл Лебега неотрицательной функции $f(x)$ равен мере $\mu = \mu_x \otimes \mu_y$ множества A , определенного соотношением (11).*

Когда X - числовая прямая, M - отрезок, а функция $f(x)$ интегрируемая по Риману, тогда данная теорема сводится к вычислению интеграла через площадь, расположенную под графиком функции.

9 Теорема Фубини

Рассмотрим тройное произведение $U = X \times Y \times Z$; если на X, Y, Z заданы меры μ_x, μ_y, μ_z , то меру

$$\mu_u = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu_z$$

можно определить как

$$(\mu_x \otimes \mu_y) \otimes \mu_z,$$

или же как

$$\mu_x \otimes (\mu_y \otimes \mu_z).$$

В действительности, как легко проверить, эти определения равносильны.

Следующая теорема является основной в теории кратных интегралов.

Теорема 11. (Фубини). Пусть меры μ_x и μ_y определены на σ -алгебрах, σ -аддитивны и полны; пусть, далее,

$$\mu = \mu_x \otimes \mu_y$$

и функция $f(x, y)$ интегрируема по мере μ на множестве

$$A \subset X \times Y. \quad (12)$$

Тогда

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y) d\mu_y \right) d\mu_x = \int_Y \left(\int_{A_y} f(x, y) d\mu_x \right) d\mu_y. \quad (13)$$

Доказательство. Проведем сначала доказательство для случая $f(x, y) \geq 0$. С этой целью рассмотрим тройное произведение

$$U = X \times Y \times Z,$$

где третий множитель есть числовая прямая, и произведение мер

$$\lambda = \mu_x \otimes \mu_y \otimes \mu^1 = \mu \otimes \mu^1,$$

где μ^1 есть линейная лебегова мера.

В U определим подмножество W условием: $(x, y, z) \in W$, если $(x, y) \in A$, $0 \leq z \leq f(x, y)$. В силу теоремы 10

$$\lambda(W) = \int_A f(x, y) \mu. \quad (14)$$

С другой стороны, по теореме 9

$$\lambda(W) = \int_X \xi(W_x) d\mu_x, \quad (15)$$

где $\xi = \mu_y \times \mu^1$ и W_x обозначает множество пар (y, z) , для которых $(x, y, z) \in W$. При этом, снова по теореме 10.

$$\xi(W_x) = \int_{A_x} f(x, y) d\mu_y. \quad (16)$$

Сопоставляя (14), (15) и (16), получаем

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_X \left(\int_{A_x} f(x, y) d\mu_y \right) d\mu_x,$$

что и требовалось доказать. □

10 Практическая часть

10.1 Пример 1

При каких α и β существует интеграл Лебега на $[0, +\infty)$ от функции $f(x) = x^\alpha \ln^\beta x$?

Решение: Так как подынтегральная функция непрерывна, интеграл Лебега существует тогда и только тогда, когда несобственный интеграл Римана сходится абсолютно:

$$\int_0^{+\infty} |x^\alpha \ln^\beta x| dx = I < +\infty.$$

Пользуясь неотрицательностью первого сомножителя, а также, выполняя замену переменных $x = \frac{1}{t}$, имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^\alpha |\ln^\beta x| dx + \int_1^{+\infty} x^\alpha \ln^\beta x dx = \int_1^{+\infty} t^{(-\alpha-2)} |\ln^\beta t| dt + \int_1^{+\infty} x^\alpha \ln^\beta x dx = \\ &= \int_1^{+\infty} \ln^\beta x (x^\alpha + x^{(-\alpha-2)}) dx = \int_1^{+\infty} \ln^\beta x \cdot x^\alpha dx + \int_1^{+\infty} \ln^\beta x \cdot x^{(-\alpha-2)} dx = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Так как все подынтегральные функции непрерывны и неотрицательны, для опровержения существования I достаточно доказать расходимость одного из интегралов I_1 и I_2 , а для доказательства существования интеграла Лебега необходимо и достаточно установить сходимость обоих интегралов. Следует различать два случая:

- а. $\beta < 0$. В этом случае при $\alpha < -1$ расходится I_2 , при $\alpha > -1$ расходится I_1 . В случае же $\alpha = -1$ оба интеграла сходятся абсолютно тогда и только тогда, когда $\beta < -1$.
- б. $\beta \geq 0$. В этом случае при $\alpha < -1$ расходится I_2 , а при $\alpha > -1$ расходится I_1 , а при $\alpha = -1$ расходятся оба эти интеграла.

Таким образом, интеграл Лебега существует при $\alpha = -1$, $\beta < -1$, в остальных случаях интеграл Лебега не существует.

10.2 Пример 2

Существует ли интеграл Лебега от $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ на $[0, 1]$?

Решение: Функция $f(x)$ неотрицательна и непрерывна на всей области определения, следовательно, для существования интеграла Лебега необходимо и достаточно наличия сходимости соответствующего несобственного интеграла Римана:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{2dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \arcsin t \Big|_0^1 = \pi.$$

таким образом, интеграл Лебега существует и равен π .

10.3 Пример 3

Привести контрпример для теоремы 5.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Она неинтегрируема по Лебегу на всей прямой так, как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Однако несобственный интеграл по $f(x)$ существует и равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

10.4 Пример 4

Привести примеры функций, для которых существуют повторные интегралы, но равенство (13) не имеет места.

Решение: а) Пусть $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$,

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

при $x^2 + y^2 > 0$ и $f(0, 0) = 0$; тогда

$$\int_{-1}^1 f(x, y) dx = 0$$

при всех y и

$$\int_{-1}^1 f(x, y) dy = 0$$

при всех x . Поэтому

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dy \right) dx = 0$$

но интеграл в смысле двойного интеграла Лебеги по квадрату не существует, так как

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |f(x, y)| dx dy \geq \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(\phi) \cos(\phi)|}{r} d\phi = 2 \int_0^1 \frac{dr}{r} = \infty.$$

б) Пусть $A = [0, 1] \times [0, 1]$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

при $x^2 + y^2 > 0$ и $f(0, 0) = 0$; тогда

$$\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$$

а также

$$\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 f(x, y) dy \right) dx = \frac{\pi}{4}$$

имеют разные значения. И аналогично примеру под буквой а) соответствующий двойной интеграл не существует.

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)| dx dy = \infty$$

10.5 Пример 5

Найти интеграл $\int_{[-1,1] \times [0,2]} (x^2 - y) d\mu_L(x)$

Решение: Применим теорему Фубини

$$\int_{[-1,1] \times [0,2]} (x^2 - y) d\mu_L(x) = \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (x^2 - y) dy \right) dx.$$

Перейдём к интегралу Римана:

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (x^2 - y) dy \right) dx = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 (x^2 - y) dy = \frac{2x^3}{3} \Big|_{-1}^1 - 2x \Big|_{-1}^1 = -\frac{8}{3}.$$

Следовательно интеграл Лебега равен $-\frac{8}{3}$.

Заключение

Современная математика немыслима без функционального анализа. Сегодня идеи, методы, концепции, терминология и стили функционального анализа охватывают чуть ли не все области математики, объединяя их в единое целое.

В ходе курсовой работы была рассмотрена теорема Фубини и произведение систем множеств и мер, а также были разобраны типовые задачи для решения интеграла Лебега и приведены контрпримеры для теорем.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что практически всегда при вычислениях многомерных интегралов используется теорема Фубини.

Литература

- [1] **А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин** *Элементы теории функций и функционального анализа* – М.:Наука, 1976. - 531 с.
- [2] **А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани** *Элементы теории функций и функционального анализа* – М.:Наука, 1979. - 381 с.
- [3] **Н.Д. Копачевский** *Функциональный анализ: Учебное пособие* – С.:НИЦ КИПУ, 2008. - 140 с.
- [4] **К.В. Сторожук, И. А. Шведов** *Компактный курс математического анализа: Учебное пособие* – Н.:Новосиб. ГУ, 2012. - 90 с.
- [5] *Математический энциклопедический словарь* – М.:Сов. энциклопедия, 1988. - 847 с.