

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему

«Изучение неопределенных уравнений с целыми коэффициентами на фа-
культативных занятиях в школе»

Студент

Р. Курбанова 04.06.21 Курбанова Г.А.
(подпись, дата) (Ф.И.О. полностью)

Руководитель

С. Султанов 04.06.21 Султанов А.Я.
(подпись, дата) (Ф.И.О. полностью)

Нормоконтролёр

М. Журавлева 29.06.2021 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (Ф.И.О. полностью)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 07.06.2021 № 8)

Заведующий кафедрой

В.И. Паньженский 04.06.21 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (Ф.И.О. полностью)

Работа защищена с отметкой 3 (протокол заседания ГЭК от 07.07.2021 № 6)

Секретарь ГЭК

М. Журавлева 07.07.21 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (Ф.И.О. полностью)

Пенза 2021

Оглавление

Введение	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРОБЛЕМЫ ИЗУЧЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЦЕЛЫМИ.....	6
1.1.История изучения неопределенных уравнений с целыми коэффициентами.....	6
1.2.Необходимая теория для изучения неопределённых уравнений.....	12
1.3.Существование решений неопределённых уравнений. Основные теоремы	16
1.4.Методы решений неопределённых уравнений с целыми коэффициентами.....	19
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРОБЛЕМЫ ИЗУЧЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.....	34
2.1.Решение задач в целых числах при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ по математике	34
2.2.Факультативный курс «Решение неопределённых уравнений с целыми коэффициентами»	43
2.3.Конспекты занятий факультативного курса	47
Заключение.....	59
Список литературы	61

Введение

В школьном курсе алгебры и начал анализа, при сдаче ЕГЭ за курс средней школы и при решении олимпиадных задач встречаются различного вида задания, связанные с решением неопределённых уравнений. Они бывают весьма сложными и требуют нестандартного подхода к решению. Умение работать с подобными заданиями способствует развитию логического и аналитического мышления, формированию различных качеств личности, таких как самостоятельность, гибкость, критичность, целеустремленность. В процессе работы с неопределёнными уравнениями школьники учатся устанавливать причинно-следственные связи, овладевают приёмами целеполагания и рефлексии.

Если провести анализ школьных учебников, то можно сделать вывод, что список изучаемых вопросов, касающихся темы данной работы, достаточно узок. Вопрос о нахождении натуральных решений линейного уравнения раскрыт неполно. Рассматриваются далеко не все способы его решения.

Навыки работы с заданиями, связанными с нахождением корней неопределённых уравнений являются достаточно востребованными. Это связано с тем, что задачи подобного типа нередко появляются в вариантах ЕГЭ и математических олимпиад.

В процессе изучения неопределённых уравнений с целыми коэффициентами выполняется повторение ранее изученного материала, что способствует его более качественному усвоению. В большинстве случаев, на начальных этапах изучения данного раздела у школьников возникает много сложностей, связанных с различными факторами: разнообразие формул и методов решения уравнений такого типа, возможность применения к одному уравнению нескольких способов решения, отсутствие необходимых навыков. Последний фактор является наиболее значительным.

Все вышеперечисленное определило актуальность данной работы.

Цель выпускной квалификационной работы: изучение теоретических и методических аспектов понятия «неопределенные уравнения с целыми коэффициентами».

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах.

Предметом исследования являются неопределенные уравнения с целыми коэффициентами.

Задачи:

1. Изучить теорию неопределенных уравнений с целыми коэффициентами.
2. Проанализировать методы решений неопределённых уравнений с целыми коэффициентами.
3. Рассмотреть задачи в целых числах при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ по математике.
4. Разработать факультативный курс «Решение неопределённых уравнений с целыми коэффициентами».
5. Привести в пример конспекты двух уроков на заданную тему.

Практическую значимость данной работы обуславливает разработанный факультативный курс и практические рекомендации по формированию у учащихся более глубоких знаний и умений применять полученные знания при решении неопределенных уравнений с целыми коэффициентами.

В данной работе проанализированы типичные задачи, связанные с решением неопределённых уравнений различных степеней, изучена и проанализирована математическая литература, выполнена методическая работа, включающая в себя изучение теории, подбор заданий, разработку практических рекомендаций факультативного курса и конспектов.

Выпускная квалификационная работа содержит введение, две главы, заключение, список использованной литературы.

В первой главе определяются основные понятия, связанные с теорией неопределённых уравнений с целыми коэффициентами и способы их решения.

Во второй главе выпускной квалификационной работы проводится анализ олимпиад по математике и заданий ЕГЭ, а также разработан факультативный курс «Решение неопределённых уравнений с целыми коэффициентами» и приведены конспекты занятий из разработанного факультативного курса.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ПРОБЛЕМЫ ИЗУЧЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЦЕЛЫМИ

1.1. История изучения неопределенных уравнений с целыми коэффициентами

«Диофантовы уравнения – алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, у которых разыскиваются целые решения» [9, с. 5]. Данные уравнения были названы в честь известного математика Диофанта Александрийского, о котором известно крайне мало. Диофанта так же называют «отцом алгебры», так как из всех существующих способов решения таких уравнений большинство изобрёл именно он.

«Диофантовыми (неопределёнными) уравнениями принято называть уравнения с целыми коэффициентами, для которых надо найти целочисленные (или натуральные) решения. При этом количество неизвестных, входящих в уравнение, должно быть не менее двух [1]. Их можно записать в виде $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, n \geq 2$, где $P(x_1, \dots, x_n)$ – многочлен с целыми коэффициентами, а все переменные x_i принимают целочисленные значения» [10].

Главной целью Диофанта в работе с неопределёнными уравнениями было найти метод нахождения решения. Несмотря на то, что разбираемое уравнение может иметь множество решений, ему было достаточно нахождения одного из них.

Для решения неопределённого уравнения необходимо установить:

- 1) имеет ли оно хотя бы одно целочисленное решение;
- 2) конечно или бесконечно число его целочисленных решений;
- 3) найти все его целочисленные решения.

Сложно переоценить вклад Диофанта в развитие математики. Одним из величайших его трудов является «Арифметика» - сборник из (предположительно) 13 сочинений. Правда до нас дошли только шесть работ Диофанта. Место нахождения остальных книг остаётся неизвестным. Найденные сочи-

нения были обнаружены в 1464 г. выдающимся астрологом и математиком Иоганом Мюллером в Венеции.

Говоря о сущности книги «Арифметика» можно сказать, что она является сборником задач (189 штук) с их подробными решениями. Главная цель работы – изложить способы нахождения верных решений диофантовых уравнений (в том числе рациональных). Труд Диофанта позволяет подробно изучить свойства целых и рациональных чисел. Он предполагает знание некоторых приемов, таких как: преобразования выражений, подстановок, исключения и т. д.

Все сочинения в большей степени посвящены работе с уравнениями и их системами, имеющими множество решений, иными словами – работе с неопределёнными уравнениями. В своих книгах автор руководствуется только рациональными решениями.

Автор в основном проводит анализ решений неопределенных уравнений 2-ого и 3-его порядка.

Вопрос о решении неопределенных уравнений возник очень давно. Об этом свидетельствуют рукописи, которые сохранились из глубины тысячелетий. Еще в эпоху Вавилона люди были озадачены поиском пифагоровых троек – целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

Пифагорейцами были выведены формулы, способствующие нахождению решения данного уравнения:

$$x = k^2 - 1, y = 2k, z = k^2 + 1.$$

Здесь необходимо дать определение следующему термину: «пифагорова тройка называется *примитивной*, если она не может быть получена из какой – либо другой пифагоровой тройки умножением на одно и то же натуральное число» [12, с. 37]. Говоря проще, такие тройки чисел являются взаимно простыми (их НОД=1).

Стоит обратить внимание, что при $z \leq 100$ исходное уравнение имеет 16 примитивных троек:

(3; 4; 5)	(9; 40; 41)	(16; 63; 65)	(36; 77; 85)
(5; 12; 13)	(11; 60; 61)	(20; 21; 29)	(39; 80; 89)
(7; 24; 25)	(12; 35; 37)	(28; 45; 53)	(48; 55; 73)
(8; 15; 17)	(13; 84; 85)	(33; 56; 65)	(65; 72; 97)

Среди данных наборов нет следующих: (12; 16; 20), (10; 24; 26), (6; 8; 10) и т.д. Они не являются примитивными, потому что в них включены числа, делящиеся без остатка на числа из примитивных троек.

В своем сочинении «Начала» Евклид упоминает неопределённое уравнение следующего вида:

$$x^2 - ay^2 = 1$$

(где a – параметр). Для него описаны решения в целых числах. В этом замечательном труде для него приводятся целочисленные решения. Решение данного уравнения было известно ещё Архимеду, который выразил его в своей «Задаче о быках», звучавшей следующим образом: «Сколько у Солнца коров и быков, сосчитай, иностранец, ум наостривши, коль впрямь свойственна мудрость тебе. Сколько скота выгонялось на доли Сицилии влажной? Разного цвета стада бог лучезарный имел, счетом четыре». Данная задача делилась в два решения. Первое заключалось в нахождении количества коров и быков в стаде. Необходимо было решить систему уравнений с 8 неизвестными. Возникало множество подходящих решений, самым большим из которых являлось число пятьдесят миллионов триста восемьдесят девять тысяч семьдесят три головы. А 2 часть решения была более сложной, решением которой являлось число, выраженное через 206 545 десятичных знаков. Поэтому Архимед сформулировал заключение задачи, звучавшее следующим образом: «Если сумеешь всё это найти и взором духовным стада размеры объять сам и другим передать, гордо шествуй вперед, кичая великой победой: знай, что, других превзойдя, первый по мудрости ты» [14].

Хотя область неопределённых уравнений интересовала множество математиков, живших задолго до Диофанта, именно он начал всесторонне изучать и описывать их способы решения. Невозможно изучив 50 решений Дио-

фанта предугадать ещё одно; решение всех задач было индивидуальным и производилось разным методами, руководствуясь уникальными вычислительными приемами, которые опирались на определенные свойства чисел. Он не боялся сложных задач и любил проводить самые тяжелые вычисления.

В большинстве случаев, работая с системами таких уравнений, он уменьшал количество неизвестных, подставляя вспомогательные неизвестные или заменяя их произвольными рациональными значениями. Таким образом, многие задачи в процессе решения меняли свою суть, так как возникали некоторые неизвестные, определенные произвольным образом. Это сводило задачи, содержавшие неопределенные уравнения к задачам с определенными уравнениями.

Следующими, кто занимались всестороннем изучением диофантовых уравнений - индусские математики, которые работали с неопределенными уравнениями 1 степени. Необходимость в таких вычислениях возникла в связи с развитием астрономии. До современности сохранились работы индийского математика Брахмагупты, в которых содержится описание способа получения общего решения следующего неопределенного уравнения:

$$ax + by = c,$$

где a, b, c – целые числа [21, с. 57].

Масса методов алгебры появились благодаря решению диофантовых уравнений. Почти все известные европейские математики средних веков занимались изучением уравнений данного типа. Такие как: Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1170 – 1250 гг.), Франсуа Виета (1540 – 1603 гг.), Симона Стевина (1549 – 1620 гг.) и т.д. Отличительной чертой данного времени является то, что математики работали с диофантовыми уравнениями не читав его великого труда «Арифметика», так как сборник не был обнаружен почти до 17 в. Хотя они и были знакомы с некоторыми из его методов решений. Особенность этого периода заключается в том, что вплоть до последней четверти XVI в. Европейские математики, хотя и были знакомы со многими задачами

Диофанта и даже с некоторыми его методами, однако самой «Арифметики» не читали.

Ещё одним выдающимся математиком этого времени, внесшим вклад в изучение диофантовых уравнений стал итальянский математик Лука Пачоли (1445 – 1517), написавший труд «Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и отношениях». В своей книге он первым представил описание письменных приёмов счета с использованием арабской системы чисел. В 16 веке произошло событие, перевернувшее всю историю изучения диофантовых уравнений – в Ватиканской библиотеке Рафаэлем Бомбели был найден великий труд «Арифметика». В 1572 году им же был опубликован собственный труд «Алгебра». В этой книге содержатся почти 150 задач незабвенного труда Диофанта.

В 17 веке Клодом Гаспаром – французским математиком, был осуществлен перевод Диофантова труда на латынь. В этом издании было множество комментариев к известным задачам великого мыслителя. Например автор впервые применил алгоритм Евклида к простейшему неопределенному уравнению вида: $ax + by = c$. Далее рассматривались подходящие дроби. Гаспар стал первым математиком, кто попределили связь между алгоритмом Евклида и решением линейного неопределенного уравнения.

Вышеупомянутый труд стал опорой для исследований известного математика Пьера Ферма (1601 – 1665). Он выдвинул гипотезу о том, что у неопределенного уравнения вида $a^n + b^n = c^n$ нет решений на множестве целых положительных чисел, ни при каком натуральном $n \geq 3$.

Вплоть до 18 века известными математиками пополнялись правила решения диофантова уравнения $ax + by = c$. Среди деятелей этого времени звучат имена Мишеля Ролля (1652 – 1719 гг.), великого Л. Эйлера, Н. Саундерсона (1682 – 1739 гг.). Комбинаторные методы решения использовал К.Ф. Гинденбург (1741 – 1808 гг.). Лагранж применил цепные дроби Ж. Л. Лагранж к решению линейных диофантовых уравнений.

В начале 20 века немецким математиком Давидом Гильбертом (1862 – 1943 гг.) были сформулированы 23 задачи, «проблемы Гильберта» (так их называют). В одной из этих задач ставился вопрос об отыскании универсального метода решения неопределенных уравнений в целых числах.

К середине того же века выдвинулось предположение её о неразрешимости. Толчком для заключения такого вывода стало доказательство А.А. Марковым и Э.Л. Постом неразрешимости одной алгебраической задачи. После этого, американским математиком Мартином Дэвисом была написана работа, содержащая идеи способа решения данной задачи с использованием натуральных чисел. В 1970 русским математиком Ю. Матиясовичем было опубликовано доказательство неразрешимости 10-й проблемы Гильберта.

Уравнением вида $x^y - z^t = 1$ (в нём все переменные являются целыми числами, большими 0) связано с именем бельгийского математика Э.Ш. Каталана (1814 – 1894 гг.). Он предположил, что данное диофантово уравнение имеет только одно решение: $x = 3, y = 2, z = 2, t = 3$, на множестве N , для любого $n \in N, n > 1$. Данная задача получила название «Проблема Каталана». Она была разрешена в начале 21 века румынским математиком Предом Михайлеску. Он доказал справедливость данного предположения.

Проблема решения неопределенных уравнений в целых числах решена до конца только для уравнений первой и второй степени с двумя неизвестными. Решение уравнений в целых числах имеет не только теоретический интерес. Они встречаются в различных областях знаний.

1.2. Необходимая теория для изучения неопределённых уравнений

Прежде чем говорить о неопределённых уравнениях, необходимо определить некоторые термины, связанные с кольцом целых чисел, и отношение делимости в нём.

Делимость целых чисел является основополагающим понятием алгебры и теории чисел. Оно представляет собой отношение, определённым на множестве целых чисел. Деление является одним из наиболее трудных действий. Например, оно является исключительным в работе с нулем. В случае с остальными операциями данное число является равноправным. Но делить на него нельзя. Знания принципов деления нужны человеку не только для работы со сложными алгебраическими выражениями, но и для выполнения базовых математических операций.

Знания понятия «признак делимости чисел» упрощают решение многих задач и помогают легко определить является ли число кратным заданному, не совершая при этом указанную операцию.

Поговорим о делимости в кольце целых чисел.

Определение 1.1 «Целое число a делится на целое число b , отличное от нуля, если существует целое число q , такое, что верно равенство $a = bq$ ».

Лемма 1. (Простейшие свойства делимости).

1. «Ноль делится на любое отличное от нуля целое число a ».
2. «Любое целое число делится на 1 и -1 ».
3. «Любое целое число $a \neq 0$ делится само на себя».
4. «Знак числа не влияет на делимость, т.е. если a кратно b , то a кратно $(-b)$, $(-a)$ кратно b , $(-a)$ кратно $(-b)$ ».
5. «Если a кратно b и b кратно c , то a кратно c (транзитивность делимости)».
6. «Если каждое слагаемое суммы делится на некоторое целое число, то и сумма делится на это число. (Обратное утверждение неверно)».

7. «Если одно из двух целых чисел делится на какое-либо целое число b , то сумма делится на b тогда и только тогда, когда и второе число делится на b ».

8. «Если уменьшаемое и вычитаемое делятся на целое число b , то и их разность делится на это число, т.е. из a кратно b и c кратно b вытекает, что $(a - c)$ кратно b . (Обратное утверждение неверно)».

9. «Если хотя бы один из сомножителей делится на какое-либо целое число, то и произведение этих сомножителей делится на это число. (Обратное утверждение неверно)».

10. «Если a кратно b и $a \neq 0$, то $|a| \geq |b|$ » [19, с. 54–55].

Следствия: Если:

1) a кратно b , то либо $a = 0$, либо $|a| \geq |b|$;

2) a кратно b и b кратно a , то $|a| = |b|$;

3) 1 кратно a , то $a = 1$ или $a = -1$.

Определение 1.2 «Целое число a делится с остатком на целое число b , $b \neq 0$, если существуют целые числа q, r такие, что $a = bq + r$, причем $0 \leq r < |b|$ ».

Теорема 1.1 (о делении с остатком). «Для любых целых чисел a и b ($b \neq 0$) существует единственная пара целых чисел q, r , удовлетворяющих условию $a = bq + r$, где $0 \leq r < |b|$ ».

Пример 1. Разделите ± 257 на ± 23 .

$253 = 23 \cdot 11 < 257 < 23 \cdot 12 = 276$. Число 11 в данном случае является неполным частным, а 4 – остатком, так как $257 = 23 \cdot 11 + 4$.

Необходимо поделить число -257 на 23. Для выполнения данного задания нужно определить целое число q , такое, что $23q \leq -257 < 23(q + 1)$. Число 12 является неполным частным, а 19 – остатком, потому что $-257 = 23(-12) + 19$.

Теперь произведем деление на отрицательное число -23 . Для этого запишем число 257 в следующем виде $(-23)(-11) + 4$. А для того, чтобы

поделить число -257 нужно представить его в следующем виде $23(-12) + 19$. Ответ:

$$257 = 23 \cdot 11 + 4,$$

$$257 = (-23)(-11) + 4,$$

$$-257 = 23(-12) + 19,$$

$$-257 = (-23)12 + 19.$$

Так же, необходимо определить понятие НОД целых чисел.

Теорема 1.2 «Любое целое число $a \neq 0$ имеет конечное число целых делителей».

Допустим число b — это любой целый делитель числа a . Тогда $|a| \geq |b|$. Из этого можно сделать вывод, что $-|a| \leq b \leq |a|$. Далее следует, что на отрезке $[-|a|, |a|]$ имеется конечное число целых чисел. Это означает следующее: число a имеет конечное число целых делителей.

Определение 2.1. «Общим делителем целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_k, k \geq 2$ называется целое число, которое делит каждое из чисел $a_j, j = \overline{1, k}$ ».

Допустим, что среди чисел a_j имеется число, неравное нулю. Тогда (опираясь на вышеопределенную теорему) существует конечное число общих делителей, из которых можно выделить наибольший. Стоит обратить внимание, что число 1 является общим делителем для любого набора чисел. Поэтому НОД этих чисел ≥ 1 . Значит НОД является натуральным числом.

Определение 2.2. «Целые числа $a_1, a_2, \dots, a_k, k \geq 2$ называются взаимно простыми, если их НОД = 1».

Определение 2.3. Целые числа $a_1, a_2, \dots, a_k, k \geq 2$ называются попарно взаимно простыми, если НОД любых двух чисел этой совокупности равен 1.

Теорема 2.3 $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \text{НОД}(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_k|)$.

Теорема 2.4 Если $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ и a кратно b , то $\text{НОД}(a, b) = b$.

Теорема 2.5 Если целые числа a, b, c, t связаны равенством $a = bc + t$, то $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, t)$, где a, b, t одновременно не равны нулю [7, с. 25].

Наименьшее общее кратное целых чисел (НОК).

Определение 3.1 «Общим кратным целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_k, k \geq 2$ отличных от нуля называется целое число, которое делится на каждое из этих чисел (ОК)».

Можно сделать вывод, что для любого набора целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_k, k, a_i \neq 0, i = \overline{1, k}$ имеется бесконечно множество ОК, к примеру, число вида $a_1 * a_2 * \dots * a_k * n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Стоит обратить внимание, что число $|a_1 * a_2 * \dots * a_k|$ является натуральным ОК набора целых чисел $a_1, a_2, \dots, a_k, k \geq 2$, поэтому НОК равно этому числу или меньше его. Из этого следует, что так как $\text{НОК} < |a_1 * a_2 * \dots * a_k|$, то оно содержится в промежутке $[1; |a_1 * a_2 * \dots * a_k|]$, где находится конечное число натуральных чисел. Таким образом, в этом же промежутке содержится конечное число ОК совокупности $a_1, a_2, \dots, a_k$, где найдется и НОК.

Определение 3.2 Наименьшее натуральное ОК целых чисел, отличных от нуля, называется наименьшим общим кратным этих чисел и обозначается $\text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ или $[a_1, a_2, \dots, a_k], k \geq 2$.

Теорема 3.1 « $\text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \text{НОК}(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_k|)$ ».

Теорема 3.2 « $\text{НОК}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a, b)}, a, b \in \mathbb{N}$ ».

Теорема 3.3 «Любое общее кратное целых чисел делится на их наименьшее общее кратное».

Теорема 3.4 «Частные от деления наименьшего общего кратного целых чисел на эти числа суть взаимно простые числа».

Теорема 3.5 $\text{НОК}(ca_1, a_2, \dots, a_k) = c \text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Теорема 3.6 $\text{НОК}\left(\frac{a_1}{c}, \frac{a_2}{c}, \dots, \frac{a_k}{c}\right) = \frac{\text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_k)}{c}$.

Теорема 3.7 НОК попарно взаимно простых чисел равно модулю произведения этих чисел, т.е. $\text{НОК}(a_1, a_2, \dots, a_k) = |a_1, a_2, \dots, a_k|$, где $\text{НОД}(a_i, a_j) = 1, i \neq j$ [7, с. 28–30].

1.3. Существование решений неопределённых уравнений. Основные теоремы

«Неопределёнными уравнениями первой степени с двумя неизвестными называют уравнения вида $ax + by = c$, где a, b, c - числа из некоторой данной совокупности (действительные, рациональные, целые и т.п.), причем a и b не равны нулю. Решениями неопределённого уравнения называют любые пары чисел $(a; \beta)$, которые принадлежат данной совокупности, удовлетворяющие вышеуказанному уравнению».

Для начала, необходимо понять как выглядят корни данного неопределённого уравнения в случае, если a, b, c – действительные числа. Решим его относительно, какого угодно неизвестного. Например, для y получим:

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Это выражение показывает, что y однозначно зависит от x , само же x может быть совершенно произвольным. Следовательно, если a, b, c – действительные числа, то уравнение имеет бесконечное множество решений

$$\left(r; \frac{c - ar}{b}\right),$$

где r - произвольное действительное число.

Если a, b, c – рациональные числа, то естественно рассматривать рациональные решения уравнения. Очевидно, что они задаются самой формулой $\left(r; \frac{c - ar}{b}\right)$, где в этот раз число r является рациональным.

Наиболее интересен случай, если числа a, b и c являются целыми и необходимо найти целые решения данного неопределённого уравнения. Задачу о нахождении таких целых чисел можно свести к следующей формулировке:

«из бесконечного множества действительных решений неопределенного уравнения необходимо определить лишь целые». Конечно, данное ограничение сильно уменьшает количество решений.

Для начала нужно понять, в каких случаях возможно решение данного уравнения в целых числах. Ответ на этот вопрос заключен в следующих теоремах.

Теорема 1. *«Если свободный член c неопределенного уравнения $ax + by = c$ не отделится на наибольший общий делитель коэффициентов a и b , НОД($a; b$), то уравнение не имеет целых решений» [5, с. 47].*

Докажем данную теорему. Допустим $k = \text{НОД}(a; b)$, такое что $a = mk$, $b = nk$, где числа m и n являются целыми. В этом случае рассматриваемое уравнение будет иметь вид

$$mkx + nky = c,$$

или

$$k(mx + ny) = c.$$

Если предположить, что существуют такие целые числа x и y , которые удовлетворяют вышеуказанному уравнению, то можно сделать вывод, что c делится на k . Данное противоречие доказывает теорему 1.

Если у чисел a , b и c существует общий множитель, то при сокращении на этот множитель возможен случай, что у чисел a и b есть общий множитель, или что они взаимно просты. В первом варианте, уравнение не имеет целых решений (следствие из теоремы 1). Другой случай приводит нас к формулированию следующей теоремы.

Теорема 2. *«Если коэффициенты a и b неопределенного уравнения $ax + by = c$ являются взаимно простыми числами, то уравнение имеет, по крайней мере, одно целое решение» [5, с. 51].*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a > 0$. Решив уравнение относительно x , получим

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Докажем, прежде всего, что если в эту формулу вместо y подставлять все натуральные числа, меньшие a , т.е. числа $0, 1, 2, \dots, a-1$, и каждый раз совершать деление, то все a остатков будут различны. В самом деле, подставим вместо y какие-нибудь два числа, меньшие a (из множества $0, 1, 2, \dots, a-1$). В результате мы получим две дроби

$$\frac{c - bm_1}{a} \text{ и } \frac{c - bm_2}{a}$$

Найдем:

$$\frac{c - bm_1}{a} = q_1 + \frac{r_1}{a}, \frac{c - bm_2}{a} = q_2 + \frac{r_2}{a}.$$

Предположим, что остатки и равны. Тогда, вычитая второе равенство из первого, получим

$$\frac{c - bm_1}{a} - \frac{c - bm_2}{a} = q_1 - q_2$$

или

$$\frac{b(m_1 - m_2)}{a} = q_1 - q_2.$$

Так как $q_1 - q_2$ – число целое, то и левая часть должна быть целым числом. Стало быть, $b(m_1 - m_2)$ должно делиться на a . Но числа a и b – взаимно просты, следовательно, $m_1 - m_2$ должно делиться на a , т.е. разность двух натуральных чисел, каждое из которых меньше a , должна делиться на a , что невозможно. Значит r_1 не может равняться r_2 , т.е. все остатки различны.

Итак, мы получили a различным натуральным остатков, меньших a . Но различные a натуральных чисел, не превосходящие a , суть не что иное, как числа $0, 1, 2, \dots, a - 1$. Следовательно, среди остатков непременно найдется один и только один, равный нулю. Значение y , подстановка которого в выражение $(cby)/a$ дает остаток 0 , превращает $x = (c - by)/a$ в целое число. Итак, a и b взаимно просты, то уравнение действительно допускает целые решения, что и требовалось доказать.

Доказанная выше теорема 1 утверждает, что условие $\text{НОД}(a; b) = 1$ является необходимым условием для решимости неопределенного уравнения

в целых числах. Теорема 2 утверждает, что это условие является достаточным.

1.4. Методы решений неопределённых уравнений с целыми коэффициентами

Метод подбора

Теорема 2 дает практическую возможность находить одну пару решений неопределенного уравнения в целых числах. Пусть, например, дано уравнение

$$7x + 5y = 232$$

Решаем это уравнение относительно того из неизвестных, при котором находится наименьший (по модулю) коэффициент. Подставляем в это выражение вместо x натуральные числа, меньшие 5, т.е. 0, 1, 2, 3, 4. В результате находим:

$$x = 0, y = \frac{232}{5} = 46$$

$$x = 1, y = \frac{232 - 7}{5} = 45.$$

Итак, одно из решений данного уравнения получено: $x = 1, y = 45$.

Этот прием решения неопределенного уравнения целесообразно употреблять в тех случаях, когда коэффициент при каком-либо из неизвестных не велик по модулю.

Коль скоро найдена одна пара целых решений, то легко найти и все такие решения, используя теорему 3.

Теорема 3. Неопределенное уравнение

$$ax + by = c$$

в котором a и b являются взаимно простыми числами, допускает бесконечное множество целых решений. Все эти решения задаются формулами

$$x = a + bt \text{ и } y = \beta - at$$

где $(a; \beta)$ – некоторое решение уравнения, а t – произвольное целое число [5, с. 53].

Доказательство. Так как по условию пара $(\alpha; \beta)$ является решением нашего уравнения, то подстановка $x = \alpha, y = \beta$ в уравнении дает тождество

$$\alpha x + \beta b = c$$

Вычитая это тождество из нашего, имеем

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0$$

откуда

$$x = a + \frac{b(\beta - y)}{\alpha}$$

Чтобы x было целым числом, необходимо, чтобы $\frac{b(y-\beta)}{\alpha}$ было целым, т.е. чтобы произведение $b(\beta - y)$ делилось на α без остатка. Но a и b – взаимно простые числа; стало быть для этого необходимо, чтобы $\frac{b(y-\beta)}{\alpha}$ равнялось некоторому числу. Обозначим это целое число через t :

$$\frac{\beta - y}{\alpha} = t$$

Тогда $y = \beta - at$ и, следовательно,

$$x = a + \frac{b(\beta - y)}{\alpha} = a + bt$$

Что и требовалось доказать.

Метод спуска

Метод спуска впервые был применен в VI веке Ариабхаттой. Метод заключается в сведении данного уравнения к последовательности других уравнений с убывающими по абсолютной величине коэффициентами перед неизвестным.

Допустим, что коэффициент при одном из неизвестных равняется единице. Например, рассмотрим уравнение

$$x + by = c.$$

Отсюда

$$x = c - by.$$

Положив $y = 0$, получим для x целое значение $x = c$. Следовательно, одна пара решений уравнения имеет вид $x = c, y = 0$. Все же целые решения задаются формулами

$$x = c + bt, y = -t.$$

Аналогично, если коэффициент при y равен 1, то все целые решения задаются формулами

$$x = t, y = c - at.$$

На этом замечании основан общий способ решения неопределенного уравнения в целых числах. В самом деле, если бы нам удалось привести уравнение $ax + by = c$ к уравнению, в котором один из коэффициентов равен единице, то задача была бы решена. Но когда a и b – взаимно простые числа, такое произведение всегда возможно. Пусть, например, дано уравнение

$$5x - 8y = 39.$$

Решаем это уравнение относительно неизвестного, имеющего меньший по модулю коэффициент, в данном случае относительно x . Получаем

$$x = \frac{39 - 8y}{5}. (1)$$

Выделив целую часть найдем, что

$$x = 7 - y + \frac{4 - 3y}{5}.$$

Полученное для x выражение состоит из двух частей: $7 - y$, которая будет целой при всяком целом y , и дробной $\frac{4-3y}{5}$. Для того чтобы x было целым числом, необходимо выбрать такие целые значения y , при которых $\frac{4-3y}{5}$ является целым числом. Положим

$$4 - 3y = 5t,$$

где t – произвольное целое число.

Решаем это уравнение относительно неизвестного, имеющий меньший по модулю коэффициент, т.е. относительно y :

$$y = \frac{4 - 5t}{3}.$$

Выделив целую часть, получим

$$y = 1 - t + \frac{1 - 2t}{3}$$

Рассуждая аналогично предыдущему, вводим новую переменную u :

$$3u = 1 - 2t.$$

Выразим неизвестную с наименьшим коэффициентом, в этом случае переменную t :

$$t = \frac{1 - 3u}{2} = \frac{1 - u}{2} - u.$$

Требуя, чтобы $\frac{1-u}{2}$ было целым, получим: $\frac{1-u}{2} = 2v$, откуда $u = 1 - 2v$.

Дробей больше нет, спуск закончен (процесс продолжаем до тех пор, пока в выражении для очередной переменной не останется дробей).

Теперь необходимо «подняться вверх». Выразим через переменную v сначала t , потом y и затем x :

$$t = \frac{1-u}{2} - u = \frac{1-1+2v}{2} - 1 + 2v = 3v - 1; y = \frac{4-5t}{3} = \frac{4-5(3v-1)}{3} = 3 - 5v.$$

$$x = \frac{39-8y}{5} = \frac{39-8(3-5v)}{5} = 3 + 8v.$$

Формулы $x = 3 + 8v$ и $y = 3 - 5v$, где v – произвольное целое число, представляют общее решение исходного уравнения в целых числах.

Отсюда видно, что процесс решения сводится к такой последовательности действий, которая имеет место при нахождении наибольшего общего делителя (НОД ($a; b$)) чисел a и b с помощью алгоритма Евклида. Но коэффициенты a и b взаимно просты, а поэтому наибольший общий делитель их равен единице. Следовательно, продолжая ряд указанных 14 действий, мы обязательно дойдем до остатка, равного единице, который и

будет коэффициентом в одном из получаемых уравнений. Тем самым, задача сводится к уже известному частному случаю.

Метод цепной дроби

К решению диофантовых уравнений был применен новый метод цепных дробей. Впервые использовал его Лангранж, который однако замечает, что фактически это тот же способ, который был дан Баше де Мезирьяом и другими математиками.

Обратимся к алгоритму Евклида. Из равенства $a = bq_1 + r_2$ вытекает, что дробь $\frac{a}{b}$ можно записать в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{r_1}{b} = q_1 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}. \text{ Из второго равенства } b = r_2q_2 + r_3 \text{ имеем } \frac{a}{b} = q_1 + \frac{b}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{\frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}{q_2 + \frac{r_2}{r_3}}. \text{ Значит, } \frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_3}}.$$

Продолжим этот процесс до тех пор, пока не придём к знаменателю q_n . В результате мы представим обыкновенную дробь $\frac{a}{b}$ в следующем виде: $\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_n}}}$.

Эйлер назвал дробь, стоящую в правой части равенства непрерывной. Приблизительно в тоже время в Германии появился другой термин – цепная дробь. Так за этими дробями и сохранились оба названия. Ввиду громоздкости развёрнутой записи цепной дроби применяют компактную запись

$$\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \dots, q_n].$$

Очевидно, что любое рациональное число, и только оно записывается в виде конечной цепной дроби. Иррациональным числам соответствуют бесконечные цепные дроби.

Если при построении цепной дроби остановиться на знаменателе q_k , то получится дробь $[q_1, q_2, \dots, q_k]$, которую называют k -й подходящей дробью для искомой и обозначают $\frac{p_k}{q_k}$. Найдем вид некоторых подходящих дробей:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1}; \frac{P_2}{Q_2} = q_1 + \frac{1}{q_2}; \frac{P_3}{Q_3} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} = \frac{q_3(q_1q_2 + 1) + q_1}{q_3q_2 + 1} = \frac{q_3P_2 + P_1}{q_3Q_2 + Q_1}.$$

Для рационального числа $\frac{a}{b}$ последовательность подходящих дробей конечна, и ее последний элемент $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$.

Теорема 4. *Общее решение в целых числах уравнения $ax + by = c$ (*), где a, b, c – целые числа, отличные от нуля и $\text{НОД}(a, b) = 1$, можно представить в виде*

$$x = (-1)^n c Q_{n-1} - bt, y = (-1)^{n+1} c P_{n-1} + at,$$

где t – произвольное целое число, а P_{n-1} и Q_{n-1} – числитель и знаменатель предпоследней подходящей дроби разложения числа $\frac{a}{b}$ в цепную дробь [5, с. 63].

Доказательство. Пусть $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ – разложение числа $\frac{a}{b}$ в цепную дробь, $\frac{P_s}{Q_s}$ ($s = 1, 2, \dots, n$) – подходящие дроби этого разложения. Тогда $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{a}{b}$. По условию дробь $\frac{a}{b}$ – несократимая и дробь $\frac{P_n}{Q_n}$ также несократимая, поэтому $P_n = a, Q_n = b$. По свойству подходящих дробей $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^n$, то есть $a Q_{n-1} - b P_{n-1} = (-1)^n$. Умножив обе части последнего равенства на $(-1)^n$, получим равенство $a((-1)^{n-1} c Q_{n-1}) + b((-1)^{n-1} c P_{n-1}) = (-1)^n$. Это равенство означает, что пара чисел $x_0 = (-1)^{n-1} c Q_{n-1}$ и $y_0 = (-1)^{n-1} c P_{n-1}$ является целым решением уравнения (*).

Итак, для решения уравнения $ax + by = c$, где a, b, c – целые коэффициенты, способом «цепной дроби» нужно:

- 1) представить дробь в виде конечной цепной дроби: $\frac{a}{b} = [q_1, q_2, \dots, q_n]$;
- 2) записать подходящие дроби;
- 3) найти решение уравнения по формулам.

$$\begin{cases} x = (-1)^{n-1}cQ_{n-1} - bt, \\ y = (-1)^{n-1}cP_{n-1} + at, t \in Z. \end{cases}$$

Способ рассеивания (размельчения)

Впервые способ рассеивания (размельчения) применил индийский математик Ариабхатта в начале VI века. Данный метод заключается в сведении данного уравнения к последовательности других уравнений с убывающими по абсолютной величине коэффициентами перед неизвестными. В школьном курсе математики данный метод не рассматривается, но его также можно рассмотреть на курсе по выбору для учащихся 10 – 11 классов.

Алгоритм, основанный на последовательном уменьшении по модулю коэффициентов уравнения (1) при неизвестных [39]:

1. Выбор наименьшего по модулю коэффициента (пусть $|m| < |n|$).
2. Проведение процедуры уменьшения коэффициентов. Это делается с помощью деления с остатком.

Пусть $n = l m + q$, где $0 < q \leq m - 1$, тогда $m x + n y = k \Leftrightarrow m x + (l m + q) y = k \Leftrightarrow m x + l m y = k - q y$. Левая часть последнего уравнения делится на m . Значит, должна делиться на m и правая часть: $k - q y = m t$, где $t \in Z$, t – новая переменная.

3. Повторение процедуры уменьшения коэффициентов. Новое уравнение отличается от старого только тем, что его коэффициенты по модулю меньше коэффициентов старого. За конечное число шагов добьемся того, что коэффициент при одном из новых неизвестных будет равен 1.

4. Возврат от новых переменных к исходным. Продемонстрируем его на примере решения следующего примера.

Пример 2: Найти два числа, если разность произведений второго на 79 и первого на 23 равна 1.

Решение: Возьмем за x – первое число, за y – второе число, тогда нам требуется решить уравнение: $79y - 23x = 1$. Проведем деление с остатком: $79 = 23 * 3 + 10$ и перепишем исходное уравнение в виде

$$23x = 79y - 1 = (23 * 3 + 10)y - 1 = 69y + 10y - 1$$

$$23x - 69y = 10y - 1.$$

Левая часть последнего уравнения кратна 23, поэтому должна быть кратна и правая часть: $10y - 1 = 23t$ или $10y = 23t + 1$, где $t \in \mathbb{Z}$ – новое неизвестное. Полученное новое уравнение по типу точно такое же, как исходное. Однако коэффициенты при неизвестных в нем уменьшились по модулю (измельчились). Повторим процедуру уменьшения коэффициентов еще раз:

$$10y = 23t + 1 = (10 * 2 + 3)t + 1$$

$$10y - 20t = 3t + 1$$

$$3t + 1 = 10u,$$

где $u \in \mathbb{Z}$ – новое неизвестное.

Повторим процедуру уменьшения коэффициентов в последний раз:

$$3t + 1 = 10u = (3 * 3 + 1)u$$

$$3t - 9u = u - 1$$

$$u - 1 = 3v, v \in \mathbb{Z}.$$

Осталось выразить x и y через v . Поскольку $u = 3v + 1$, то:

$$1. \quad 3t = 10u - 1 = 10(3v + 1) - 1 = 30v + 9 \rightarrow t = 10v + 3.$$

$$2. \quad 10y = 23t + 1 = 23(10v + 3) + 1 = 230v + 70 \rightarrow y = 23v + 7.$$

$$3. \quad 23x = 79y - 1 = 79(23v + 7) + 1 = 79 * 23v + 552 \rightarrow x = 79v + 24.$$

Ответ: $(79v + 24, 23v + 7)$, где v – целое число.

Алгоритм Евклида

Существует довольно простой прием, позволяющий находить наибольший делитель двух натуральных чисел. Этот прием называется

алгоритмом Евклида Евклид, великий ученый, живший около 2000 лет назад, занимался не только геометрией, которая носит его имя. Чтобы найти наибольший общий делитель двух чисел:

- 1) надо большее из двух чисел разделить на меньшее;
- 2) потом меньшее из чисел на остаток при первом делении;
- 3) затем остаток при первом делении на остаток при втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдет деление без остатка. Последний отличный от нуля остаток и есть искомый НОД двух данных чисел [18].

Рассмотрим пример.

Пример 3. Найти НОД (645; 381).

Решение:

Разделим с остатком 645 на 381. Мы получим:

$$645 = 381 \cdot 1 + 264$$

Далее разделим с остатком 381 на 264, получим:

$$381 = 264 \cdot 1 + 117$$

Теперь разделим с остатком 264 на 117, получим:

$$264 = 117 \cdot 2 + 30$$

Продолжим процесс деления, разделим с остатком 117 на 30, получим:

$$117 = 30 \cdot 3 + 27$$

Далее, $30 = 27 \cdot 1 + 3$

Следующий шаг – делим 27 на 3, получаем, что

$$27 = 3 \cdot 9 + 0,$$

т. е. 27 делится на 3 без остатка. Значит, наибольший общий делитель чисел 27 и 3 равен 3, следовательно, и наибольший общий делитель чисел 645 и 381 равен 3, т. е. последнему отличному от нуля остатку.

Таким образом, $\text{НОД}(645; 381) = 3$.

Прием разыскания наибольшего общего делителя, примененный в этом примере, и представляет собой алгоритм Евклида.

Алгоритм решения неопределенного уравнения с помощью алгоритма Евклида:

1. Найти наибольший общий делитель чисел a и b :
если $(a, b) = d > 1$ и c не делится на d , то уравнение целых решений не имеет;
если $(a, b) = d > 1$ и $c : d$, то уравнение имеет целые решения.
2. Разделить почленно уравнение $ax + by = c$ на d , получив при этом уравнение $a_1x + b_1y = c_1$, в котором $(a_1, b_1) = 1$.
3. Найти целое решение (x_0, y_0) уравнения $a_1x + b_1y = 1$, путем представления 1 как линейной комбинации чисел a и b .
4. Составить общую формулу целых решений данного уравнения

$$x = x_0c + bt$$

$$y = y_0c - at$$

где x_0, y_0 – целое решение уравнения $ax + by = 1$, t – любое целое число [20].

Методы решения неопределённых уравнений высших степеней

Рассмотрим методы, которые применяются к решению диофантовых уравнений второй и выше степеней.

1. Применение метода разложения на множители при решении диофантовых уравнений.

В курсе 7 класса учащиеся знакомятся с такими приемами как: вынесение общего множителя за скобки, использование формул сокращенного умножения, способ группировки при изучении метода разложения на множители, когда начинают проходить тему «Многочлены».

Перебрать все варианты при решении уравнения с двумя переменными не всегда легко. В том случае же, если уравнение имеет целочисленные решения, то перебрать их вовсе невозможно, так как таких решений бесконечно много. Поэтому существует еще один прием – метод разложения на множители.

Пример 4. Решить в целых числах уравнение $2x^3 + xy - 7 = 0$.

Решение: Приведем данное уравнение к следующему виду: $x(2x^2 + y) = 7$. Так как $7 = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = -1 \cdot -7 = -7 \cdot (-1)$, то нам нужно рассмотреть 4 системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x = 1, \\ 2x^2 + y = 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = 7, \\ 2x^2 + y = 1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x = -1, \\ 2x^2 + y = -7; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x = -7, \\ 2x^2 + y = 1. \end{cases}$$

Из каждой системы получаем решения:

$$1) x = 1, y = 7 - 2 \cdot 1^2 = 5, \text{ т.е. пара } (1; 5);$$

$$2) x = 7, y = 1 - 2 \cdot 7^2 = -97, \text{ т.е. пара } (7; -97);$$

$$3) x = -1, y = -7 - 2 \cdot (-1)^2 = -9, \text{ т.е. пара } (-1; -9);$$

$$4) x = -7, y = -1 - 2 \cdot (-7)^2 = -99, \text{ т.е. пара } (-7; -99).$$

Ответ: $(1; 5), (7; -97), (-1; -9), (-7; -99)$.

Метод разложения на множители может использоваться и при решении линейного уравнения с двумя неизвестными.

Пример 5. Решить в целых числах уравнение $x + y = xy$.

Решение: Произведем ряд преобразований исходного уравнения:

$$xy - x - y = 0,$$

$$x(y - 1) - y = 0,$$

$$x(y - 1) - y + 1 - 1 = 0,$$

$$x(y - 1) - (y - 1) = 1,$$

$$(y - 1)(x - 1) = 1.$$

Запишем уравнение $x + y = xy$ в виде $(x - 1)(y - 1) = 1$. Произведение двух целых чисел может равняться 1 только в том случае, когда оба они

равны 1 или -1 . То есть исходное уравнение равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x - 1 = 1, \\ y - 1 = 1; \\ x - 1 = -1, \\ y - 1 = -1. \end{cases}$$

Решение первой системы: $x = 2, y = 2$, т.е. пара $(2; 2)$. Решение второй системы: $x = 0, y = 0$, т.е. пара $(0; 0)$.

Ответ: $(2; 2), (0; 0)$.

2. Применение метода оценки при решении диофантовых уравнений.

Основной принцип данного метода – преобразования уравнения в целых числах в уравнение с очевидной оценкой. В большинстве случаев уравнение сводится к неотрицательному выражению. Данный метод применяется при решении нелинейных диофантовых уравнений, поэтому изучать его лучше в 10 – 11 классах.

Рассмотрим данный метод на примере:

Пример 6. Решить в целых числах уравнение $5x^4 - 40x^2 + 2y^6 - 32y^3 = -208$.

Решение: Преобразуем исходное уравнение:

$$5(x^4 - 8x^2 + 16) + 2(y^6 - 16y^3 + 64) = 0.$$

Используя формулы сокращенного умножения, получим:

$$5(x^2 - 4)^2 + 2(y^3 - 8)^2 = 0.$$

Так как $5(x^2 - 4)^2 \geq 0$ и $2(y^3 - 8)^2 \geq 0$, то решение возможно лишь при $5(x^2 - 4)^2 = 0$ и $2(y^3 - 8)^2 = 0$, что соответствует системе уравнений:

$$\begin{cases} (x^2 - 4)^2 = 0; \\ (y^3 - 8)^2 = 0. \end{cases}$$

Решение первого уравнения системы $x = \pm 2$. Решение второго уравнения системы $y = 2$. Ответ: $x = \pm 2; y = 2$.

Пример 7. Решить в целых числах уравнение $(x^2 + 4)(y^2 + 1) = 8xy$.

Решение: Если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением данного уравнения, то и пара $(-x_0; -y_0)$ тоже решение.

И так как $x = 0$ и $y = 0$ не являются решением уравнения, то, разделив обе части уравнения на xy , получим: $\frac{(x^2+4)(y^2+1)}{xy} = 8$, которое равносильно следующему уравнению $\left(x + \frac{4}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 8$.

Пусть $x > 0, y > 0$, тогда, согласно неравенству Коши, $x + \frac{4}{x} \geq \sqrt{x \frac{4}{x}} = 4$,
 $y + \frac{1}{y} \geq \sqrt{y \frac{1}{y}} = 2$. Тогда их произведение $\left(x + \frac{4}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 4 * 2 = 8$,
 значит, $x + \frac{4}{x} = 4$ и $y + \frac{1}{y} = 2$.

Отсюда находим $x = 2$ и $y = 1$ – решение, тогда $x = -2$ и $y = -1$ – тоже решение. Ответ: $(2; 1); (-2; -1)$.

3)Решение диофантова уравнения с двумя неизвестными как квадратного относительно одной из переменных.

При решении уравнений методом сведения к квадратному уравнению необходимо рассмотреть и оценить дискриминанты этих уравнений.

Пример 8. Решить в натуральных числах квадратное уравнение $2k^2 + 7k = 2mk + 3m + 36$.

Решение: 1) Решим квадратное уравнение относительно переменной k :

$$2k^2 + (7 - 2m)k - 3m - 36 = 0;$$

$$D = 49 - 28m + 4m^2 + 24m + 288 = 4m^2 - 4m + 337;$$

$$k_{1,2} = \frac{-2m - 7 \pm \sqrt{4m^2 - 4m + 337}}{4}.$$

Так как, k и $(2m - 7)$ – целые числа (k и m – натуральные по условию), то $\sqrt{4m^2 - 4m + 337}$ – является целым числом. Пусть $L = \sqrt{4m^2 - 4m + 337}$, $L > 0$; L – целое число. Тогда $L^2 = 4m^2 - 4m + 337$.

2) Решим полученное квадратное уравнение относительно переменной m . Перепишем уравнение в следующем виде: $4m^2 - 4m + 337 - L^2 = 0$. $D = 4 + 4L^2 - 1348 = 4L^2 - 1344$.

Получаем следующие значения корней: $4m_1 = 2 + \sqrt{L^2 - 336}$; $4m_2 = 2 - \sqrt{L^2 - 336}$. Так как $4m$ – натуральное число (m – натуральное по условию), то $\sqrt{L^2 - 336}$ – является целым числом.

Пусть $N = \sqrt{L^2 - 336}$, $N > 0$; N – целое число. Тогда $N^2 = L^2 - 336$, откуда следует, что $(L - N)(L + N) = 336$.

Решая это уравнение в натуральных числах методом разложения на множители, получим $L = 25$; $N = 17$; $k = 9$; $m = 9$. Ответ: $k = m = 9$.

Таким образом, можно сделать вывод, что существуют различные методы и способы решения диофантовых уравнений, которые условно можно разделить на две группы: 1) методы решения неопределенных уравнений первой степени с двумя переменными; 2) методы решения уравнений высших степеней в целых числах.

Выводы по I главе

В первой главе:

- 1) была проанализирована история неопределённых уравнений с целыми коэффициентами;
- 2) выделена необходимая теория для их изучения;
- 3) изучены основные теоремы неопределённых уравнений с целыми коэффициентами;
- 4) проанализированы их методы решений уравнений данного типа, а именно:
 - a) метод подбора;
 - b) метод спуска;
 - c) метод разложения на множители;
 - d) метод цепной дроби;
 - e) способ рассеивания;
 - f) использование алгоритма Евклида.

Из проведённой работы можно сделать вывод, что задачи на целые числа всегда считались одними из наиболее сложных, предлагаемых учащимся старших классов. Это объясняется отсутствием универсального метода решения для таких уравнений. При решении диофантовых уравнений нужно уметь мыслить, охватывать задачу целиком и как говорят шахматисты «просчитывать на несколько шагов вперед».

Большой упор при обучении решению диофантовых уравнений делается на знание понятия диофантовых уравнений, их видов, методов и способов решения, а главное на умения эти знания применять на практике.

ГЛАВА 2. Методический аспект проблемы изучения неопределённых уравнений с целыми коэффициентами

2.1. Решение задач в целых числах при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ по математике

Одним из часто встречающихся видов заданий на олимпиадах различного уровня являются диофантовы уравнения или задачи, приводящие к ним. Кроме того, данные типы уравнений стали одним из источников формирования базы задач ЕГЭ по математике, а также заданий профильного уровня.

Так как основным отличием таких задач является их неординарный характер, то построение решения может потребовать нестандартных методов. Поэтому ученику для успешной сдачи ЕГЭ или решения заданий математических олимпиад нужно знать и теорию, и методику решения диофантовых уравнений. Рассмотрим применение диофантовых уравнений при решении заданий единого государственного экзамена прошлых лет.

Пример 9. Дана система двух уравнений

$$\begin{cases} x^2 + ky^2 = z^2, \\ kx^2 + y^2 = t^2. \end{cases}$$

- а) Имеет ли система решение в натуральных числах при $k = 2$?
- б) Верно ли, что при $k = 5$ система не имеет решение в натуральных числах?
- в) Найди какое-нибудь решение в натуральных числах при $k = 7$.
- а) Предположим, что наша система имеет решение в натуральных числах x, y, z, t . Мы можем здесь предположить, что x и y взаимно просты, так как если бы был общий делитель d , мы бы разделили обе части наших уравнений на d^2 .

Итак, по крайней мере одно из чисел x и y является нечётным. Но нечётными не могут быть оба числа, так как тогда левые части наших уравнений при делении на 4 давали бы в остатке 3, что несовместимо с тем, что они являются квадратами. Однако если, например, x — чётное число, то y не может быть нечётным, так как тогда левая часть первого уравнения при делении на 4 давала бы в остатке 2, что несовместимо с тем, что она является квадратом. Таким образом, в любом случае получаем противоречие.

б) Как и в п. а будем считать, что x и y взаимно просты. Имеем систему

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 = z^2, \\ 5x^2 + y^2 = t^2. \end{cases}$$

Складывая почленно наши уравнения, получим $6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$, откуда следует, что $z^2 + t^2$ делится на 3. Так как квадрат целого числа, не делящегося на 3, даёт в остатке 1, то числа z и t не могут быть оба не делящимися на 3. Но так как $z^2 + t^2$ делится на 3, то если одно из чисел z, t делится на 3, то и другое делится на 3.

Итак, оба числа z и t делятся на 3, и, следовательно, правая часть равенства $6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$ делится на 9. Но тогда $z^2 + t^2$ делится на 3, и, значит, оба числа x и y делятся на 3 вопреки предположению, что эти числа взаимно просты.

в) Решением уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 7y^2 = z^2, \\ 7x^2 + y^2 = t^2. \end{cases}$$

в целых числах могут быть, например, числа $x = 3, y = 1, z = 4, t = 5$.

Пример 10. Сумма двух натуральных чисел равна 43, а их наименьшее общее кратное в 120 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа.

Решение: Сумма чисел кратна их наибольшему общему делителю, поэтому их наибольший общий делитель является делителем числа 43, откуда следует, что он равен 1. Тогда наименьшее общее кратное этих чисел равно их произведению. Обозначив искомые числа через x и y , получаем систему $\begin{cases} x + y = 43, \\ xy = 120 \end{cases}$, решая которую, получаем $x = 40$ и $y = 3$.

Ответ: (40; 3).

Пример 11. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$, где $m > n$.

Решение: Так как m и n натуральные числа, то для решения задачи требуется решить в натуральных числах уравнение $25n + 25m = mn$, где $m > n$.

При $n = 25$ равенство неверно, поэтому из него можно выразить неизвестную m : $m = \frac{25n}{n-25} = 25 + \frac{625}{n-25}$.

Теперь очевидно, что m является натуральным числом при $n > 25$ лишь в случаях:

$$1) n - 25 = 1;$$

$$2) n - 25 = 5;$$

$$3) n - 25 = 5^2;$$

$$4) n - 25 = 5^3;$$

$$5) n - 25 = 5^4.$$

Но при этом условие $m > n$ будет выполнено лишь в случаях:

$$1) m = 650, n = 26;$$

$$2) m = 150, n = 30.$$

Ответ: (650; 26), (150; 30).

Пример 12. Решить в целых числах уравнение $3x^2 + 6xy + 4y^2 = 28$.

Решение:

$3x^2 + 6xy + 4y^2 = 28 \Leftrightarrow 3(x + y)^2 + y^2 = 28$, откуда (т.к. $3(x + y)^2 \geq 0$ и y – целое) $y^2 < 28$ и, следовательно $|y| \leq 5$.

Имеем:

1) при $y = 1$:

$$3(x + y)^2 = 28 - 1 = 27 \rightarrow (x + y)^2 = 9 \rightarrow (x + y) = \pm 3 \rightarrow x_1 = -4, x_2 = 2.$$

2) при $y = -1$:

$$3(x + y)^2 = 28 - 1 = 27 \rightarrow (x + y)^2 = 9 \rightarrow (x + y) = \pm 3 \rightarrow x_1 = -2, x_2 = 4.$$

3) при $y = \pm 2$:

$$3(x + y)^2 = 28 - 4 = 24 \rightarrow (x + y)^2 = 8 \rightarrow \text{в целых числах решений нет.}$$

4) при $y = \pm 3$:

$$3(x + y)^2 = 28 - 9 = 19 \rightarrow (x + y)^2 = 9 \rightarrow \text{в целых числах решений нет.}$$

5) при $y = 4$:

$$3(x + y)^2 = 28 - 16 = 12 \rightarrow (x + y)^2 = 4 \rightarrow (x + y) = \pm 2 \rightarrow x_1 = -6, x_2 = -2.$$

6) при $y = -4$:

$$3(x + y)^2 = 28 - 16 = 12 \rightarrow (x + y)^2 = 4 \rightarrow (x + y) = \pm 2 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 6.$$

7) при $y = 5$:

$$3(x + y)^2 = 28 - 25 = 3 \rightarrow (x + y)^2 = 1 \rightarrow (x + y) = \pm 1 \rightarrow x_1 = -6, x_2 = -4.$$

8) при $y = -5$:

$$3(x + y)^2 = 28 - 25 = 3 \rightarrow (x + y)^2 = 1 \rightarrow (x + y) = \pm 1 \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 6.$$

Составляя пары целочисленных решений, получим ответ:

$$(-4; 1), (2; 1), (-2; -1), (4; -1), (-6; 4), (-2; 4), (2; -4), (6; -4), \\ (-6; 5), (-4; 5), (4; -5), (6; -5).$$

Пример 13. Среди учеников начальной школы провели опрос: кто любит зиму, а кто – лето. Оказалось, что 90% любителей зимы любит и лето, а 72% любителей лета любят и зиму. Зато 10% всех опрошенных не любят ни зимы, ни лета. Каким при этих условиях могло быть наименьшее число опрошенных?

Решение: Обозначим через x число школьников, которые любят лето, через y – число школьников, которые любят зиму, а через z – число всех опрошенных школьников. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,9y = 0,72x, \\ 0,9z = x + 0,1y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 4x, \\ 9z = 10x + y. \end{cases}$$

Кроме этого, числа $0,1y$ и $0,28x = \frac{7}{25}x$ должны быть целыми. Это означает, что y делится без остатка на 10, а x – на 25. Наименьшие значения переменных при этих условиях – это $y = 20$ и $x = 25$. При этом $z = \frac{10x+y}{9} = 30$. То есть было опрошено минимум 30 школьников. Ответ: 30 школьников.

Рассмотрим примеры таких заданий, взятых из олимпиад прошлых лет.

Пример 14. Решите уравнение $10x^2 + 11xy + 3y^2 = 7$ с двумя неизвестными x и y в целых числах.

Решение: Преобразуем левую часть уравнения к виду $(5x + 3y)(2x + y)$. Таким образом, данное уравнение будет равносильно 4 системам, которые приводят к следующим парам целых корней $(-4; 9), (14; -21), (4; -9), (-14; 21)$.

Ответ: $(-4; 9), (14; -21), (4; -9), (-14; 21)$.

Пример 15. (Московские математические олимпиады). Решить в целых числах систему уравнений [17, с. 57]:

$$\begin{cases} x^2 + y - z = 0, \\ x + y^2 - z^2 + 6 = 0. \end{cases}$$

Решение: Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} z = x^2 + y, \\ z^2 = x + y^2 + 6. \end{cases}$$

тогда получим $(x^2 + y)^2 = y^2 + x + 6$ или $x(x^3 + 2xy - 1) = 6$. Следовательно, x делитель 6, т.е. $x = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. Нам подходят лишь значения $x = \pm 1; 2; 3; -6$. Если:

$$x = -1, \text{ то } y = 2, z = 3;$$

$$x = 1, \text{ то } y = 3, z = 4;$$

$$x = 2, \text{ то } y = -1, z = 3;$$

$$x = 3, \text{ то } y = -4, z = 5;$$

$$x = -6, \text{ то } y = -18, z = 18.$$

Ответ: $(-1; 2; 3), (1; 3; 4), (2; -1; 3), (3; -4; 5), (-6; -18; 18)$.

Пример 16. Найти все пары $(a; b)$ натуральных чисел a и b , удовлетворяющих равенству $45^a - b^b = 1998$ [22, с. 43].

Решение: Числа 1998 и 45^a кратны 3, поэтому и число b^b должно быть кратно 3. То есть $b = 3k$ для некоторого натурального k . Тогда $45^a = 1998 + 3^3k * k^{3k}$. Оба слагаемых в правой части полученного равенства кратны $3^3 = 27$, поэтому число 45^a также должно быть кратно 27, то есть $a \geq 2$. Значит, $45^a = 5^a * 9^a$ делится на $9^2 = 81$. Если $k \geq 2$, то тогда число $3^3k * k^{3k}$ делилось бы на 81, поэтому и число 1998 должно делиться на 81, что неверно.

Следовательно, $k = 1$, т.е. $b = 3$, и поэтому $5^a = 1998 + 3^3 = 2025 = 45^2$, или $a = 2$. Ответ: $(2; 3)$.

Пример 17. Доказать, что все решения в целых числах уравнения $y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ исчерпываются следующими парами чисел $(x; y)$: $(-1; \pm 1), (0; \pm 1), (3; \pm 11)$.

Решение:

Исходное уравнение можно преобразовать к любому из двух видов:
либо

$$\left[x + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \right]^2 = y^2 - \frac{(5-2\sqrt{5})}{4} \left[x + \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]^2,$$

либо

$$\left[x^2 + \frac{x}{2} + 1 \right]^2 = y^2 + \frac{5x^2}{4}.$$

Следовательно, если x и y – вещественные числа, удовлетворяющие исходному уравнению, то должны выполняться неравенства

$$x + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \leq |y| \leq x^2 + \frac{x}{2} + 1,$$

откуда $|y| = x^2 + \frac{x+2}{2}, 0 < a \leq 2$.

Поскольку нас интересуют лишь целые x и y , то при четном значении x число a должно быть равно 2. В этом случае следует, что $x = 0$. При нечетном значении x число a должно быть равно 1. В этом случае, поскольку $y^2 = \left[x^2 + \frac{x+1}{2} \right]^2 - \frac{(x-3)(x+1)}{4}$, x может принимать лишь два значения: $x = 3$ и $x = -1$.

Следовательно, все решения исходного уравнения в целых числах исчерпываются следующими значениями: $(-1; \pm 1), (0; \pm 1), (3; \pm 11)$, что и требовалось доказать.

Пример 18. (Заключительный тур Минской городской математической олимпиады школьников, 9 класс) Найдите все пары целых чисел x и y , для которых $x^3 + y^3 = 830$.

Решение. Числа x и y должны иметь одну и ту же четность. Покажем, что уравнение $x^3 + y^3 = 8^n$ не может иметь нечетных решений на при каком натуральном n . Предположим противное, то есть, что числа x и y – нечетные. Рассматриваемое уравнение представим в виде $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 8^n$. Так как $x^2 - xy + y^2$ – нечетное число и 8^n не имеет других нечетных делителей, кроме ± 1 , то $x^2 - xy + y^2 = \pm 1$. Выделяя полные квадраты, получим, что $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = \pm 1$. Отсюда, $\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = \pm 1$.

$\frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1, |y| \leq 1$. Поэтому, либо $y = \pm 1$ и тогда $x = 0$, либо $y = 0$ и тогда $x = \pm 1$. Однако, в обоих случаях равенство $x^3 + y^3 = 8^n$ не является верным ни при каких натуральных n .

Итак, оба x и y – четные. Пусть, $x = 2x_1, y = 2y_1$. Тогда, $x^3 + y^3 = 8^{30}$ равносильно $x_1^3 + y_1^3 = 8^{29}$. Согласно доказанному выше числа x_1 и y_1 – также четные. Поэтому, полагая пусть, $x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2$, аналогично получим $x_2^3 + y_2^3 = 8^{28}$, и т.д. В результате получим, что $x = 2^{30}x_{30}, y = 2^{30}y_{30}$, где $x_{30}^3 + y_{30}^3 = 1$. Последнее уравнение имеет два решения: $(1, 0)$ и $(0, 1)$. В итоге, имеем $(2^{30}, 0)$ и $(0, 2^{30})$.

Пример 19. Доказать, что уравнение

$$x^3 = 2 + 3y^2$$

не имеет решений в целых числах [17, с. 83].

Решение. Рассмотрим это уравнение по модулю 9, то есть с точностью до слагаемых, кратных девяти. Напомним, два целых числа a и b называются сравнимыми по модулю k , если разность $a - b$ делится на k . Поскольку каждое целое число x имеет вид $3n, 3n - 1$ или $3n + 1$, где n – целое, то $(3n)^3 = 27n^3$ делится на 9, а $(3n \pm 1)^3 = 27n^3 \pm 27n^2 + 9n \pm 1$ дает при делении на 9 в остатке 1 или 8.

Аналогично, $3y^2$ дает при делении на 9 остаток 0 или 3. Значит, правая часть исходного уравнения по модулю 9 может равняться 2 или 5, а левая 0, 1 или 8, поэтому исходное уравнение не имеет решений ни при каких целых x и y , ч. т. д.

Самым трудным местом в таком решении является выбор модуля, то есть того числа, остатки от деления на которое рассматриваются. То, что a и b сравнимы по модулю k , записывают следующим образом: $a \equiv b \pmod{k}$. Это означает, что $a - b$ делится на k , где $a, b, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$. Правила операций над сравнениями можно записать так:

$$\begin{cases} a \equiv b \pmod{k}, \\ c \equiv d \pmod{k}. \end{cases}$$

Заметим, что если $ac \equiv b(mod k)$ и c взаимно просто с k , то $a \equiv b(mod k)$.

Суть метода перехода к уравнениям по простому модулю в следующем. Рассматриваем какое-нибудь диофантово уравнение. Предположим, что оно имеет решения, и рассмотрим вместо входящих в решение чисел их классы вычетов по $mod p$, где p – простое число. Полученный набор будет являться решением приведенного уравнения – уравнения, получающегося из данного заменой каждого коэффициента на его класс вычетов по $mod p$. Поэтому необходимым условием существования решения у диофантова уравнения является существование решения приведенного уравнения по $mod p$ при всех p . Классом вычетов $\bar{r}$ по модулю p называется все числа, сравнимые с числом r по модулю p , $\bar{r} = (r + kp | k \in \mathbb{Z})$.

Все множество $\mathbb{Z}$ целых чисел распадается на p классов вычетов по модулю p . Множество всех этих классов обозначают через Fp : $Fp = (\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p-1})$. Множество Fp конечно, и установить, имеет ли приведенное уравнение решение, можно простым перебором.

Пример 20. (Петербургские математические олимпиады). Найти целочисленные решения уравнения [22, с. 103]:

$$35x^4 + 24y^3 = 100000.$$

Решение. Приведем это уравнение по $mod 3$:

$$\begin{cases} 35 \equiv 2(mod 3), \\ 24 \equiv 0(mod 3), \\ 100000 \equiv 1(mod 3). \end{cases}$$

Исходное уравнение примет вид по $mod 3$: $\overline{2x^4} = 1$. Выражение $\overline{2x^4}$ при $x \in F3$ принимает значения 0 и 2. Поэтому у уравнения $\overline{2x^4} = 1$ нет решений, значит, нет решений у исходного уравнения. Характерной особенностью рассуждений при решении уравнений в целых числах является следующий подход: возможные значения решения, за исключением

конечного числа, отбрасываются при помощи какого-то заключения, а оставшиеся проверяются перебором.

Как мы видим, довольно часто на школьных олимпиадах и в заданиях ЕГЭ по математике можно встретить задания, сводящиеся к решению уравнений в целых или натуральных числах. Это обуславливает необходимость более углубленного изучения данной темы.

Для изучения данного раздела требуется большое количество времени. Мною был разработан элективный курс по изучению неопределенных уравнений и методов их решения. Данная программа может быть использована в организации факультативных занятий для учащихся 8 – 11 классов.

2.2. Факультативный курс «Решение неопределённых уравнений с целыми коэффициентами»

Как было сказано в первой главе данной работы, есть множество способов и методов решения неопределенных уравнений типа. Но большинство из них не входят в школьную программу. Несмотря на это, существует потребность в их изучении, так как диофантовы уравнения встречаются в вариантах единого государственного экзамена и различных математических олимпиад.

Цель разработанного факультативного курса – подробное изучение и усвоение у школьников знаний о типах неопределенных уравнений и способах их решения с целью подготовки учащихся к ЕГЭ и олимпиадам различного уровня.

Задачи курса:

- 1) проанализировать историю развития неопределенных уравнений;
- 2) сформировать систему знаний о видах и способах решения неопределенных уравнений;

3) активизировать поисково-познавательную деятельность школьников в работе с неопределенными уравнениями.

В данном курсе уделяется внимание вопросам, связанным с проблемой решения диофантовых уравнений различных степеней в целых числах. Для организации учебного процесса необходимо наличие у школьников базового уровня ЗУН работы с алгебраическими выражениями. Стоит акцентировать внимание на повторение правил делимости во множестве целых чисел.

Знание и навыки, формулирующиеся у школьников при изучении данного курса, способствуют расширению кругозора школьников, активизируют их познавательную деятельность, формулируют различные личностные качества, такие как: самостоятельность, целеустремленность, любопытство и т.д.

Данный курс составлен для учащихся 8 – 11 классов и состоит из двух частей.

Первая часть рассчитана на школьников, обучающихся в 8 – 9 классах, а вторая – 10 – 11 классов.

Для первой группы учащихся занятия проводятся 1 раз в 2 нед., продолжительность: 1 ч.

Для второй группы – 1 раз в нед., продолжительность: 1 ч.

Цель изучения данного факультативного курса: углубленное изучение и систематизация знаний по теме «решение неопределенных уравнений».

Задачи изучения данного курса:

Образовательные:

- ознакомление школьников с понятием неопределенного уравнения и с историей его развития;
- усвоение школьниками навыков решения данных уравнения различными способами;
- научить учащихся работать с текстовыми задачами, условие которых носит бытовой характер, решение которых связано с неопределенными уравнениями и их системами.

Воспитательные: воспитание:

- познавательного интереса к математике;
- информационной культуры учащихся
- в учащихся различных личностных качеств, таких как: самостоятельность, целеустремленность и т.д.

Развивающие: развитие:

- интереса учащихся к нестандартным заданиям, требующих работу со сложными алгебраическими выражениями;
- аналитического и логического мышления;
- навыков работы в команде, самоконтроля, критического мышления.

Ведущие формы организации образовательного процесса — занятия:

- 1) лекционные;
- 2) практические;
- 3) семинарские.

Методы обучения —

- 1) лекция;
- 2) доклад;
- 3) урок-игра;
- 4) беседа;
- 5) метод упражнений.

Формы обучения имеют как фронтальный, так и групповой, и индивидуальный характер.

Содержание курса (таблица 1)

Таблица 1 – Тематическое планирование занятий факультативного курса

№ п/п	Тема занятия	Кол-во час.		
		Т	П	В
8 – 9 класс				
1	Кто же такой Диофант? История развития теории <u>диофантовых уравнений</u> .	1	0	1
2-4	Определение <u>диофантова уравнения</u> первой степени с двумя неизвестными. Решение <u>диофантовых уравнений</u> способом перебора вариантов. Решение текстовых задач.	1	2	3
5-7	Решение <u>диофантовых уравнений</u> с использованием алгоритма Евклида. Актуализация знаний по теме «Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида». Решение задач.	1	2	3
8-10	Применение метода разложения на множители при решении <u>диофантовых уравнений</u> первой и высших степеней. Решение задач.	1	2	3
11-13	Применение арифметики остатка при нахождении целых решений <u>диофантовых уравнений</u> с двумя и более неизвестными. Решение задач.	1	2	3
	Итого	5	15	20
10 – 11 классы				
1-3	Метод рассуждения (измышления) в решении <u>диофантовых уравнений</u> . Алгоритм решения <u>диофантова уравнения</u> методом измышления коэффициентов. Решение уравнений. Решение текстовых задач.	1	2	3
4-6	Нахождение решения <u>диофантовых уравнений</u> с помощью цепных дробей. Введение понятия цепной дроби. Алгоритм получения цепной дроби. Формулы целых решений <u>диофантова уравнения</u> первой степени с двумя переменными на основе применения цепных дробей.	1	2	3
7-9	Применение метода оценки при решении <u>диофантовых уравнений</u> . Сущность метода. Решение уравнений.	1	2	3
10-12	Решение <u>диофантова уравнения</u> с двумя переменными как квадратного относительно одной из переменных.	1	2	3
13 – 16	Решение <u>диофантовых уравнений</u> различными способами.	0	4	4
17 – 20	Решение задач, сводимых к <u>диофантовым уравнениям</u> или их системам.	1	3	4
	Итого	5	15	20

Уроки, в основном, имеют практическую направленность.

Необходимые программные ресурсы

Программы Microsoft: Word, Power Point; ноутбук; проектор, электронные носители информации.

Дидактические средства обучения

- Визуальные дидактические средства:
 - 1) печатные: учебники, карточки с заданиями, сборники задач и т.д.;
 - 2) визуальные: презентации, таблицы, иллюстрации, схемы и т.д.
- Технические визуальные средства:
 - 1) проектор, носители информации и т.д.
- Универсальные дидактические средства:
 - 1) ноутбук.

Методические особенности организации учебно – познавательной деятельности

- 1) объяснение нового;
- 2) лекции;
- 3) беседа;
- 4) работа с печатными и электронными источниками.

Особенности организации взаимодействия на уроках

- 1) индивидуальные;
- 2) групповые.

Данная программа предоставляет возможность педагогу подробно объяснить и разобрать с учащимися способы решения неопределенных уравнений. Полученные знания и умения помогут школьникам при решении вариантов ЕГЭ и мат. олимпиад.

2.3. Конспекты занятий факультативного курса

Конспект № 1. «Решение диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида»

План занятия:

1. Применение алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (повторение).
2. Вывод формул для решения диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида.
3. Примеры решения диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида.
4. Постановка домашнего задания.

Оборудование: конспект – заготовка лекции на доске и индивидуальные заготовки для каждого ученика

Ход занятия

1. *Применение алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (повторение)*

Существует довольно простой прием, позволяющий находить наибольший делитель двух натуральных чисел. Этот прием называется алгоритмом Евклида. Вы с ним познакомились еще при изучении курса математики в 5 – 6 классах. Евклид, великий ученый, живший около 2000 лет назад, занимался не только геометрией, которая носит его имя. Ему принадлежит решение ряда важных задач арифметики и, в частности, тот способ нахождения наибольшего общего делителя, который мы сегодня будем использовать при изучении нового материала. А сейчас повторим суть алгоритма Евклида.

Чтобы найти наибольший общий делитель двух чисел:

- 1) надо большее из двух чисел разделить на меньшее;
- 2) потом меньшее из чисел на остаток при первом делении;
- 3) затем остаток при первом делении на остаток при втором делении и вести этот процесс до тех пор, пока не произойдет деление без остатка.

Последний отличный от нуля остаток и есть искомый НОД двух данных чисел.

2. Прежде чем рассмотреть решение линейного уравнения с двумя неизвестными: $ax + by = c$ с использованием алгоритма Евклида, докажем утверждение о том, что наибольший общий делитель двух чисел есть последний отличный от нуля остаток в цепочке указанных в примере действий.

Чтобы доказать утверждение о наибольшем общем делителе, представим описанный процесс в виде следующей цепочки равенств: если $a > b$, то

$$a = bq_1 + r_1$$

$$r_1 = bq_2 + r_2$$

.....

$$r_{n-1} = bq_n$$

Здесь $r_1, \dots, r_n$ - положительные остатки, убывающие с возрастанием номера. Отсутствие остатка в последнем равенстве следует из того, что натуральные числа r и n не могут убывать бесконечно, поэтому на некотором шаге остаток станет нулевым.

Выразив остаток r_1 через a и b , получим $r_1 = a - bq_1$. Подставляя его во второе равенство, найдём $r_2 = b(1 + q_1q_2) - a \cdot q_1$. Продолжая этот процесс дальше, мы сможем выразить все остатки через a и b , в том числе и последний: $r_n = Aa + Bb$. В результате нами доказано, что найдутся такие целые числа A и B , что $d = Aa + Bb$. Заметим, что коэффициенты A и B имеют разные знаки; если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то $Aa + Bb = 1$.

Как найти числа A и B , видно из алгоритма Евклида.

Перейдем теперь к решению линейного уравнения с двумя неизвестными: $ax + by = c$.

Возможны два случая: либо число c делится на $d = \text{НОД}(a, b)$, либо нет.

В первом случае можно разделить обе части уравнения на d и свести задачу к решению в целых числах уравнения $a_1x + b_1y = c_1$, коэффициенты которого $a_1 = \frac{a}{d}$ и $b_1 = \frac{b}{d}$ взаимно просты.

Во втором случае уравнение не имеет целочисленных решений: при любых целых x и y число $ax + by$ делится на d и поэтому не может равняться числу c , которое на d не делится.

Итак, мы можем ограничиться случаем, когда в уравнении коэффициенты a и b взаимно просты. На основании предыдущего предложения найдутся такие целые числа x_0 и y_0 , что $ax_0 + by_0 = 1$, откуда пара (cx_0, cy_0) удовлетворяет уравнению. Вместе с ней уравнению удовлетворяет бесконечное множество пар (x, y) целых чисел, которые можно найти по формулам $x = cx_0 + bt, y = cy_0 - at$. Здесь t – любое целое число. Нетрудно показать, что других целочисленных решений уравнение $ax + by = c$ не имеет. Решение, записанное в последнем виде, называется общим решением уравнения $ax + by = c$. Подставив вместо t конкретное целое число, получим его частное решение.

2.Примеры решения диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида

Пример 21. Решите уравнение $130x + 160y = 3000$ [19, с. 30–31].

Решение. $13x + 16y = 300$. $(13, 16, 300) = 1$. Это диофантово уравнение, $\text{НОД}(13, 16) = 1$.

Данное уравнение разрешимо в целых числах. Найдем частное решение (x_0, y_0) с помощью алгоритма Евклида: $\frac{6}{13} \Rightarrow$

$$16 = 13 \cdot 1 + 3;$$

$$13 = 3 \cdot 4 + 1.$$

Найдем линейное представление НОДа:

$$1 = 13 - 3 \cdot 4 = 13 - (16 - 13 \cdot 1) \cdot 4 = 13 \cdot 5 + 16 \cdot (-4).$$

$$13 \cdot 5 + 16 \cdot (-4) = 1;$$

$$13 \cdot 1500 + 16 \cdot (-1200) = 300;$$

$$x_0 = 1500, y_0 = -1200; \begin{cases} x = 1500 - 16t, \\ y = -1200 + 13t, \end{cases} t \in Z.$$

Ответ: $(1500 - 16t, -1200 + 13t), k \in Z$.

Пример 22. Стоимость товара 23 рубля. Покупатель имеет только двухрублевые, а кассир пятирублевые монеты. Можно ли осуществить покупку без предварительного размена денег?

Решение. Пусть x – количество двухрублевых монет, y – количество пятирублевых монет. Составим уравнение $2x - 5y = 23$. Заметим, что $(2, 5, 23) = 1$. Это диофантово уравнение, $\text{НОД}(2, 5) = 1$, следовательно, данное уравнение разрешимо в целых числах. Найдем частное решение (x_0, y_0) с помощью алгоритма Евклида: $\frac{5}{2} \Rightarrow$

$$1 = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2;$$

$$2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = 1$$

$$2 \cdot (-2) - 5 \cdot (-1) = 1;$$

$$2 \cdot (-46) - 5 \cdot (-23) = 23;$$

$$x_0 = -46, y_0 = -23; \begin{cases} x = -46 - 5t, \\ y = -23 - 2t, \end{cases} t \in Z.$$

Ответ: $(-46 - 5t, -23 - 2t), t \in Z$.

Пример 23. Решить уравнение $12x - 17y = 2$.

Решение. $12x - 17y = 2, (12, -17, 2)$, следовательно, это диофантово уравнение, $(12, -17) = 1$. Данное уравнение разрешимо в целых числах.

Найдем выражение числа 1 через a и b , $a = 12, b = -17$, но мы будем рассматривать $|b|$, так как $y \in Z$.

$$\frac{17}{12} \Rightarrow 17 = 12 \cdot 1 + 5, 12 = 5 \cdot 2 + 2, 5 = 2 \cdot 2 + 1. \Rightarrow$$

$$1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2 \cdot (12 - 5 \cdot 2) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12$$

$$= 5 \cdot (17 - 12 \cdot 1) - 2 \cdot 12 = 5 \cdot 17 - 7 \cdot 12.$$

$$12 \cdot (-7) + 17 \cdot 5 = 1;$$

$$12 \cdot (-7) - 17 \cdot (-5) = 1;$$

$$12 \cdot (-14) - 17 \cdot (-10) = 2.$$

Следовательно, $x_0 = -14, y_0 = -10$

$$\begin{cases} x = -14 - 17t, \\ y = -10 - 12t, \end{cases} t \in Z.$$

Ответ: $(-14 - 17t, -10 - 12t), k \in Z.$

4. В *домашнее задание* для учащихся необходимо включить подготовку по теоретическому материалу и практические задания.

Учащиеся должны ответить на следующие вопросы.

1. В чем суть алгоритма Евклида?
2. По каким формулам находится общее решение диофантова уравнения первой степени с двумя переменными с использованием алгоритма Евклида? Укажите, что обозначают буквы, входящие в эти формулы.

При выполнении домашнего задания используется опорный конспект лекции, в котором выделены основные вопросы, рассмотренные на занятии. В качестве практических заданий можно предложить для решения задания:

Задача №1. Школа получила 1 млн. руб. на приобретение 100 единиц учебного оборудования (на всю сумму без сдачи). Администрации школы предложили, оборудование стоимостью 3000, 8000 и 12000 руб. за единицу. Сколькими способами школа может закупить это оборудование. Укажите один из способов.

Задача №2. Транспортные организации имеют в наличие машины вместимостью 3, 5 т и 4, 5 т. Следует перевезти груз весом 53 т. Сколько машин нужно взять для одного рейса?

Задача № 3. Решить диофантово уравнение $3x - 2y + 11 = 0.$

Конспект № 2. «Решение диофантовых уравнений с использованием цепной дроби»

План занятия:

1. Понятие цепной дроби. Представление рациональных чисел в виде цепной дроби.
2. Формулы для решения диофантовых уравнений с использованием цепной дроби.
3. Примеры решения диофантовых уравнений с использованием цепной дроби.
4. Формулировка домашнего задания.

Оборудование: конспект — заготовка лекции на доске и индивидуальные заготовки для каждого ученика.

Основная цель занятия - овладение учащимися способом решения уравнений с использованием цепной дроби. Необходимо провести проверку усвоения теоретического материала: основных понятий, алгоритма решений неопределённых уравнений. Целесообразно, чтобы формулы для решения уравнения были «перед глазами учащихся» в процессе проведения занятия. Можно записать их на доске, а также использовать заполненные конспекты — заготовки предыдущей лекции. В качестве примеров решения диофантовых уравнений с использованием цепной дроби можно взять уже ранее решенные задачи и выполнить их решение новым способом.

Ход занятия.

1. Понятие цепной дроби. Представление рациональных чисел в виде цепной дроби.

Обратимся вновь к алгоритму Евклида. Дробь $\frac{a}{b}$ можно записать в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}},$$
$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}.$$

Значит,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

Продолжим этот процесс до тех пор, пока не придём к знаменателю q_n .

В результате мы представим обыкновенную дробь a/b в следующем виде:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_n}}}.$$

Получившаяся дробь называется непрерывной или цепной. Ввиду

Компактная запись цепной дроби:

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n].$$

2. Метод построения подходящих дробей к данной цепной дроби

Пусть дана дробь $\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$, $A_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$, $k \leq n$.

1) $A_0 = a_0 = \frac{p_0}{q_0}$ – подходящая дробь нулевого порядка,

следовательно, $p_0 = a_0, q_0 = 1$.

2) $A_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} \Rightarrow p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1$.

...

k) $A_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1} a_k + p_{k-2}}{q_{k-1} a_k + q_{k-2}} \Rightarrow p_k = p_{k-1} a_k + p_{k-2}, q_k = q_{k-1} a_k +$

q_{k-2} .

Таблица 2 – Расчет подходящих дробей

k	0	1	2	...	n
a_k	a_0	a_1	a_2	...	a_n
p_k	$p_0 = a_0$	$p_1 = a_0 a_1 + 1$	$p_1 a_2 + p_0$	...	$p_{n-1} a_n + p_{n-2}$
q_k	$q_0 = 1$	$q_1 = a_1$	$q_1 a_2 + q_0$	...	$q_{n-1} a_n + q_{n-2}$

Применение цепных дробей к решению диофантовых уравнений

Рассмотрим уравнение $ax + by = c$, где $(a, b, c) = 1$ и $(a, b) = 1$. Следовательно существуют такие целые значения x, y , являющиеся решениями данного диофантова уравнения. $\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \dots, a_n], \frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}$, тогда по свойству подходящих дробей справедливо: $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{p_n q_{n-1}}$;
 $\frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{b q_{n-1}}$, и $a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

Домножим обе части равенства на c или $(-c)$:

$$a(c q_{n-1}) - b(c p_{n-1}) = c(-1)^{n-1},$$

Затем домножим на $(-1)^{n-1}$, получим:

$$a((-1)^{n-1} c q_{n-1}) - b((-1)^{n-1} c p_{n-1}) = c.$$

Проиллюстрируем применение цепных дробей в решении диофантовых уравнений. Рассмотрим примеры.

3. Решить уравнение в целых числах $127x - 52y + 1 = 0$.

Решение. Преобразуем отношение коэффициентов при неизвестных.

Прежде всего, выделим целую часть неправильной дроби $\frac{127}{52}$. Имеем

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{1}{\frac{52}{23}}.$$

Прделаем такие же преобразования с полученной в знаменателе неправильной дробью $\frac{52}{23}$:

$$\frac{52}{23} = 2 + \frac{6}{23} = 2 + \frac{1}{\frac{23}{6}}.$$

Теперь исходная дробь примет вид

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{23}{6}}.$$

Повторим те же рассуждения для дроби $\frac{23}{6}$. Тогда

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{6}{5}}},$$

выделяя целую часть неправильной дроби $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$ придем к окончательному результату:

$$\frac{127}{52} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}.$$

Мы получили выражение, которое называется конечной цепной или непрерывной дробью. Отбросив последнее звено этой цепной дроби – одну пятую, превратим получающуюся при этом новую цепную дробь в простую и вычтем ее из исходной дроби $\frac{127}{52}$:

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}} = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9},$$

$$\frac{127}{52} - \frac{22}{9} = \frac{1143 - 1144}{52 \cdot 9} = -\frac{1}{52 \cdot 9}.$$

Приведем полученное выражение к общему знаменателю и отбросим его, тогда получим $127 \cdot 9 - 52 \cdot 22 + 1 = 0$. Из сопоставления полученного равенства с уравнением $127x - 52y + 1 = 0$ следует, что $x = 9, y = 22$ – решение этого уравнения, и согласно теореме все его решения будут содержаться в прогрессиях $x = 9 + 52t, y = 22 + 127t$ ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Ответ: $(9 + 52t; 22 + 127t), t \in \mathbb{Z}$.

Задача №11. Решить уравнение $64x - 25y = 3$.

Решение. $(64, 25, 3) = 1$ и $(64, 25) = 1$ – имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах (таблица 3).

$$\frac{a}{b} = \frac{64}{25} \Rightarrow \frac{64}{25} = [2; 1, 1, 3, 1, 2].$$

Таблица 3 – Расчет подходящих дробей

k	0	1	2	3	4	5
a_k	1	1	1	3	1	2
p_k	2	3	5	18	23	64
q_k	1	1	2	7	9	25

$$\frac{64}{25} - \frac{23}{9} = \frac{(-1)^4}{25 \cdot 9};$$

$$64 \cdot 9 - 25 \cdot 23 = 1,$$

$$64 \cdot 27 - 25 \cdot 69 = 3 \Rightarrow x_0 = 27, y_0 = 69, \text{ поэтому}$$

$$x = 27 - 25t, y = 69 - 64t, t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(27 - 25t, 69 - 64t), k \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. Решить уравнение $571x + 359y = 7$.

Решение. $(571, 359, 7) = 1$ и $(571, 359) = 1$ – имеем диофантово уравнение и оно разрешимо в целых числах (таблица 4).

$$\frac{a}{b} = \frac{571}{359}; \Rightarrow \frac{571}{359} = [1; 1, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 2].$$

Таблица 4 – Расчет подходящих дробей

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_k	1	1	1	2	3	1	4	1	2
p_k	1	2	3	8	27	35	167	202	571
q_k	1	1	2	5	17	22	105	127	359

$$\frac{571}{359} - \frac{202}{127} = (-1)^7 359 \cdot 127;$$

$$571 \cdot 127 - 35 \cdot 202 = -1, 571 \cdot (-127) + 359 \cdot 202 = 1, 571 \cdot (-889) + 359 \cdot 1414 = 7 \Rightarrow x_0 = -889, y_0 = 1414, \text{ поэтому}$$

$$\begin{cases} x = -889 + 359t, \\ y = 1414 - 571t, \end{cases} t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-889 + 359t, 1414 - 571t), k \in \mathbb{Z}$.

4. В домашнее задание обязательно включить повторение способов решения диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида и цепной дроби, а также ряд задач, которые нужно решить этими способами:

1) $29x + 37y = 2$; 2) $2121x - 1500y = 21$; 3) $38x + 117y = 209$ и т.д.

Выводы по II главе

Во второй главе данной работы:

- 1) была проанализирована роль диофантовых уравнений в области олимпиадных задач и ЕГЭ;
- 2) разработан факультативный курс «Решение неопределённых уравнений с целыми коэффициентами»;
- 3) приведены примеры конспектов двух занятий данного курса по темам: решение диофантовых уравнений с использованием алгоритма Евклида и решение диофантовых уравнений с использованием цепной дроби.

В базовом школьном курсе при изучении линейного уравнения с двумя переменными рассматриваются только самые общие вопросы: определение линейного уравнения с двумя переменными, определение решения данного уравнения, равносильность уравнений с двумя переменными, график линейного уравнения. Вопрос о нахождении целых (натуральных) решений линейного уравнения с двумя переменными, о возможных методах его решения остается за рамками школьного учебника. Однако многие практические задачи сводятся к решению линейного уравнения с двумя переменными, эти задачи часто встречаются в вариантах математических олимпиад, конкурсах по решению задач.

Посещение занятий этих курсов поможет ученику оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы, познакомить его со спецификой видов деятельности, которые будут для него ведущими, если он выберет тот или иной профиль, обеспечить расширение и/или углубление какого-либо базового курса.

Заключение

При выполнении вариантов ЕГЭ (профильный уровень) и олимпиадных заданий, учащиеся часто сталкиваются с проблемой решения диофантовых уравнений. Указанная проблема возникает в связи с тем, что вопросы, связанные с изучением понятия и решения таких уравнений в большей степени остаются за рамками школьных учебников.

Это обуславливает необходимость в ознакомлении школьников с понятием диофантова уравнения, изучении методов и способов решения неопределенных уравнений с целыми коэффициентами. Выполнение данных задач не только поможет школьникам успешно сдать единый государственный экзамен, но и повысит уровень их познавательного интереса к предмету математика, поспособствует развитию логического и аналитического мышления учащихся.

В данной работе достигнуты следующие результаты:

- 1) изучена теория неопределенных уравнений с целыми коэффициентами;
- 2) проанализированы методы решений неопределённых уравнений с целыми коэффициентами;
- 3) разобраны задачи в целых числах при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ по математике.
- 4) разработан факультативный курс «Решение неопределённых уравнений с целыми коэффициентами».
- 5) составлены конспекты двух занятий разработанного факультативного курса.

Задачи исследования решены, цель достигнута. Данная выпускная квалификационная работа может быть использована учителями и студентами педагогических вузов как методическое пособие по изучению неопределенных уравнений с целыми коэффициентами на факультативных занятиях в школе.

Список литературы

- 1) Абакумова С. И. Диофантовы уравнения // Фундаментальные и прикладные исследования в современном мире. 2014. №6. С. 133–137.
- 2) Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения : учеб. пособие. М. : Наука, 1972. 68 с.
- 3) Берлов С. Л. Петербургские математические олимпиады : сборник задач. М. : Лань, 2003. 532 с.
- 4) Бокарев Н. Л. Некоторые классические диофантовы уравнения бакалавриатов // Научно-методический электронный журнал концепт. 2014. № 26. С. 56–60.
- 5) Брюно А. Д. От диофантовых приближений до диофантовых уравнений // Чебышевский сборник. 2016. №3. С. 38–52.
- 6) Бухштаб А. А. Теория чисел : учебник для пед. вузов. М. : Лань, 2008. 384 с.
- 7) Васильев Н. Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад : учеб. пособие для бакалавр. М. : Наука, 1998. 288 с.
- 8) Виленкин Н. Я. За страницами учебника математики : учеб. пособие для учащихся средней школы. М. : Просвещение, 1996. 320 с.
- 9) Власова А. П. Решение уравнений в целых числах : учеб. пособие. М. : издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. 68 с.
- 10) Жмурова И. Ю. Диофантовы уравнения: от древности до наших дней // Молодой ученый. 2014. №9. С. 1–5.
- 11) Задачи заключительного тура минской городской математической олимпиады школьников : учеб. / Е. А. Барабанов [и др.] ; под ред. Е. А. Баранова. Минск : Ковчег, 2006. 352 с.
- 12) Каспржак А. Г. Проблема выбора: элективные курсы в школе : учеб. пособие для бакалавр. М. : Новая школа, 2004. 209 с.
- 13) Кирин К. И. Цепные (непрерывные) дроби и диофантовы уравнения : материалы XXII Всероссийской (с международным участием) научно-

практической конференции «Инновации. Интеллект. Культура». Тюмень : издательство Тюменского индустриального университета, 2015. 281 с.

14) Кожаев Ю. П. Греческий математик Диофант и диофантовы уравнения // «Культура и общество: история и современность» : материалы IV Всероссийской научно-практической конференции. Ставрополь : АГРУС. 2015. С. 150–154.

15) Крафт Х. Алгебраические кривые и диофантовы уравнения : сборник статей. М. : Мир, 1986. 407 с.

16) Лаппо Л. Д. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Самостоятельная подготовка к ЕГЭ. Универсальные материалы с методическими рекомендациями, решениями и ответами : учеб. пособие. М. : ЭКЗАМЕН, 2016. 352 с.

17) Малинин В. А. Подготовка учащихся 9-11 классов к математическим олимпиадам. Задачи с целыми числами : учеб. пособие. Нижний Новгород : Нижегород. гуманитар. центр, 2000. 69 с.

18) Мамедяров Д. М. Оригинальное решение одного уравнения // Естественные и математические науки в современном мире. 2014. №24. С. 30–36.

19) Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учеб. заведений / Г. В. Дорофеев [и др.] ; под ред. Г. В. Дорофеева. М. : Дрофа, 2001. 344 с.

20) Фоминых Ю. Ф. Диофантовы уравнения : учеб. пособие для бакалавр. 1996. №6. С. 35–44.

21) Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике : учеб. пособие. М. : Просвещение, 1987. 113 с.

22) Шевкин А. В. ЕГЭ. Задание С6 с решениями и ответами : учеб. пособие. М. : ЭКЗАМЕН, 2012. 62 с.

23) Яковлева Е. Н. Факультативный курс «Диофантовы уравнения» как предпрофильная подготовка учащихся 8-9 классов // «Концепции фундаментальных и прикладных научных исследований» : материалы Международной научно-практической конференции. Казань : НИЦ АЭТЕРНА, 2017. 173 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое
образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения : очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 25 » сентября 20 20 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Курбановой Гулрабы Ахмедовны.
(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение неопределенных уравнений с целыми
коэффициентами на факультативных занятиях в школе»

Утверждена приказом по Университету от « 25 » 11 2020 г. № 0883/о

Срок сдачи студентом законченной работы « 4 » июня 20 21 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1	Изучение литературе по неопределенным уравнением	Октябрь 2020	Вн по плану
2	История изучения неопределенных уравнений с целыми коэффициентами	Ноябрь 2020	Вн по плану
3	Изучение свойств делимости в кольце целых чисел	Декабрь 2020	Вн по плану
4	Алгоритм Евклида и его применения к решению линейных уравнений с целыми коэффициентами	Январь 2021	Вн по плану
5	Подбор, составление примеров линейных уравнений с целыми коэффициентами с двумя, тремя неизвестными	Февраль 2021	Вн по плану
6	Решение уравнений второй , третьей степеней с двумя неизвестными	Март 2021	Вн по плану
7	Разработка программы факультативного курса «Решение неопределённых уравнений с целыми коэффициентами» и нескольких уроков этого курса.	Апрель 2021	Вн по плану
8	Оформления ВКР и сдача на кафедру	Май-Июнь 2021	Вн по плану

Дата выдачи задания «15» 09 2020 г.

Руководитель С2 Султанов Адгам Яхиевич

(подпись)

(Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению Ахмедовна Курбанова Гулраба

Ахмедовна

(подпись)

(Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Курбановой Гулрабы Ахмедовны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Курбанова Гулраба Ахмедовна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Изучение неопределенных уравнений с целыми коэффициентами на факультативных занятиях в школе», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


ПОДПИСЬ
04.06.21
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 04.06.21.
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  ПОДПИСЬ А.Я.Султанов И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Изучение неопределенных уравнений с целыми коэффициентами на факультативных занятиях в школе» студента 4 курса Курбановой Гулрабы Ахмедовны направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля «Математика»
Руководитель ВКР Адгам Яхиевич Султанов



Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Курбанова Г. А.
Проверяющий: Султанов Адгам Яхиевич (sultanovaya@rambler.ru / ID: 163)
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://pnzgu.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 225
Начало загрузки: 14.06.2021 10:00:34
Длительность загрузки: 00:00:32
Имя исходного файла: 1851433974.docx
Название документа: 1851433974
Размер текста: 1 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 90371
Слов в тексте: 20598
Число предложений: 669

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 14.06.2021 10:01:07
Длительность проверки: 00:01:01
Комментарии: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС, Интернет Плюс, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), Переводные заимствования издательства Wiley (RuEn), eLIBRARY RU, СПС ГАРАНТ, Медицина, Диссертации НББ, Перефразирование по eLIBRARY RU, Перефразирование по Интернету, Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ПГУ", СМИ России и СНГ, Шаблонные фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования

ЗАИМСТВОВАНИЯ
17.49%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
5.86%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
76.65%

14.06.2021

См

А. Я. Султанов

Отзыв
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Изучение неопределенных уравнений с целыми коэффициентами
на факультативных занятиях в школе»
студентки Курбановой Гулрабы Ахмедовны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль
подготовки «Математика», гр. 17ФПМ1

Неопределенные уравнения возникли в разных странах древности в связи с практическими задачами. На протяжении многих веков развивались методы решения различных типов неопределенных уравнений. Большое внимание при этом уделялось неопределенным уравнениям с целыми числовыми коэффициентами и их целочисленным решениям. Много места занимают такие уравнения в школьном курсе математики, начиная с младших классов, причем разного уровня сложности.

Неопределенные уравнения с целыми коэффициентами часто включаются в задания математических олимпиад, в материалы ЕГЭ. Следует сказать, что количество часов, отведенных на изучение математики, не позволяет уделять много внимания на решение различных типов неопределенных уравнений, поэтому эти вопросы выносятся на факультативные, элективные занятия. Исходя из всего сказанного, можно заключить, что тема ВКР Курбановой Г.А. является актуальной.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Во введении даётся обоснование актуальности темы, веден объект, предмет и цель исследования, перечислены задачи исследования. В первой главе изложена краткая история возникновения и развития диофантовых уравнений, приведены примеры диофантовых уравнений и их решение. Вторая глава работы посвящена методике изучения неопределенных уравнений с целыми коэффициентами и решению задач при подготовке к олимпиадам и ЕГЭ. В этой же главе разработан факультативный курс по теме ВКР и приведены конспекты занятий этого курса.

Изложение материала построено логически правильно, ясным и достаточно грамотным математическим языком. Автор показал хорошее владение материалом, провел самостоятельный подбор и изложение материала.

Выпускная квалификационная работа Курбановой Г.А. аккуратно оформлена, доклад верно отражает содержание ВКР. Результаты работы могут быть использованы учителями математики при изучении неопределенных уравнений.

Выпускная работа Курбановой Г.А. может быть оценена на «хорошо».

Руководитель, к.ф.-м.н., доцент,
доцент кафедры «Математическое образование»



Султанов А.Я.