

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Пензенский государственный университет»

Факультет вычислительной техники
Кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования

ОТЧЕТ
по производственной (педагогической) практике
«Метод Зейделя решения СЛАУ»

Выполнил: студент гр. 19ВМ1

Симакова Е.А.

Руководитель: к. ф.-м. н.,

доцент Деревянчук Е.Д.

Пенза 2023

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Пензенский государственный университет»

«УТВЕРЖДАЮ»

Зав. кафедрой МСМ, д.ф.-м.н.

_____ Ю.Г. Смирнов

ЗАДАНИЕ

на производственную (педагогическую) практику

(8 семестр)

Вариант 4

Тема «Метод Зейделя решения СЛАУ»

1. Подготовить и провести лекцию на заданную тему;
2. Подготовить и провести лабораторную работу на заданную тему с разбором примеров;
3. Подготовить домашнее задание для студентов.

Руководитель работы, к. ф.-м. н.

Деревянчук Е.Д.

Содержание

Введение	4
Глава I. Теоретическая часть	6
§1. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	6
§2. Решение невырожденной СЛАУ	9
§3. Приведение линейной системы к виду, удобному для итерации	10
§4. Метод Зейделя решения СЛАУ	11
Глава II. Практическая часть	13
Заключение	19
Список литературы	20

Введение

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) теоретически решаются достаточно просто. Однако при большом порядке матрицы, связанной с задачей, фактическое решение этих задач требует большого числа вычислительных операций.

В настоящее время имеется большое количество методов численного решения СЛАУ, и работа над их усовершенствованием интенсивно ведется в наши дни.

Численные методы решения СЛАУ делятся на две группы: точные и итерационные методы.

Под точными методами подразумеваются методы, которые дают решение задачи при помощи конечного числа элементарных арифметических операций. При этом, если исходные данные, определяющие задачу, заданы точно (например, если они целые или рациональные числа, представленные в виде обыкновенных дробей) и вычисления выполняются точно (например, по правилам действий над обыкновенными дробями), то решение также получается точное. В точных методах число необходимых для решения задачи вычислительных операций зависит только от вида вычислительной схемы и от порядка матрицы, определяющей данную задачу. Точными методами являются: метод Крамера, метод Гаусса, метод главных элементов, метод квадратных корней и др.

Итерационные методы – это средство для приближенного решения СЛАУ. Решение системы при помощи итерационных методов получается, как предел последовательных приближений, вычисляемых некоторым единообразным процессом. При применении итерационных методов существенным является не только сходимость построенных последовательных приближений, но и быстрота сходимости. В этом отношении каждый итерационный метод не является универсальным; давая быструю сходимость для одних матриц, он может сходиться медленно или даже совсем не сходиться для других матриц. Итерационные методы обладают

свойством, позволяющим получить решение с наперед заданной точностью, если доказана сходимость метода. Поэтому при применении итерационных методов важную роль играет предварительная подготовка системы, т.е. замена данной системы ей эквивалентной, устроенной так, чтобы для нее выбранный процесс сходил по возможности быстро. Итерационными методами являются: метод Зейделя, метод простой итерации, метод последовательных приближений и др. [1]

Глава I. Теоретическая часть

§1. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – это система конечного числа уравнений, в каждое из которых неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ входят только в виде слагаемых с постоянными коэффициентами; вот стандартный вид линейной системы:

[illegible]

где a_{ij} – коэффициенты системы; b_i – свободные члены; x_j – неизвестные значения; $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

СЛАУ (1) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix};$$

или в компактной записи:

$$A \cdot X = B.$$

где A – матрица коэффициентов системы или *основная матрица системы*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

X – вектор-столбец из неизвестных x_j :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

B – вектор-столбец из свободных членов b_i :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матричная форма СЛАУ есть частный случай матричного уравнения

$$A_{m \times n} X_{n \times k} = B_{m \times k}.$$

Расширенной матрицей системы (1) называется матрица вида

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Упорядоченный набор $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ называется *решением системы* (1), если этот упорядоченный набор является решением каждого уравнения этой системы.

При решении линейной системы возможна одна из трех ситуаций:

1. Система имеет единственное решение.
2. Система не имеет решений.
3. Система имеет бесконечно много решений. [2]

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.

Система уравнений называется **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Две системы называются **равносильными**, если они либо обе несовместны, либо их решения совпадают.

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение.

Совместная система называется **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Каждое решение неопределенной системы называется **частным решением этой системы**.

Совокупность всех частных решений называется **общим решением системы**. [3]

Элементарными преобразованиями СЛАУ (1) называются преобразования, не меняющие множества решений этой системы; простейшие из них таковы:

- 1) Исключение из системы уравнения $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$.
- 2) Умножение какого-либо уравнения системы на $\lambda \neq 0$.
- 3) Прибавление (вычитание) к какому-либо уравнению системы любого другого уравнения этой системы, умноженного на $\lambda \neq 0$.

Теорема. Если одна СЛАУ получена из другой с помощью элементарных преобразований, то эти системы равносильны.

§2. Решение невырожденной СЛАУ

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

[illegible]

Основная матрица системы будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Определитель $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называется

определителем системы.

Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невыврожденной*. [3]

Рассмотрим два основных метода решения невырожденной СЛАУ (2).

Матричный метод решения [3]

Умножим обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \equiv A^{-1} \cdot B.$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, то

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Метод Крамера [4]

Определение. Δ_i – это определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой i -го столбца на столбец свободных членов ($i = \overline{1, n}$).

Решение системы (2) можно найти по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Lambda}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Lambda}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Lambda}.$$

§3. Приведение линейной системы к виду, удобному для итерации [5]

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (1) с невырожденной матрицей и отличными от нуля диагональными элементами $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. В ней разрешают первое уравнение относительно x_1 , второе – относительно x_2 и т.д. В результате получают эквивалентную систему

[illegible]

Заметим, что при переходе от системы (1) к системе (3) иногда бывает выгоднее поступать так, чтобы не все коэффициенты α_{ii} были равны нулю.

Например, если в системе (1) первым является уравнение

$$1,02x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$

то при переходе к системе (3) его удобнее переписать в виде

$$x_1 = \beta_1 - 0,02x_1 - \alpha_{12}x_2 - \dots - \alpha_{1n}x_n,$$

и здесь $\alpha_{11} = -0,02 \neq 0$. Аналогичное положение может встретиться и в других уравнениях. Поэтому в общем случае систему (3) естественно записать в виде

[illegible]

§4. Метод Зейделя решения СЛАУ [6]

Метод Зейделя решения СЛАУ представляет собой некоторые видоизменения метода итераций. Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k + 1)$ -го приближения неизвестной x_i используются уже вычисленные значения $(k + 1)$ -го приближения для неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$.

Пусть дана приведенная линейная система (3').

Выберем произвольно начальные приближения корней

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)},$$

стараясь, чтобы они в какой-то мере соответствовали искомым неизвестным

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Далее, предполагая, что k -ые приближения $x_i^{(k)}$ корней известны, согласно методу Зейделя, найдем $(k + 1)$ -ые приближения следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{11}x_1^{(k)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k+1)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(k)}, \\ x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(k+1)} + \alpha_{32}x_2^{(k+1)} + \alpha_{33}x_3^{(k)} + \dots + \alpha_{3n}x_n^{(k)}, \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \beta_n + \alpha_{n1}x_1^{(k+1)} + \dots + \alpha_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + \alpha_{nn}x_n^{(k)}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Теорема о сходимости метода Зейделя.

Если для линейной системы

$$x = \alpha x + \beta \quad (4.2)$$

выполнено условие

$$\|\alpha\|_m < 1,$$

где

$$\|\alpha\|_m = \max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|,$$

то метод Зейделя для системы (4.2) сходится к единственному ее решению при любом выборе начального вектора $x^{(0)}$.

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, но, вообще говоря, он приводит к более громоздким вычислениям. Метод Зейделя может сходиться даже в том случае, если расходится процесс простой итерации. Однако это бывает не всегда. Возможны случаи, когда процесс Зейделя сходится медленнее процесса итерации. Более того, могут быть случаи, когда процесс итерации сходится, а метод Зейделя расходится.

Глава II. Практическая часть

Задание №1 [6]

С помощью метода Зейделя решить систему уравнений с точностью $\varepsilon = 0,0001$:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение:

- 1) Приведем данную систему к виду, удобному для итерации: из первой строки выразим x_1 , т.е. поделим первую строку на 10 и перенесем x_2 и x_3 в правую часть; из второй строки выразим x_2 , т.е. поделим вторую строку на 10 и перенесем x_1 и x_3 в правую часть; а из третьей строки выразим x_3 , т.е. поделим третью строку на 10 и перенесем x_1 и x_2 в правую часть. Теперь система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 1,2 - 0,1x_2 - 0,1x_3, \\ x_2 = 1,3 - 0,2x_1 - 0,1x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 - 0,2x_2. \end{cases}$$

- 2) В качестве нулевых приближений корней ($k = 0$) возьмем произвольные значения, чтобы они хотя бы сколько-нибудь соответствовали искомым данным:

$$x_1^{(0)} = 1,2; x_2^{(0)} = 0; x_3^{(0)} = 0.$$

- 3) Последовательно применим метод Зейделя:

1-ая итерация ($k = 1$):

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1,2 - 0,1 \cdot 0 - 0,1 \cdot 0 = 1,2, \\ x_2^{(1)} = 1,3 - 0,2 \cdot 1,2 - 0,1 \cdot 0 = 1,06, \\ x_3^{(1)} = 1,4 - 0,2 \cdot 1,2 - 0,2 \cdot 1,06 = 0,948. \end{cases}$$

Так как после 1-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 1,06 > \varepsilon$, то перейдем ко второй итерации ($k = k + 1$).

2-ая итерация ($k = 2$):

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1,2 - 0,1 \cdot 1,06 - 0,1 \cdot 0,948 = 0,9992, \\ x_2^{(2)} = 1,3 - 0,2 \cdot 0,9992 - 0,1 \cdot 0,948 = 1,00536, \\ x_3^{(2)} = 1,4 - 0,2 \cdot 0,9992 - 0,2 \cdot 1,00536 = 0,999088. \end{cases}$$

Так как после 2-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,2008 > \varepsilon$, то перейдем к третьей итерации ($k = k + 1$).

3-ья итерация ($k = 3$):

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1,2 - 0,1 \cdot 1,00536 - 0,1 \cdot 0,999088 = 0,9995552, \\ x_2^{(3)} = 1,3 - 0,2 \cdot 0,9995552 - 0,1 \cdot 0,999088 = 1,00018016, \\ x_3^{(3)} = 1,4 - 0,2 \cdot 0,9995552 - 0,2 \cdot 1,00018016 = 1,000052928. \end{cases}$$

Так как после 3-ей итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,0052 > \varepsilon$, то перейдем к четвертой итерации ($k = k + 1$).

4-ая итерация ($k = 4$):

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 1,2 - 0,1 \cdot 1,00018016 - 0,1 \cdot 1,000052928 = 0,9999766912, \\ x_2^{(4)} = 1,3 - 0,2 \cdot 0,9999766912 - 0,1 \cdot 1,000052928 = 0,999999368, \\ x_3^{(4)} = 1,4 - 0,2 \cdot 0,9999766912 - 0,2 \cdot 0,999999368 = 1,00000478816. \end{cases}$$

Так как после 4-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,00042 > \varepsilon$, то перейдем к пятой итерации ($k = k + 1$).

5-ая итерация ($k = 5$):

$$\begin{cases} x_1^{(5)} = 1,2 - 0,1 \cdot 0,999999368 - 0,1 \cdot 1,00000478816 = 0,999999584384, \\ x_2^{(5)} = 1,3 - 0,2 \cdot 0,999999584384 - 0,1 \cdot 1,00000478816 = 0,9999996043, \\ x_3^{(5)} = 1,4 - 0,2 \cdot 0,999999584384 - 0,2 \cdot 0,999999368 = 1,0000001622632. \end{cases}$$

Так как после 5-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,00002 \leq \varepsilon$, то процесс завершаем и полагаем, что: $x_1 \approx 1; x_2 \approx 1; x_3 \approx 1$.

Задание №2 [7]

С помощью метода Зейделя решить систему уравнений с точностью $\varepsilon = 0,005$:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

- 1) Приведем данную систему к виду, удобному для итерации: из первой строки выразим x_1 , т.е. поделим первую строку на 4 и перенесем x_2 и x_3 в правую часть; из второй строки выразим x_2 , т.е. поделим вторую строку на 6 и перенесем x_1 и x_3 в правую часть; а из третьей строки выразим x_3 , т.е. поделим третью строку на 5 и перенесем x_1 и x_2 в правую часть. Теперь система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 0,25x_2 - 0,25x_3, \\ x_2 = 1,5 - 0,1667x_1 - 0,3333x_3, \\ x_3 = 0,4 + 0,2x_1 + 0,4x_2. \end{cases}$$

- 2) В качестве нулевых приближений корней ($k = 0$) возьмем произвольные значения:

$$x_1^{(0)} = 0; x_2^{(0)} = 0; x_3^{(0)} = 0.$$

- 3) Последовательно применим метод Зейделя:

1-ая итерация ($k = 1$):

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 + 0,25 \cdot 0 - 0,25 \cdot 0 = 1, \\ x_2^{(1)} = 1,5 - 0,1667 \cdot 1 - 0,3333 \cdot 0 = 1,3333, \\ x_3^{(1)} = 0,4 + 0,2 \cdot 1 + 0,4 \cdot 1,3333 = 1,1333. \end{cases}$$

Так как после 1-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 1,3333 > \varepsilon$, то перейдем ко второй итерации ($k = k + 1$).

2-ая итерация ($k = 2$):

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 + 0,25 \cdot 1,3333 - 0,25 \cdot 1,1333 = 1,05, \\ x_2^{(2)} = 1,5 - 0,1667 \cdot 1,05 - 0,3333 \cdot 1,1333 = 0,9472, \\ x_3^{(2)} = 0,4 + 0,2 \cdot 1,05 + 0,4 \cdot 1,9472 = 0,9889. \end{cases}$$

Так как после 2-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,3861 > \varepsilon$, то перейдем к третьей итерации ($k = k + 1$).

3-ья итерация ($k = 3$):

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1 + 0,25 \cdot 0,9472 - 0,25 \cdot 0,9889 = 0,9896, \\ x_2^{(3)} = 1,5 - 0,1667 \cdot 0,9896 - 0,3333 \cdot 0,9889 = 1,0054, \\ x_3^{(3)} = 0,4 + 0,2 \cdot 0,9896 + 0,4 \cdot 1,0054 = 1,0001. \end{cases}$$

Так как после 3-ей итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,0604 > \varepsilon$, то перейдем к четвертой итерации ($k = k + 1$).

4-ая итерация ($k = 4$):

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 1 + 0,25 \cdot 1,0054 - 0,25 \cdot 1,0001 = 1,0013, \\ x_2^{(4)} = 1,5 - 0,1667 \cdot 1,0013 - 0,3333 \cdot 1,0001 = 0,9997, \\ x_3^{(4)} = 0,4 + 0,2 \cdot 1,0013 + 0,4 \cdot 0,9997 = 1,0002. \end{cases}$$

Так как после 4-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,0118 > \varepsilon$, то перейдем к пятой итерации ($k = k + 1$).

5-ая итерация ($k = 5$):

$$\begin{cases} x_1^{(5)} = 1 + 0,25 \cdot 0,9997 - 0,25 \cdot 1,0002 \approx 1, \\ x_2^{(5)} = 1,5 - 0,1667 \cdot 1 - 0,3333 \cdot 1,0002 \approx 1, \\ x_3^{(5)} = 0,4 + 0,2 \cdot 1 + 0,4 \cdot 1 \approx 1. \end{cases}$$

Так как после 5-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,001 \leq \varepsilon$, то процесс завершаем и полагаем, что: $x_1 \approx 1; x_2 \approx 1; x_3 \approx 1$.

Задание №3 [8]

С помощью метода Зейделя решить систему уравнений с точностью $\varepsilon = 0,001$:

$$\begin{cases} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 = 21,7, \\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 = 27,46, \\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 = 28,76, \\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 = 49,72. \end{cases}$$

Решение:

- 1) Приведем данную систему к виду, удобному для итерации: из первой строки выразим x_1 , т.е. поделим первую строку на 20,9 и перенесем x_2 , x_3 и x_4 в правую часть; из второй строки выразим x_2 , т.е. поделим вторую строку на 21,2 и перенесем x_1 , x_3 и x_4 в правую часть; из третьей строки выразим x_3 , т.е. поделим третью строку на 19,8 и перенесем x_1 , x_2 и x_4 в правую часть; а из четвертой строки выразим x_4 , т.е. поделим четвертую строку на 32,1 и перенесем x_1 , x_2 и x_3 в правую часть. Теперь система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 1/20,9 \cdot (21,7 - 1,2x_2 - 2,1x_3 - 0,9x_4), \\ x_2 = 1/21,2 \cdot (27,46 - 1,2x_1 - 1,5x_3 - 2,5x_4), \\ x_3 = 1/19,8 \cdot (28,76 - 2,1x_1 - 1,5x_2 - 1,3x_4), \\ x_4 = 1/32,1 \cdot (49,72 - 0,9x_1 - 2,5x_2 - 1,3x_3). \end{cases}$$

- 2) В качестве нулевых приближений корней ($k = 0$) возьмем свободные члены, округлив их до двух знаков после запятой:

$$\begin{aligned} x_1^{(0)} &= \frac{21,7}{20,9} \approx 1,04; x_2^{(0)} = \frac{27,46}{21,2} \approx 1,3; \\ x_3^{(0)} &= \frac{28,76}{19,8} \approx 1,45; x_4^{(0)} = \frac{49,72}{32,1} \approx 1,55. \end{aligned}$$

- 3) Последовательно применим метод Зейделя:

1-ая итерация ($k = 1$):

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1/20,9 \cdot (21,7 - 1,2 \cdot 1,3 - 2,1 \cdot 1,45 - 0,9 \cdot 1,55) = 0,7512, \\ x_2^{(1)} = 1/21,2 \cdot (27,46 - 1,2 \cdot 0,7512 - 1,5 \cdot 1,45 - 2,5 \cdot 1,55) = 0,9674, \\ x_3^{(1)} = 1/19,8 \cdot (28,76 - 2,1 \cdot 0,7512 - 1,5 \cdot 0,9674 - 1,3 \cdot 1,55) = 1,1978, \\ x_4^{(1)} = 1/32,1 \cdot (49,72 - 0,9 \cdot 0,7512 - 2,5 \cdot 0,9674 - 1,3 \cdot 1,1978) = 1,404. \end{cases}$$

Так как после 1-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,3326 > \varepsilon$, то перейдем ко второй итерации ($k = k + 1$).

2-ая итерация ($k = 2$):

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1/20,9 \cdot (21,7 - 1,2 \cdot 0,9674 - 2,1 \cdot 1,1978 - 0,9 \cdot 1,404) = 0,8019, \\ x_2^{(2)} = 1/21,2 \cdot (27,46 - 1,2 \cdot 0,8019 - 1,5 \cdot 1,1978 - 2,5 \cdot 1,404) = 0,9996, \\ x_3^{(2)} = 1/19,8 \cdot (28,76 - 2,1 \cdot 0,8019 - 1,5 \cdot 0,9996 - 1,3 \cdot 1,404) = 1,1996, \\ x_4^{(2)} = 1/32,1 \cdot (49,72 - 0,9 \cdot 0,8019 - 2,5 \cdot 0,9996 - 1,3 \cdot 1,1996) = 1,4. \end{cases}$$

Так как после 2-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,0507 > \varepsilon$, то перейдем к третьей итерации ($k = k + 1$).

3-ья итерация ($k = 3$):

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 1/20,9 \cdot (21,7 - 1,2 \cdot 0,9996 - 2,1 \cdot 1,1996 - 0,9 \cdot 1,4) = 0,8001, \\ x_2^{(3)} = 1/21,2 \cdot (27,46 - 1,2 \cdot 0,8001 - 1,5 \cdot 1,1996 - 2,5 \cdot 1,4) = 1, \\ x_3^{(3)} = 1/19,8 \cdot (28,76 - 2,1 \cdot 0,8001 - 1,5 \cdot 1 - 1,3 \cdot 1,4) = 1,2, \\ x_4^{(3)} = 1/32,1 \cdot (49,72 - 0,9 \cdot 0,8001 - 2,5 \cdot 1 - 1,3 \cdot 1,2) = 1,4. \end{cases}$$

Так как после 3-ей итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,002 > \varepsilon$, то перейдем к четвертой итерации ($k = k + 1$).

4-ая итерация ($k = 4$):

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 1/20,9 \cdot (21,7 - 1,2 \cdot 1 - 2,1 \cdot 1,2 - 0,9 \cdot 1,4) = 0,8, \\ x_2^{(4)} = 1/21,2 \cdot (27,46 - 1,2 \cdot 0,8 - 1,5 \cdot 1,2 - 2,5 \cdot 1,4) = 1, \\ x_3^{(4)} = 1/19,8 \cdot (28,76 - 2,1 \cdot 0,8 - 1,5 \cdot 1 - 1,3 \cdot 1,4) = 1,2, \\ x_4^{(4)} = 1/32,1 \cdot (49,72 - 0,9 \cdot 0,8 - 2,5 \cdot 1 - 1,3 \cdot 1,2) = 1,4. \end{cases}$$

Так как после 4-ой итерации $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0,0001 \leq \varepsilon$, то процесс завершаем и полагаем, что: $x_1 \approx 0,8$; $x_2 \approx 1$; $x_3 \approx 1,2$; $x_4 \approx 1,4$.

Заключение

В теоретической части мы узнали о таких темах, как системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ); решение СЛАУ; приведение линейной системы к виду, удобному для итерации; метод Зейделя решения СЛАУ.

В практической части мы рассмотрели задачи по данной теории.

Линейные системы имеют в вычислениях очень большое значение, так как к ним может быть приведено приближенное решение широкого круга задач. Теория этих систем сравнительно проста и доведена во многих частях до совершенства.

Чтобы было возможным решение систем большого числа уравнений, необходимо изменить метод вычислений и сделать его менее трудоемким. Такая задача привлекала внимание большого числа лиц, поэтому было создано много методов решения линейных систем. Эти методы строились как для систем общего вида с любыми коэффициентами, так и для систем специальных форм, например, получающихся при численном решении уравнений.

Таким методом является метод Зейделя, позволяющий получить приближенное решение уравнения, затрачивая при этом меньше числовых операций, чем при точных методах.

Список литературы

1. Пирумов, У.Г. Численные методы: учебное пособие / У.Г. Пирумов. – М.: МАИ, 1998. – 188 с.
2. Цупак, А.А. Лекции по алгебре. I семестр. Комплексные числа. Матрицы и детерминанты. Линейные системы. Собственные векторы: учебное пособие / А.А. Цупак, А.Н. Цупак. – Пенза: Издательский центр ПензГУ, 2008. – 120 с.
3. Гредасова, Н.В. Линейная алгебра: учеб. пособие / Н.В. Гредасова, М.А. Корешникова, Н.И. Желонкина. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. – 88 с.
4. Лизунова, Н.А. Матрицы и системы линейных уравнений / Н.А. Лизунова, С.П. Шкроба. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 352 с.
5. Шевцов, Г.С. Линейная алгебра: учеб. пособие / Г.С. Шевцов. – М.: Гардарики, 1999. – 360 с.
6. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
7. <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=chislennyye-metody-resheniya-slau>
8. <https://matica.org.ua/metodichki-i-knigi-pomatematike/vychislitelnaia-matematika-praktikum/1-2-3-metod-zeidelia-metod-gaussa-zeidelia-metod-posledovatelnykh-zameshchenii>