

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

Курсовая работа

по дисциплине: «Уравнения с частными производными»

на тему: «Поверхностные и вытекающие волны в слое

заполненном неоднородным метаматериалом»

Направление подготовки—01.03.01 Математика

Профиль подготовки—Вычислительная математика и компьютерные
науки

Выполнил студент: Симакова Е.А.

Группа: 19ВМ1

Руководитель: к.ф-м.н., доцент Смолькин Е.Ю.

Работа защищена с оценкой:_____

Преподаватель:_____

Дата защиты:_____

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Зав. кафедрой МиСМ

_____Смирнов Ю.Г.

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине

«Уравнения с частными производными»

На тему: «Поверхностные и вытекающие волны в слое

заполненном неоднородным метаматериалом»

- 1)Рассмотрим задачу распространения ТЕ-поляризованных электромагнитных волн в диэлектрическом слое.
- 2)Предложим численный метод расчета постоянных распространения таких волн.
- 3)Произведём ряд численных экспериментов с слоем заполненным неоднородным метаматериалом.
- 4)Проведём классификацию волн, существующих в исследуемой структуре.

Руководитель работы к.ф.-м.н., доцент

Смолькин Е.Ю.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
2. Постановка задачи	7
3. Численный метод	14
4. Численные результаты	21
5. Заключение	22
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	23

ВВЕДЕНИЕ

Многие области науки и техники связаны с волновыми процессами. При исследовании особенностей распространения волн в различных средах приходится решать большое количество разных задач. Для объяснения волновых процессов потребовалось привлечение многих математических определений и методов. В настоящее время теория волновых процессов вполне определилась как дисциплина, посвященная изучению общих закономерностей распространения волн различной природы в различных средах.

Поляризация волн — характеристика поперечных волн, описывающая поведение вектора колеблющейся величины в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Поперечная волна характеризуется двумя направлениями: волновым вектором и вектором амплитуды, всегда перпендикулярным к волновому вектору с точностью до движения пространства. Для электромагнитных волн поляризация — это явление направленного колебания векторов напряжённости электрического поля E (ТЕ-поляризации волны) или напряжённости магнитного поля H (ТМ-поляризации волны).

Метаматериал — композиционный материал, свойства которого обусловлены не столько свойствами составляющих его элементов, сколько искусственно созданной периодической структурой. Они представляют собой искусственно сформированные и особым образом структурированные среды, обладающие электромагнитными или акустическими свойствами, сложнодостижимыми технологически, либо не встречающимися в природе. Под такими свойствами следует понимать особые значения физических параметров среды, например, отрицательные по величине значения как диэлектрической, так и магнитной проницаемостей, пространственную структуризацию (локализацию) распределения величин этих параметров (в частности, периодическое изменение коэффициента преломления как у фотонных кристаллов), наличие возможности управления параметрами среды в результате внешних воздействий (метаматериалы с электрически управляемой диэлектрической и магнитной проницаемостями) и т.д.

При создании метаматериалов в вещество внедряются крошечные имплантаты, которые вынуждают электромагнитные волны выбирать нестандартные пути. Отсюда, и приставка к «метаматериалам» — «мета», что означает «вне», то есть установку в основной материал каких-либо дополнительных элементов. В частности, ученые внебрили в медные ленты, уложенные плоскими концентрическими кругами,

множество крошечных электрических контуров. Результатом стала сложная структура из керамики, тефлона, композитных волокон и металлических компонентов. Крошечные имплантаты, присутствующие в меди, дают возможность отклонять микроволновое излучение и направлять его по заданному пути. Благодаря чему объекты, покрытые слоем метаматериала, становятся полностью невидимыми. Разработчик метаматериалов при их синтезировании имеет большой выбор свободных параметров (размеры структур, форма, постоянный и переменный период между ними и т.д.).

Значительно растет интерес к использованию метаматериалов в радиотехнических приложениях и, в частности, в антенной технике. Основные области их применения: изготовление подложек и излучателей в печатных антеннах для достижения широкополосности и уменьшения размеров антенных элементов; достижение узкой пространственной направленности элементарных излучателей, погруженных в метасреду и др.

Первые работы в этом направлении относятся ещё к XIX веку. В 1898 году Джагадис Чандра Бозе провёл первый микроволновый эксперимент по исследованию поляризационных свойств созданных им структур искривлённой конфигурации. В 1914 году Линдман воздействовал на искусственные среды, представлявшие собой множество беспорядочно ориентированных маленьких проводов, скрученных в спираль и вложенных в фиксировавшую их среду. В 1946–1948 гг. Уинстон Е. Кок впервые создал микроволновые линзы, используя проводящие сферы, диски и периодически расположенные металлические полоски, фактически образовавшие искусственную среду со специфичным по величине эффективным индексом преломления.

В большинстве случаев история вопроса о материалах с отрицательным коэффициентом преломления начинается с упоминания работы советского физика Виктора Веселаго, опубликованной в журнале «Успехи физических наук» в 1967 году. В статье рассказывалось о возможности существования материала с отрицательным коэффициентом преломления, который был назван «левосторонним». Автор пришёл к заключению, что с таким материалом почти все известные оптические явления распространения волн существенно изменяются, хотя в то время материалы с отрицательным коэффициентом преломления ещё не были известны.

Примерами метаматериалов, обладающими необычными механическими свойствами, являются ауксетики (материалы, имеющие отрицательные значения коэффициента Пуассона), созданные на основе

«вывернутой пчелиной соты» и слоистые материалы, обладающие, при специальном подборе характеристик слоев, отрицательным коэффициентом расширения поперек слоев.

Актуальной задачей при изучении волноводов является классификация волн, существующих в структуре. В работе предложен численный метод расчета постоянных распространения ТЕ-поляризованных волн в слое заполненном неоднородным метаматериалом. Расчеты произведены на разных частотах. Таким образом численно найдены: комплексные и распространяющиеся вытекающие волны, комплексные и распространяющиеся поверхностные ТЕ-поляризованные волны волновода.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, с декартовой системой координат $Oxyz$ и заполненное изотропной средой без источников, имеющей диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_c \varepsilon_0 \equiv \text{const}$ и магнитную проницаемость $\mu_0 \equiv \text{const}$, где ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Мы рассматриваем электромагнитные волны, распространяющиеся через слой.

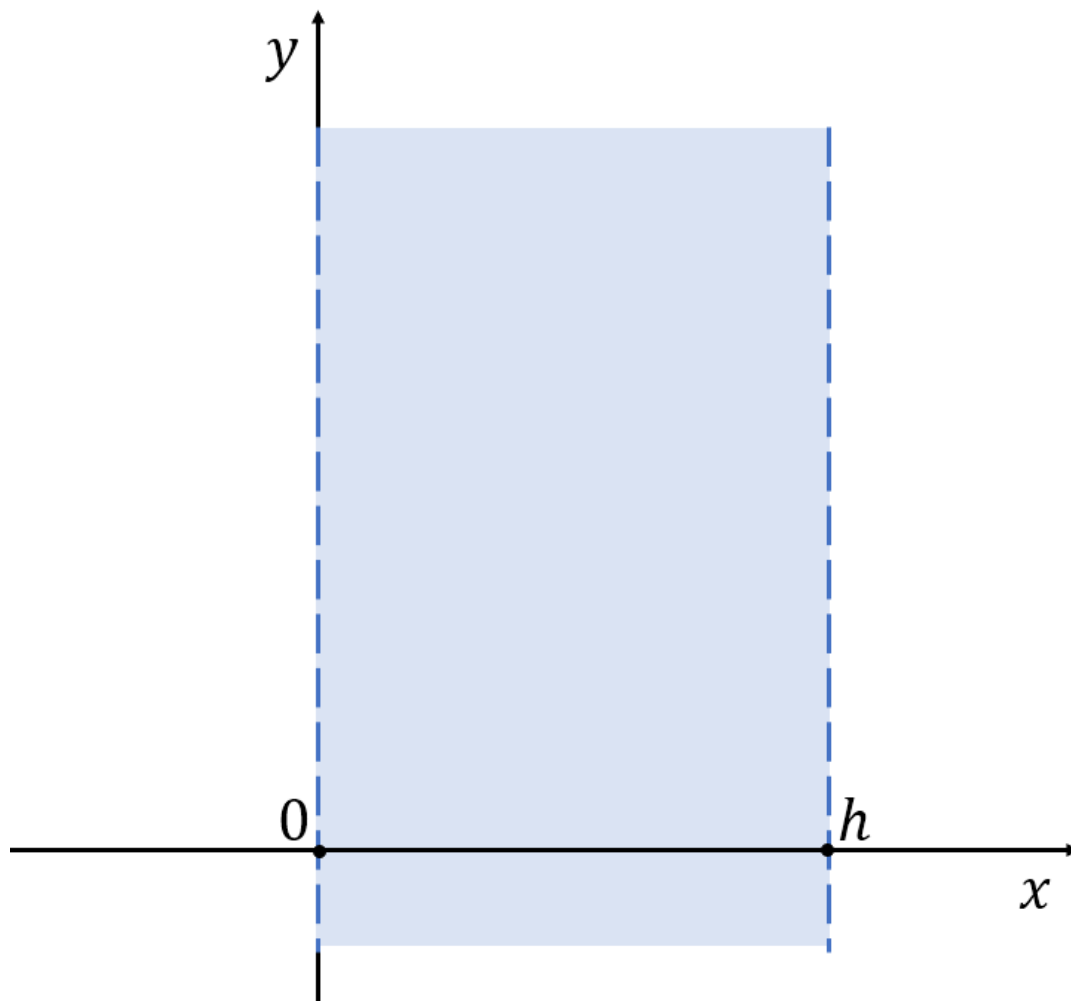


Рис 1. Геометрия задачи. Слой. Границы $x = 0$ и $x = h$ — это проекции диэлектрической поверхности.

Мы предполагаем, что поля гармонически зависят от времени как $\exp(-i\omega t)$, где $\omega > 0$ — круговая частота. Будем рассматривать электромагнитные поля вида

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= (E_x(x)e^{i\gamma z}, E_y(x)e^{i\gamma z}, E_z(x)e^{i\gamma z}), \\ \mathbf{H} &= (H_x(x)e^{i\gamma z}, H_y(x)e^{i\gamma z}, H_z(x)e^{i\gamma z}),\end{aligned}$$

где γ — неизвестный комплексный (спектральный) параметр.

Определение ТЕ-поляризованных волн сводится к нахождению нетривиальных решений системы уравнений Максвелла, зависящих от координаты z , вдоль которой структура регулярна, в виде $e^{i\gamma z}$,

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)e^{i\gamma z},$$

где

$$\begin{aligned}E_x &= E_x(x, y, z), \quad E_y = E_y(x, y, z), \quad E_z = E_z(x, y, z), \\ H_x &= H_x(x, y, z), \quad H_y = H_y(x, y, z), \quad H_z = H_z(x, y, z).\end{aligned}$$

Выпишем систему (1) в развернутом виде:

$$\begin{cases} (H_z)'_y - (H_y)'_z = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_x, \\ (H_x)'_z - (H_z)'_x = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_y, \\ (H_y)'_x - (H_x)'_y = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_z, \\ (E_z)'_y - (E_y)'_z = i\omega\mu_0H_x, \\ (E_x)'_z - (E_z)'_x = i\omega\mu_0H_y, \\ (E_y)'_x - (E_x)'_y = i\omega\mu_0H_z. \end{cases} \quad (2)$$

В рассматриваемом случае все производные по y обращаются в нуль. Это следует из предположения, что в положительном и отрицательном направлениях оси y волновод (слой) не ограничен, т.е. распределение полей мод в направлении оси y однородно. Тогда система (2) примет вид:

$$\begin{cases} (H_y)'_z = i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_x, \\ (H_x)'_z - (H_z)'_x = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_y, \\ (H_y)'_x = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_z, \\ (E_y)'_z = -i\omega\mu_0H_x, \\ (E_x)'_z - (E_z)'_x = i\omega\mu_0H_y, \\ (E_y)'_x = i\omega\mu_0H_z. \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку производные по y обращаются в нуль, значит, соответствующие функции от y не зависят. Из первой группы уравнений системы (2) видно, что H_z и H_x не зависят от y , тогда и E_y не зависит от y . Из второй группы уравнений системы (2) видно, что E_z и E_x не зависят от y , тогда и H_y не зависит от y .

Перегруппируем уравнения системы (3) таким образом:

$$\begin{cases} (H_y)'_z = i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_x, \\ (E_x)'_z - (E_z)'_x = i\omega\mu_0H_y, \\ (H_y)'_x = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_z, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} (E_y)'_z = -i\omega\mu_0H_x, \\ (H_x)'_z - (H_z)'_x = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_y, \\ (E_y)'_x = i\omega\mu_0H_z. \end{cases} \quad (5)$$

Видно, что исходная система (1) распалась на две независимые друг от друга системы (4), (5).

Система

$$\begin{cases} (H_y)'_z = i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_x, \\ (E_x)'_z - (E_z)'_x = i\omega\mu_0H_y, \\ (H_y)'_x = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_z, \end{cases}$$

возникает из системы (1), если поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ имеют вид:

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (0, H_y, 0)e^{i\gamma z}. \quad (6)$$

Система

$$\begin{cases} (E_y)'_z = -i\omega\mu_0H_x, \\ (H_x)'_z - (H_z)'_x = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_y, \\ (E_y)'_x = i\omega\mu_0H_z. \end{cases}$$

возникает из системы (1), если поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ имеют вид:

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)e^{i\gamma z}. \quad (7)$$

Волны вида (6) называются ТМ-поляризованными электромагнитными волнами, или волнами электрического типа, или волнами типа E .

Волны вида (7) называются ТЕ-поляризованными электромагнитными волнами, или волнами магнитного типа, или волнами типа H .

Рассмотрим ТЕ-поляризованные волны:

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0)e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)e^{i\gamma z}.$$

Подставив поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в уравнения Максвелла (1), получим:

$$\begin{cases} (H_z)'_y = 0, \\ (H_x)'_z - (H_z)'_x = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_y, \\ (H_x)'_y = 0, \\ (E_y)'_z = -i\omega\mu_0H_x, \\ (E_y)'_x = i\omega\mu_0H_z. \end{cases} \quad (8)$$

Из первого и третьего уравнений этой системы видно, что H_z и H_x не зависят от y , поскольку E_y выражается через H_z и H_x , то E_y также не зависит от y .

Компоненты полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ имеют представление:

$$E_y = E_y(x)e^{i\gamma z}, \quad H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}, \quad H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}.$$

Тогда рассмотренная выше система принимает вид:

$$\begin{cases} i\gamma H_x(x) - H_z'(x) = -i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}E_y(x), \\ -i\gamma E_y(x) = i\omega\mu_0H_x(x), \\ E_y'(x) = i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}H_z(x), \end{cases}$$

где γ — неизвестный спектральный параметр (постоянная распространения электромагнитной волны).

После простейших преобразований из системы (8) получаем:

$$\gamma^2 E_y(x) - E_y''(x) = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E_y(x). \quad (9)$$

с условием непрерывности тангенциальной составляющей электрического и магнитного поля на поверхностях разрыва диэлектрической проницаемости ($x = 0$ и $x = h$)

$$[E_y]|_{x=0} = 0, \quad [H_z]|_{x=0} = 0, \quad (10)$$

и

$$[E_y]|_{x=h} = 0, \quad [H_z]|_{x=h} = 0, \quad (11)$$

где $[f]|_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$. Мы не будем фиксировать условие излучения на бесконечности, потому что мы хотим рассмотреть проблему для произвольных γ .

Считаем, что относительная диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_c, & x > h, \\ \varepsilon, & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_c, & x < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Мы также предполагаем, что $\varepsilon(x) > \varepsilon_c$ является непрерывной функцией на отрезке $[0, h]$, т.е., $\varepsilon(x) \in C[0, h]$.

Задача о ТЕ-поляризованных волнах представляет собой задачу на собственные значения для уравнений Максвелла со спектральным параметром γ , который является постоянной распространения волноводной структуры.

Поле нормальной ТЕ-поляризованной волны в волноводе можно представить с помощью скалярной функции

$$u := E_y(x). \quad (13)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению тангенциальной электрической компоненты u .

Принята следующая классификация волн. По параметру γ — постоянной распространения:

- Распространяющаяся волна характеризуется действительным параметром γ .
- Затухающая волна характеризуется чисто мнимым параметром γ .
- Комплексная волна характеризуется комплексным параметром γ таким, что $\operatorname{Re} \gamma \operatorname{Im} \gamma \neq 0$.

По условию на бесконечности:

- Поверхностная волна удовлетворяет условию $u(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$.
- Вытекающая волна удовлетворяет условию $u(x) \rightarrow \infty, |x| \rightarrow \infty$.

Замечание 1. Постоянная распространения γ характеризует поведение волны (распространяющаяся, затухающая или комплексная) в z -направлении. Классификация волн как поверхностных или вытекающих зависит от поведения в x -направлении.

Мы имеем следующую задачу на собственные значения: для касательной компоненты электрического поля u нужно найти $\gamma \in \mathbb{C}$ такие, что существуют нетривиальные решения дифференциального уравнения

$$u'' + (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} - \gamma^2) u = 0, \quad (14)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$[u]|_{x=0} = 0, \quad [u']|_{x=0} = 0. \quad (15)$$

и

$$[u]|_{x=h} = 0, \quad [u']|_{x=h} = 0. \quad (16)$$

При $x > h$, мы имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_c$; то из (14) получаем уравнение

$$u'' - \lambda^2 u = 0. \quad (17)$$

Выберем решение этого уравнения в виде

$$u(x; \lambda) = \tilde{A} e^{(h-x)\lambda}, \quad x > h, \quad (18)$$

где $\lambda^2 = \gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_c$ и λ — новый (комплексный) спектральный параметр, $\tilde{A}$ — константа.

Замечание 2. Отметим, что предложенная выше классификация волн по параметру γ , естественно переносится на новый спектральный параметр λ . Если $\operatorname{Re} \lambda > 0$ мы имеем поверхностную волну. Если $\operatorname{Re} \lambda < 0$ мы имеем вытекающую волну.

При $x < 0$, мы имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_c$; то из (14) получаем уравнение

$$u'' - \lambda^2 u = 0. \quad (19)$$

Выберем решение этого уравнения в виде

$$u(x; \lambda) = A e^{x\lambda}, \quad x < 0, \quad (20)$$

где A — константа.

При $0 < x < h$, мы имеем $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(x)$; тогда из (14) получаем уравнение

$$u'' + (\omega^2 \epsilon - \lambda^2) u = 0, \quad (21)$$

где $\epsilon(x) = \varepsilon_0 \mu_0 (\varepsilon(x) - \varepsilon_c)$.

Определение 1. $\lambda \in \mathbb{C}$ называется характеристическим числом задачи, если существует нетривиальное решение u уравнения (21) при $0 < x < h$, удовлетворяющее (18), (20) и условиям сопряжения (15) и (16).

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u'' + (\omega^2 \epsilon - \lambda^2) u = 0 \quad (22)$$

с начальными условиями для ТЕ-волн

$$u(0) := A, u'(0) := A\lambda. \quad (23)$$

Из условия сопряжения на второй границе h (16) получаем дисперсионное уравнение для ТЕ-волн

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda u(h) + u'(h) = 0. \quad (24)$$

Из формулы (24) ясно, что значение $\Delta(\lambda)$ выражается через значения решения задачи Коши.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда взяв вещественную и мнимую части от выражения (24), получим систему действительных уравнений для определения вещественной и мнимой частей комплексной частоты λ :

$$\begin{cases} \Delta_1(\alpha, \beta) := \operatorname{Re} \Delta(\lambda) = 0, \\ \Delta_2(\alpha, \beta) := \operatorname{Im} \Delta(\lambda) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Чтобы определить пару (α, β) , мы будем численно решать систему уравнений (25). Решением каждого уравнения в (25) является кривая в плоскости $O\alpha\beta$. Помещая обе кривые на одной плоскости, мы определим точки пересечения кривых; эти точки являются решением исходной задачи.

Разбивая отрезки по α и β на более мелкие отрезки, мы определим сетку, состоящую из узлов $\alpha^{(i)}, \beta^{(j)}$; эти узлы мы используем для метода прелстрелки. Решая задачу Коши для каждого узла сетки, вычисляем величины $u(i, j)(h)$ и $u'(i, j)(h)$ для каждого узла. В силу непрерывной зависимости решения $u(h, \alpha, \beta)$ от параметров α и β следует, что существует точка $(\alpha^{(i)}, \hat{\beta}^{(j)})$ в плоскости $O\alpha\beta$, где $\hat{\beta}^{(j)}$ лежит внутри интервала $(\beta^{(j)}, \beta^{(j+1)})$, такая, что $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$. Чем плотнее сетка, которую мы выбираем, тем более точное решение мы находим. Повторив эту процедуру для всей сетки, мы получим набор пар $(\beta^{(p)}, \beta^{(q)})$, образующих кривую (синяя кривая на Рис. 2), приближенное решение уравнения $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$ в плоскости $O\alpha\beta$.

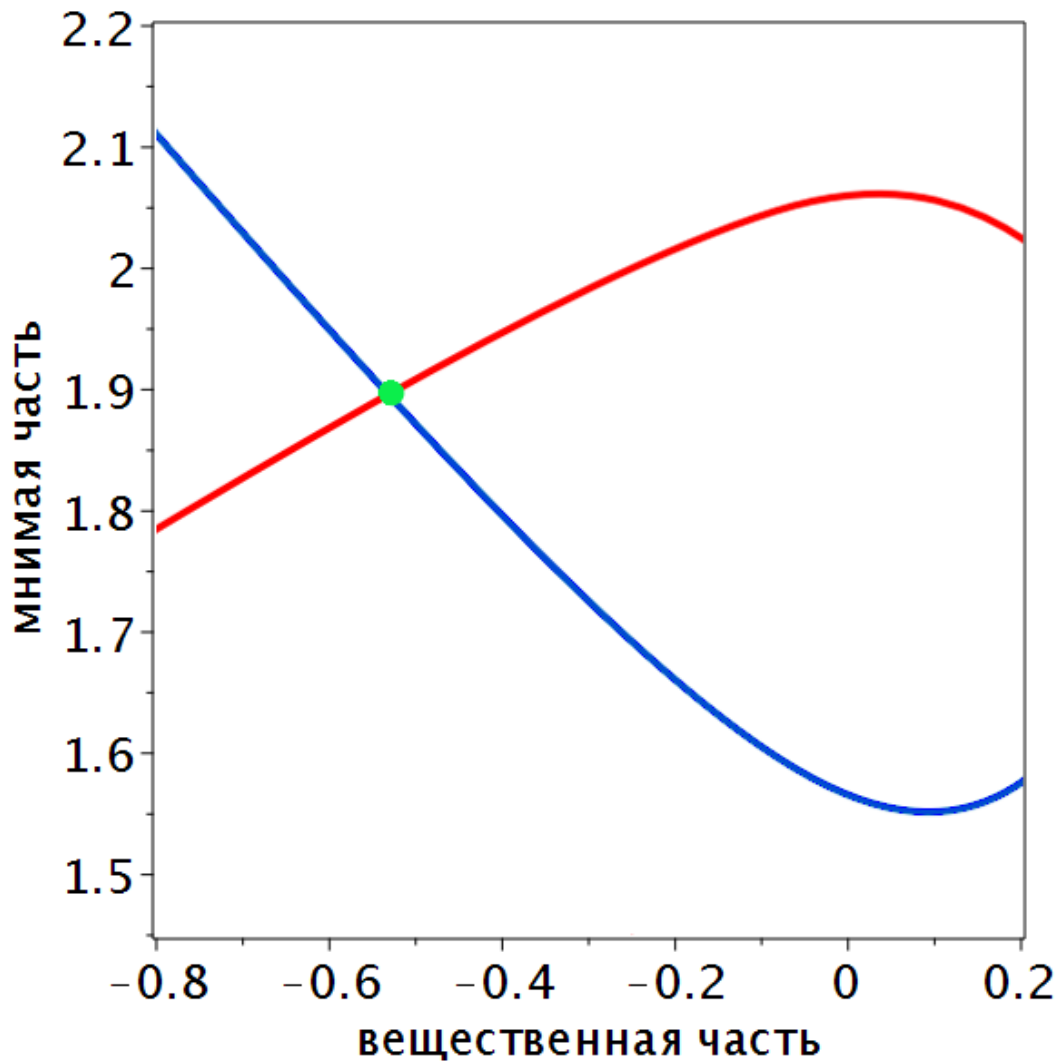


Рис 2. Численное решение системы (25): синяя кривая — решение первого уравнения системы (25); красная кривая — решение второго уравнения системы (25); точка пересечения синей и красной кривых, обозначенная зеленым цветом, является решением системы (25).

Применяя ту же процедуру к уравнению $\Delta_2(\alpha, \beta) = 0$, мы получаем еще одну кривую (красная кривая на Рис. 2) в плоскости $O\alpha\beta$, которая является приближенным решением указанного уравнения. Очевидно, точка пересечения (зеленая точка на Рис. 2) расчетных кривых является приближенным решением задачи. Делая сетку более плотной, это решение может быть сделано настолько точным, насколько это необходимо.

Рассмотрим случай ТЕ-поляризации в слое, заполненным неоднородным метаматериалом. Определим процедуру, решающую задачу Коши.

```
> restart:
with(plots):
with(plottools):
unprotect(lambda):
> h:=4:
epsilon:=-sqrt(x+1)-1: #Неоднородный метаматериал
omega:=1:
A:=1:
> Cauchy_solver := proc(A,omega,lambda,epsilon,h):
    local u1_in, u2_in, eq1, eq2, U, UU, U1, U2;

    u1_in:=u1(0)=A:
    u2_in:=u2(0)=A*lambda:

    eq1:=diff(u1(x),x)=u2(x):
    eq2:=diff(u2(x),x)=-(omega^2*epsilon-lambda^2)*u1(x):
    U:=dsolve({eq1,eq2,u1_in,u2_in},maxfun=1000000,
    numeric,[u1(x),u2(x)]):
    UU:=U(h):
    U1:=subs(UU,u1(x)):
    U2:=subs(UU,u2(x)):

    evalf(lambda*U1+U2):

end proc:
```

Для того, чтобы вычислить значение дисперсионного уравнения, вызовем процедуру Cauchy-solver.

```
> lambda:=1+0.2*I:
Cauchy_solver(A,omega,lambda,epsilon,h);
3951.653458 + 2553.390650I
```

Если нужно определить вещественные характеристические числа задачи в некотором диапазоне, можно воспользоваться следующим циклом.

```
> l1:=-4: l2:=4: lh:=0.001:

Delta_init:=Cauchy_solver(A,omega,l1,epsilon,h):

for li from l1+lh to l2 by lh do

    Delta_cur:=Cauchy_solver(A,omega,li,epsilon,h):

    if Delta_init*Delta_cur<=0 then
        print(li);

    end if;

    Delta_init:=Delta_cur:

end do:
```

Заметим, что для действительных λ дисперсионное уравнение, также принимает действительные значения.

Для расчета комплексных характеристических чисел модифицируем код: введем дополнительный цикл и определим вещественные и мнимые части дисперсионного уравнения. Теперь у нас внешний цикл по вещественной части характеристического числа, внутренний цикл по мнимой части характеристического числа. Решения первого (вещественного) дисперсионного уравнения пишем в массивы вещественной $X1$ и мнимой $Y1$ частей. Решения второго (мнимого) дисперсионного уравнения пишем в массивы вещественной $X2$ и мнимой $Y2$ частей.

```
> p:=0: s:=0:

a1:=-h: a2:=h: ah:=0.05:
b1:=-h: b2:=h: bh:=0.05:

for ai from a1 to a2 by ah do

lambda:=ai+I*b1:

Delta1_init:=Re(Cauchy_solver(A,omega,lambda,epsilon,h)):
Delta2_init:=Im(Cauchy_solver(A,omega,lambda,epsilon,h)):

for bi from b1+bh to b2 by bh do

lambda:=ai+I*bi:

Delta1_cur:=Re(Cauchy_solver(A,omega,lambda,epsilon,h)):
Delta2_cur:=Im(Cauchy_solver(A,omega,lambda,epsilon,h)):

if Delta1_init*Delta1_cur<=0 then
    p:=p+1;
    X1(p):=Vector([ai]):
    Y1(p):=Vector([bi]):
end if;

if Delta2_init*Delta2_cur<0 then
    s:=s+1;
    X2(s):=Vector([ai]):
    Y2(s):=Vector([bi]):
end if;

if Delta2_cur=0 then
    s:=s+1;
    X2(s):=Vector([ai]):
    Y2(s):=Vector([bi]):
end if;

Delta1_init:=Delta1_cur:
Delta2_init:=Delta2_cur:

end do:
```

Поменяем внешний и внутренний цикл местами, и сделаем еще раз расчет.

```
> for bi from b1 to b2 by bh do

lambda:=a1+I*bi:

Delta1_init:=Re(Cauchy_solver(A,omega,lambda,epsilon,h)):
Delta2_init:=Im(Cauchy_solver(A,omega,lambda,epsilon,h)):

for ai from a1+ah to a2 by ah do

lambda:=ai+I*bi:

Delta1_cur:=Re(Cauchy_solver(A,omega,lambda,epsilon,h)):
Delta2_cur:=Im(Cauchy_solver(A,omega,lambda,epsilon,h)):

    if Delta1_init*Delta1_cur<=0 then
        p:=p+1;
        X1(p):=Vector([ai]):
        Y1(p):=Vector([bi]):
    end if;

    if Delta2_init*Delta2_cur<0 then
        s:=s+1;
        X2(s):=Vector([ai]):
        Y2(s):=Vector([bi]):
    end if;

    if Delta2_cur=0 then
        s:=s+1;
        X2(s):=Vector([ai]):
        Y2(s):=Vector([bi]):
    end if;

    Delta1_init:=Delta1_cur:
    Delta2_init:=Delta2_cur:

end do:

print(bi);

end do:

p,s;
```

Для того, чтобы вывести рассчитанные массивы, используем следующий код.

```
> A1:=Vector[row] (p):B1:=Vector[row] (p):
A2:=Vector[row] (s):B2:=Vector[row] (s):

for i from 1 to p by 1 do A1[i]:=X1(i)[1]:B1[i]:=Y1(i)[1]:end
do:
for i from 1 to s by 1 do A2[i]:=X2(i)[1]:B2[i]:=Y2(i)[1]:end
do:

GR1:=plot(A1, B1,style = point, axes=boxed,symbol =
solidcircle,symbolsize=5,labels=["вещественная часть","мнимая
часть"],labelfont=["HELVETICA",20],axesfont=["HELVETICA",20],lab
eldirections=["horizontal","vertical"],size=[800,800], color =
blue):

GR2:=plot(A2, B2,style = point, axes=boxed,symbol =
solidcircle,symbolsize=5,labels=["вещественная часть","мнимая
часть"],labelfont=["HELVETICA",20],axesfont=["HELVETICA",20],lab
eldirections=["horizontal","vertical"],size=[800,800], color =
red):

LN:=line([a1,0],[a2,0],color=black,linestyle=dash),line([0,b1],[
0,b2],color=black,linestyle=dash):

display (GR1,GR2,LN);
```

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рисунках представлены результаты расчета постоянных распространения для задачи распространения ТЕ-поляризованных волн в слое заполненном неоднородным метаматериалом.

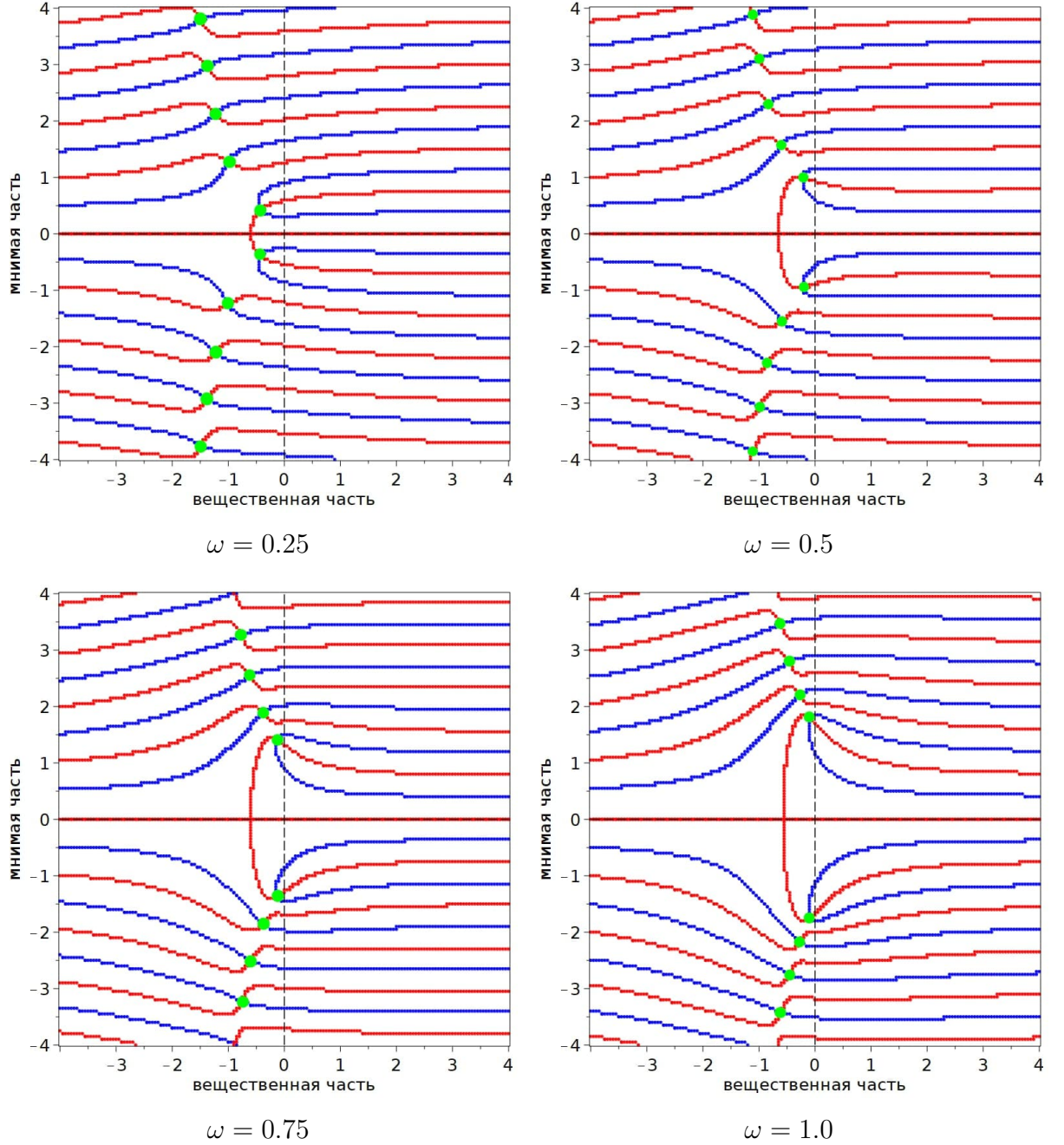


Рис 3. Диэлектрический слой. Численное решение системы (25): синяя кривая — решение первого уравнения системы (25); красная кривая — решение второго уравнения системы (25); точка пересечения синей и красной кривых, является решением системы (25): т.е., найдены комплексные (зеленые точки) вытекающие волны. Значения параметров: $h = 4$, $\epsilon(x) = -\sqrt{x+1} - 1$, $A = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В теоретической части курсовой работы я раскрыла такие темы, как поляризация волны, классификация волн, метаматериал. Рассмотрела способы применения и историю создания метаматериала. А также вывела задачу на собственные значения для уравнений Максвелла с учетом определения ТЕ-поляризованных волн. Нашла нетривиальные решения системы уравнений Максвелла. Решив задачу Коши с начальными условиями (23) я смогла получить дисперсионное уравнение (24). Далее для нахождения комплексной константы λ я составила систему (25), численно решив ее я получила набор пар (α, β) — коэффициентов для вещественной и мнимой частей. И вывела их на графики.

Таким образом, проанализировав рисунки, можно распознать тенденцию изменений постоянных распространения при изменении ω . При этом мы получаем вытекающие волны. Зелёным цветом на графиках отмечены решения системы (25). То есть я нашла комплексные ТЕ-поляризованные волны неоднородного метаматериала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Адамс, М. Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. — М. : Мир, 1984. — 521 с.
- [2] Вайнштейн, Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. — М. : Радио и связь, 1988. — 440 с.
- [3] Валовик, Д. В. Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах: монография / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов. — Пенза : Изд-во ПГУ, 2010. — 264 с.
- [4] Веселаго, В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ / В. Г. Веселаго // Успехи физических наук. — 1967. — Т. 92, № 7. — С. 517-526.
- [5] Маркузе, Д. Оптические волноводы / Д. Маркузе; под ред. В. В. Шевченко. — М. : Мир, 1974. — 576 с.
- [6] Слюсар, В. Метаматериалы в конструкциях антенн / В. Слюсар // Электроника: наука, технология, бизнес. — 2009. — № 8. — С. 66-70.
- [7] Смолькин, Е. Ю. Численное исследование ТЕ-поляризованных комплексных электромагнитных волн в открытом неоднородном слое / Е. Ю. Смолькин, М. О. Снегур // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. — 2021. — № 1. — С. 10-19.
- [8] Снайдер, А. Теория оптических волноводов / А. Снайдер, Дж. Лав. — М. : Радио и связь, 1987. — 656 с.