МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методы решения иррациональных уравнений»

Студент 06.05.25 (подпись, дата) Евдокимова Диана Олеговна (ФИО полностью)

Руководитель 06.05.25 (подпись, дата) Монахова О.А. (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 23.06.25 (подпись, дата) Журавлева Е.Г. (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой 02.06.25 (подпись, дата) Паньженский В.И. (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 4 (хор) (протокол заседания ГЭК от 27.06.25 № 11)

Секретарь ГЭК 27.06.25 (подпись, дата) Журавлева Е.Г. (фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ……..3

ГЛАВА 1 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ…….5

1.1 Понятие иррационального уравнения…….……....5

1.2 Методы решения иррациональных уравнений……...9

1.3 Основные виды иррациональных уравнений и схемы их решения……16

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ…….28

2.1 Типичные ошибки при решении иррациональных уравнений. Методическая роль заданий, в решении которых нужно найти ошибку……..28

2.2Комплекс упражнений «Найди ошибку» по теме «Иррациональные уравнения»…….31

ЗАКЛЮЧЕНИЕ……..55

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ……...….57

ВВЕДЕНИЕ

*Актуальность работы.*В настоящее время содержание образования расширяется за счет совершенствования навыков работы с информацией и творческого подхода к решению педагогических задач.

Иррациональные уравнения – одна из сложных тем в школьном курсе алгебры. Наличие разных типов уравнений, необходимость подбора алгоритма к каждому уравнению, тесная связь уравнений с неравенствами разных типов, необходимость применения функционального подхода, оценки равносильности каждого преобразования и другие факторы приводят к слабомуосвоению данного учебного материала и к большой частоте ошибок при решении уравнений данного вида.

Иррациональные выражения являются для учеников сложными для понимания и преобразования. Возникает потребность в эффективной методике представления понятия иррациональности в целом, а также в качественном преподавании учебного материала, связанного с иррациональными уравнениями и преобразованиями над выражениями данного типа. Методически грамотная разработка поможет в облегчении понимания данного учебного материала и предупредит появление ошибок. Чаще всего неверное решение иррационального уравнения связано с потерей или появлением лишних корней, а также с отсутствием этапа проверки. Возникает необходимость в анализе таких случаев, их проработке и выработке навыка самоконтроля и оценки своих действий при изучении данной темы.

Цельработы: создание комплекса упражнений «Найди ошибку» по теме «Иррациональные уравнения», направленного на улучшение понимания иосвоения данного учебного материала и овладение навыком решения иррациональных уравнений.

Задачи работы:

1. Изучить и проанализировать методическую литературу и рассмотреть способы изучения понятия иррационального уравнения в школьном курсе алгебры.

2. На основе анализа методической литературы описать различные виды иррациональных уравнений и рассмотреть на примерах методы их решения.

3. Проанализировать наиболее часто встречающиеся ошибки при решении иррациональных уравнений.

4. Описать методическую роль заданий, в решении которых допущена ошибка.

5. Разработать комплекс упражнений «Найди ошибку» по теме «Иррациональные уравнения».

Объект работы: иррациональные уравнения в школьном курсе алгебры.

Предмет работы: методика обучения решению иррациональных уравнений.

Практическая значимость: разработанный комплекс упражнений «Найди ошибку» поможет школьникам в овладении навыком решения иррациональных уравнений и в более полном освоении данного учебного материала, а учителям позволит сделать процесс обучения более интерактивным и результативным.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.Во введении аргументируется рассмотрение темы работы, формулируются актуальность, объект и предмет, ставится цель и задачи. В первой главе проведен анализ литературы по теме работы, рассматриваются теоретические основыизучения иррациональных уравнений. Вторая глава посвящена разработке комплекса упражнений «Найди ошибку», представлены задания с ошибкой в решении, её анализ и правильное решение. В заключении подведены итоги выпускной квалификационной работы.

ГЛАВА 1 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ

1.1 Понятие иррационального уравнения

Решение большинства задач в школе предполагает выполнение различных преобразований. Тождественные преобразования – инструмент для упрощения выражений и исследования функций для успешного решения уравнений.

Иррациональное выражение – это алгебраическое выражение, включающее в себя операции извлечения корня из переменной либо возведение переменной в рациональную степень, не являющуюся целым числом [19].

Любое рациональное число $k \in Q$ можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где m принадлежит целым числам, а число n – натуральным. При выполнении тождественных преобразований иррациональных выражений, а также при решении уравнений и неравенств, содержащих радикалы (корни), необходимо применять понятие степени с рациональным показателем и учитывать её свойства.

Напомним определение степени с рациональным показателем [24]:

1. $a^0 = 1$ при $a \neq 0$;
2. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ при $a \geq 0, m, n \in N, n \geq 2$;
3. $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ при $a > 0, k -$ положительное рациональное число;
4. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ при $a < 0, m \in Z$.

Если $a = 0$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Любое иррациональное число можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

В выражениях часто встречаются иррациональные числа

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135 \ldots, \sqrt{3} = 1{,}732050 \ldots, \pi = 3{,}14159 \ldots, e = 2{,}7182845 \ldots$$

Свойства степени с рациональным показателем аналогичны свойствам степени с целым показателем.

Для любых $a, b > 0$ и $m, n \in Q$ справедливы следующие свойства [14]:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Квадратным корнем из неотрицательного действительного числа a называют число b, квадрат которого равен a: $b^2 = a$ [11].

Например, числа 4 и -4 – квадратные корни из 16, так как $4^2 = 16$ и $(-4)^2 = 16$.

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного действительного числа a называют неотрицательное число c, квадрат которого равен a. Обозначается $\sqrt{a}$: $c^2 = a$ и $c > 0$, следовательно, $c = \sqrt{a}$.

Например,$\sqrt{49} = 7$, так как$7^2 = 49$ и $7 > 0$; $\sqrt{25} \neq -5$, так как $-5 < 0$.

Нужно помнить, что знак «$\sqrt{\ }$» (называемый радикалом) всегда означает «арифметический квадратный корень из числаa», хотя при чтении слово «арифметический» опускают.

Корнем n степени ($n \in N$) из действительного числа a называется число b, n степень которого равна a: $b^n = a$.

Например, числа 2 и -2 – корни 4-й степени из 16, так как

$2^4 = 16$ и $(-2)^4 = 16$; число -3 – корень 3-й степени из -27, так как $(-3)^3 = -27$.

Арифметическим корнем n степени из неотрицательного действительного числа a называется неотрицательное число c, n степень которого равна a. Обозначается $\sqrt[n]{a}$:

$c^n = \sqrt[n]{a^n} = a$, где $n \in N, n \geq 2, c \geq 0, a \geq 0$.

Число a – подкоренное число, числоn – показатель корня.

Например, 2 – арифметический корень 4-й степени из 16, так как $2 > 0$ и $2^4 = 16$; число -2 не является арифметическим корнем 4-й степени из 16, так как $-2 < 0$. Но 2 и -2 – корни 4-й степени из 16.

Если n – нечетное число, $n \geq 3, a < 0$, то под $\sqrt[n]{a}$ понимают такое отрицательное число u, что $u^n = a$.

По определению арифметического корня n степени для любого четного положительного числа n

$\sqrt[n]{a^n} = |a| \geq 0$, где $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$

Например, $\sqrt{a^2} = |a|, \sqrt[3]{a^3} = a, \sqrt[5]{(-2)^5} = -2, \sqrt{(-3)^2} = 3.$

Пусть $a \geq 0, b \geq 0$, тогда выполняются следующие свойства арифметического корня:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad (1.1)$$

Данное равенство справедливо для любого числа сомножителей.

Например, $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$

Если $b \neq 0$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (1.2)$$

Свойства (1.1) и (1.2) в случае $a < 0$ и $b < 0$ имеют вид

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|},$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}.$

Справедливы свойства

$(\sqrt[n]{a^m})^k = \sqrt[n]{a^{m \cdot k}},$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^m}} = \sqrt[n \cdot k]{a^m},$

$\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{|a^m|}$, если k – четное,

$\sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$, если k – нечетное.

Если показатели корней – нечетные числа, то все приведенные выше свойства выполняются и для $a < 0, b < 0$, и для $a \cdot b < 0$[25].

При $k > 0$ имеют место свойства

$k \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{k^n \cdot a}$,

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$.

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее переменную, находящуюся под знаком радикала. Чтобы решить уравнение данного вида, часто используют различные методы преобразования иррациональных выражений.

Не стоит забывать про тот факт, что не все преобразования, применяемые к уравнениям, являются равносильными. Особенно это актуально для иррациональных уравнений, где возведение обеих частей уравнения в степень, как правило, является необходимым шагом решения. Но эта операция может привести к появлению посторонних корней.

Рассмотрим пример: уравнение $\sqrt{x} = -2$. Очевидно, что данное уравнение не имеет решений, так как арифметический квадратный корень по определению не может быть отрицательным. Однако, возведя обе части уравнения в квадрат, получим $x = 4$. 4 – посторонний корень, так как при подстановке получаем $\sqrt{4} = -2$, что неверно.

Таким образом, в процессе решения иррациональных уравнений необходимо проводить проверку найденных корней. Выполнять её можно подстановкой в уравнение найденных при решении значений переменной.

Ещё один важный аспект при решении иррационального уравнения – область допустимых значений переменной. Это множество всех допустимых значений переменной, при которых уравнение имеет смысл. Нахождение ОДЗ позволяет исключить значения переменной, которые не могут быть решениями уравнения.

Помимо проверки подстановкой и анализа ОДЗ, важно понимать, какие преобразования приводят к равносильным уравнениям, а какие — нет.

Уравнения, имеющие одинаковое множество решений, называются равносильными.

К примеру, если умножить обе части уравнения на выражение, которое может принимать значение нуля, это может привести к потере некоторых корней, если не учитывать случай, когда данное выражение равно нулю. Аналогично, деление обеих частей уравнения на выражение, содержащеепеременную, также может привести к потере корней.

Рассмотрим еще один важный аспект решения иррациональных уравнений – использование свойств функций. Например, знание свойств монотонности функций может помочь в решении уравнений, в которых одна часть уравнения является возрастающей функцией, а другая – убывающей. В этом случае уравнение имеет не более одного решения.

В заключение, решение иррациональных уравнений требует внимательности, аккуратности и хорошего знания свойств радикалов, степеней и функций. Важно понимать, какие преобразования являются равносильными, как находить ОДЗ и как проверять найденные корни на посторонние. Овладение этими навыками позволит успешно решать широкий класс иррациональных уравнений, встречающихся в школьном курсе алгебры.

Остановимся подробнее на основных методах решения иррациональных уравнений.

1.2 Методы решения иррациональных уравнений

1. Уединение радикала и возведение в степень. Смысл таких преобразований – в сведении данного иррационального уравнения к равносильному ему рациональному уравнению.

Пример. Найти корни уравнения $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.

Решение. Область допустимых значений переменной:

$$\begin{cases} 15-x \geq 0, \\ 3-x \geq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Уединим радикал $\sqrt{15-x}=6-\sqrt{3-x}$, отсюда следует (по определению арифметического корня)

$$6-\sqrt{3-x}\geq 0. \qquad (1.4)$$

Возводим в квадрат обе части уравнения, получаем

$$15-x=36-12\sqrt{3-x}+3-x$$

$$12\sqrt{3-x}=24$$

$$\sqrt{3-x}=2.$$

Возводим в квадрат: $3-x=4, x=-1$. Найденное значение x удовлетворяет соотношениям (1.3-1.4).

Ответ: -1.

2. Введение новой переменной (подстановка). Рассмотрим суть данного метода на примерах.

Пример 1. Найти корни уравнения $x^2+3x-18+\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

Решение. Обозначим $x^2+3x-6=t$ (можно $x^2+3x=t$ или $\sqrt{x^2+3x-6}=t\geq 0$). Тогда получаем $t-12+4\sqrt{t}=0$,

$$4\sqrt{t}=12-t \Rightarrow \begin{cases} t\geq 0, \\ 12-t\geq 0. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Возводим в квадрат:

$16t=144-24t+t^2$,

$t^2-40t+144=0, t_1=36, t_2=4.$

Значение $t_1=36$ не удовлетворяет соотношению (1.5). Итак,

$x^2+3x-6=4$, или $x^2+3x-10=0$.

Ответ: $-5;\ 2$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x+9+2\sqrt{x+8}}+\sqrt{x+2-\sqrt{x+8}}=4$

Решение. Обозначим $\sqrt{x+8}=t\geq 0\rightarrow x+8\geq 0, x=t^2-8$, получаем

$\sqrt{t^2-8+9+2t}+\sqrt{t^2-8+2-t}=4$,

$\sqrt{t^2+2t+1}+\sqrt{t^2-t-6}=4$,

$|t+1|+\sqrt{t^2-t-6}=4$;

$t+1>0$ (так как $t \geq 0$), поэтому $\sqrt{t^2-t-6}=4-t-1$,

$$\sqrt{t^2-t-6}=3-t \Rightarrow \begin{cases} t^2-t-6 \geq 0 \\ 3-t \geq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Возводим в квадрат: $t^2-t-6=9-6t+t^2 \rightarrow 5t=15 \rightarrow t=3$.

Найденное значение удовлетворяет неравенствам (1.6).

$\sqrt{x+8}=3, x+8=9, x=1$.

Ответ: 1.

3. Разложение на множители. Для решения иррациональных уравнений, в которых слева находится произведение нескольких выражений с переменной, а справа — ноль, применяется метод разложения на множители. Важным шагом в этом процессе является использование правила расщепления: произведение может быть равно нулю только при условии, что хотя бы один из множителей равен нулю, при этом остальные должны быть определены.

Пример. Найти корни уравнения $(x-3)(x^2-x-6)\sqrt{x-2}=0$.

Решение. По методу разложения на множители на ОДЗ переменной x это уравнение заменяется совокупностью трех уравнений: $\begin{bmatrix} x-3=0, \\ x^2-x-6=0, \\ \sqrt{x-2}=0. \end{bmatrix}$

Решаем каждое уравнение: $x_1=3, x_2=-2, x_3=3, x_4=2$.

$x_2=-2$ не является корнем уравнения, так как ОДЗ: $x-2 \geq 0, x \geq 2$.

Ответ: $2;\ 3$.

4. Графический метод. Данный метод применяется при отсутствии более простого способа решения соответствующего иррационального уравнения или при установлении отсутствия корней. При этом графики функций, входящих в уравнение, должны быть простыми для построения.

Суть графического метода заключается в нахождении координат точек пересечения графиков этих функций для нахождения решений уравнения. Корнями уравнения считаются абсциссы тех точек, в которых графики функций пересекаются.

Из-за сложности получения высокоточных графиков без специализированных программ результаты, полученные с помощью этого метода, обычно являются лишь приблизительными и требуют дальнейшей проверки, если не относятся к очевидным случаям. Это является ключевым моментом графического подхода.

Чтобы использовать графический метод решения уравнений, необходимо выполнить следующие шаги:

1. Преобразовать уравнение так, чтобы графики правой и левой частей уравнения были достаточно простыми для построения.

2. В одной прямоугольной системе координат следует построить графики функций, представляющих левую и правую части уравнения.

3. Далее требуется определить все точки, в которых графики пересекаются:

- если пересечений нет, значит уравнение не имеет корней;
- если пересечения обнаружены, переходим к следующему пункту.

4. Определяем абсциссы всех точек пересечения графиков — эти значения являются приблизительными корнями уравнения.

5. Если есть основания полагать, что найденные корни могут быть точными, их следует проверить подстановкой обратно в уравнение.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x-1}+2=\sqrt{4-x^2}$ (1.7).

Решение. Решая данное уравнение методом возведения в квадрат обеих его частей, причем несколько раз, степень уравнения будет повышаться, а радикалы не пропадут. Такое решение получается довольно громоздким. Более удобно использовать графический метод, построив графики функций, представляющих левую и правую части уравнения. График левой части уравнения – это ветвь параболы, направленная вправо, со смещением по Ох и Оу. График правой части уравнения – верхняя часть окружности, ограниченная осью Ох. Графики представлены на следующем рисунке.

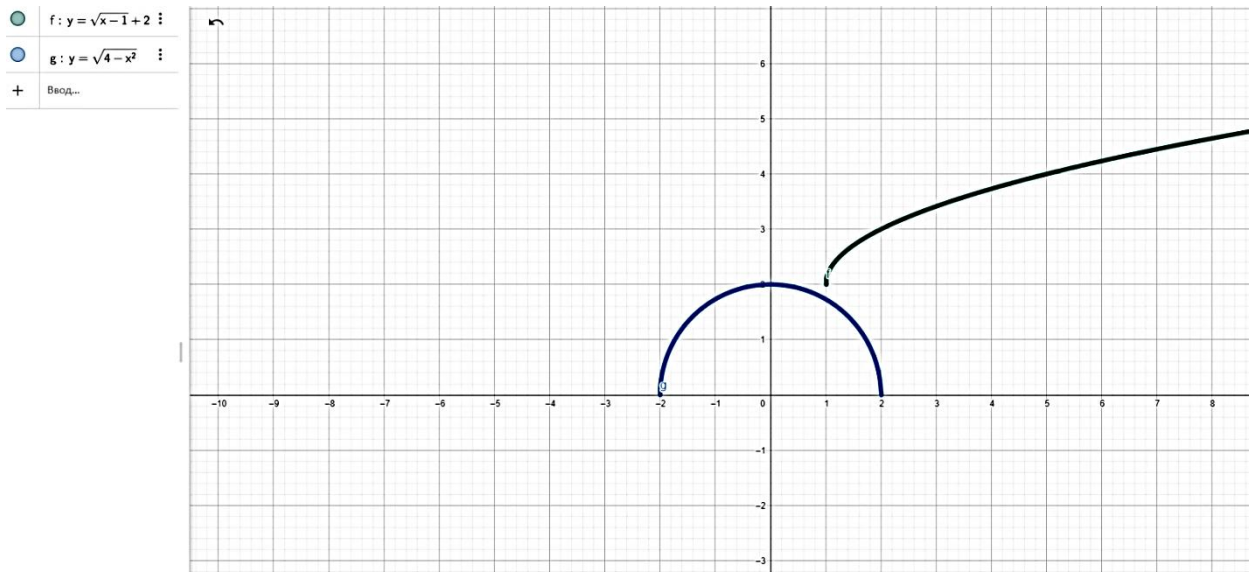


Рисунок 1 – Решение уравнения (1.7)

Из рисунка 1 видно, что графики функций не имеют точек пересечения. Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ:$\emptyset$.

5. Исследование ОДЗ. Способ, основанный на использовании области допустимых значений.

Пример. Решить уравнение

$$2\sqrt{8x+1}-5\sqrt[3]{x+26}-\sqrt{x-1}=-(3+\sqrt{1-x})^2.$$

Решение. ОДЗ: $x=1$. Проверка показывает, что $x=1$ – корень уравнения.

Ответ:1.

6. Метод домножения на сопряженное выражение.Рассмотрим выражение S, содержащее радикалы. Сопряжённым множителем для данного выражения называется любое ненулевое выражение K, такое, что произведение SK не содержит радикалов [24]. Умножив обе части уравнения на этот сопряжённый множитель и проведя соответствующие преобразования, мы сможем получить упрощённое уравнение.

Пример. Решить уравнение$\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$

Решение. Умножим обе части уравнения на $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}$ (выражение, сопряженное левой части уравнения). Получим в

левой части $(2x^2+3x+5)-(2x^2-3x+5)=6x$. Следовательно, исходное уравнение примет вид:

$$6x=3x\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right),$$

$$x\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}-2\right)=0.$$

$x_1=0$ является корнем. Остается решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2.$$

Сложив это и исходное уравнения, получим $2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2$.

Далее решаем получившееся уравнение методом возведения в квадрат:

$$8x^2+12x+20=9x^2+12x+4,$$

$$x^2=16\Rightarrow x_2=4, x_3=-4.$$

Проверкой убеждаемся, что исходному уравнению удовлетворяет только $x_2=4$.

Ответ: 4.

7. Выделение полного квадрата. Когда подкоренное выражение является полным квадратом, можно избавиться от внешнего радикала в двойном радикале, применив следующее свойство: $\sqrt{(f(x))^2}=|f(x)|$.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

Решение. Заметим, что $x+2+2\sqrt{x+1}=(\sqrt{x+1}+1)^2$,

$x+2-2\sqrt{x+1}=(\sqrt{x+1}-1)^2$. Следовательно, имеем уравнение

$$\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}=2,$$

$$\sqrt{x+1}+1+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=2.$$

Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}-1\geq 0,\\ 2\sqrt{x+1}=2.\end{cases}\text{ или }\begin{cases}\sqrt{x+1}-1<0,\\ \sqrt{x+1}+1+1-\sqrt{x+1}=2.\end{cases}$$

Решением первой системы будет $x=0$, решением второй системы – все числа, удовлетворяющие неравенству $-1\leq x<0$.

Ответ: $x\in[-1;0)$.

8. Использование свойств функций.При использовании данного метода при решении иррационального уравнения важно помнить следующее:

1. Функция$f(x)$непрерывна и строго монотонна на интервале $Q \Longrightarrow$ уравнение $f(x) = c$($c-$ константа)имеет не более одного корня на данном интервале.

2. Функции$f(x)$и $g(x)$ непрерывны на интервале Q($f(x)$ строго возрастает, $g(x)$ строго убывает) $\Longrightarrow$ уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня на данном интервале [3].

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[4]{18-x} - \sqrt[4]{x-2} = 2$.

Решение. Найдем ОДЗ переменной x.

$$\begin{cases} 18 - x \geq 0, \\ x - 2 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 18, \\ x \geq 2. \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 18.$$

На ОДЗ функции $f(x) = -\sqrt[4]{x-2}$ и $g(x) = \sqrt[4]{18-x}$ непрерывны и строго убывают,

тогда непрерывна и убывает функция $h(x) = \sqrt[4]{18-x} - \sqrt[4]{x-2}$.

Поэтому каждое свое значение функция$h(x)$принимает только в одной точке. Так как $h(2) = 2$, то 2 является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ:2.

Важно отметить, что выбор метода решения иррационального уравнения зависит от его конкретного вида и особенностей. Часто для решения одного и того же уравнения можно использовать несколько различных методов, но один из них может оказаться более эффективным и простым, чем другие.

При решении сложных иррациональных уравнений полезно комбинировать различные методы, например, сначала ввести новую переменную для упрощения уравнения, а затем применить метод уединения радикала и возведения в степень.

Также стоит обратить внимание на уравнения, содержащие несколько радикалов разных степеней. В этом случае может быть полезно привести все радикалы к одной степени или использовать метод подстановки для избавления от одного из радикалов.

В некоторых случаях решение иррационального уравнения может быть значительно проще, если заметить некоторую закономерность или структуру в уравнении. Например, если уравнение содержит повторяющиеся выражения, то их можно обозначить новой переменной.

Для успешного решения иррациональных уравнений необходимо обладать хорошими навыками алгебраических преобразований, уметь находить область допустимых значений переменной и проверять найденные корни на посторонние. Также важно понимать основные методы решения и уметь выбирать наиболее подходящий метод для каждого конкретного уравнения.

При обучении решению иррациональных уравнений важно начинать с простых примеров, постепенно переходя к более сложным. Необходимо уделять внимание не только технике решения, но и пониманию основных понятий и свойств радикалов и степеней.

В заключение, овладение методами решения иррациональных уравнений является важной частью изучения алгебры. Это не только позволяет решать конкретные задачи, но и развивает логическое мышление, умение анализировать и преобразовывать выражения, а также навыки работы с различными математическими инструментами.

1.3 Основные виды иррациональных уравнений и схемы их решения

Выделяютследующие основные виды иррациональных уравнений и схемы их решения:

1. Уравнение вида $\sqrt[2n]{f(x)} = a$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} = a$.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x+3} = 4$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат. Получим:

$x + 3 = 16; x = 13.$

Ответ:$13.$

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = -5.$

Решение. Левая часть уравнения – арифметический квадратный корень, который по определению неотрицателен. Правая часть – отрицательное число. Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ:$\emptyset.$

Выведем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного типа:

$\sqrt[2n]{\boldsymbol{f(x)}} = \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{a^{2n}}$, если $a \geq 0$; не имеет решения, если $a < 0.$

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[3]{2x - 4} = -4.$

Решение. Возведем обе части исходного уравнения в куб. Получим: $2x - 4 = -64; x = -30.$

Ответ:$-30.$

Выведем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного типа:

$\sqrt[2n+1]{\boldsymbol{f(x)}} = \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{a^{2n+1}}.$

Уравнения данного вида встречаются в учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» Ш.А. Алимова[1] в упражнениях № 151 – 153 на стр. 62. Вот некоторые из них:

- $\sqrt[3]{1 - 3x} = 0;$
- $\sqrt{x - 2} = 5;$
- $\sqrt[3]{2x + 3} = 1;$
- $\sqrt[4]{2 - x} = 0;$
- $\sqrt[3]{3x^2 - 3} = \sqrt[3]{8x}.$

Также в задачнике «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» А.Г. Мордковича [13] представлены уравнения данного вида в упражнениях № 30.1 – 30.3 на стр. 189 – 190. Например:

- $\sqrt{6-x}=8$;
- $\sqrt[6]{x+1}=-1$;
- $\sqrt{x^2-4x-3}=3$;
- $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{3x+7}=4$;
- $\sqrt{(x+2)(3x-2)}=4$.

2. Уравнение вида $\sqrt[2n]{\boldsymbol{f(x)}}=\boldsymbol{g(x)}$, $\sqrt[2n+1]{\boldsymbol{f(x)}}=\boldsymbol{g(x)}$.

Ученики, решая уравнение в формате $\sqrt{f(x)}=g(x)$, зачастую останавливаются на этапе возведения частей уравнения в степень. В левой части – арифметический квадратный корень, по определению должен быть неотрицательным. Вследствие этого, правая часть уравнения тоже должна быть неотрицательной. Возникает необходимость проверки или отбора корней, которые будут удовлетворять условию $g(x)\geq 0$.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x+8}=4-2x$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат. Получим:

$2x+8=16-16x+4x^2;\ 4x^2-18x+8=0$. Тогда $x_1=\frac{1}{2}, x_2=4$.

Проверкой видим, что $\frac{1}{2}$ является решением, а 4 – нет. Следовательно, данное уравнение имеет один корень: $\frac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

Выведем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного типа:

$\sqrt[2n]{\boldsymbol{f(x)}}=\boldsymbol{g(x)}\Leftrightarrow \boldsymbol{f(x)}=(\boldsymbol{g(x)})^{\boldsymbol{2n}}$ с обязательной проверкой корней.

Замечание. Также в случае, когда найденные корни будут тяжелы для простой подстановки, вместо этапа проверки можно проводить отбор корней.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{3x-2}=5-x$.

Решение. Корнями этого уравнения могут быть только числа, при которых $3x-2\geq 0$ и $5-x\geq 0$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} 3x-2\geq 0, \\ 5-x\geq 0, \\ 3x-2=(5-x)^2. \end{cases}$

Но эту систему можно упростить. В ней неравенство $3x-2\geq 0$ лишнее, так как оно следует из уравнения $3x-2=(5-x)^2$. Учитывая это, систему перепишем в виде $\begin{cases} 5-x\geq 0, \\ 3x-2=(5-x)^2; \end{cases}$

$$3x-2=(5-x)^2,\quad x^2-13x+27=0.\quad D=61.\quad x_1=\frac{13-\sqrt{61}}{2}, x_2=\frac{13+\sqrt{61}}{2}.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{13-\sqrt{61}}{2}, \\ x=\dfrac{13+\sqrt{61}}{2}; \end{array}\right. \\ x\leq 5. \end{cases}$$

Оценка корней: $2{,}5<\frac{13-\sqrt{61}}{2}<3{,}5,\ 9{,}5<\frac{13+\sqrt{61}}{2}<10{,}5$. Первый корень удовлетворяет системе (неравенству $x\leq 5$), а второй – нет.

Ответ: $\frac{13-\sqrt{61}}{2}$.

Выведем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного типа:

$$\sqrt{\boldsymbol{f(x)}}=\boldsymbol{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{f(x)=g^2(x)},\\ \boldsymbol{g(x)\geq 0}.\end{cases}$$

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$.

Решение. $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4\Leftrightarrow\begin{cases}6-4x-x^2=(x+4)^2,\\ x+4\geq 0;\end{cases}$

$$6-4x-x^2=(x+4)^2,\quad x^2+6x+5=0.\quad x_1=-5, x_2=-1.$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-5,\\ x=-1;\end{array}\right.\\ x\geq -4.\end{cases}$$

Ответ: -1.

Пример 4. Решить уравнение $x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб:

$(x-1)^3=x^2-x-1;\ x^3-4x^2+4x=0; x(x-2)^2=0.$

Тогда $x_1=0, x_2=2$. *Ответ:* $0;\ 2$.

Выведем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного типа:

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^{2n+1}.$$

В учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» Ш.А. Алимова [1]встречаются уравнения данного вида в упражнении № 155 на стр. 62:

- $\sqrt{x} - x = -12;$
- $x + \sqrt{x} = 2(x - 1);$
- $\sqrt{x - 1} = x - 3;$
- $\sqrt{6 + x - x^2} = 1 - x.$

В задачнике «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» А.Г. Мордковича [13] представлены уравнения данного вида в упражнениях № 30.13 – 30.14 на стр. 191:

- $\sqrt{x + 12} = x;$
- $\sqrt{x^3 + x^2 - 1} = x;$
- $\sqrt{5 + 12x - x^2} = x - 7;$
- $\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4 = 5 - x^2}.$

Также уравнения данного вида представлены в олимпиадах[16]. Вот некоторые из них:

- $\sqrt{6 - x} = -x;$
- $\sqrt{x^3 - 3x + 1} - x = -1;$
- $\sqrt{5 - x} = x + 1;$
- $\sqrt{-x^2 + 2x + 35} = -x - 5.$

3. Уравнение вида $f(x) \cdot \sqrt[2n]{g(x)} = 0$.

При решении уравнений такого типа ученики часто используют следующую формулировку свойства произведения: «Произведение множителей будет равно нулю тогда, когда хотя бы один из множителей – ноль». На самом

деле более корректно это свойство будет звучать так: «Если хотя бы один из множителей равен нулю, а другой множитель определен, то их произведение равно нулю».

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x^2-9}=\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}\right)\sqrt{1+\frac{6}{x-3}}$.

Решение. В данном случае уравнение не имеет вида, указанного в заголовке. Следовательно, его необходимо преобразовать. Но сначала найдем ОДЗ переменной x.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2-9\geq 0, \\ 1+\frac{6}{x-3}\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3)\geq 0, \\ \frac{x+3}{x-3}\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 3, \\ x\leq -3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>3, \\ x\leq -3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3, \\ x\leq -3. \end{array}\right.$$

Преобразуем уравнение к виду $f(x)\cdot\sqrt[2n]{g(x)}=0$.

$$\sqrt{x^2-9}-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}\right)\sqrt{1+\frac{6}{x-3}}=0;$$

$$\sqrt{(x-3)(x+3)}-\left(\frac{2x^2+3x}{6}\right)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}=0.$$

При решении уравнений ученики нередко без веской причины делят обе части уравнения на выражение с переменной (на $\sqrt{x+3}$). Это часто приводит к потере действительных корней и неверному решению. Если обе части уравнения имеют общий множитель, верным действием будет перенос всего в одну сторону и разложение на множители [10].

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\left(\left(\sqrt{(x-3)}\right)^2-\frac{2x^2+3x}{6}\right)=0;$$

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\left(|x-3|-\frac{2x^2+3x}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{x+3}{x-3}=0, \\ |x-3|-\frac{2x^2+3x}{6}=0; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>3, \\ x\leq -3. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим каждое из уравнений совокупности: $\frac{x+3}{x-3}=0; x=-3$.

$$|x-3|-\frac{2x^2+3x}{6}=0; \quad 6|x-3|=2x^2+3x. \qquad (1.8)$$

Учитывая, что ОДЗ $\left[\begin{array}{l} x>3, \\ x\le -3, \end{array}\right.$ получаем, что уравнение (1.8) равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le -3, \\ -6(x-3)-2x^2-3x=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ 6(x-3)-2x^2-3x=0. \end{cases} \end{array}\right.$

$2x^2+9x-18=0$. Тогда $x_1=-6, x_2=\frac{3}{2}$ не удовлетворяют условию $x\le -3$.

$2x^2-3x+18=0, D<0$, данное уравнение не имеет корней.

Следовательно, совокупность примет следующий вид: $\begin{cases} x\le -3, \\ x=-6. \end{cases}$

Вернемся к системе: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-6; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>3, \\ x\le -3. \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ: $-3;\ 6$.

Выведем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного типа:

$$\boldsymbol{f(x)\cdot \sqrt[2n]{g(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0; \end{array}\right. \\ g(x)\ge 0. \end{cases}}$$

Уравнения данного вида представлены в олимпиадных задач [16]:

- $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}\right)\sqrt{x^3-4x+80}=x^2+10x+24;$
- $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25}=x^2+3x-10.$

4. Уравнение вида $\boldsymbol{\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}, \sqrt[2n+1]{f(x)}=\sqrt[2n+1]{g(x)}}$.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+5x+3}=\sqrt{2x^2+2x-2}$.

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения, получим:

$2x^2+5x+3=2x^2+2x-2;\ 3x+5=0$. Тогда $x=-\frac{5}{3}$.

Ответ: $-\frac{5}{3}$.

Выведем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного типа:

$\sqrt[2n]{\boldsymbol{f(x)}} = \sqrt[2n]{\boldsymbol{g(x)}} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x) = g(x)}$ с последующей обязательной проверкой.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - x + 4} = \sqrt{x^2 + 2}$.

Решение:

$$\sqrt{x^2 - x + 4} = \sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 4 = x^2 + 2, \\ x^2 + 2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x^2 \geq -2. \end{cases}$$

Ответ: 2.

Выведем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного типа:

$$\sqrt[2n]{\boldsymbol{f(x)}} = \sqrt[2n]{\boldsymbol{g(x)}} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f(x) = g(x)}, \\ \boldsymbol{f(x) \geq 0}; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \boldsymbol{f(x) = g(x)}, \\ \boldsymbol{g(x) \geq 0}. \end{cases}.$$

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[3]{4x + 9} = \sqrt[3]{4 + x^2}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб, тогда получим:

$4x + 9 = 4 + x^2$; $x^2 - 4x - 5 = 0$. Тогда $x_1 = -1, x_2 = 5$.

Ответ: $-1;\ 5$.

Выведем следствие, с помощью которого решаются уравнения данного типа:

$$\sqrt[2n+1]{\boldsymbol{f(x)}} = \sqrt[2n+1]{\boldsymbol{g(x)}} \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x) = g(x)}.$$

В задачнике «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» А.Г. Мордковича [13] представлены уравнения данного вида в упражнении № 30.8 на стр. 190:

- $\sqrt{x - 2} = \sqrt{4 - x}$;
- $\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1} = \sqrt{x^3 + x^2 - 8x - 2}$;
- $\sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{2 - x - x^2}$.

5. Уравнение вида $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} \pm \sqrt{\boldsymbol{g(x)}} = \boldsymbol{a}, \sqrt{\boldsymbol{f(x)}} \pm \sqrt{\boldsymbol{g(x)}} = \sqrt{\boldsymbol{h(x)}}$, $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}} \pm \sqrt{\boldsymbol{g(x)}} = \sqrt{\boldsymbol{h(x)}} \pm \sqrt{\boldsymbol{t(x)}}$.

Замечание. Уравнения вида $\sqrt{\boldsymbol{f(x)+b}}\pm\sqrt{\boldsymbol{f(x)+c}}=\boldsymbol{a}$ можно решать умножением обеих частей уравнения на выражение, не равное нулю (на сопряженное левой части уравнения, т.е. на$\sqrt{f(x)+b}\mp\sqrt{f(x)+c}$).

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

Решение. Так как $f(x)=3x^2+5x$, то умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}$, сопряженное левой части уравнения.

$$\left(\sqrt{3x^2+5x+8}\right)^2-\left(\sqrt{3x^2+5x+1}\right)^2=\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}.$$

После приведения подобных слагаемых получаем уравнение

$$7=\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}, \qquad (1.9)$$

равносильное исходному, так как уравнение

$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=0$ действительных корней не имеет. Складывая исходное уравнение и (1.9), получаем, что $\sqrt{3x^2+5x+8}=4$, $3x^2+5x+8=16,\ 3x^2+5x-8=0.$

Тогда $x_1=-\frac{8}{3}, x_2=1.$

Ответ:$-\frac{8}{3};1.$

Замечание. Также уравнения вида$\sqrt{\boldsymbol{f(x)}}\pm\sqrt{\boldsymbol{g(x)}}=\boldsymbol{a}$можно решать с помощью ОДЗ уравнения и равносильных переходов от одних уравнений к другим.

В учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» Ш.А. Алимова[1] встречаются уравнения данного вида в упражнениях № 158 – 159 на стр. 63:

- $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2;$
- $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9;$
- $\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{15+2x}.$

В задачнике «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» А.Г. Мордковича [13] представлены уравнения данного вида в упражнениях № 30.16 – 30.18 на стр. 192:

- $5\sqrt{3-x}-2\sqrt{x+10}=4$;
- $\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}=4$;
- $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}=0$;
- $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$;
- $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$;
- $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$.

Также уравнения данного вида представлены в олимпиадах [16]:

- $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}=1$;
- $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+13}=\sqrt{3x+12}$;
- $\sqrt{\frac{x^2-16}{x-3}}+\sqrt{x+3}=\frac{7}{\sqrt{x-3}}$.

6. Уравнение вида $\sqrt[3]{\boldsymbol{f(x)}}\pm\sqrt[3]{\boldsymbol{g(x)}}=\boldsymbol{a}$, $\sqrt[3]{\boldsymbol{f(x)}}\pm\sqrt[3]{\boldsymbol{g(x)}}=\boldsymbol{h(x)}$, $\sqrt[3]{\boldsymbol{f(x)}}\pm\sqrt[3]{\boldsymbol{g(x)}}=\sqrt[3]{\boldsymbol{t(x)}}\pm\sqrt[3]{\boldsymbol{h(x)}}$, $\sqrt[3]{\boldsymbol{f^2(x)}}-\sqrt[3]{\boldsymbol{f(x)g(x)}}+\sqrt[3]{\boldsymbol{g^2(x)}}=\boldsymbol{a}$.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение. Возведем обе части исходного уравнения в куб:

$$2x-1+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)+x-1=1.$$

Так как $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$, то, подставляя вместо этого выражения единицу, получим уравнение $3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1$, являющееся следствием исходного.

$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1-x$. Возведем обе части полученного уравнения в куб и решим его:

$$(2x-1)(x-1)=(1-x)^3\Leftrightarrow(2x-1)(x-1)+(x-1)^3=0\Leftrightarrow$$
$$(x-1)(2x-1+(x-1)^2)=0\Leftrightarrow x^2(x-1)=0.$$

Тогда $x_1=0, x_2=1$.

Проверка показывает, что 1 – корень исходного уравнения, а 0 – не является корнем.

Ответ:1.

Замечание. Уравнения вида$\sqrt[3]{\boldsymbol{f^2(x)}} - \sqrt[3]{\boldsymbol{f(x)g(x)}} + \sqrt[3]{\boldsymbol{g^2(x)}} = \boldsymbol{a}$можно решать следующим образом.

Умножая обе части уравнения на выражение $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}$, перейдем к уравнению $f(x) + g(x) = \left(\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}\right)a$, являющемуся следствием исходного уравнения. Далее уравнение-следствие можно решать так, как это предлагалось выше. Только надо помнить, что необходимо выполнить проверку полученных корней.

Пример 2.Решить уравнение

$\sqrt[3]{(x+8)^2} - \sqrt[3]{(x+8)(8-x)} + \sqrt[3]{(x-8)^2} = 4.$

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение

$\sqrt[3]{x+8} + \sqrt[3]{8-x}$. Получаем уравнение $16 = 4\left(\sqrt[3]{x+8} + \sqrt[3]{8-x}\right)$, являющееся следствием исходного.

$4 = \sqrt[3]{x+8} + \sqrt[3]{8-x}$. Возведем обе части данного уравнения в куб:

$x + 8 + 8 - x + 3\sqrt[3]{x+8}\sqrt[3]{8-x}\left(\sqrt[3]{x+8} + \sqrt[3]{8-x}\right) = 64.$

Так как $4 = \sqrt[3]{x+8} + \sqrt[3]{8-x}$, получим уравнение

$64 - 16 = 3\sqrt[3]{x+8}\sqrt[3]{8-x} \cdot 4,\ 4 = \sqrt[3]{64-x^2} \Leftrightarrow 64 - x^2 = 4^3.$

Тогда $x = 0$.

Проверка показывает, что 0 является корнем данного уравнения.

Ответ: 0.

В задачнике «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» А.Г. Мордковича [13] представлены уравнения данного вида в упражнении № 30.26 на стр. 193:

- $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5;$
- $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}.$

В учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» Ш.А. Алимова[1] встречаются уравнения данного вида в упражнении № 153 на стр. 62:

- $\sqrt[3]{2x+3}=1$;
- $\sqrt[3]{3x^2-3}=\sqrt[3]{8x}$.

Также уравнения данного вида представлены в олимпиадах [16]:

- $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$;
- $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{16x+4}$.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1 Типичные ошибки при решении иррациональных уравнений. Методическая роль заданий, в решении которых нужно найти ошибку

На первый взгляд, при разборе примеров, может показаться, что иррациональные уравнения решаются очень просто. Тем не менее, школьники сталкиваются с трудностями, которые характеризуются следующими особенностями:

– арифметическая сложность, например, при проверке иррациональных корней;

– отсутствие единого алгоритма решения иррациональных уравнений;

– необходимость выполнения преобразований, приводящих к уравнениям неравносильным, в виду чего возникают ошибки, связанные с потерей или приобретением посторонних корней.

Из-за этих «подводных камней» многие теряют уверенность в своих силах. Из-за низкого уровня овладения учебным материалом, связанным с иррациональными уравнениями, ученики нередко допускают ошибки при решении комбинированных уравнений, а некоторые и вовсе не решаются браться за уравнения данного вида.

Рассмотрим наиболее частые причины ошибок при решении иррациональных уравнений.

1. Пропуск этапа проверки найденных значений.

Благодаря подстановке найденных значений в исходное уравнение, можно исключить посторонние корни.

2. Неравносильные преобразования уравнения.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни, которые обращают эти выражения в ноль. А при возведении обеих частей уравнения в степень или при замене переменной, могут появиться посторонние корни, которые не удовлетворяют исходному уравнению[21].

3. Не найдена или не учтена область допустимых значений переменной.

Например, не учитывается, что выражение под корнем четной степени должно быть неотрицательным.

4. Неверные преобразования уравнения.

Например, когда выражение с корнем не уединяется, это может привести к сохранению иррациональности в уравнении при его преобразовании. Ошибки в преобразованиях могут быть связаны с некорректным использованием формул сокращенного умножения или неправильным выполнением арифметических действий.

Целенаправленная методика коррекции и предупреждения ошибок позволит избежать описанных выше проблем и научит видеть собственные ошибки и не допускать их при решении. В этом может помочь прием «Найди ошибку», смысл которого в том, чтобы ученики учились видеть недочеты, неверные преобразования в готовом решении иррационального уравнения, даже если окончательный ответ является правильным.

Впервые идея педагогического приема «Лови ошибку!» была описана в книге А.А. Гина «Приемы педагогической техники»[6]. При объяснении нового материала или желая заострить внимание обучающихся на проблемном месте в задании, педагог намеренно допускает ошибку (одну или несколько). Можно заранее оповестить учеников о её наличии. Обнаружив неточность, обучающиеся вносят коррективы, оглашают правильный вариант.

Преимущества приема «Найди ошибку»:

- универсален, его применение возможно на уроках практически по всем школьным дисциплинам;
- приводит в тонус внимание, мыслительную деятельность обучающихся;
- развивает аналитические способности и критическое мышление;
- дает возможность использовать полученные умения в самостоятельной работе;
- развивает навыки самоконтроля и коррекции, навык аргументации;
- способствует более прочному усвоению учебного материала.

Упражнения «Найди ошибку» можно использовать на различных этапах урока:

1) актуализация знаний – для проверки домашнего задания или предыдущей темы для выявления пробелов в знаниях;

2) объяснение нового материала – при демонстрации типичных ошибок в решении, что помогает лучше усвоить правильный вариант;

3) закрепление материала – после изучения новой темы, когда ученики уже могут анализировать правильность выполнения заданий;

4) контроль – на этапе проверки знаний, когда обучающиеся должны не только найти ошибки, но и исправить их, объяснив их причину;

5) рефлексия – для анализа собственной работы и выявления недочетов в понимании учебного материала.

Также этот приём можно использовать для работы в парах или группах, например, когда ученики обмениваются своими решениями, проверяют друг друга, исправляют и объясняют допущенные ошибки. Или для подготовки к контрольной работе – для отработки навыков самоконтроля и критического мышления.

Упражнения такого типа будут способствовать более прочному закреплению навыков решения иррациональных уравнений. С его помощью можно найти проблемные места при изучении иррациональных уравнений и заполнить пробелы в формировании универсальных учебных действий.

2.2 Комплекс упражнений «Найди ошибку» по теме «Иррациональные уравнения»

Изучение иррациональных уравнений представляет собой важный этап в формировании математической компетентности обучающихся [21]. Помимо овладения конкретными алгоритмами решения, эта тема способствует развитию логического мышления, умения анализировать и выявлять ошибки, а также применять теоретические знания на практике. Одним из эффективных методов обучения решению иррациональных уравнений является использование комплекса упражнений «Найди ошибку». Такой подход позволяет не только закрепить изученный материал, но и акцентировать внимание на типичных ошибках учеников в процессе решения.

Цель данной главы – разработка и представление комплекса упражнений «Найди ошибку» по теме «Иррациональные уравнения», в котором представлены наиболее распространенные ошибки при решении уравнений данного вида.

Данный раздел посвящен разработке комплекса упражнений, направленного на выявление и исправление типичных ошибок, допускаемых при решении иррациональных уравнений. Каждое упражнение представляет собой уравнение и предложенное решение, содержащее намеренно допущенную ошибку. Задача ученика состоит в том, чтобы обнаружить эту ошибку, объяснить ее суть и предложить правильное решение.

В данном комплексе мы рассмотрим следующие типичные ошибки:

1. Возведение в степень только выражений с корнем.

2. При возведении в степень левой и правой частей уравнения вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$ или $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ некорректно используются формулы сокращенного умножения.

3. В уравнениях вида $\sqrt[2n]{f(x)} = a$ не учитывается область значений корня.

4. Нет учета области допустимых значений переменной и отсутствует оценка равносильности преобразований.

5. Ошибка при замене переменной.

Для каждого типа ошибки представлены иррациональные уравнения и их решения, в которыхдопущена ошибка этого типа.Для каждого уравнения проведен анализ ошибки и приведено правильное решение.

1. Возведение в степень только выражений с корнем.

Суть ошибки. При возведении обеих частей уравнения в степень с целью избавиться от корня, ученики иногда ошибочно возводят в степень только отдельные члены, содержащие корень, забывая о том, что возводить в степень необходимо всю часть уравнения целиком. Причиной этой ошибки являются неправильные арифметические действия, а также отсутствие этапа проверки, который помог бы выявить её.

Задание 1. Найдите ошибку в решении уравнения $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+3}$ и приведите правильное решение.

Решение: $2(x+1) = x+3,$

$2x+2 = x+3,$

$x = 1.$

Ответ:$1.$

Анализ ошибки. В данном решении ученик возвел в квадрат только выражения, находящиеся под знаком корня, забыв, что левая часть уравнения представляет собой произведение $2\sqrt{x+1}$. Правильное возведение в квадрат требует возведения всего выражения $2\sqrt{x+1}$, включая коэффициент 2.

Правильное решение:

$4(x+1) = x+3,$

$4x+4 = x+3,$

$3x = -1,$

$x = -\frac{1}{3}.$

Проверка:

$2\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)+1}=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)+3},$

$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}},$

$2\sqrt{\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$ (верно)

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Задание 2. Найдите ошибку в решении уравнения $3\sqrt{57-7x}=6$ и приведите правильное решение.

Решение: $3(57-7x)=36,$

$171-21x=36,$

$21x=135,$

$x=\frac{45}{7}.$

Ответ: $\frac{45}{7}$.

Анализ ошибки. Аналогично предыдущему примеру, допущена ошибка при возведении в квадрат левой части уравнения. Необходимо возводить в квадрат все выражение $3\sqrt{57-7x}$, а не только выражение под корнем.

Правильное решение:

$9(57-7x)=36,$

$513-63x=36,$

$63x=477,$

$x=\frac{477}{63}=\frac{53}{7}.$

Ответ: $\frac{53}{7}$.

Проверка:

$3\sqrt{57-7\cdot\frac{53}{7}}=6,$

$3\sqrt{57-53}=6,$

$3\sqrt{4}=6,$

$3\cdot 2=6,$

$6=6$ (верно)

Задание 3. Найдите ошибку в решении уравнения $2\sqrt[3]{x+2}=-2$ и приведите правильное решение.

Решение: $2(x+2)=-8,$

$2x=-12,$

$x=-6.$

Ответ: $-6.$

Анализ ошибки. Здесь ошибка в возведении в куб. Необходимо возводить в куб всё выражение $2\sqrt[3]{x+2}$, то есть $(2\sqrt[3]{x+2})^3=8(x+2).$

Правильное решение:

$8(x+2)=-8,$

$8x+16=-8,$

$8x=-24,$

$x=-3.$

Проверка:

$2\sqrt[3]{(-3)+2}=-2,$

$2\sqrt[3]{(-1)}=-2,$

$2\cdot(-1)=-2,$

$-2=-2$ (верно)

Ответ: $-3.$

Задание 4. Найдите ошибку в решении уравнения $5\sqrt{4x^2+3}=10$ и приведите правильное решение.

Решение: $5(4x^2+3)=100,$

$20x^2+15=100,$

$20x^2=85,$

$x^2=\frac{85}{20},$

$x^2=\frac{17}{4},$

$x_1=\frac{\sqrt{17}}{2}, x_2=-\frac{\sqrt{17}}{2}.$

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{17}}{2}.$

Анализ ошибки. Вычислительная ошибка, которая заключается в том, что в квадрат нужно возводить всю левую часть уравнения, включая коэффициент 5: $\left(5\sqrt{4x^2+3}\right)^2 = 25(4x^2+3)$.

Правильное решение:

$25(4x^2+3) = 100,$

$100x^2 + 75 = 100,$

$100x^2 = 25,$

$x^2 = \frac{25}{100},$

$x^2 = \frac{1}{4},$

$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}.$

Проверка:

$5\sqrt{4\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 + 3} = 10,$

$5\sqrt{4 \cdot \frac{1}{4} + 3} = 10,$

$5\sqrt{4} = 10,$

$5 \cdot 2 = 10,$

$10 = 10$ (верно)

Ответ: $\pm 0{,}5$.

Задание 5. Найдите ошибку в решении уравнения $\frac{\sqrt[3]{4x-7}}{2} = \sqrt[3]{3x-4}$ и приведите правильное решение.

Решение: $\frac{4x-7}{2} = 3x - 4,$

$4x - 7 = 6x - 8,$

$-2x = -1,$

$x = 0{,}5.$

Ответ: $0{,}5$.

Анализ ошибки. Нет возведения в куб коэффициента $\frac{1}{2}$, то есть $\left(\frac{\sqrt[3]{4x-7}}{2}\right)^3 = \frac{4x-7}{8}$.

Правильное решение:

$\frac{4x-7}{8} = 3x - 4,$

$4x - 7 = 24x - 32,$

$-20x = -25,$

$x = \frac{-25}{-20},$

$x = \frac{5}{4}.$

Проверка:

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{4 \cdot \frac{5}{4} - 7} = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{5}{4} - 4},$

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{5 - 7} = \sqrt[3]{\frac{15}{4} - 4},$

$\frac{1}{2}\sqrt[3]{(-2)} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{4}\right)},$

$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}},$

$-\frac{\sqrt[3]{2}}{2} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$(верно)

Ответ: $1{,}25.$

2. При возведении в степень левой и правой частей уравнения вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$ или $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ некорректно используются формулы сокращенного умножения.

Суть ошибки. Эта ошибка возникает, когда обучающиеся не понимают, что при возведении в квадрат выражения, содержащего сумму или разность корней, необходимо использовать формулу квадрата суммы/разности: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Простое «опускание» знаков радикала приводит к грубой ошибке, а также отсутствие этапа проверки.

Задание 1. Найдите ошибку в решении уравнения

$\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x - 4} = 2\sqrt{x}$ и приведите правильное решение.

Решение:$3x + 4 - x + 4 = 4x,$

$2x - 4x = -8,$

$-2x = -8,$

$x = 4.$

Ответ: 4.

Анализ ошибки. Ученик некорректно возвел в квадрат левую часть уравнения. Правильно:

$\left(\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-4}\right)^2 = (3x+4) - 2\sqrt{3x+4}\sqrt{x-4} + (x-4).$

В решении отсутствует удвоенное произведение корней.

Правильное решение:

$3x + 4 - 2\sqrt{3x+4}\sqrt{x-4} + x - 4 = 4x,$

$4x - 2\sqrt{3x^2 - 8x - 16} = 4x,$

$2\sqrt{3x^2 - 8x - 16} = 0,$

$4(3x^2 - 8x - 16) = 0,$

$3x^2 - 8x - 16 = 0,$

$D = 64 + 192 = 256,$

$x_1 = \frac{8+16}{6} = 4,$

$x_2 = \frac{8-16}{6} = -\frac{4}{3}.$

Проверка:

Для $x = 4$: $\sqrt{3 \cdot 4 + 4} - \sqrt{4-4} = 2\sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{16} - \sqrt{0} = 2\sqrt{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{4} = 2\sqrt{4}$ (верно)

Для $x = -\frac{4}{3}$: $\sqrt{3\left(-\frac{4}{3}\right) + 4} + \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right) - 4} = 2\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{0} + \sqrt{\left(-\frac{16}{3}\right)} = 2\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow \sqrt{\left(-\frac{16}{3}\right)}$ – не существует, т.к. под корнем отрицательное число.

Ответ: 4.

Задание 2. Найдите ошибку в решении уравнения

$\sqrt{2x-13} - \sqrt{x+1} = 0$ и приведите правильное решение.

Решение: $2x - 13 - x - 1 = 0,$

$x - 14 = 0,$

$x = 14.$

Ответ: $14.$

Анализ ошибки. Аналогично предыдущему примеру, некорректно возведена в квадрат левая часть уравнения. Правильно:

$\left(\sqrt{2x-13}-\sqrt{x+1}\right)^2 = (2x-13) - 2\sqrt{(2x-13)}\sqrt{(x+1)} + (x+1)$. В решении отсутствует удвоенное произведение корней со знаком минус.

Правильное решение:

$\sqrt{2x-13} = \sqrt{x+1}$ (уединяем радикалы: переносим корень вправо)

$2x - 13 = x + 1,$

$x = 14.$

Проверка:

$\sqrt{2 \cdot 14 - 13} - \sqrt{14+1} = 0,$

$\sqrt{15} - \sqrt{15} = 0,$

$0 = 0$ (верно)

Ответ: $14.$

Задание 3. Найдите ошибку в решении уравнения $\sqrt{2x+5} + \sqrt{5-x} = 3$ и приведите правильное решение.

Решение: $2x + 5 + 5 - x = 9,$

$x + 10 = 9,$

$x = -1.$

Ответ: $-1.$

Анализ ошибки. Неправильно возведена в квадрат левая часть уравнения. Было забыто про удвоенное произведение корней.

Правильное решение:

$2x + 5 + 2\sqrt{2x+5}\sqrt{5-x} + 5 - x = 9,$

$x + 10 + 2\sqrt{10x - 2x^2 + 25 - 5x} = 9,$

$2\sqrt{-2x^2 + 5x + 25} = -x - 1,$

$4(-2x^2 + 5x + 25) = x^2 + 2x + 1,$

$-8x^2 + 20x + 100 = x^2 + 2x + 1,$

$9x^2 - 18x - 99 = 0,$

$x^2 - 2x - 11 = 0,$

$D = 4 + 44 = 48,$

$x_1 = \frac{2+\sqrt{48}}{2} = \frac{2+4\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3},$

$x_2 = \frac{2-\sqrt{48}}{2} = \frac{2-4\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sqrt{3}.$

Подставляем $x_1 = 1 + 2\sqrt{3}$ в исходное уравнение:

$\sqrt{2(1 + 2\sqrt{3}) + 5} + \sqrt{5 - (1 + 2\sqrt{3})} = 3,$

$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 3,$

$\sqrt{4 + 4\sqrt{3} + 3} + \sqrt{3 - 2\sqrt{3} + 1} = 3,$

$\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = 3$ (т.к. $2 + \sqrt{3} > 0$ и $\sqrt{3} - 1 > 0$)

$2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 3,$

$1 + 2\sqrt{3} \neq 3$ (значит, этот корень посторонний)

Подставляем $x_2 = 1 - 2\sqrt{3}$ в исходное уравнение:

$\sqrt{2(1 - 2\sqrt{3}) + 5} + \sqrt{5 - (1 - 2\sqrt{3})} = 3,$

$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 3,$

$\sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3} + \sqrt{3 + 2\sqrt{3} + 1} = 3,$

$\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = 3,$

$2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 = 3$(т.к. $2 - \sqrt{3} > 0$)

$3 = 3$ (верно)

Ответ: $1 - 2\sqrt{3}.$

Задание 4. Найдите ошибку в решении уравнения

$\sqrt{9x^2 - 5} - \sqrt{3x^2 - 2} = \sqrt{4x^2 - 3}$ и приведите правильное решение.

Решение: $9x^2 - 5 - 3x^2 - 2 = 4x^2 - 3,$

$2x^2 = 4,$

$x^2 = 2,$

$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}.$

Ответ: $\pm\sqrt{2}.$

Анализ ошибки. Неверно возведена в квадрат левая часть уравнения. Должна быть использована формула сокращенного умножения – квадрат разности.

Правильное решение:

$9x^2 - 5 - 2\sqrt{9x^2 - 5}\sqrt{3x^2 - 2} + 3x^2 - 2 = 4x^2 - 3,$

$2\sqrt{27x^4 - 33x^2 + 10} = 4 - 8x^2,$

$\sqrt{27x^4 - 33x^2 + 10} = 2 - 4x^2,$

$27x^4 - 33x^2 + 10 = 4 - 16x^2 + 16x^4,$

$11x^4 - 17x^2 + 6 = 0,$

Замена: $x^2 = t$

$11t^2 - 17t + 6 = 0,$

$D = 289 - 264 = 25,$

$t_1 = \frac{17+5}{22} = 1, t_2 = \frac{17-5}{22} = \frac{12}{22} = \frac{6}{11}$

$x^2 = 1,$ $\qquad$ $x^2 = \frac{6}{11},$

$x_1 = 1,\ x_2 = -1.$ $\qquad$ $x_3 = \sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{\sqrt{66}}{11},$ $\qquad$ $x_4 = -\sqrt{\frac{6}{11}} = -\frac{\sqrt{66}}{11}.$

Проводя проверку подстановкой $x_3,\ x_4$ в исходное уравнение, получим, что эти корни – посторонние.

Подставляем $x_1,\ x_2$ в исходное уравнение:

$\sqrt{9(\pm1)^2 - 5} - \sqrt{3(\pm1)^2 - 2} = \sqrt{4(\pm1)^2 - 3},$

$\sqrt{4} - \sqrt{1} = \sqrt{1},$

$2 - 1 = 1,$

$1 = 1$ (верно)

Ответ: $\pm1.$

Задание 5. Найдите ошибку в решении уравнения

$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{5x-1}$ и приведите правильное решение.

Решение: $3x-2+x-1=5x-1,$

$x=-2.$

Ответ: $-2.$

Анализ ошибки. Забыто про формулу сокращенного умножения – квадрат суммы – для левой части уравнения, про удвоенное произведение корней.

Правильное решение:

$3x-2+2\sqrt{3x-2}\sqrt{x-1}+x-1=5x-1,$

$2\sqrt{3x^2-5x+2}=x+2,$

$4(3x^2-5x+2)=x^2+4x+4,$

$12x^2-20x+8=x^2+4x+4,$

$11x^2-24x+4=0,$

$D=576-176=400,$

$x_1=\frac{24+20}{22}=2,\quad x_2=\frac{24-20}{22}=\frac{4}{22}=\frac{2}{11}.$

ОДЗ:

$3x-2\geq 0,\ x-1\geq 0,\ 5x-1\geq 0.$

Общее ограничение: $x\geq 1.$

Следовательно, $x_2=\frac{2}{11}$ – посторонний корень.

Подставляем $x_1=2$ в исходное уравнение:

$\sqrt{3\cdot 2-2}+\sqrt{2-1}=\sqrt{5\cdot 2-1},$

$\sqrt{4}+\sqrt{1}=\sqrt{9},$

$2+1=3,$

$3=3$ (верно)

Ответ: $2.$

3. В уравнениях вида $\sqrt[2n]{f(x)} = a$ не учитывается область значений корня.

Суть ошибки. Корень четной степени из числа (или выражения) не может быть отрицательным. Если в уравнении корень четной степени равен отрицательному числу, уравнение не имеет решений. Ученики часто забывают об этом ограничении и продолжают решать уравнение, находя посторонние корни. Предварительная оценка области значений обеих частей уравнения помогла бы избежать этой ошибки.

Задание 1. Найдите ошибку в решении уравнения $\sqrt{x+2} = -3$ и приведите правильное решение.

Решение: $x + 2 = 9,$

$x = 7.$

Ответ: $7.$

Анализ ошибки. Корень квадратный (четной степени) не может быть равен отрицательному числу. Уравнение $\sqrt{x+2} = -3$ не имеет решений.

Правильное решение:

Так как корень квадратный не может быть отрицательным, уравнение не имеет решений.

Ответ: $\emptyset.$

Задание 2. Найдите ошибку в решении уравнения $\sqrt[4]{6-x} = -\sqrt[4]{256}$ и приведите правильное решение.

Решение: $6 - x = 256,$

$x = -250.$

Ответ: $-250.$

Анализ ошибки. Аналогично предыдущему примеру, корень четвёртой степени не может быть равен отрицательному числу.

Правильное решение:

Так как корень четвёртой степени не может быть отрицательным, уравнение не имеет решений.

Ответ: $\emptyset.$

Задание 3. Найдите ошибку в решении уравнения

$\sqrt{2x^2-3x-5}+7=0$ и приведите правильное решение.

Решение: $2x^2-3x-5=49,$

$2x^2-3x-54=0,$

$D=9+432=441,$

$x_1=\frac{3+21}{4}=6,\ x_2=\frac{3-21}{4}=-4{,}5.$

Ответ: $6;\ -4{,}5.$

Анализ ошибки. Ученик проигнорировал тот факт, что корень квадратный не может быть равен -7. Решение квадратного уравнения и нахождение корней не имеет смысла, так как исходное уравнение не имеет решений.

Правильное решение:

Так как корень квадратный не может быть отрицательным, уравнение не имеет решений.

Ответ: $\emptyset$.

Задание 4. Найдите ошибку в решении уравнения

$\sqrt{4x^2+5x-2}=2$ и приведите правильное решение.

Решение: $4x^2+5x-2=4,$

$4x^2+5x-6=0,$

$D=25+96=121,$

$x_1=\frac{-5+11}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},\ \ x_2=\frac{-5-11}{8}=-2.$

Ответ: $\frac{3}{4};-2.$

Анализ ошибки. Квадратный корень не может быть равен отрицательному числу, что было оставлено без внимания. Решение дальнейшего квадратного уравнения не имеет смысла.

Правильное решение:

Так как квадратный корень не может быть равен отрицательному числу, уравнение не имеет корней.

Ответ: $\emptyset$.

Задание 5. Найдите ошибку в решении уравнения $\frac{\sqrt[6]{x}}{2} = -\frac{1}{2}$ и приведите правильное решение.

Решение: $\frac{x}{64} = \frac{1}{64}$,

$64x = 64$,

$x = 1$.

Ответ: 1.

Анализ ошибки. Корень четной степени (в данном уравнении шестой) не может быть отрицателен.

Правильное решение:

Так как корень шестой (четной) степени не может быть равен отрицательному числу, уравнение не имеет решений.

Ответ: $\emptyset$.

4. Нет учета области допустимых значений переменной и отсутствует оценка равносильности преобразований.

Суть ошибки. При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать допустимые значения переменной и оценивать равносильность преобразований [10]. Это связано с тем, что для корней четной степени подкоренное выражение и значение корня должно быть неотрицательным. Игнорирование ОДЗ и условия равносильности возведения в четную степень обеих частей уравнения может привести к появлению посторонних корней.

Задание 1. Найдите ошибку в решении уравнения $\sqrt{x} = -x$ и приведите правильное решение.

Решение: $x = x^2$,

$x(1 - x) = 0$,

$x_1 = 0, x_2 = 1$.

Ответ: $0;\ 1$.

Анализ ошибки. Ученик правильно выполнил преобразования, но не учел ограничения для переменной. Подкоренное выражение должно быть

неотрицательным: $x \geq 0$. Правая часть уравнения тоже неотрицательна: условие $-x \geq 0$ означает, что$x \leq 0$. Следовательно, общее ограничение: $x = 0$. Следовательно, $x = 1$ является посторонним корнем.

Правильное решение:

Ограничение переменной: $x \geq 0$ и $-x \geq 0$, следовательно, $x = 0$

Проверка: $\sqrt{0} = -0 \Longrightarrow 0 = 0$ (верно)

Ответ: 0.

Задание 2. Найдите ошибку в решении уравнения $\sqrt{2x+3} = x$ и приведите правильное решение.

Решение: $2x + 3 = x^2$,

$x^2 - 2x - 3 = 0$,

$D = 4 + 12 = 16$,

$x_1 = \frac{2+4}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{2-4}{2} = -1.$

Ответ: $3; -1$.

Анализ ошибки. Ученик нашел корни квадратного уравнения, но не проверил их на соответствие ограничениям. Для $\sqrt{2x+3}$ ОДЗ: $2x + 3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$. Также, $x = \sqrt{(2x+3)} \Longrightarrow x \geq 0$. Общее ограничение: $x \geq 0$. Корень $x_2 = -1$ является посторонним.

Правильное решение:

ОДЗ: $2x + 3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

Условие равносильности возведения в квадрат: $x \geq 0$. Общее ограничение: $x \geq 0$

$2x + 3 = x^2$,

$x^2 - 2x - 3 = 0$,

$(x - 3)(x + 1) = 0$,

$x_1 = 3$,

$x_2 = -1$ (посторонний корень)

Ответ: 3.

Задание 3. Найдите ошибку в решении уравнения

$(x-5)(x+2)\sqrt{x-3}=0$ и приведите правильное решение.

Решение: $\left[\begin{array}{l} x-5=0, \\ x+2=0, \\ \sqrt{x-3}=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x_1=5, \\ x_2=-2,. \\ x_3=3 \end{array}\right.$

Ответ: $5;\ -2;\ 3.$

Анализ ошибки. Ученик нашел корни квадратного уравнения, но не проверил их на соответствие ОДЗ.

Правильное решение:

ОДЗ: $x-3\geq 0 \Longrightarrow x\geq 3$

$\left[\begin{array}{l} x-5=0, \\ x+2=0, , \\ \sqrt{x-3}=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x_1=5, \\ x_2=-2,. \\ x_3=3 \end{array}\right.$

$x_2=-2$ не удовлетворяет ОДЗ, посторонний корень

Ответ: $5;\ 3.$

Задание 4. Найдите ошибку в решении уравнения $\sqrt{x+1}(4x^2-9)=0$ и приведите правильное решение.

Решение: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=0, \\ 4x^2-9=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ (2x-3)(2x+3)=0' \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=\frac{3}{2}, , \\ x_3=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$

Ответ: $-1;\ \pm\frac{3}{2}.$

Анализ ошибки. Ученик нашел корни квадратного уравнения, но не проверил их на соответствие ОДЗ, из-за чего возник посторонний корень.

Правильное решение:

ОДЗ: $x+1 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -1$.

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=0,\\ 4x^2-9=0\end{array}\right.$,

$\left[\begin{array}{l}x+1=0,\\ (2x-3)(2x+3)=0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x_1=-1,\\ x_2=\frac{3}{2},\\ x_3=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$,

$x_3=-\frac{3}{2}=-1{,}5$ – не удовлетворяет ОДЗ, это посторонний корень.

Ответ: $-1;\ \frac{3}{2}$.

Задание 5. Найдите ошибку в решении уравнения $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-2}=0$ и приведите правильное решение.

Решение: $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}$,

$2x-3=x-2$,

$x=1$.

Ответ: 1.

Анализ ошибки. В ответ взят посторонний корень, не удовлетворяющий ОДЗ, которая в решении не указана.

Правильное решение:

ОДЗ:

$2x-3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 1{,}5$,

$x-2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 2$.

$\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}$,

$2x-3=x-2$,

$x=1$ – посторонний корень, т.к. не удовлетворяет ОДЗ

Ответ: $\emptyset$.

5. Ошибка при замене переменной.

Суть ошибки. Правильно сделав замену и найдя значения вспомогательной переменной, ученики неверно выполняют обратную замену, используя неподходящую подстановку.

Задание 1. Найдите ошибку в решении уравнения $x + 4\sqrt{x} - 5 = 0$ и приведите правильное решение.

Решение: Замена: $\sqrt{x} = t, x = t^2$ ОДЗ: $x \geq 0$.

$t^2 + 4t - 5 = 0,$

$D = 16 + 20 = 36,$

$t_1 = \frac{-4+6}{2} = 1, t_2 = \frac{-4-6}{2} = -5.$

$x_1 = 1^2 = 1, x_2 = (-5)^2 = 25.$

Ответ: $1; 25.$

Анализ ошибки. После нахождения значений переменной t обратную замену следовало делать подстановкой $\sqrt{x} = t$, а не $x = t^2$. Из-за этого появился посторонний корень.

Правильное решение:

Замена: $\sqrt{x} = t, x = t^2$ ОДЗ: $x \geq 0$.

$t^2 + 4t - 5 = 0,$

$D = 16 + 20 = 36,$

$t_1 = \frac{-4+6}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{-4-6}{2} = -5.$

$\sqrt{x} = 1, \qquad \sqrt{x} = -5$ – не подходит, т.к. значения левой и правой части разного знака.

$x = 1.$

Ответ: $1.$

Задание 2. Найдите ошибку в решении уравнения $2x + \sqrt{x} - 3 = 0$ и приведите правильное решение.

Решение: Замена: $\sqrt{x} = t, x = t^2$ ОДЗ: $x \geq 0$.

$2t^2 + t - 3 = 0,$

$D = 1 + 24 = 25,$

$t_1 = \frac{-1+5}{4} = 1, t_2 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}.$

$x_1 = 1^2 = 1, x_2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$

Ответ: $1; \frac{9}{4}.$

Анализ ошибки. В ответ взят посторонний корень, появившийся из-за неправильной обратной замены $x = t^2$.

Правильное решение:

Замена: $\sqrt{x} = t, x = t^2$ ОДЗ: $x \geq 0.$

$2t^2 + t - 3 = 0,$

$D = 1 + 24 = 25,$

$t_1 = \frac{-1+5}{4} = 1, t_2 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}.$

$\sqrt{x} = 1,$ $\sqrt{x} = -\frac{3}{2}$ – корень не может быть отрицателен

$x = 1.$

Ответ: $1.$

Задание 3. Найдите ошибку в решении уравнения

$x^2 + 2 + 3\sqrt{x+2} = 6$ и приведите правильное решение.

*Решение:*Замена: $\sqrt{x+2} = t, t \geq 0$ ОДЗ: $x + 2 \geq 0,$

$t^2 + 3t - 6 = 0, x \geq -2.$

$D = 9 + 24 = 33,$

$t_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{2},$ $t_2 = \frac{-3-\sqrt{33}}{2}$ – посторонний корень

$\sqrt{x+2} = \frac{-3+\sqrt{33}}{2},$

$x = \frac{42-6\sqrt{33}}{4} - 2,$

$x = 8{,}5 - 1{,}5\sqrt{33}.$

Ответ: $8{,}5 - 1{,}5\sqrt{33}.$

Анализ ошибки. Проведена неверная замена: ученик ошибочно принимает $(x^2 + 2)$ за t^2.

Правильное решение:

Замена: $\sqrt{x+2} = t, t \geq 0$ ОДЗ: $x + 2 \geq 0,$

$x + 2 = t^2,$ $x \geq -2.$

$x = t^2 - 2.$

$(t^2 - 2)^2 + 2 + 3t = 6,$

$t^4 - 4t^2 + 4 + 2 + 3t = 6,$

$t^4 - 4t^2 + 3t = 0,$

$t(t^3 - 4t + 3) = 0,$

$t_1 = 0.$ $t^3 - 4t + 3 = 0$

$t^3 - t^2 + t^2 - t - 3t + 3 = 0$

$t^2(t-1) + t(t-1) - 3(t-1) = 0$

$(t-1)(t^2 + t - 3) = 0$

$t - 1 = 0$ $t^2 + t - 3 = 0$

$t_2 = 1.$ $D = 1 + 12 = 13$

$t_3 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2},$ $t_4 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ – посторонний корень

1) $\sqrt{x+2} = 0,$

$x_1 = -2.$

2) $\sqrt{x+2} = 1,$

$x_2 = -1.$

3) $\sqrt{x+2} = \frac{-1+\sqrt{13}}{2},$

$x + 2 = \frac{14-2\sqrt{13}}{4},$

$x = \frac{7-\sqrt{13}}{2} - 2,$

$x_3 = \frac{3-\sqrt{13}}{2},$

$x_3 = 1{,}5 - 0{,}5\sqrt{13}.$

Ответ: $-2; -1; 1{,}5 - 0{,}5\sqrt{13}.$

Задание 4. Найдите ошибку в решении уравнения $\frac{3}{\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}=4$ и приведите правильное решение.

Решение: Замена: $\sqrt{x-1}=t, t>0$ ОДЗ: $x-1\geq 0,$

$\frac{3}{t}+t=4,$ $x\geq 1.$

$3+t^2=4,$

$t^2=1,$

$t_1=1,\ t_2=-1$ – посторонний корень

$\sqrt{x-1}=1,$

$x=2.$

Ответ: $2.$

Анализ ошибки. При преобразовании уравнения домножили на t только левую часть уравнения. Правильно: $3+t^2=4t.$

Правильное решение:

Замена: $\sqrt{x-1}=t, t>0$ ОДЗ: $x-1\geq 0,$

$\frac{3}{t}+t=4,$ $x\geq 1.$

$\frac{3+t^2-4t}{t}=0,$

$t^2-4t+3=0$ $t\neq 0$

$D=16-12=4,$

$t_1=\frac{4+2}{2}=3,\ t_2=\frac{4-2}{2}=1.$

$\sqrt{x-1}=3,$ $\sqrt{x-1}=1,$

$x_1=10.$ $x_2=2.$

Ответ: $10; 2.$

Задание 5. Найдите ошибку в решении уравнения

$x^2+1+\sqrt{x+1}=2-x$ и приведите правильное решение.

Решение: $x^2+2x+1+\sqrt{x+1}=2+2x-x,$ ОДЗ: $x+1\geq 0,$

$(x+1)^2+\sqrt{x+1}=2+x,$ $x\geq -1.$

$(x+1)^2+\sqrt{x+1}=1+(x+1),$

Замена: $\sqrt{x+1} = t, t \geq 0$

$t^2 + t = 1 + t,$

$t^2 - 1 = 0,$

$(t-1)(t+1) = 0,$

$t - 1 = 0, \quad t + 1 = 0,$

$t = 1. \qquad t = -1$ – посторонний корень

$\sqrt{x+1} = 1,$

$x = 0.$

Ответ: 0.

Анализ ошибки. Выражение $(x+1)^2$ ошибочно принимается за t^2, а $(x+1)$ за t.

Правильное решение:

Замена: $\sqrt{x+1} = t, t \geq 0$ ОДЗ: $x + 1 \geq 0,$

$x + 1 = t^2,$ $x \geq -1.$

$x = t^2 - 1.$

$(t^2-1)^2 + 1 + t = 2 - t^2 + 1,$

$t^4 - 2t^2 + 1 + 1 + t - 2 + t^2 - 1 = 0,$

$t^4 - t^2 + t - 1 = 0,$

$t^2(t^2-1) + (t-1) = 0,$

$t^2(t-1)(t+1) + (t-1) = 0,$

$(t-1)(t^2(t+1)+1) = 0,$

$t - 1 = 0, \qquad t^2(t+1) + 1 = 0,$

$t = 1. \qquad t^3 + t^2 + 1 = 0,$

при $t \geq 0$ корней нет.

$\sqrt{x+1} = 1,$

$x = 0.$

Ответ: 0.

Представленный комплекс упражнений «Найди ошибку» охватывает основные типы ошибок, допускаемых при решении иррациональных уравнений. Анализ этих ошибок, представленный в каждом примере, позволяет обучающимся лучше понять природу этих ошибок и избегать их в будущем. Использование данного комплекса упражнений в процессе обучения способствует формированию у обучающихся более осознанного подхода к решению иррациональных уравнений, а также к совершенствованию уровняих математической компетентности.

Использование данного комплекса упражнений позволит обучающимся:

- углубить понимание теоретических основ решения иррациональных уравнений;
- научиться выявлять и исправлять ошибки, как собственные, так и чужие;
- повысить уровень математической грамотности и уверенность в своих силах при решении задач на данную тему;
- совершенствовать логику и навык анализа математических выражений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационнаяработа, посвященная методическим аспектам обучения решению иррациональных уравнений в школьном курсе алгебры, позволяет сделать ряд важных выводов и определить перспективы дальнейшей работы в данном направлении.

В первой главе работы были рассмотрены теоретические основы понятия иррационального уравнения. Проанализировано понятие иррационального уравнения, что позволило четко обозначить его место среди других видов уравнений в школьном курсе алгебры. Были изучены и систематизированы основные методы решения иррациональных уравнений, начиная от простейших приемов, основанных на возведении обеих частей уравнения в степень, до более сложных подходов, включающих использование замены переменной, разложение на множители и применение свойств функций. Особое внимание было уделено основным видам иррациональных уравнений и схемам их решения. Подробное описание алгоритмов решения для каждого типа уравнений позволяет обучающимся систематизировать полученные знания и применять их на практике. Рассмотрение типичных примеров и особенностей решения каждого вида иррационального уравнения способствует формированию у обучающихся знаний, навыков и умений, необходимых для успешного решения задач данного типа.

Вторая глава работы посвящена методическим аспектам обучения решению иррациональных уравнений. В данной главебыли представлены и проанализированы типичные ошибки при решении иррациональных уравнений, основанные на неравносильности преобразований, пропуске этапа проверки найденных значений переменной, неверных преобразованиях уравнения. Также описана методическая роль приёма «Найди ошибку», его суть и преимущества. Заключает вторую главу работы разработка комплекса упражнений «Найди ошибку» по теме «Иррациональные уравнения». Этот комплекс упражнений

представляет собой эффективный инструмент для выявления и исправления типичных ошибок, допускаемых обучающимися при решении иррациональных уравнений. Каждое упражнение содержит намеренно допущенную ошибку, и задача ученика заключается в том, чтобы ее обнаружить, объяснить ее суть и предложить правильное решение. Такой подход способствует развитию критического мышления, умения анализировать ошибки и применять теоретические знания на практике. Представленный комплекс упражнений охватывает наиболее распространенные ошибки, такие как возведение в степень только отдельных членов уравнения, игнорирование удвоенного произведения при возведении в квадрат суммы или разности корней, неправильное применение свойств корней четной степени, отсутствие учета области допустимых значений переменной и оценки равносильности преобразованийи неправильная замена переменной.

Использование комплекса упражнений «Найди ошибку» позволитобучающимся не только закрепить изученный материал, но и акцентировать внимание на типичных ошибках, которые допускаются при решении иррациональных уравнений. Анализ каждой ошибки, представленный в упражнениях, способствует более глубокому пониманию природы этих ошибок и формированию осознанного подхода к решению задач.

Таким образом, разработанный комплекс упражнений «Найди ошибку» может быть успешно использован в школьном курсе алгебры для повышения качества обучения решению иррациональных уравнений. Он способствует развитию критического мышления, овладению навыком самоконтроля и коррекции, а также глубокому пониманию данного учебного материала.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (базовый уровень) (для 5-9 классов образовательных организаций). URL : https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФРП_Математика_5-9-классы_база.pdf . Заглавие с экрана (дата обращения : 23.04.2025).

2. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика (базовый уровень) (для 10-11 классов образовательных организаций). URL: https://nschg.ru/school/educational-organisation-info/education/WORKPROGRAM/high/19_ФРП-Математика-10-11-классы_база.pdf . Заглавие с экрана (дата обращения: 25.04.2025).

3. Алимов Ш. А. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных организаций : базовый и углубленный уровни / Ш. А. Алимов [и др.] ; М. : Просвещение, 2016. 463 с.

4. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа : учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / М. И. Башмаков. М. : Академия, 2017. 352 с.

5. Богомолов Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. 10-е изд., перераб. и доп. М. : Юрайт, 2023. 400 с.

6. Виленкин Н. Я. Алгебра и математический анализ для 10 класса : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин [и др.] ; 15-е изд., стер. М. : Просвещение, 2021. 336 с.

7. Галицкий М. Л. Сборник задач по алгебре : учебное пособие для 8-9 классов с углубленным изучением математики / М. Л. Галицкий [и др.] ; 10-е изд., стер. М. : Просвещение, 2021. 271 с.

8. Гин А. А. Приемы педагогической техники : Свобода выбора. Открытость. Деятельность. Обратная связь. Идеальность: Пособие для учителя / А.А. Гин. 13-е изд. М.: ВИТА-ПРЕСС, 2013. 112 с.

9. Дорофеев Г. В. Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Г. В. Дорофеев[и др.] ; 9-е изд. М. : Просвещение, 2022. 287 с.

10. Ершова А. П. Алгебра. Геометрия. 8 класс. Самостоятельные и контрольные работы / А. П. Ершова [и др.] ; М. : Илекса, 2021. 176 с.

11. Зайцев В. В. Элементарная математика. Повторительный курс / В. В. Зайцев [и др.] ;4-е изд., перераб. и доп. М. : URSS, 2021. 592 с.

12. Киреева И. В. Обучение решению иррациональных уравнений методом равносильных преобразований // Наука и школа. 2021. № 4. С. 67-73.

13. Колесникова С. И. Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ : учебно-методическое пособие / С. И. Колесникова. 12-е изд. М. : Айрис-пресс, 2021. 384 с.

14. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В.С. Крамор. 10-е изд., стер. М. : Дрофа, 2020. 416 с.

15. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и углубленный уровни / А. Г. Мордкович. 2-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2014. 399 с.

16. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразовательных учреждений : базовый и углубленный уровни / А. Г. Мордкович. 2-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2014. 264 с.

17. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для общеобразовательных организаций : базовый и углубленный уровни / С. М. Никольский [и др.] ; 11-е изд. М. : Просвещение, 2022. 431 с.

18. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник для общеобразовательных организаций : базовый и углубленный уровни / С. М. Никольский [и др.] ; 11-е изд. М. : Просвещение, 2022. 463 с.

19. Образовательный портал для подготовки к олимпиадам. URL :https://olymp.sdamgia.ru/ . Заглавие с экрана (дата обращения : 06.03.2025).

20. Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу / В. В. Прасолов. 10-е изд., испр. и доп. М. : МЦНМО, 2021. 608 с.

21. Саакян С. М. Задачи по алгебре и началам анализа для 10-11 классов / С. М. Саакян [и др.] ; М. : Просвещение, 2016. 336 с.

22. Севрюков П. Ф. Элементарная математика : учебное пособие / П. Ф. Севрюков, И. П. Севрюков. М. : РИОР : ИНФРА-М, 2021. 512 с.

23. Спивака А. В. Математический кружок. 10 класс / А. В. Спивака. М. : МЦНМО, 2021. 128 с.

24. Тыщенко О. Ю. Иррациональные уравнения и неравенства: методы решения и типичные ошибки // Математика в школе. 2020. № 6. С. 45-52.

25. Фирер А. В. Элементарная математика. Иррациональные уравнения и неравенства: учебное пособие / А. В. Фирер [и др.] ; Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2021. 114 с.

26. Шевкин А. В. Математика. Текстовые задачи. 7-11 классы : учебно-методическое пособие / А. В. Шевкин. 10-е изд. М. : Илекса, 2022. 208 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Евдокимовой Дианы Олеговны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методы решения иррациональных уравнений»

Утверждена приказом по Университету от «25.12» 2024 г. № 1350/0

Срок сдачи студентом законченной работы «6» мая 2025 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов:	Сроки выполнения этапов	Примечания
1.	Изучение литературы по теме работы	Сентябрь – октябрь 2024	Выполнено
2.	Изучение основных понятий	Ноябрь – декабрь 2024	Выполнено
3.	Анализ типичных ошибок при решении иррациональных уравнений	Январь – февраль 2025	Выполнено
4.	Разработка и оформление комплекса упражнений «Найди ошибку» по теме «Иррациональные уравнения»	Март – май 2025	Выполнено
5.	Оформление работы	Июнь 2025	Выполнено

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель _____ Монахова О.А.

(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Евдокимова Д.О.

(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Евдокимовой Дианы Олеговны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Евдокимова Диана Олеговна,
Ф.И.О. студента

студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему *«Методы решения иррациональных уравнений»*, выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись

17.05.2025
дд.мм.гггг

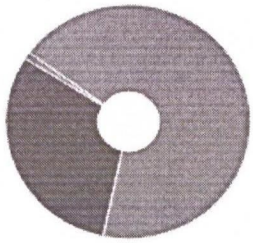
ВКР представлена на проверку 17.05.2025
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР _____ О.А. Монахова
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Методы решения иррациональных уравнений»
студентки 4 курса Дианы Олеговны Евдокимовой
И.О. Фамилия
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»
Руководитель ВКР Оксана Александровна Монахова
И.О. Фамилия

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения: 30,67%

Оригинальность: 68,7%

Цитирования: 0,63%

Самоцитирования: 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» – это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 348
Тип документа: Не указано
Дата проверки: 17.05.2025 08:51:03
Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 58
Символов в тексте: 36319
Слов в тексте: 6489
Число предложений: 550

Комментарий: не указано

17.05.25. _____ О.А. Монахова

дд.мм.гггг. подпись И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методы решения иррациональных уравнений»
студентки Евдокимовой Дианы Олеговны
факультета физико-математических и естественных наук направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Работа посвящена методическим аспектам обучения решению иррациональных уравнений в школьном курсе алгебры.

В работе были рассмотрены теоретические основы понятия иррационального уравнения, описаны и систематизированы основные методы решения иррациональных уравнений. В рамках выпускной квалификационной работы был разработан комплекс упражнений «Найди ошибку» по теме «Иррациональные уравнения». Он представляет собой эффективный инструмент для выявления и исправления типичных ошибок, допускаемых обучающимися при решении иррациональных уравнений. Анализ каждой ошибки, представленный в упражнениях, способствует более глубокому пониманию природы этих ошибок и формированию осознанного подхода к решению задач.

Работа Евдокимовой Д.О. заслуживает оценки «отлично» и может быть использована в учебном процессе учителем при подготовке обучающихся.

Руководитель ВКР:
Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,
доцент, кандидат физико-математических наук _____