

На правах рукописи



ХОАНГ Тхай Хо

**МЕТОДИКА И АЛГОРИТМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ
НА ОСНОВЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ**

**Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Пенза 2018

Работа выполнена на кафедре «Информационно-вычислительные системы» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пензенский государственный университет».

Научный руководитель – доктор технических наук, профессор
Косников Юрий Николаевич

Официальные оппоненты: **Толок Алексей Вячеславович**,
доктор технических наук, профессор,
ФГБУН «Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН», г. Москва,
главный научный сотрудник;

Роганов Владимир Робертович,
кандидат технических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Пензенский государственный
технологический университет», г. Пенза,
профессор кафедры «Информационные
технологии и системы»

Ведущая организация – ФГБОУ ВО «Нижегородский
государственный архитектурно-
строительный университет»

Защита состоится 8 ноября 2018 г., в 14 часов, на заседании диссертационного совета Д 212.186.04 на базе ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» по адресу: 440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» и на сайте: https://dissov.pnzgu.ru/ecspertiza/Tehnicheskie_nauki/xoang

Автореферат диссертации разослан «__» _____ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Горбаченко Владимир Иванович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Научной областью, к которой относится работа, является математическое моделирование пространственных геометрических объектов (геометрическое моделирование). Областью практического приложения результатов работы является визуализация объектов. Геометрическое моделирование и визуализация пространственных объектов находят широкое применение при создании, реконструкции и представлении объектов в археологии, медицине, системах виртуальной реальности, геоинформатике, системах автоматизированного проектирования и многих других областях.

Геометрическое моделирование объектов визуализации должно удовлетворять ряду требований: точное прохождение поверхности объекта через заданные точки, сохранение ее топологической тенденции, гладкость стыковки отсеков, возможность повышения качества визуализации известными средствами графической системы компьютера, возможность применения быстрых алгоритмов визуализации и др.

Одной из важнейших задач геометрического моделирования объектов визуализации является математическое описание их геометрической формы. Выбранный вид математической модели решающим образом влияет на реалистичность результата моделирования и затраты вычислительных ресурсов, необходимых для его визуализации. В связи с этим специалисты по геометрическому моделированию на протяжении нескольких десятков лет развивают теорию формообразования, совершенствуют существующие и отыскивают новые методы описания и моделирования пространственных форм.

Существенный вклад в теорию формообразования внесли J. Ferguson, E. Catmull, P. Bezier, S. Coons, H. Akima, Cao En, именами которых названы криволинейные и составные поверхности. Большое значение для теории и практики моделирования пространственных форм имеют труды таких отечественных специалистов, как В. Д. Аджиев, С. И. Вяткин, Б. С. Долговесов, В. Г. Ли, М. В. Михайлюк, А. А. Пасько, А. В. Толок, Е. В. Шикин. Они плодотворно работают в области полигональных, воксельных и сплайновых моделей, пространственных кривых, поверхностей на основе функций возмущения, свертки, вещественных функций. Вопросам геометрии и технической поддержки отображения трехмерных сцен посвящен ряд диссертационных исследований последних лет таких ученых, как: Н. П. Копытов, Ю. И. Денискин, А. Л. Фукс, А. А. Кононыхин, А. Б. Григорьев, М. Д. Оноприйко, М. А. Сенин. Однако результаты исследований, проведенных специалистами, во многих случаях не позволяют эффективно выполнить моделирование неаналитических объектов визуализации.

В процессе проектирования пространственные формы часто описываются наборами характерных (опорных) точек, полученных путем замеров, вычислений, обработки 3D-сканером реальных объектов и другими способами. Опорные точки поверхности обычно неравномерно расставлены в пространстве. Для моделирования поверхности по набору опорных точек, как правило, используются интерполяционные методы. Результатом должна стать полигональная модель поверхности, необходимая для ее визуализации средствами графической системы компьютера.

Известно множество методов интерполяции, которые исследовали и применяли для моделирования пространственных объектов такие ученые, как J. Carr, R. Beatson, B. Morse, B. McCallum, W. Fright, M. Buhmann, B. Grady, B. Baxter, B. Barsky, C. Chen, Y. Hon, R. Schaback, V. Scala. Эти методы построены на применении так называемых смешивающих функций (*blending function*). Они определяют степень влияния опорных точек (узлов интерполяции) на координаты текущей точки поверхности. Однако использование известных методов позволяет удовлетворить только части требований визуализации. Результат интерполяции характеризуется аномалиями поверхности или большими затратами вычислительных ресурсов. В научной литературе на сегодняшний день не представлен метод, удовлетворяющий всем перечисленным требованиям визуализации, поэтому можно утверждать, что разработка математического, методического и программного аппарата геометрического моделирования неаналитических объектов, удовлетворяющего требованиям компьютерной визуализации, является актуальным.

Целью диссертационного исследования является разработка методики и алгоритмов геометрического моделирования и отображения неаналитических пространственных форм, удовлетворяющих требованиям компьютерной визуализации.

Основные задачи исследования:

1. Осуществление сравнительного анализа существующих методов геометрического моделирования пространственных объектов на основе интерполяции. Рассмотрение и выделение недостатков в существующих методах, определение путей их устранения.

2. Разработка методики интерполяции пространственных форм с использованием радиальных базисных функций и В-сплайнов. Выявление возможностей смешивающих функций ортогонального базиса на этапе полигонизации.

3. Разработка алгоритмов геометрического моделирования пространственных форм на основе двухэтапной интерполяции.

4. Разработка комплекса программ геометрического моделирования пространственных форм на основе разработанных алгоритмов.

5. Разработка рекомендаций по выбору смешивающих функций и их параметров для интерполяционного моделирования пространственных форм.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Предложена двухэтапная методика геометрического моделирования поверхностей, заданных набором неравномерно расположенных опорных точек, отличительной особенностью которой является наличие двух этапов моделирования, при этом на первом этапе осуществляется переход от исходных опорных точек к новым опорным точкам, равномерно расставленным в пространстве, а на втором этапе находятся промежуточные точки поверхности, которые становятся вершинами полигональной модели. Методика позволяет применить на этапе визуализации быстрые алгоритмы сеточной интерполяции.

2. Предложены новые разновидности смешивающих функций опорных точек для интерполяционного определения промежуточных точек поверхности, отличающиеся тем, что их влияние на промежуточную точку вычисляется отдельно по координатам-аргументам интерполанта. Новые смешивающие функции характеризуются малой погрешностью интерполяции и позволяют применить для вычислений быстрые конечно-разностные алгоритмы.

3. Разработаны интерполяционные алгоритмы геометрического моделирования поверхностей, заданных набором опорных точек, отличительной особенностью которых является комбинирование интерполяции на основе смешивающих функций радиального и ортогонального базиса, В-сплайнов и полигонов в соответствии с предложенной двухэтапной методикой моделирования. Алгоритмы положены в основу комплекса программ, позволяющего оценить изобразительные возможности методики.

Теоретическая и практическая значимость работы. На основе результатов работы созданы методики и алгоритмы, предложены новые смешивающие функции для геометрического моделирования пространственных объектов, заданных набором неравномерно расставленных опорных точек. Их применение позволяет решить задачу визуализации неаналитических объектов с требуемой степенью реалистичности и меньшими затратами времени.

Для практического применения полученных в работе теоретических результатов разработан комплекс программ. Его применение позволяет обоснованно выбирать параметры алгоритмических средств визуализации, исследовать изобразительные и точностные возможности различных смешивающих функций.

Методы исследования. Результаты диссертационной работы получены с использованием математического моделирования, методов интерполяции поверхностей, аналитической и вычислительной геометрии, векторной алгебры, теории матриц, численных методов, объектно-ориентированного программирования.

Положения, выносимые на защиту.

1. Двухэтапная методика геометрического моделирования поверхностей, заданных набором неравномерно расположенных опорных точек, при этом на первом этапе осуществляется переход от исходных опорных точек к новым опорным точкам, равномерно расставленным в пространстве, а на втором этапе находятся промежуточные точки поверхности, которые становятся вершинами полигональной модели.

2. Новые разновидности смешивающих функций опорных точек для интерполяционного определения промежуточных точек поверхности, влияние этих смешивающих функций на промежуточную точку вычисляется отдельно по координатам-аргументам интерполянта.

3. Численный алгоритм В-сплайновой интерполяции поверхностей, заданных набором опорных точек, в алгоритме осуществляется переход от исходных опорных точек поверхности к новым, и притом таким, которые обеспечивают точное прохождение В-сплайновой поверхности через исходные опорные точки.

4. Численный алгоритм интерполяционного моделирования поверхностей, заданных набором опорных точек, на основе предложенных смешивающих функций, влияние которых вычисляется отдельно по координатам-аргументам интерполянта.

5. Комплекс программ для исследования изобразительных возможностей и выбора параметров смешивающих функций с целью визуализации результатов геометрического моделирования поверхностей, заданных набором опорных точек, в комплексе программ реализованы разработанные численные алгоритмы.

Степень достоверности результатов. Достоверность полученных в диссертационной работе результатов обеспечивается:

- отсутствием противоречий с известными научными положениями;
- корректностью математических преобразований при получении результатов;
- подтверждением теоретических результатов результатами эксперимента;
- сравнением отдельных полученных результатов с результатами, полученными другими авторами по аналогичной тематике.

Апробация результатов. Основные результаты диссертационной работы представлены на шести всероссийских и международных

конференциях, в том числе на XVI Международной научно-технической конференции «Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике» (Пенза, 2016); XIII и XIV Международных научно-технических конференциях «Новые информационные технологии и системы» (НИТиС-2016, НИТиС-2017) (Пенза, 2016, 2017); III Научно-практической всероссийской конференции (школе-семинаре) молодых ученых «Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук» (Тольятти, 2017); I Всероссийской научной конференции «Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения» (Тольятти, 2017); V Международной конференции «Information Technologies in Business and Industry» (ITBI2018) (Томск, 2018).

Публикации. По итогам исследований опубликовано 12 работ, в том числе 1 статья в издании, зарегистрированном в базе Scopus, 4 статьи в изданиях, входящих в рекомендуемый ВАК РФ перечень рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций, опубликовано 5 научных статей в сборниках международных конференций, 2 статьи в зарубежных рецензируемых журналах. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ в Федеральной службе по интеллектуальной собственности «Роспатент».

Реализация и внедрение результатов работы. Предложенные в работе разновидности смешивающих функций ортогонального базиса и построенные с их использованием численные алгоритмы внедрены в разработки ООО «BIT.GAMES», г. Пенза, используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «ПГУ» при проведении занятий по дисциплине «Графические технологии в компьютерном дизайне» (направление магистерской подготовки 09.04.03 «Прикладная информатика»). Имеются акты о внедрении результатов.

Структура работы. Диссертация содержит 155 страниц основного текста и состоит из введения, 3 разделов, заключения, библиографического списка из 119 наименований и 3 приложений. В диссертацию включено 52 рисунка и 4 таблицы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, раскрыта степень ее научной разработанности, определены цели и задачи исследования, теоретико-методологические основы, представлены научная новизна, положения, выносимые на защиту, и апробация основных результатов.

В первом разделе выполнен анализ состояния выбранной научно-технической области. Сформулированы основные требования к моделям пространственных объектов визуализации:

- точное прохождение поверхности объекта через опорные точки;
- сохранение топологической тенденции поверхности между опорными точками;
- возможность описать геометрические формы большой протяженности;
- возможность моделировать замкнутые поверхности, описание которых характеризуется многозначностью;
- гладкость поверхности (без разрывов функции-интерполянта и ее первой производной);
- получение корректных нормалей к поверхности, проведенных через ее заданные точки;
- возможность управлять динамикой поверхности;
- по-возможности, быстрые алгоритмы вычисления промежуточных точек поверхности.

Для моделирования поверхностей, заданных большим количеством опорных точек, целесообразно применять методы интерполяции с применением смешивающих функций. Представлен анализ известных интерполяционных методов, основанных на использовании смешивающих функций. К ним относятся линейная интерполяция, билинейная интерполяция, интерполяция поверхностью Цао Ена и сплайновая интерполяция. В группе сплайновой интерполяции рассмотрены сплайны, известные из компьютерной геометрии и графики: сплайн Безье, В-сплайн, NURBS, R-сплайн, Бета-сплайн, сплайн Кэтмулла-Рома и сплайн Акимы. Показаны их достоинства и недостатки при геометрическом моделировании пространственных объектов в соответствии с приведенными требованиями.

Подробно рассмотрена интерполяция на основе радиальных базисных функций (РБФ). Ее суть заключается в том, что для заданного набора N опорных точек $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^N$ наборы базисных функций $\{\phi(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^N$ выбираются таким образом, чтобы линейная комбинация этих функций удовлетворяла условию интерполяции. Функция-интерполянт f , построенная с применением РБФ, в общем случае имеет вид:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(\|\bar{x} - \bar{x}_i\|) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(r_i),$$

где $\bar{x} = |x \ y \ z|$ – вектор координат текущей точки; $\bar{x}_i = |x_i \ y_i \ z_i|$ – вектор координат i -й опорной точки; $r_i = \|\bar{x} - \bar{x}_i\|$ – декартово расстояние

между i -й опорной точкой и текущей точкой; ϕ – радиальная базисная функция; λ_i – весовой коэффициент i -й опорной точки, который характеризует степень влияния этой точки на текущую точку. Эти весовые коэффициенты находятся путем решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), составленных из условия точного прохождения поверхности через опорные точки. РБФ-методы являются точными интерполяторами. Параметр сглаживания РБФ позволяет регулировать гладкость получаемой поверхности.

Интерполяция с применением РБФ не свободна от недостатков: интерполянт имеет большое количество слагаемых – сотни и тысячи, что затрудняет интерполяцию в режиме реального времени. Еще одним недостатком является сложность алгоритмов визуализации, обусловленная тем, что известные РБФ имеют в своем составе радикалы, степенные функции, логарифмы и другие ресурсоемкие компоненты.

В итоге можно сделать вывод, что использование известных методов интерполяции поверхностей позволяет удовлетворить только части приведенных требований. Поэтому необходимо разработать математический, методический и программный аппарат геометрического моделирования объектов визуализации, объединяющий достоинства известных методов и минимизирующий их недостатки.

Во **втором разделе** предложена двухэтапная организация геометрического моделирования пространственных форм. На первом этапе моделирования (предварительном) осуществляется переход от исходных опорных точек к новым опорным точкам, равномерно расставленным в пространстве. На втором этапе (в режиме реального времени) на новых опорных точках выполняется специальная интерполяция, удовлетворяющая требованиям визуализации.

Для перехода от исходных опорных точек к новым, регулярно расставленным в пространстве, на первом этапе моделирования применяется РБФ-интерполяция. Для незамкнутых поверхностей применена явная форма описания:

$$z(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(r_i) + P(x, y), \quad r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},$$

где x, y, z – координаты текущей точки поверхности; x_i, y_i – координаты i -й опорной точки на плоскости xu ; r_i – расстояние между i -й опорной точкой и текущей точкой на плоскости xu ; $\phi(r_i)$ – значение радиальной базисной функции i -й опорной точки; λ_i – вес i -й опорной точки; N – количество опорных точек; $P(x, y)$ – полином первой или более высокой степени, в некоторых случаях необходимый для нахождения коэффициентов λ_i .

Замкнутые поверхности описываются в параметрической форме со сферическими координатами φ, θ в качестве параметров:

$$x = \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \phi(\alpha_i), \quad y = \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \phi(\alpha_i), \quad z = \sum_{i=1}^N \lambda_{zi} \phi(\alpha_i),$$

где $\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}$ – коэффициенты влияния i -й опорной точки на текущую точку по декартовым координатам; α_i – угловое расстояние между текущей точкой и i -й опорной точкой:

$$\alpha_i = \arccos(\cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cos(\varphi - \varphi_i));$$

$\phi(\alpha_i)$ – РБФ, значение которой зависит от углового расстояния α_i . Решается задача РБФ-интерполяции с применением приведенных выражений. Представлены рекомендации по применению для первого этапа моделирования следующих видов РБФ: «Мультиквадрик», «Инверсный мультиквадрик», «Инверсный квадратик» и «С⁴Матерн».

В общем случае В-сплайновая поверхность не проходит через крайние опорные точки. Чтобы на втором этапе моделирования приблизить поверхность к крайним опорным точкам, на первом этапе в исходное множество опорных точек вводятся дополнительные точки, отстоящие от крайних рядов упорядоченных опорных точек на один шаг. Это делается с помощью экстраполяции.

Предложена методика равномерной расстановки опорных точек на основе РБФ-интерполяции, включающая следующие шаги:

- 1) получение исходного набора опорных точек поверхности;
- 2) выбор вида РБФ и его параметра для описания поверхности;
- 3) составление СЛАУ с помощью набора исходных опорных точек из условия точного прохождения поверхности через опорные точки;
- 4) нахождение коэффициентов влияния опорных точек: решение составленной СЛАУ. Получение интерполянта;
- 5) вычисление координат новых опорных точек с помощью РБФ-интерполяции. Новые опорные точки равномерно расставляются в пространстве;
- 6) добавление дополнительных опорных точек, отстоящих от крайних рядов упорядоченных опорных точек на один шаг.

На втором этапе моделирования осуществляется переход к полигональной модели поверхности. Исходными данными является набор равномерно расставленных опорных точек. Необходимо с помощью интерполяции найти промежуточные точки поверхности и принять их за узлы полигональной сетки. Предложено два варианта интерполяции. В соответствии с первым решается задача точной В-сплайн-интерполяции на упорядоченном множестве опорных точек. Для этого осуществляется переход от опорных точек, полученных на первом этапе моделирования,

к новым опорным точкам. Их количество равно $(m-2)(n-2)$, где $m \cdot n$ – размер упорядоченного множества опорных точек. Новые опорные точки расставляются таким образом, чтобы обеспечить точное прохождение В-сплайновой поверхности через исходные опорные точки. Новые точки находятся из этого условия путем составления и решения СЛАУ, имеющей в матричной форме следующий вид:

$$M1 \cdot P^* = M2,$$

где P^* – матрица векторов координат новых опорных точек: $P_{p,q}^* = |x_{p,q}^* \ y_{p,q}^* \ z_{p,q}^*|$; $M1$ – матрица коэффициентов при координатах новых опорных точек, элементы $M1$ находятся с помощью разработанного эмпирического алгоритма; $M2$ – матрица свободных членов, включающих координаты исходных опорных точек:

$$M1 = \begin{bmatrix} m1_{0,0} & \cdots & m1_{0,(m-3)(n-3)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m1_{(m-3)(n-3),0} & \cdots & m1_{(m-3)(n-3),(m-3)(n-3)} \end{bmatrix}, \quad M2 = \begin{bmatrix} m2_0 \\ \vdots \\ m2_{(m-3)(n-3)} \end{bmatrix}.$$

В диссертационной работе приведены правила составления элементов $M1$, $M2$. Решение СЛАУ дает элементы матрицы P^* , которая используется в интерполяционном выражении, описывающем сплайновую поверхность в параметрической системе координат u, v :

$$R = U \cdot N \cdot P^* \cdot N^T \cdot V^T, \quad (1)$$

где $R = |x \ y \ z|$ – вектор координат текущей точки отсека поверхности; $U = |u^3 \ u^2 \ u \ 1|$ – вектор степеней параметра u , $u = [0,1]$; $V = |v^3 \ v^2 \ v \ 1|$ – вектор степеней параметра v , $v = [0,1]$; N – базисная матрица бикубического В-сплайна.

Произведение $N \cdot P^* \cdot N^T$ дает матрицу коэффициентов формы $\{c_{ij}\}$, тогда можно записать (1) в виде многочлена

$$R = v^3(u^3 c_{00} + u^2 c_{10} + u c_{20} + c_{30}) + v^2(u^3 c_{01} + u^2 c_{11} + u c_{21} + c_{31}) + \\ + v(u^3 c_{02} + u^2 c_{12} + u c_{22} + c_{32}) + (u^3 c_{03} + u^2 c_{13} + u c_{23} + c_{33}),$$

$$\text{или} \quad R = v^3 f_1(u) + v^2 f_2(u) + v f_3(u) + f_4(u), \quad (2)$$

где $f_1(u), f_2(u), f_3(u), f_4(u)$ – кубические функции параметра u , которые могут рассматриваться как функциональные коэффициенты функций параметра v .

Процесс вычисления координат промежуточных точек поверхности (вершин полигональной сетки) идет последовательно по приращениям. Для этого выражение (2) представляется в конечно-разностной форме:

$$\begin{aligned}
f(u, v)_{i,j+1} &= f(u, v)_{i,j} + (\Delta_v^1)_{i,j}, \quad \text{при } v_0 = 0: \\
(\Delta_v^1)_{i,j+1} &= (\Delta_v^1)_{i,j} + (\Delta_v^2)_{i,j}, & f(u, v)_{i,0} &= f_4(u)_i, \\
(\Delta_v^2)_{i,j+1} &= (\Delta_v^2)_{i,j} + (\Delta_v^3)_{i,j}, & (\Delta_v^1)_{i,0} &= f_1(u)_i \cdot \delta_v^3 + f_2(u)_i \cdot \delta_v^2 + f_3(u)_i \cdot \delta_v, \\
(\Delta_v^3)_{i,j} &= 6f_1(u)_i \cdot \delta_v^3 = \text{const}, & (\Delta_v^2)_{i,0} &= 6 \cdot f_1(u)_i \cdot \delta_v^3 + 2 \cdot f_2(u)_i \cdot \delta_v^2,
\end{aligned}$$

где $(\Delta_v^1)_{i,j}$, $(\Delta_v^2)_{i,j}$, $(\Delta_v^3)_{i,j}$ – первая, вторая и третья конечные разности смешивающих функций по параметру v ; δ_v – шаг вычислений по направлению v ; $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$, $f_4(u)$ – кубические функции параметра u ; i, j – номера шагов вычислений по направлениям u и v .

Начальные значения конечных разностей и самой кубической функции (с индексом $j = 0$) являются кубическими функциями параметра u и также вычисляются методом конечных разностей. Каждое очередное значение кубической функции вычисляется за три операции суммирования, что позволяет проводить полигонизацию поверхности в режиме реального времени.

Методика отыскания новых опорных точек и полигонизации В-сплайновой поверхности включает следующие основные шаги:

- 1) разбиение множества равномерно расставленных опорных точек на подмножества в том случае, если количество исходных точек велико;
- 2) подготовка набора (множества или подмножества) опорных точек для обработки. Создание массива координат исходных опорных точек;
- 3) поиск новых опорных точек: создание и решение системы линейных алгебраических уравнений из условия точной интерполяции;
- 4) определение В-сплайновых коэффициентов формы для отсека поверхности;
- 5) вычисление промежуточных значений функции методом конечных разностей;
- 6) построение поверхности по промежуточным точкам средствами графической библиотеки. Если остались неиспользованные исходные опорные точки, возврат к шагу 2), в противном случае – визуализация поверхности.

Второй вариант интерполяции поверхности основан на применении смешивающих функций ортогонального базиса (СФОБ). Их особенность заключается в том, что описываемое ими влияние опорных точек на текущую точку поверхности зависит от расстояний между этими точками, измеренных раздельно по направлениям первого и второго аргументов интерполанта. В этом случае при сканировании пространства аргументов на каждом шаге меняется лишь одно расстояние между точками – то, которое соответствует направлению сканирования. В связи

с этим значения СФОб в процессе интерполяции могут вычисляться по «быстрым» конечно-разностным формулам. Предложено несколько видов СФОб, показанных в таблице 1.

Таблица 1 – Примеры смешивающих функций ортогонального базиса

Наименование смешивающих функций ортогонального базиса	Описание
1. Параболическая вогнутая	$bf = (1 - r_{xi})^2 \cdot (1 - r_{yi})^2$
2. Параболическая выпуклая	$bf = (1 + r_{xi}^2) \cdot (1 + r_{yi}^2)$
3. Аналог гауссиана	$bf = (1 - r_{xi}^2) \cdot (1 - r_{yi}^2)$
4. Биквадратная	$bf = (r_{xi}^2 - 1)^2 \cdot (r_{yi}^2 - 1)^2$

В таблице 1 r_{xi} , r_{yi} – расстояния между i -й опорной точкой и текущей точкой, измеренные вдоль координатных осей x и y :

$$r_{xi} = \frac{|x - x_i|}{x_{\max}}, \quad r_{yi} = \frac{|y - y_i|}{y_{\max}},$$

где $x_{\max}$, $y_{\max}$ – максимальные значения аргументов x и y .

Значения приведенных СФОб вычисляются по конечно-разностным формулам за две операции суммирования. Например, вычисление функции влияния по оси x при моделировании поверхностей в декартовой системе координат в случае СФОб «Параболическая выпуклая» имеет вид:

$$f(r_{xi}) = (1 + r_{xi}^2) = 1 + \left(\frac{|x - x_i|}{x_{\max}} \right)^2 = \frac{1}{x_{\max}^2} \cdot x^2 - \frac{2x_i}{x_{\max}^2} \cdot x + \left(1 + \frac{x_i^2}{x_{\max}^2} \right),$$

а в конечно-разностной форме:

$$\begin{aligned} f(r_x)_{j+1} &= f(r_x)_j + (\Delta_x^1)_j, & f(r_x)_0 &= 1 + \frac{x_i^2}{x_{\max}^2}, \\ (\Delta_x^1)_{j+1} &= (\Delta_x^1)_j + (\Delta_x^2)_j, & (\Delta_x^1)_0 &= \frac{1}{x_{\max}^2} \cdot \delta_x^2 - \frac{4x_i}{x_{\max}^2} \cdot \delta_x \\ (\Delta_x^2)_j &= \frac{2}{x_{\max}^2} \delta_x^2 = \text{const}, \end{aligned}$$

где (Δ_x^1) , (Δ_x^2) – первая и вторая конечные разности смешивающей функции по аргументу x ; δ_x – шаг вычислений по направлению x .

Для моделирования замкнутых поверхностей применяются СФОб аналогичного вида, действующие в направлениях угловых координат-параметров φ и θ . Таким образом, применение СФОб на упорядоченном

наборе опорных точек дает в результате интерполяции поверхность, удовлетворяющую требованиям визуализации.

Решена задача визуализации поверхности большой протяженности, описываемой сотнями и тысячами опорных точек, например, земной поверхности в системах мониторинга динамических объектов с привязкой к местности. Применена сегментация поверхности и ее описание в кусочно-аналитической форме. В этом случае возникает необходимость гладкой стыковки сегментов. Для сближения их краев предлагается разворачивать поверхность последовательно, сегмент за сегментом, причем области расчета промежуточных точек должны перекрываться. На рисунке 1 показан принцип сегментации с перекрытием сегментов: R_x и R_y обозначают диапазоны изменения координат исходных опорных точек, штриховкой выделена очередная область вычислений, Δx и Δy – размеры зон перекрытия.

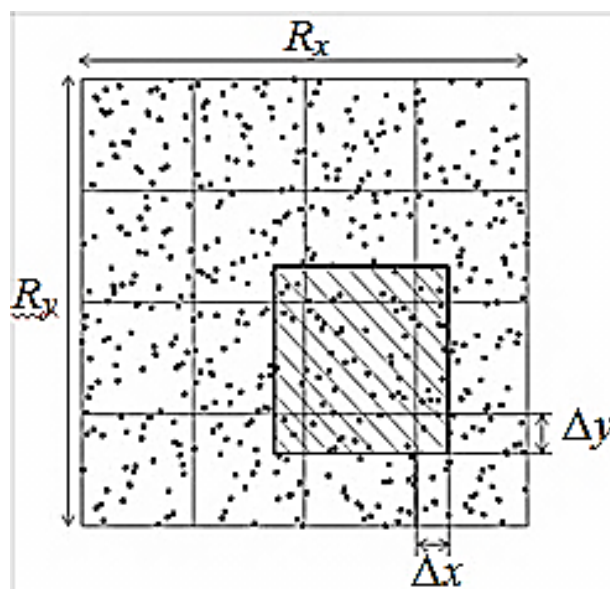


Рисунок 1 – Область данных, использованных для формирования одного сегмента

Эксперимент показал, что сегментация позволяет в результате интерполяции получить гладкую поверхность с погрешностью, не превышающей 0,2 %, и одновременно снизить время вычислений более чем в 10 раз.

В **третьем разделе** описаны алгоритмы и комплекс программ геометрического моделирования и визуализации пространственных форм на основе двухэтапной интерполяции. Алгоритмический аппарат включает три алгоритма: регуляризации расстановки опорных точек с применением РБФ-интерполяции, визуализации пространственных форм

с применением точной В-сплайновой интерполяции, визуализации пространственных форм с применением интерполяции на основе СФОБ. Алгоритмы реализуют описанные этапы моделирования поверхностей, заданных наборами опорных точек. Схемы алгоритмов в обобщенной форме приведены на рисунках 2, 3. Обозначение на рисунках: КР – конечные разности.

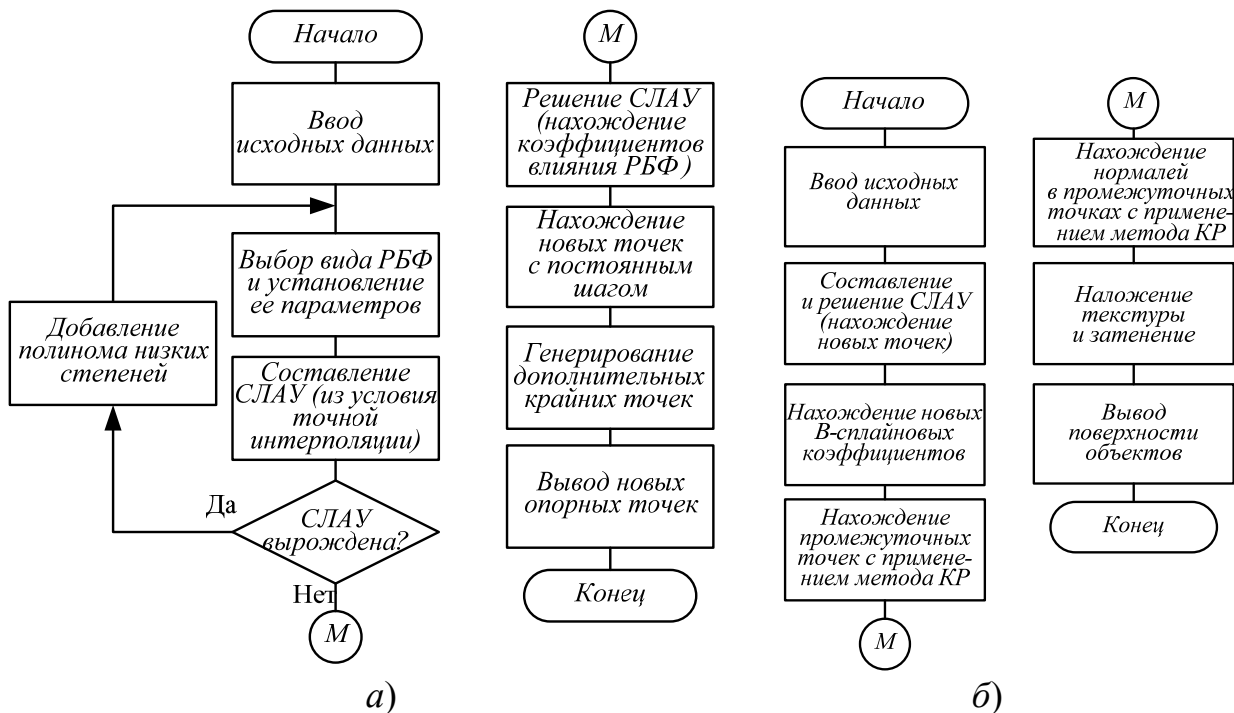


Рисунок 2 – Схемы алгоритма регуляризации расстановки опорных точек с применением РБФ-интерполяции (а) и алгоритма визуализации трехмерных объектов с применением точной В-сплайновой интерполяции (б)

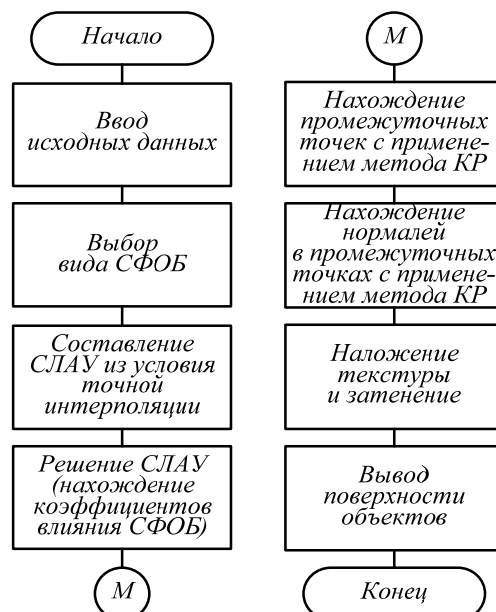


Рисунок 3 – Схема обобщенного алгоритма визуализации пространственных форм с применением интерполяции на основе СФОБ

Для исследования изобразительных возможностей различных разновидностей смешивающих функций и выбора количественных значений их параметров разработан комплекс программ, который включает:

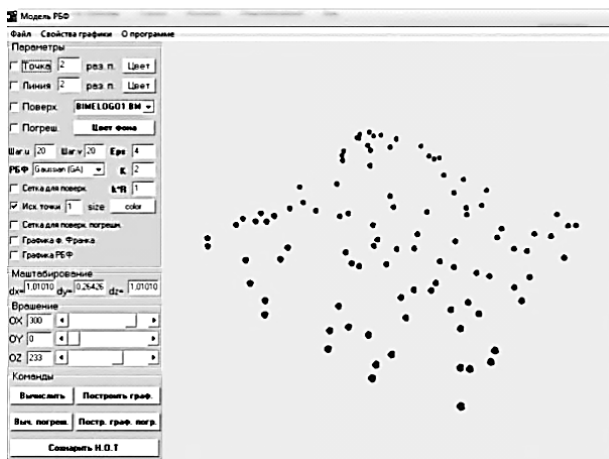
- программу геометрического моделирования и визуализации протяженных геометрических форм с применением РБФ и СФОБ;
- программу геометрического моделирования и визуализации замкнутых геометрических форм с применением РБФ и СФОБ;
- программу визуализации протяженных геометрических форм, заданных множеством опорных точек, с применением В-сплайновой интерполяции.

Программный комплекс позволяет визуально оценить формообразующие возможности и вычислить погрешности моделирования различных смешивающих функций. Программный комплекс написан на языке программирования C⁺⁺. Общая структура комплекса представлена на рисунке 4.

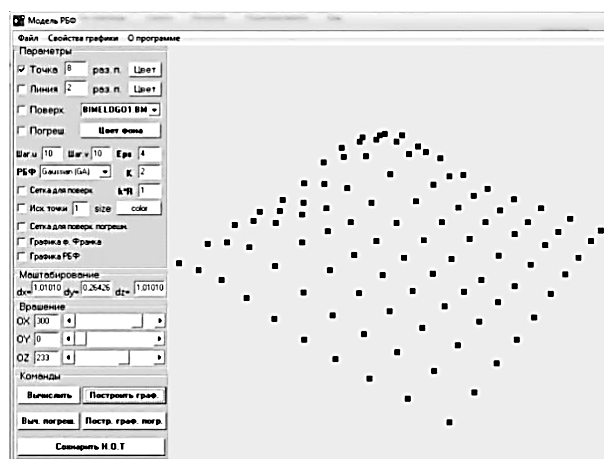


Рисунок 4 – Структура комплекса программ для геометрического моделирования и визуального контроля пространственных форм

Проведено экспериментальное исследование изобразительных возможностей и точностных характеристик смешивающих функций средствами программного комплекса. Эксперимент показал хорошие изобразительные возможности и позволил дать рекомендации по выбору видов и параметров РБФ и СФОБ для регуляризации исходных данных, а также для визуализации пространственных форм. Примеры показаны на рисунках 5–7. Результаты вычисления среднеквадратических погрешностей интерполяции поверхности при использовании различных видов РБФ и различных количеств опорных точек представлены на рисунке 8.

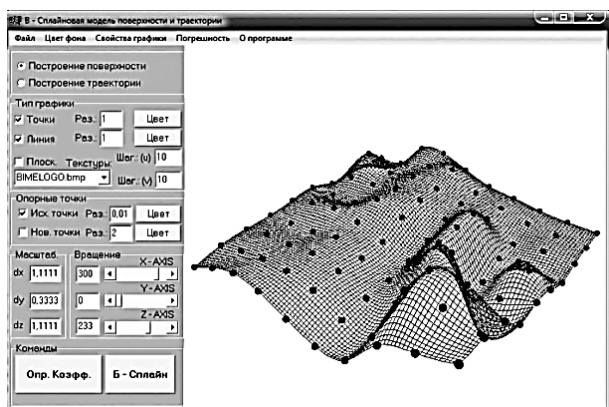


а)

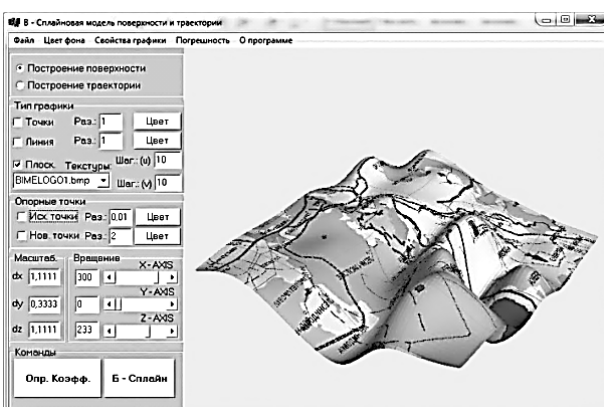


б)

Рисунок 5 – Исходное (а) и упорядоченное (б) множества опорных точек

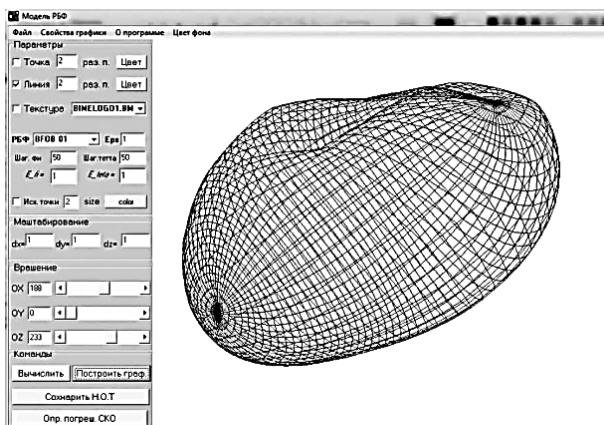


а)

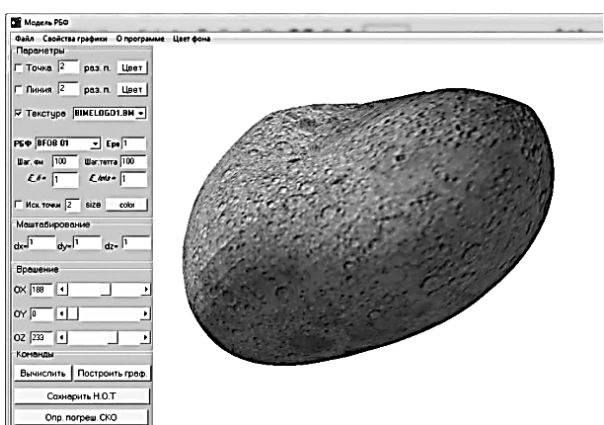


б)

Рисунок 6 – Графическое представление реконструированной протяженной поверхности в виде линий (а) и поверхности с текстурой (б)



а)



б)

Рисунок 7 – Графическое представление реконструированной замкнутой поверхности в виде линий (а) и поверхности с текстурой (б)

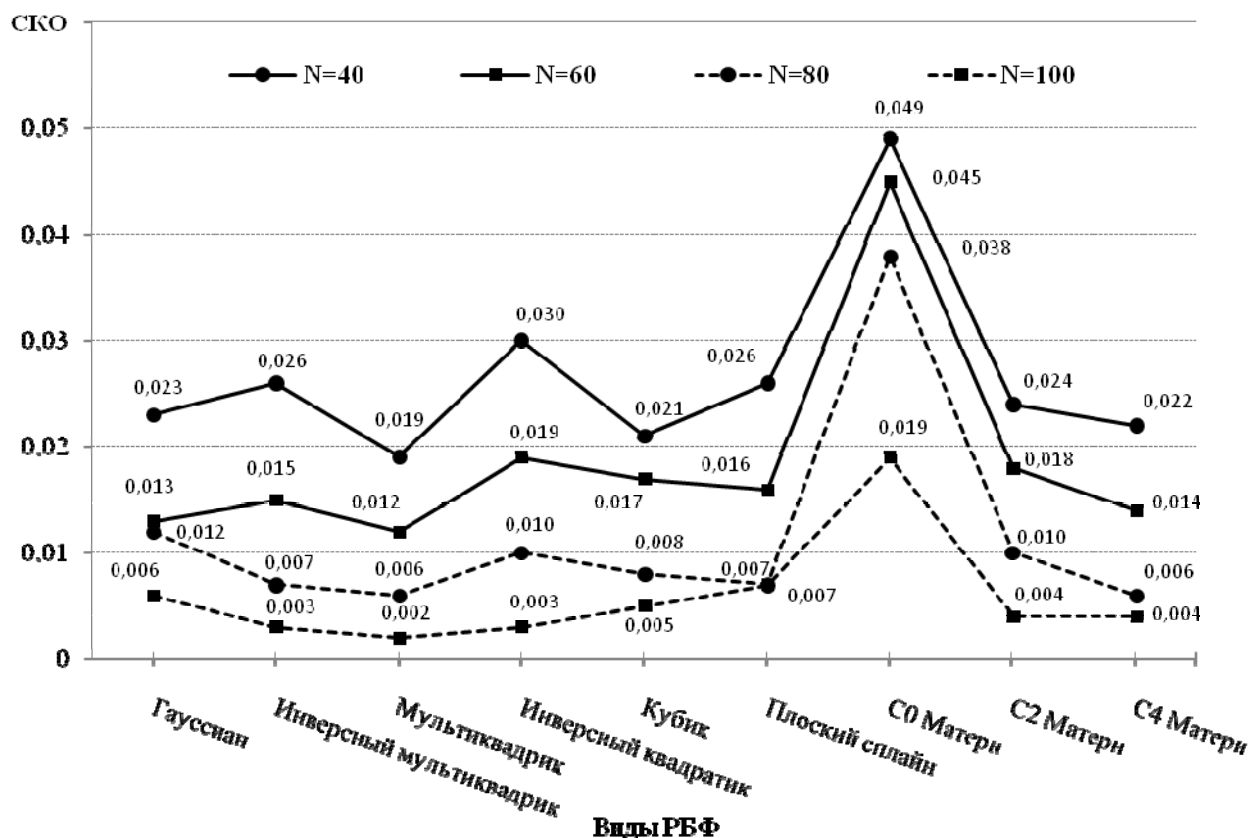


Рисунок 8 – Значения среднеквадратической погрешности интерполяции поверхности при использовании различных видов РБФ и различных количеств опорных точек (N – количество опорных точек)

В **заключении** сформулированы основные выводы, перечислены полученные в работе результаты. **Приложения** содержат акты внедрения результатов диссертационной работы, копии свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ и листинг основных модулей комплекса программ.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Проведен сравнительный анализ существующих методов геометрического моделирования пространственных объектов на основе интерполяции. Выявлено, что известные методы не в полной мере отвечают сформулированным требованиям визуализации неаналитических поверхностей. В качестве пути устранения недостатков существующих методов предложено строить процесс моделирования объектов визуализации из двух этапов – предварительного этапа и этапа реального времени.

2. Предложена двухэтапная методика геометрического моделирования поверхностей объектов визуализации, заданных набором неравномерно расставленных характерных (опорных) точек. На первом

(предварительном) этапе осуществляется регуляризация расстановки исходных опорных точек с применением интерполяции на основе РБФ. На втором этапе в режиме реального времени выполняется моделирование поверхности объекта на множестве регулярно расставленных опорных точек с применением точной В-сплайновой интерполяции или интерполяции на основе СФОБ.

3. На основе анализа формообразующих и точностных характеристик смешивающих функций для первого этапа моделирования пространственных объектов даны рекомендации по применению следующих РБФ: «Мультиквадрик», «Инверсный мультиквадрик», «Инверсный квадратик» и « C^4 Матерн». Они позволяют получить погрешность интерполяции, не превышающую 0,65 %. Предложены новые разновидности СФОБ для интерполяционного моделирования незамкнутых и замкнутых поверхностей на втором этапе: «Параболическая вогнутая СФ», «Параболическая выпуклая СФ», «СФ-аналог гауссиана», «Биквадратная СФ». Их применение позволяет повысить производительность вычислений в 5–30 раз при погрешности интерполяции, не превышающей 0,75 %.

4. Разработаны алгоритм регуляризации исходных опорных точек с применением РБФ-интерполяции и представлением интерполянта в явной и параметрической форме, численный алгоритм точной интерполяции трехмерных объектов с применением В-сплайнов и численный алгоритм интерполяции незамкнутых и замкнутых поверхностей с применением СФОБ. В алгоритмах применено конечно-разностное представление интерполянта, что позволило повысить производительность вычислений в 5–30 раз в зависимости от количества опорных точек. Погрешность интерполяции с применением В-сплайнов не превышает 0,9 %, с применением СФОБ – не превышает 0,75 %.

5. Доказана возможность моделирования протяженных поверхностей с помощью сегментации. Применение сегментации с перекрытием сегментов при вычислении промежуточных точек позволяет повысить производительность моделирования в 10 раз при погрешности интерполяции, не превышающей 0,2 %.

6. На основе предложенных алгоритмов разработан комплекс программ для геометрического моделирования и визуального контроля пространственных форм. Комплекс программ использован для экспериментального исследования изобразительных возможностей и точностных характеристик смешивающих функций. На программы в составе комплекса получены документы о государственной регистрации в Федеральной службе по интеллектуальной собственности «Роспатент».

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикация в журнале, индексируемом в SCOPUS

1. Hoang, T. H. Morphing of spatial objects in real time with interpolation by functions of radial and orthogonal basis / Yu. N. Kosnikov, A. V. Kuzmin, T. H. Hoang // Journal of Physics : Conference Series. – IOP Publishing. – 2018. – Series 1015. – № 032066. – URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1015/3/032066/meta>

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК

2. Хоанг, Т. Х. Смешивающие функции в геометрическом моделировании и визуализации поверхностей свободных форм / Н. В. Александрова, А. П. Зимин, Ю. Н. Косников, Т. Х. Хоанг // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2015. – Т. 1, № 3 (25). – С. 51–60.

3. Хоанг, Т. Х. Сплайн-интерполяция траектории движения динамического объекта / Ю. Н. Косников, Т. Х. Хоанг // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2016. – № 3 (31). – С. 195–202.

4. Хоанг, Т. Х. Моделирование и визуализация неаналитических поверхностей / Ю. Н. Косников, Т. Х. Хоанг // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2016. – № 6 (34). – С. 129–136.

5. Хоанг, Т. Х. Моделирование объектов интерфейса виртуального окружения для эргатических систем / Ю. Н. Косников, Т. Х. Хоанг // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2016. – № 3 (39). – С. 16–28.

Публикации в зарубежных журналах

6. Hoang, T. H. A theory of geometric modeling of objects in space by interpolation methods / T. H. Hoang, Yu. N. Kosnikov // Mekong University Scientific Journal. – 2017. – № 5. – P. 03–08.

7. Hoang, T. H. Applying the B-spline interpolation in designing the movement trajectory of a dynamic object / T. H. Hoang, Yu. N. Kosnikov // Dong Thap University Journal of Science. – 2017. – № 27. – P. 100–105.

Публикации в сборниках трудов конференций

8. Хоанг, Т. Х. Методика геометрического моделирования пространственных форм с применением интерполяции В-сплайнами / Т. Х. Хоанг // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике : сб. ст. XVI Междунар. науч.-техн. конф. – Пенза : Приволжский дом знаний, 2016. – С. 70–77.

9. Хоанг, Т. Х. Программная визуализация поверхностей, заданных скалярным полем / Ю. Н. Косников, Т. Х. Хоанг // Новые информационные технологии и системы : сб. науч. ст. XIII Междунар. науч.-техн. конф. (Пенза, 23–25 ноября 2016 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – С. 200–204.

10. Хоанг, Т. Х. Кусочно-аналитическое моделирование протяженных поверхностей с использованием радиальных базисных функций / Т. Х. Хоанг // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук : материалы III Науч.-практ. всерос. конф. (школы-семинара) молодых ученых (24–25 апреля 2017 г.). – Тольятти, 2017. – С. 616–620.

11. Хоанг, Т. Х. Регуляризация расстановки опорных точек протяженной поверхности на основе интерполяции радиальными базисными функциями / Т. Х. Хоанг // Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения : сб. науч. ст. I Всерос. науч. конф. (12–14 декабря 2017 г.) : в 2 ч. – Тольятти, 2017. – Ч. 1. – С. 339–346.

12. Хоанг, Т. Х. Комплекс программ геометрического моделирования пространственных форм на основе численной реализации интерполяционных алгоритмов / Т. Х. Хоанг // Новые информационные технологии и системы : сб. науч. ст. XIV Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 70-летию кафедры «Вычислительная техника» и 30-летию кафедры «Системы автоматизированного проектирования» (Пенза, 22–24 ноября 2017 г.). – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – С. 197–202.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

13. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2017613959. Программа визуализации протяженных геометрических форм, заданных скалярным полем / Косников Ю. Н., Хоанг Т. Х., зарег. в Реестре программ для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности 04.04.2017 ; заявл. 09.01.2017, заявка № 2017610097.

14. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2018613102. Программа моделирования и визуализации протяженных геометрических форм с применением радиальных базисных функций / Косников Ю. Н., Хоанг Т. Х. ; зарег. в Реестре программ для ЭВМ Федеральной службы по интеллектуальной собственности 02.03.2018 ; заявл. 09.01.2018, заявка № 2018610403.

Научное издание

ХОАНГ Тхай Хо

**МЕТОДИКА И АЛГОРИТМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФОРМ
НА ОСНОВЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ**

**Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

Редактор *Е. Г. Акимова*
Технический редактор *Н. В. Иванова*
Компьютерная верстка *Н. В. Ивановой*

Распоряжение № 14/152-2018 от 28.08.2018.

Подписано в печать 28.08.2018. Формат 60×84¹/₁₆.
Усл. печ. л. 1,39. Заказ № 504. Тираж 100.

Издательство ПГУ.
440026, Пенза, Красная, 40.
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru

