МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ.В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра « Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
Профиль «Математика»
Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
бакалаврская работа на тему:
«Особенности изучения темы «Производная» в старших классах общеобразовательной школы при формировании критического мышления»

Студент _____ Жирнова Даниэла Константиновна

Руководитель _____ Журавлева Е.Г.
23.06.20

Нормоконтролёр _____ Сурина О.П.
01.07.20

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 15.06.20 № 10)

Заведующий кафедрой _____ Паньженский В.И

Работа защищена с оценкой отл. (протокол заседания ГЭК от 8.07.20 № 4)

Секретарь ГЭК _____ Сурина О.П.
8.07.20.

Пенза,2020

Оглавление

Введение 3
Глава 1. Теоретические основы формирования критического мышления на уроках математики в старших классах 6
1.1 Анализ школьных учебников по теме «Производная» 6
1.2 Понятие производной функции 13
1.3 Особенности формирования критического мышления на уроках математики 15
Глава 2. Методические аспекты изучения темы «Производная» в старших классах общеобразовательной школы при формировании критического мышления 20
2.1 Математические задачи по теме «Производная» как средство формирования критического мышления учащихся 20
2.2 Фрагмент рабочей тетради для учащихся старших классов по теме «Производная в школьном курсе математики» 30
Заключение 64
Список литературы 65
Приложение 67

Введение

Выбранную тему можно считать одной из главных среди разделов начал математического анализа. В период научно – технического прогресса, когда стремительно развиваются вычислительные системы, в решении разных видов задач пользуется актуальностью дифференциальное исчисление. Основными понятиями названного исчисления являются производная и дифференциал, они появились при обзоре задач естествознания, физики, математики и приводятся, как правило, к вычислению пределов одного и того же типа. Как пример можно назвать физическую задачу определения скорости неравномерного движения или геометрическую задачу построения касательной к кривой.

Данная тема слабо разработана в методическом плане, поэтому в наше время она интересна большому количеству методистов. Помимо этого, данная тема интересна с исторической стороны. Многие основоположники дифференциального исчисления, такие как Лейбниц и Ньютон, интересовались данной тематикой, создавали наработки, анализировали имеющиеся данные.

Выбранная нами тема занимает центральное место в алгебраическом курсе. Актуальностью данной темы является то, что она имеет огромное образовательное значение, именно с нее берет свое начало процесс изучения элементов математического анализа, и важно понимать, что это дает возможность создавать новые методы решения задач разной специфики.

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: использование математических задач для развития критического мышления учащихся при изучении темы «Производная».

Цель работы состоит в выявлении особенности изучения темы «Производная» в старших классах общеобразовательной школы при формировании критического мышления.

Для достижения указанной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Проанализировать психолого-педагогическую, математическую и методическую литературу по теме исследования;
2. Определить основные подходы к изучению производной;
3. Выделить уровни сформированности у учащихся умений критически мыслить;
4. Разработать рабочую тетрадь по математике по теме «Производная» в школьном курсе математики, способствующую формированию критического мышления;
5. Составить проверочную систему задач по теме «Производная» для учащихся 11 классов общеобразовательных школ.

Теоретическая значимость исследования заключается в обосновании подхода формирования умений критически мыслить в процессе решения математических задач, в выявлении уровней сформированности данных умений при обучении математике в старших классах.

Практическая значимость результатов, полученных в ходе выполнения работы, состоит в том, что разработанное методическое обеспечение может быть использовано для формирования критического мышления у учащихся 10-11 классов в практической работе учителями математики, студентами старших курсов математических специальностей при прохождении производственной практики (педагогической), а также учащимися при подготовке к ЕГЭ.

Структура выпускной работы состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и приложения.

В первой главе рассматриваются общие теоретические основы по формированию критического мышления, в частности проанализированы учебники по алгебре и началам анализа по теме исследования. Рассматривается проблема развития умений критически мыслить в школьном возрасте, а также их особенности.

Во второй главе представлена разработка рабочей тетради для учащихся старших классов по теме «Производная в школьном курсе математики», приведены математические задачи по теме «Производная», способствующие формированию умений критически мыслить, также составлена проверочная система задач по теме «Производная» для учащихся 11 классов общеобразовательных школ. В заключении сформулированы основные выводы и результаты.

Глава 1. Теоретические основы формирования критического мышления на уроках математики в старших классах

1.1 Анализ школьных учебников по теме «Производная»

1. Анализ учебника Ш.А. Алимова

Понятие производной. Определение производной.

В учебнике Ш.А. Алимова [1] понятие производной определяется через механический смысл: производная как мгновенная скорость. Это соответствие является более доступным для понимания учащихся. После рассмотрения задачи на скорость автор перешел к определению производной через пределы и стоит заметить, что объяснение значения понятия «предел» в этой же задаче применительно к мгновенной скорости. После осуществления анализа системы ознакомления учащихся с понятием производной в названных учебниках мы видим некоторые особенности: главы о производных в учебнике Ш.А. Алимова отличается краткостью, и эта особенность дает возможность ученикам, которые имеют только элементарные знания о производной, быстро приступить к вычислению этих самых производных. Затем можно увидеть, что последовательно добавляются новые приложения и свойства, при чем все они подкреплены задачами.

Вычисление производной. Правила дифференцирования.

В названном выше учебнике приведены доказательства лишь двух формул, но стоит заметить, что к каждой формуле имеются, как минимум, один – два примера.

Если затрагивать сложную функцию:

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

Автор учебника, упрощая данный раздел, заменил формулу сложной функции на частный случай этой функции – линейную замену аргумента:

$$(f(kx + b))' = kf'(kx + b)$$

Доказательство данной формулы получается коротким и менее абстрактным несмотря на то, что эта формула гораздо менее емкая.

Производные элементарных функций.

Автор после рассмотрения степенной функции перед правилами дифференцирования, переходит в отдельном пункте к формулам производных других элементарных функций (показательной, тригонометрической, логарифмической). Доказательство рассматривается только для синуса, но для каждой функции приводится задача с решением. Удобство состоит в том, что все простейшие функции и правила дифференцирования рассматриваются постепенно, именно это позволяет не возвращаться к тому материалу, который уже пройден.

Исследование функций. Возрастание и убывание функций.

Раздел начинается с формулирования признаков возрастания и убывания.

Экстремумы функций.

Автор данного учебника уделяет большое количество времени решению заданий, на примере определенных задач.

Схема исследования функций.

Мы видим, что автор книги при исследовании выделяет только лишь признак монотонности.

2. Анализ учебника под редакцией А.Н. Колмогорова

Понятие производной. Определение производной.

Подход А. Н. Колмогорова [2] при сравнении с другими авторами имеет отличие в том, что глава, которая посвящена производной, начинается с определения приращения функции. Для определения этого понятия Колмогоров приводит примеры, на основе одного из них мы видим, как через приращение можно найти угловой коэффициент секущей. После этого, мы находим определение касательной к графику функции и мгновенной скорости.

Геометрический смысл производной.

При обозначении понятия касательной к графику функции А.Н. Колмогоров начинает с аналогии. По его мнению, изначально, при обучении важно установить связь между теоретическим понятием и теми геометрическими

объектами, которые уже были изучены и их образ уже сформирован в сознании учащегося.

Автор обращает внимание на то, что если увеличить масштаб графика функции, то график будет похож на прямую. Соответственно, чем больше масштаб, тем больше схожесть. Так же А. Н. Колмогорова [2] дает информацию о том, что, если между точками графика провести отрезки, то появляется возможность получить его изображение в приближенном состоянии.

Непрерывность функции и предельный переход.

В данном пособии дается следующее определение функции, меняющейся без мгновенных «скачков».

Если $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$, то функцию $f(x)$ называют непрерывной.

Разбор свойства непрерывности осуществляется весьма углубленно.

Вычисление производной. Правила дифференцирования.

Мы знаем о существующих правилах дифференцирования, перечислим их:

- сумма: $(u + v)' = u' + v'$
- коэффициент: $(Cu)' = Cu'$
- произведение: $(uv)' = u'v + uv'$
- частное: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u'v - uv')}{v^2}$.

Названные формулы дифференцирования находятся в рассматриваемом нами учебнике и тщательно комментируются.

Один пункт автор посвящает рассмотрению формулы производной сложной функции:

$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

В самом начале автор приводит определение сложной функции, далее дается формула и рассматривается вариативность определения производной сложных функций.

Производные элементарных функций.

Автор выводит формулы производных показателей и логарифмической функции и затем рассматривает их в решении различных задач. Отметим, что те

производные тригонометрических функций, которые уже были изучены, предоставляются в одной из глав в виде отдельного пункта. Так же в ходе анализа мы увидели, что А. Н. Колмогоров [2] выводит формулу произвольного синуса и доказывает данное утверждение: $lim\ (\frac{\sin(x)}{x})\ =\ 1$.

Исследование функций. Возрастание и убывание функций.

При доказательстве признаков возрастания и убывания, А. Н. Колмогоров [2] использует следующую формулу, которая принадлежит И. Лангранжу:

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$.

Экстремумы функций.

В данном пункте важнейшими теоремами являются необходимость производной в точке равной 0, признаки максимума и минимума функции.

Схема исследования функций имеют следующую структуру:

- Найти область определения
- Проверить на четность и нечетность
- Найти точки пересечения с осями
- Найти промежутки знакопостоянства
- Найти промежутки возрастания и убывания
- Найти точки максимальных и минимальных значений функции
- Исследовать функцию на определенных точках.

3. Анализ учебника М.И. Башмакова

Понятие производной. Определение производной.

Автор дает такое же определение производной, как и в предыдущем учебника. Но в отличии от Ш.А. Алимова [4] автор рассматривает понятия по заранее составленному, продуктивному плану, то есть производную он изучает в разных случаях, и затем переходит к точному определению.

Геометрический смысл производной.

При подаче геометрического смысла видна аналогия с учебником А.Н. Колмогорова [2], автор также дает установку на установление связи между

теоретическим представлениями и теми геометрическими объектами, образы которых уже сформировались в сознании. Аналогия видна и в информации по увеличению масштаба графика функции, автор так же обращает внимание на то, что при увеличении масштаба, график все больше становится похож на прямую. М.И. Башмаков [4] так же замечает, что, если провести между точками графика отрезки, появляется возможность увидеть его изображение в приближенном виде. По мнению автора, приведенные выше действия дают возможность представить «устройство» кривых. Он предлагает использовать наглядную иллюстрацию – вырезанный из бумаги график, передающий положение ножниц.

Непрерывность функции и предельный переход.

Информацию, касающуюся предельного перехода, автор объясняет на примерах, при этом он старается изложить материал кратко, ёмко, не вдаваясь в конкретику.

Вычисление производной. Правила дифференцирования.

Мы ознакомились с формулами в учебнике А.Н. Колмогорова [2], эти же формулы мы видим в учебнике М.И. Башмаков [4], но в последнем они расписаны и объяснены более подробно и планомерно.

Исследование функций. Возрастание и убывание функций.

Начиная изучать раздел об исследовании функций, мы видим, что в начале приведены две теоремы. Автор дает нам понятие о том, что та функция, которая равна нулю, всегда постоянна на указанном промежутке и автор определяет понятие монотонности функции.

В начале каждого раздела учебника помещены формулировки признаков возрастания и убывания функции.

Экстремумы функций.

В данном пункте можно выделить основные теоремы: обязательное указание максимального и минимального значения, тождество в точке, равной нулю. Автор учебника старается не использовать формулы, а отдает предпочтение рассказу о свойствах производной.

Стоит отметить, что для рассмотрения особых точек М.И. Башмаков выделяет отдельный пункт.

Схема исследования функций.

Мы видим, что автор книги при исследовании выделяет только лишь признак монотонности.

4. Анализ учебника А.Г. Мордковича (базовый уровень)

Понятие производной. Определение производной.

Сначала перечисляются и раскрываются задачи, которые помогают привести к понятию производной. Само определение выражено очень ёмко и четко.

Геометрический смысл производной.

Тема начинается непосредственно с понятия геометрического смысла, демонстрируются графики и приводится подробное описание. Вся информация, по возможности, представлена в форме задач с решениями.

Вычисления производной. Правила дифференцирования.

Если говорить о формулах, которые приводит автор, то они подаются в форме фактов, не вдаваясь в детали, а сами правила дифференцирования автор разделяет на отдельные фрагменты, к каждому правилу приведен пример.

Схема исследования функций

Мы видим подробную поэтапность:

- Для начала находим производную функции
- Ищем стационарные и критические точки
- Определяем знаки производной на получившихся промежутках
- Затем, мы делаем выводы о монотонности функции, беря за основу теоремы.

Из всех рассмотренных учебников изложение материала наиболее доступно и понятно у А.Г. Мордковича [14]. Преимущество данного учебника в том, что информация представлена на доступном, базовом уровне, обучение не требует руководства, учащиеся способны знакомиться с теорией в

индивидуальном порядке, самостоятельно разбирать примеры, которые находятся в учебнике. В сборнике с задачами представлены задания различного уровня, от простейших до самых сложных, при чем подобрано достаточно большое количество, поэтому для их решения нужно очень много времени.

Таким образом, рассмотрев основные учебники по математике для 10-11 классов по теме «Производная», мы можем сделать основные выводы на основе проведенного анализа.

Наиболее часто используемым учебником в обычных, общеобразовательных школах является учебник А.Н. Колмогорова [2].

Что касается учебника Ш.А. Алимова [1], то мы увидели, что в нем делается упор именно на практическую сторону. Автор приводит большое количество примеров решения задач, и даже отводит им несколько пунктов в своем учебнике. Недостатком учебника можно назвать практически отсутствие в нем доказательств, попадаются пару, но они слишком кратки и можно сказать «скомканы». На основе этого, мы сделали вывод, что учебник больше подходит для самостоятельного изучения. Перейдем к учебнику М.И. Башмакова [4]. Здесь автор преподносит материал крайне, а в некоторых моментах очень сжато, но стоит отметить, что материал последователен, а доказательства очень легко воспринимаются.

Последним мы рассматривали учебник А.Г. Мордковича [14]. Данный учебник способен помогать в разграниченном обучении, так же он подходит и для самостоятельного обучения – он содержит большое количество теоретических объяснений и примеров, с которыми возможно ознакомиться без помощи педагога.

На мой взгляд в данных учебниках тема «Производная» лучше рассматривается в учебнике под редакцией А.Н. Колмогорова [2], который характеризуется большим объемом материала по производной и высокой степенью детальности. Он по праву наиболее часто используется в обычных школах.

1.2 Понятие производной функции

Допустим, дана функция $y = f(x)$, определенная в некоторой области значений аргумента. Выберем какую-либо точку x_0 из этой области и дадим x_0 некоторое приращение Δx, отличное от нуля (причем так, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ принадлежала области определения функции). Вычислим соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Это отношение есть некоторая функция от аргумента Δx. Может случиться, что эта функция имеет предел при $\Delta x \to 0$, т.е. что существует:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Тогда этот предел будет называться производной от данной функции в точке x_0.

Замечание. Производную от функции $f(x)$ в точке x_0 можно определить и как: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

В самом деле, производная функции $f(x)$ в точке x_0 есть:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Обозначим $x_0 + \Delta x = x$, тогда $\Delta x = x - x_0$, причем при $\Delta x \to 0,\ x \to x_0$. Отсюда имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Эта форма записи производной в точке x_0 будет в дальнейшем иногда использоваться.

Предположим, что данная функция $f(x)$ в каждой точке некоторой области D имеет производную. Тогда каждому x из области D будет соответствовать свое значение этой производной, и тем самым на области D построится некоторая функция $\varphi(x)$. Эта функция называется производной функцией от данной функции или просто производной от этой функции.

Определение: Производной функцией от данной функции $f(x)$ называется (при переменной x) предел отношения приращения функции $f(x)$ к приращению ее аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Характеристику производной функции от функции $y = f(x)$ принято обозначать через f', так что: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Иначе производную от $y = f(x)$ обозначают через y', наконец, ее обозначают и с помощью символа $\frac{dy}{dx}$.

Для отыскания производной от данной функции $y = f(x)$, как это следует из самого определения производной, надо:

1) Произвольному значению аргумента x из области определения функции дать произвольное же приращение $\Delta x \neq 0$ и вычислить соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

2) Составить отношение $\frac{dy}{dx}$.

3) Перейти к отысканию предела этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Те значения x, для которых этот предел существует, составят некоторую область D, в которой и будет существовать производная $f'(x)$ от данной функции: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Операция отыскания производной функции от данной функции называется *дифференцированием*.

Пример. Найти производную от функции $y = f(x) = x$.

Решение: возьмем произвольное значение аргумента x, дадим ему приращение Δx и вычислим Δy: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x$.

Отсюда при любом x: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, поэтому и $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

Итак, *производная от функции, численно равной в каждой точке значению своего аргумента, тождественно равна единице.* Коротко этот факт обычно условно формулируют так: *производная аргумента (независимого переменного) равна единице* и (условно же) пишут: $x' = 1$.

1.3 Особенности формирования критического мышления на уроках математики

После ознакомления с задачами по обучению математике, мы видим, что задача развития критического мышления и умения школьников является очень важной. Мышление развивается во всех сферах жизни и деятельности, в учебе, при общении, любом взаимодействии. В первую очередь важно проработать те моменты, которые касаются непосредственно критического мышления в ходе образовательной деятельности по математике.

Мышление можно рассматривать с разных точек зрения. Если мы говорим о нем, как о психическом процессе, мы должны понимать, что с помощью мышления личность способна обозначать различные свойства познания, в том числе и те, которые невозможно раскрыть с использованием восприятия, это касается и взаимосвязей между субъектами. На основе этого, мы можем выявить, что мышление – это некий процесс, который возможно использовать в ходе решения задач.

Мышление можно разделить на теоретическое и практическое, как правило, классификация зависит от вида задания. Ниже рассмотрим понимание каждого из видов мышления.

Теоретическое мышление, как правило – изучение и констатирование особенностей, логичность изучаемых объектов. Практическое мышление – процесс приготовления и размечевания физических преобразований объектов. Помимо вышеуказанных видов выделяют еще интуитивное и рассуждающее мышление, в некоторых источниках можно увидеть, что их называют аналитическим и логическим. Отличие между ними состоит в том, что, используя рассуждающее мышление, личность мыслит сознательно, беря во внимание все факторы, процесс происходит планомерно. При интуитивном мышлении процесс протекает прямо противоположно – мышление нельзя назвать осознанным, не имеется схемы, отсутствует поэтапность.

Классификация мышления на этом не заканчивается. Еще можно выделить

репродуктивное и продуктивное мышление. Иногда продуктивное мышление называют творческим. При репродуктивном мышлении за основу берутся те алгоритмы и правила, которые известны, их не нужно искать и выделять. При продуктивном мышлении в приоритете творческие заключения, создание чего – то нового, в идеале, это «что – то» не должно быть знакомо личности, или даже целому социуму.

Важнейшим качеством мышления можно назвать прогностичность. С помощью мышления мы можем предугадать или даже запланировать последствия своих действий и целей.

Рассматривая методические математические разработки, мы замечаем аналитический и синтетический метод решения задач, имеется в виду процесс рассуждения в ходе решения: процесс идет от требований к условиям и обратное.

В ходе учебной деятельности необходимо давать детям информацию для мышления: «Как вы думаете, почему это происходит?», «Что будет, если…», «Если мы возьмем за основу…, то…». Учащиеся должны уметь замечать в своей обычной жизни математические модели.

При математическом обучении школьники знакомятся с различными математическими понятиями и определениями. Мы понимаем, что процесс обучения заключается не только в усвоении понятий. Большая часть математических понятий познается именно жизненно – опытным путем, и потом, на занятиях по математике, конкретизируется и расширяется именно в математическом понятии.

Изучив математические методики, ознакомившись с мнениями многих специалистов, мы видим, что мыслительная деятельность — это не просто психический элемент, а очень глубокий процесс, который требует большого количества времени и упорства.

Жан Пиаже, руководящий группой психологов, считает, что этот процесс нельзя запланировать, помимо этого он называет его «самостоятельным, не

зависящим от обучения и имеющим внутренние, отличительные закономерности.»

В настоящее время при обучении старшеклассников необходимо и важно уделять особое внимание мышлению. Прежде чем вводить различного рода усложнения в учебный процесс, необходимо проследить, чтобы у школьников – старшеклассников были сформированы основные психические качества – самопроизвольность, инициативность, выработан навык использования нужных приемов и методов. Благодаря этому у школьников появляется возможность осуществлять контроль за своими действиями, ознакомляться с собственными умениями, ставить перед собой цели, развивать инициативу. После всех этих действий меняется сам процесс мышления – становится более осознанным, погруженным, многогранным.

Обладание высшими формами мышления позволяет успешно формироваться потребности в интеллектуальной деятельности, это в свою очередь, очень важно для понятия важности значимости теоретических знаний и формирует стремление применять их в своей практической деятельности.

Для учащихся старших классов во всей системе обучения важно насколько значимо само умение, задачи, цели, содержание и методы. Это указывает на то, что, если изменить значимость умения меняется отношение ученика и к учебной деятельности, и к своей личности. У названной категории учащихся наблюдается достаточно глубокий интерес к себе и, в частности, к своему мышлению. Это дает возможность развивать следующие качества: наблюдательность, избирательность, критичность. Параллельно с этим трансформируются и мотивы обучения, потому что они приобретают для учащихся важный жизненный смысл.

К перечисленному можно добавить, что активно формируется сознательность, набирает силу роль обобщений и абстракций в мыслительной деятельности. В наше время школа решает задачу развития критического мышления заодно с усвоением учащимися программного материала, то есть она не выделяется как отдельная, самостоятельная.

Развитие мышления имеет законы и закономерности процесса обучения – дидактические основы. Имеющиеся законы отображаются в перечне дидактических принципов, которые при удобных условиях позволяют управлять развитием мышления учащихся.

В том случае, когда процесс обучения организован в соответствии со всеми педагогическими требованиями, то есть он системен, логичен, целенаправлен, происходит обогащение детей чувственным опытом, развивается их речь, стимулируется любознательность, появляется стремление к поискам и открытиям в различных сферах. Чтобы сказать, насколько сильное воздействие оказывает деятельность, необходимо проанализировать задачи, в идеале должны объединяться учебные и трудовые, теоретические и практические задачи.

При грамотном педагогическом управлении процессом развития мышления и умения учащихся осуществляется достижение поставленной цели, но при условии, что достигнута гармония между намеченным содержанием, слаженно работающими мыслительными операциями и дающими положительный результат значимыми мотивами учебно – познавательной деятельности. При это нужно обязательно учитывать индивидуальные и возрастные различия в мышлении учащихся. Важно помнить, что критическое мышление нуждается не только в стимуляции, но и в специальном развитии на протяжении всего школьного обучения.

При планировании процесса математического обучения главенствующее место отводят поиску решения и доказательства, выстраиванию рассуждений и обоснований, опровержению и проверке найденного решения. Можно выделить некоторые затруднения, которые указывают на недостаток критического мышления:

- учащиеся не замечают неправильность, безосновательность своих и чужих рассуждений;
- не способны находить и устранять ошибки и неточности, которые были допущены;

- процесс проверки решения, как правило, вызывает затруднения или организован неправильно;
- при требовании объяснить причину совершенной ошибки, проанализировать ее, также испытываются определенные затруднения.

Для устранения названных нами затруднений необходимо целенаправленно формировать у учащихся умения, определяющие критическое мышление. К ним относят:

- способность критично браться за обработку полученной информации;
- способность поиска неточности, ошибки, умение исправить, обработать исправленную информацию, выявить причины допущенных ошибок;
- способность не только исправлять, но и опровергать;
- способность достаточно объективно оценивать гипотезы и результаты их проверки;
- способность к эффективному осуществлению отбору из задачи той информации, которая может быть полезна, а так также непосредственно из процесса решения и полученных результатов [8], [10].

Для развития выделенных умений, характеризующих критическое мышление, можно организовать работу в следующих направлениях:

1. Использовать задания, направленные на формирование выделенных умений, непосредственно в процессе обучения на каждом занятии по математике;

2. Разработать рабочую тетрадь для учащихся старших классов по математике по теме «Производная».

Каждое из выделенных направлений охарактеризуем во второй главе выпускной работы на примере изучения темы «Производная».

Глава 2. Методические аспекты изучения темы «Производная» в старших классах общеобразовательной школы при формировании критического мышления

2.1 Математические задачи по теме «Производная» как средство формирования критического мышления учащихся

Решение задач считается одним из важнейших видов учебной деятельности, поскольку именно в процессе решения задач у учащихся развиваются творческие способности. Роли и месту задачи свойственно изменяться, а значит и сами задачи способны планомерно меняться. Наиболее распространёнными терминами при решении задач являются: «найдите», «составьте», «докажите», и используемые сравнительно недавно: «объясните», «выберете одно верное решение», «исследовать», «предвидеть различные решения» и тому подобное. Решение таких проблем предполагает интеграцию различных методов. Вышесказанное характеризует новый этап в применении задач как средства математического образования. Термин «задача» очень широко используется как в науке, так и в жизни.

Мы часто сталкиваемся с толкованием задач, связанной с концепцией перехода (перевода) системы из одного состояния в другое. Можно выделить следующие элементы: входа –А; выхода – В; способа перехода от A к B, а также теории (базиса) T, на его основе построен метод. Очевидно, что известен хотя бы один элемент задачи, а другие выступают в качестве неизвестных.

В психологическом понимании задача – это комплекс целей субъекта и условий, при которых она должна быть, в итоге, достигнута. В более ограниченном понимании задача представляет собой неразрывную связь процесса решения задач с мышлением.

Г.А. Балл [3] отмечает, что термин «задача» используется в психолого-педагогической литературе «для обозначения объектов, принадлежащих к трем различным категориям:

1) категория цели действия субъекта, требования, предъявляемого к

субъекту;

2) категория ситуации, которая включает вместе с целью условия, при которых она должна быть достигнута;

3) категория словесного выражения этой ситуации. Наиболее распространенное использование термина «задача» для обозначения объектов второй категории».

У составителя свое видение понятия задачи и он формирует его так: «Задача в наиболее общем виде представляет собой систему, обязательным компонентом должны являться предмет задачи в его начальном положении и модель того состояния задачи, которая требуется.

Ознакомившись с определением автора, мы можем сказать, что задачу можно охарактеризовать тремя основными критериями – система, предмет, модель. Что касается именно предмета, то под ним Г.А. Балл [3] понимает все то, на что направлена мысль непосредственно самого исследователя.

Система, по мнению автора, представляет собой совокупность объектов, рассматриваемых исследователем, а также интересующими его отношения между ними.

Мы рассмотрели работу А.А. Матюшкина [12] «Проблемные ситуации в мышлении и обучении», в ней автор делает акцент на понятиях «проблемная ситуация» и задача. Он указывает, что приведенные понятия разнородны. Говоря про задачи, автор отмечает, что задачи, это «способ символического представления задания одному человеку, или же себе, включая указание цели и условий ее достижения. Субъект деятельности понимается отдельно от задачи, он не является ее компонентом. Для проблемной ситуации характерно определенное психическое состояние субъекта, которое возникает в процессе выполнения задания и которое требует усвоения новых знаний о предмете, методе или условиях, для выполнения поставленной задачи.

Проблемная ситуация имеет свою структуру, состоящую из элементов, перечислим их. Это познавательная потребность, требующая от человека

процесса по решению проблемы; неизвестные отношения, метод или условие действия; человеческие интеллектуальные навыки анализа условий задачи и освоения новой задачи, обнаруженной в ней. Неизвестное является основным элементом проблемной ситуации.

Рассматривая в своей работе проблемную ситуацию, автор выделяет основные типы в соответствии с местом неизвестно в ней:

- Схождение неизвестного с целью действия;
- Схождение неизвестного с способом указанного действия;
- Соотношение неизвестного с условиями выполнения действия.

У Л.М. Фридмана [19] свое понимание задачи. Ей он считает абсолютно любую модель проблемной ситуации, а ту задачу, которая используется в процессе школьного обучения, он называет особым типом заданий, которая дается учащимся: «задача — это задание, чтобы найти результат. Если меры по их выполнению не указаны, но в условии предоставлена большая часть конкретной необходимой информации.».

Так же, как и А.А. Матюшкин, Л.М. Фридман отчетливо разграничивает понятия задачи и проблемной ситуации. Он отмечает, что их отличие характеризуется несколькими признаками:

1. Вне зависимости от любого выбранного языка проблемная ситуация способна реально существовать, что касается задачи, то она в любом случае связана с языком, так как она в нем излагается.

2. По степени содержания, проблема богаче, потому что задача является моделью содержания, которая отражает только выборочные ее стороны.

3. Любая проблемная ситуация содержит одну или две – три задачи, отличимых друг от друга совокупностью представленных в них свойств и языком.

Автор видит в задаче намеренный поиск выбранного средства для недоступной, но ясно видимой цели. Он считает, что процесс решения задачи и есть поиск средства. Можно сказать, что автор делит задачу на несколько и

прописывает некую этапность решения. В своих работах он отмечал, что задача может быть разной по степени сложности, значит и степень сложности при решении так же будет разной.

Наиболее обстоятельные исследования задач как явления обучения в конкретной предметной области были проведены Ю.М. Колягиным [17] в работе «Задачи в обучении математике» и В.И. Крупичем [18] в работе «Теоретические основы обучения решению математических задач».

Формируя понятие задачи Ю.М. Колягин использует понятие системы. За основу он берет сложную систему $(S - P)$, в которой S – человек или некий субъект, а P – задачная система.

Система P является стационарной по отношению к человеку, в том случае, если ему известны составляющие ее элементы, их свойства и отношения между ними. В том случае, если человеку неизвестна хотя бы один компонент, то система начинает быть нестационарной или проблемной. Когда у человека возникает необходимость найти неизвестные компоненты системы P, проблемная ситуация превращается в задачу. Процесс решения задачи – это преобразование данной проблемной ситуации в стационарную и установление того факта, что преобразование в данных условиях, которые могут быть и субъективными, просто невозможно.

Говоря о задаче, Ю.М. Колягин отмечал, что, по его мнению, задача есть в наличии независимо от того, осуществляет субъект решение или нет.

Необходимо лишь осознание человеком нестационарности данной системы P и наличие целевого указания к ее преобразованию.

Рассматривая задачную систему P, Ю.М. Колягин [17] выделяет в ней компоненты ACRB:

(A) – условие задачи (характеристика проблемности системы P);

(B) – заключение задачи (характеристика стационарности системы P);

(R) – решение задачи (преобразование системы P_x в систему P, т.е. один из возможных способов перехода от начального состояния ситуации к конечному).

(C) – базис решения задачи (теоретическая или практическая основа для преобразования P_x в P посредством данного решения).

В.И. Крупич [18] видит задачу как многоуровневый объект, который продолжает существовать в материальной форме независимо от изменений субъекта, так же он указывает на объективное строение. Внешнее, по-другому смысловое или сюжетное строение задачи, автор называет информационной структурой задачи, а внутренне устройство – структурой, т.к. это то, что остается неизменным при любых преобразованиях задачи в процессе поиска ее решения. Решение задачи - поиск и нахождение искомого (неизвестного). Вслед за Ю.М. Колягиным В.И. Крупич определяет информационную структуру задачи как совокупность компонентов:

A – условия (условие) задачи, т.е. данные и отношения между ними;

B – требование задачи, т.е. искомые (искомое) и отношения между ними;

C – базис решения задачи, т.е. теоретическая и практическая основа, которая необходима для обоснования решения;

D – способ, определяющий процесс решения задачи, т.е. способ действия по преобразованию условий (условия) задачи для нахождения искомого;

R – основное отношение в системе отношений между данными и искомыми.

Информационная и внутренняя структура задачи взаимосвязаны. Эта связь устанавливается с помощью компонентов D и C информационной структуры.

Анализируя структуры различных трактовок понятия задачи, можно заметить, что большей популярностью пользуется определение задачи как системы, как у Г.А. Балл, Ю.М. Колягина, Л.М. Фридмана, стоит отметить, что у них не идентичное понимание определения, каждый из авторов по-своему видит отношение между субъектом и задачей.

Большинство авторов различных учебников и пособий считают, что субъект должен входить в состав понятия задачи. Они смотрят на задачу как на проблемную ситуацию, в которой обязательно должен находиться и действовать

субъект. Такие авторы не представляют возможным задачу без субъекта, так же они отмечают, что субъект изменяем, то есть, что составляет задачу для одного, может не быть задаче для другого. Существует еще один подход, идущий в противопоставление к первому. Исходя из него, задача понимается отдельно от субъекта деятельности, который осуществляет деятельность. Такого подхода придерживаются много авторов, например, В.И Крупич [18]. Так же важно отметить, что авторы по-разному соотносят понятия задачи и проблемной ситуации, некоторые считают понятие проблемной ситуации первичным понятием, некоторые имеют противоположный взгляд.

Для того, чтобы познавательная деятельность на математических занятиях была более эффективной, важно подбирать задания, в ходе решения которых, школьники находили бы ошибки и могли устанавливать неточности. При чем важно, чтобы процесс был не автоматичен, а чтобы учащиеся именно осознавали, где именно и в чем состоит несоответствие. Хорошо, если учащиеся способны формулировать факторы, из - за которых возможно допущение ошибки.

Исходя из этого, мы видим, что целесообразно использовать по два, три задания, используя примерные формулировки: «Как вы думаете, верно ли…», «Найдите ошибку и исправьте ее…», «Согласны ли вы, что, если…» и прочие.

Задание 1.

Верны ли высказывания:

а) Обратный процесс вычисления производной - нахождение первообразной;

б) Функция, имеющая производную в точке, всегда непрерывна в ней.

Задание 2.

Можно ли говорить о существовании производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?

Задание 3.

Функция $f(x)$ определена на отрезке $[-11;\ 3]$. На рисунке 1 изображен

график ее производной. Составить задачи, используя эти данные.

Опыт учащихся позволяет им найти 6-7 стандартных задач. Остается упорядочить их, дополнить и записать. Рассмотрим эти задачи.

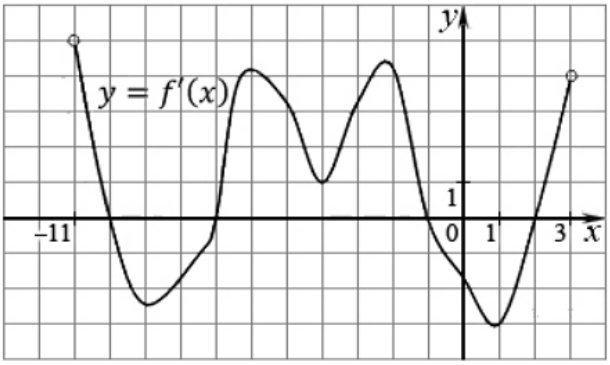


Рисунок 1

График производной $y = f(x)$

1. Найдите длину наибольшего промежутка возрастания функции $y = f(x)$.
2. Найдите длину наибольшего промежутка убывания функции *y=f(x)*.
3. Найдите сумму точек экстремума этой функции.
4. Найдите точку максимума этой функции.
5. Найдите точку минимума этой функции.
6. Найдите в какой точке $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает самое большое значение.
7. Необходимо найти количество точек экстремума функции $f(x)$ отрезке $[-10; 0]$.

Задание 4.

Найдите и исправьте ошибку в решении задачи.

Дан закон движения точки: $x(t) = 5t^3 - 3t$. Найдите скорость в момент времени $t = 2$?

Решение.

Найдем скорость точки как первую производную от перемещения:

$v(t) = x'(t) = (5t^3 - 3t)' = (5t^3)' - (3t)' = 5 \cdot (t^3)' - 3 \cdot (t)' = 5 \cdot t^2 - 3 \cdot 1 = 5t^2 - 3.$

В момент времени $t = 2$ скорость равна:

$v(2) = 5 \cdot 2^2 - 3 = 20 - 3 = 17.$

Ответ. $v(2) = 17.$

Кроме ошибок в решении задач (упражнений) и доказательстве теорем необходимо предлагать задания, которые содержат ошибки, как в формулировках теорем, так и в формулировках определений. Для этого предварительно необходимо раскрыть суть и логическую структуру, а также приемы построения различных видов определений и теорем. При этом следует обратить внимание на формирование умений: находить ошибки в логической структуре определения, теоремы; выявлять и устранять ошибки, допущенные при выделении родового и видового отличия.

Задание 1.

Верно ли утверждение:

Если функция дифференцируема на интервале $(a; b)$, то она непрерывна на интервале $(a; b)$.

Задание 2.

Определите, какие выводы правильные, а какие – ошибочные. Неверные выводы зачеркните:

1. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).
2. Производная от константы равна 1.
3. $(f - g)' = f' - g'$
4. $(f + g)' = f' + g'$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g + fg'}{g^2}$

Задание 3.

Ознакомьтесь с утверждением и ответьте, верно ли, что: для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

Как мы уже и говорили, решение рассмотренных выше видов задач

позволяет не только овладеть знаниями по математике, но и активно способствует развитию качества критического мышления, таких как:

- *готовность к планированию собственных действий* (появляется потребность в прояснении заключения цели и планирование возможных путей ее достижения);

- *гибкость и настойчивость в достижении поставленной цели*;

- *готовность к исправлению чужих и своих ошибок*;

- *рефлексия мыслительного процесса* (умение наблюдать за собой или своим коллегой в процессе индивидуальной или совместной мыслительной деятельности, адекватно отслеживать ход рассуждений);

- *готовность к подбору таких моделей рассуждений, которые бы были в состоянии воспринимать учащиеся данного возраста, уровня подготовки и интеллектуального развития* [10], [11].

Качества критического мышления взаимодействуют и развиваются через умения критического мышления, что отражено в таблице 1.

Таблица 1

Характеристика умений критического мышления

Умения критического мышления	**Качества критического мышления, соответствующие умениям**
1. Умение критично подходить к полученной информации (выделение всех элементов задачной ситуации, анализ условия задачи и ее элементов с целью установления полноты, непротиворечивости (противоречивости), независимости (зависимости), соотнесение известных элементов задачи с неизвестными, расчленение данной	Готовность к планированию собственных действий, гибкость и настойчивость в достижении поставленной цели.

задачи на подзадачи, последовательное решение которых приводит к решению основной и др.).	
2. Умение осуществлять поиск ошибок, находить пути их устранения, выявлять причины их возникновения; 3. Умение осуществлять опровержение	Готовность к исправлению своих и чужих ошибок; рефлексия мыслительного процесса.
4. Умение оценивать свои предположения справедливо и непредвзято (анализ, поиск альтернатив, обоснование найденного решения, синтез, отбор полезной информации, содержащейся в задаче, процессе ее решения и его результатах и т.д.).	Готовность к планированию собственных действий, гибкость и настойчивость в достижении поставленной цели; готовность к исправлению своих и чужих ошибок, рефлексия мыслительного процесса, готовность к подбору таких моделей рассуждений, которые были бы в состоянии воспринимать, учащиеся данного возраста, уровня подготовки и интеллектуального развития.
5.Умение продуктивно отбирать нужную информацию, которая может содержаться в самой задаче и в процессе ее решения.	Готовность к планированию собственных действий; рефлексия мыслительного процесса.

Критическое мышление формируется в процессе решения математических задач, но в том случае, если каждый этап решения реализуется в личностном аспекте. Когда перечисленные выше виды заданий применяются регулярно, то умения формируются единовременно с усвоением фактического

математического материала. Стоит отметить важный аспект – уровень осознанности при этом значительно повышается. К тому же, умения, которые сформировались на достаточном уровне начинают оказывать благотворное влияние на усвоение математического материала в целом.

В рамках второго направления по формированию умений критического мышления у учащихся в старших классах приведем во втором параграфе.

2.2 Фрагмент рабочей тетради для учащихся старших классов по теме «Производная» в школьном курсе математики

Основная задача преподавателя с введением новых стандартов – это создание условий для формирования общих компетенций с целью достижения результатов стандарта профессионального образования. В связи с этим самым актуальным становится один из основных принципов дидактики - принцип активности обучающегося в процессе обучения. Данный принцип подразумевает качество деятельности, которому присущи высокий мотивационный уровень, осознанная самим учащимся потребность в усвоении умений и знаний, результативность и практическая направленность собственной деятельности.

Процесс реализации интеграции результатов стандартов общего и профессионального образования(для среднего общего образования результаты образования выражаются в личностных, метапредметных и предметных результатах, для среднего профессионального образования результатом являются общие компетенции) требует от преподавателя применение в процессе обучения учебные пособия, ориентированные на развитие высокой логической и операционной культуры обучающихся, развивающих научно-теоретическое и алгоритмическое мышление обучающихся.

С помощью математики приобретаются практические навыки, которые важны в каждодневной жизни. В своем роде она способна служить основой для последующего обучения по другим учебным дисциплинам, так же она способствует логическому развитию и становлению умений пользоваться различными алгоритмами.

Пояснительная записка

Рабочая тетрадь по алгебре для обучающихся 10-11 классов составлена в соответствии с действующими рабочими программами и использованы учебные пособия, нормативно-справочные материалы. Рабочая тетрадь является дидактическим инструментарием к программе учебной дисциплине «Алгебра и начала анализа».

Цель: повышение эффективности подготовки обучающихся к итоговой аттестации по математике.

Задачи:

1. Сформировать умение:

-математического моделирования при решении ситуационных задач;

-исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

2. Создать условия для реализации творческого потенциала, притязаний каждого обучающегося в соответствии с его интересами, наклонностями, способностями;

3. Способствовать развитию навыков самосовершенствования и саморазвития, самоконтроля.

Рабочая тетрадь содержит учебный материал, комплекс дифференцированных практических заданий, которые помогут обучающимся эффективно освоить материал программы и будут служить основой для аттестации по дисциплине «Математика», также может быть использована для самостоятельной работы обучающимися и для выполнения домашних работ, самоконтроля по теме. Тетрадь содержит самовоспроизводящиеся задания, а также практические задания, задачи отличаются постепенным повышением сложности, при решении которых необходимо применить имеющиеся умения и навыки, которые в дальнейшем становятся основой для последующего обучения.

Раздел первый. Информационная структура.

Определение производной.

Очень часто происходит так, что, решая задачи, которые далеки друг от друга по содержанию, мы подходим к одинаковой математической модели. Преимущество математики в том, что она способна создавать способы оперирования с различными математическими моделями, которые потом можно использовать в других сферах.

Человек может работать с различными математическими моделями, такими как уравнение, неравенства, системы уравнений, системы неравенств. На данный момент речь пойдет о абсолютно новейшей математической модели. Для начала нужно рассмотреть две разных по составу задачи, решение которых может привести к возникновению новейшей модели.

Задача 1 (*о скорости движения***).** Возьмем прямую, на которой отмечены начало отсчета, длина в метрах, направление. По данной прямой движется тело, которое мы определяем, как материальную точку. Нам известен закон движения, нужная нам формула выглядит следующим образом: $s = s\ (t)$, где t – время (в секундах), $s\ (t)$ – положение тела на прямой) в момент времени t по отношению к началу отсчета (в метрах). Нам необходимо найти скорость движения тела в момент времени t (в м / с).

Решение.

Мы выдвигаем предположение, что в момент времени t тело могло находиться в точке M (рисунок 2).

OM = *s (t).*

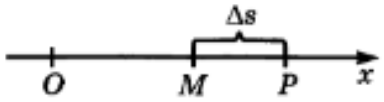


Рисунок 2

Положение тела на прямой

Аргументу t присвоим приращение Δt, рассмотрим момент времени $t + \Delta t$. В этот момент времени координата материальной точки другая, тело в этот момент находится в точке P (рисунок 2): $OP = s\ (t + \Delta t)$.

Исходя из этого, за Δt (с) объект перешел из точки М в точку Р, что говорит нам о том, что он прошел путь МР.

Мы имеем: $\text{МР} = \text{ОР} - \text{ОМ} = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Разность, которую мы получили в итоге, мы назовем приращением функции.

$s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$. Итак, $\text{МР} = \Delta s$(м).

Пусть Δs (м) тело прошло за Δt (с). Не составляет труда нахождение средней скорости $v_{ср,}$ а также нахождение движения тела за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$: $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (м / с).

Необходимо определить значение скорости $v(t)$, которую можем назвать мгновенной скоростью, в момент времени t. Определять мы ее будем как среднюю скорость движения за промежуток времени, но при том условии, что Δt выбирается меньше; значит, что $\Delta t \to 0$. Получаем в итоге: $v\,(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}$.

В результате, мы получим: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Дана следующая кривая (рисунок 3), на ней отмечена точка М. Выберем еще точку, которая находиться рядом с раннее отмеченной точкой – точку Р. Проводим секущую МР. Затем приблизим точку Р по нашей кривой, к точке М. Секущая приближает точку Р по кривой L к точке М. При этом секущая МР начинает менять свое положение, мы можем наблюдать поворот вокруг точки М. Может произойти такое, что обнаруживается прямая, которая представляет собой предельное положение секущей: ее и назовем касательной к кривой L в точке М.

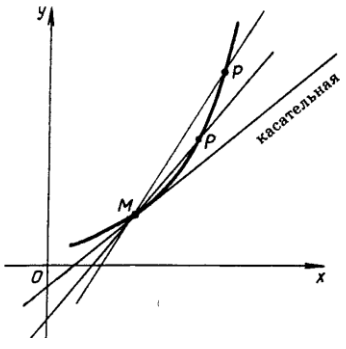


Рисунок 3

График кривой

Мы можем провести эксперимент: взять параболу $y = x^2$, проведем секущую ОР, где О будет являться вершиной, Р – текущей точкой. Возьмем точку Р ближе к О и проведем еще одну секущую. Далее возьмем точку Р еще ближе, проведем третью секущую. Так же можно провести еще несколько, при желании. Мы увидим, что предельным положением проведенных секущих будет являться ось *x* – она и будет касательной к нашей параболе в ее вершине.

Задача 2. Возьмем график функции *y = f (x)*. Мы видим, что на нем отмечена точка М, в этой точке проведена касательная, в данных условиях мы можем предположить о ее существовании. Нам необходимо обнаружить угловой коэффициент касательной.

Решение. Мы можем дать аргументу приращение Δx, после этого необходимо посмотреть точку Р с координатой $a + \Delta x$. *Мы определили, что о*рдината точки Р равна $f(a + \Delta x)$ (рисунок 4). По ниже представленной формуле мы можем вычислить угловой коэффициент секущей МР.

$$k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Теперь, при устремлении Δx к нулю, точка Р будет приближаться к точке М по кривой. Мы помним, что касательную мы определили, как предельное положение секущей при этом приближении. Исходя из этого, угловой коэффициент касательной $k_{кас}$ мы будем вычислять по формуле: $k_{\text{кас}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$.

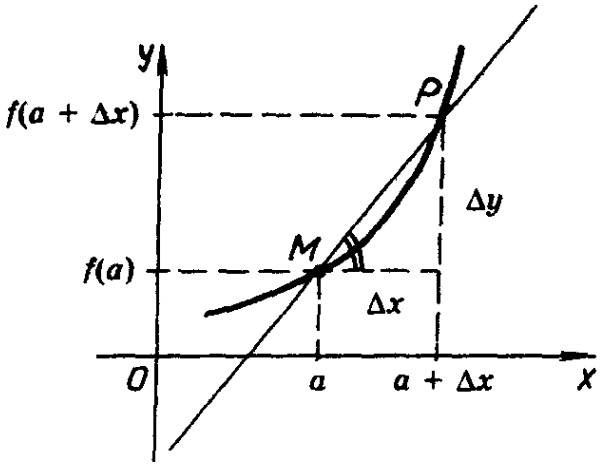


Рисунок 4

График кривой

После использования указанной формулы, мы получим: $k_{\text{кас}} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Замечание. Мы заметили, что процессе данного решения исключается возможность перпендикулярности касательной оси абсцисс. (рисунок 5).

Данное уравнение будет иметь вид $x = a$, *угловой коэффициент мы упоминать не будем, так как это некорректная информация.*

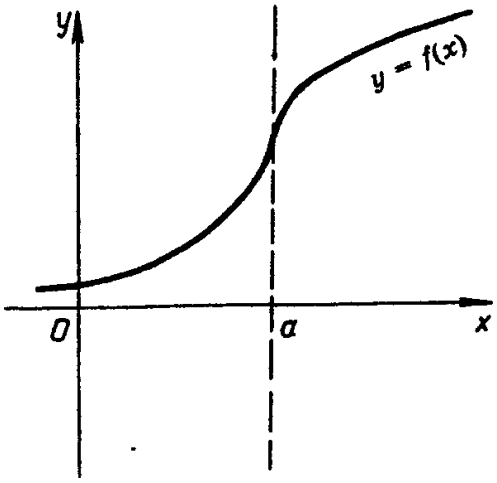


Рисунок 5

График кривой $y = f(x)$

В итоге мы получаем следующее: решенные задачи позволили нам подойти к математической модели - под данным понятием понимается рубеж

отношений приращения функции к приращению аргумента, но только лишь в том случае, если приращение аргумента устремляется к нулю.

Определение производной.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в конкретной точке x и в некоторой ее окрестности. Мы можем дать x приращение Δx, но важно не выходить из означенной территории. Найдем соответствующее приращение функции Δy и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при условии $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначают $f'(x)$.

Значит, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Для обозначения производной часто используют символ y'.

Отметим, что $y' = f'(x)$- это новая функция (но, естественно, связанная с функцией $y = f(x)$, определенная во всех таких точках x, в которых существует упомянутый выше предел. Эту функцию называют так: *производная функции* $y = f(x)$.

Рассмотренные в предыдущем пункте задания позволяют нам рассмотреть производную с двух сторон - с физической и геометрической.

Раскроем физический, или по-другому, механический смысл производной.

Если $s(t)$ - закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t: $v' = s(t)$

В различных научных сферах использует некое обобщение полученного равенства: если некоторый процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Теперь перейдем к геометрическому смыслу производной и раскроем смысл.

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то производная $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной: $k = f'(a)$ (рисунок 6).

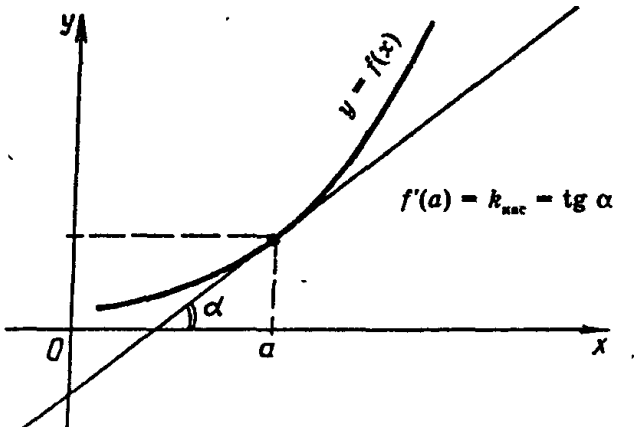


Рисунок 6

График кривой $y = f(x)$ и касательной $k = f'(x)$

Поскольку $k = tg\alpha$, то верно равенство $f'(a) = tg\alpha$.

Теперь истолкуем определение производной с точки зрения приближенных равенств. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в конкретной точке x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Это значит, что в достаточно малой окрестности точки x выполняется приближенное равенство $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ или $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$.

При раскрытии содержательного смысла приближенного равенства приращение функции почти пропорционально приращению аргумента, причем коэффициентом пропорциональности является значение производной (в заданной точке x).

Например, для функции $y = x^2$ справедливо приближенное равенство $\Delta y = 2x \cdot \Delta x$.

При сосредоточенном ознакомлении с понятием производной, мы видим, что в нем заложен алгоритм отыскания производной. Ниже раскроем данный алгоритм.

Алгоритм нахождения производной (для функции $y = f(x)$).

- Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
- Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.

- Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
- Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример 1. Найти производную постоянной функции $y = C$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.

1. Для фиксированного значения *x* имеем: $f(x) = \mathrm{C}$.
2. В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \mathrm{C}$.
3. $\Delta y = \mathrm{C} - \mathrm{C} = 0$.
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$.
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Итак, $(\mathrm{C}') = 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Воспользуемся алгоритмом отыскания производной.

1. Для фиксированного значения x ($x \neq 0$) имеем: $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x+\Delta x}$.
3. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$.
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$.

Итак, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке *x*, то ее называют *дифференцируемой в точке x*. Процедуру отыскания производной функции $y = f(x)$ называют дифференцированием функции $y = f(x)$.

Как связаны между непрерывность и дифференцируемость функции в точке?

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда к графику функции в точке $\mathrm{M}(x, f(x))$ можно провести касательную, (причем, напомним, угловой коэффициент касательной равен $f'(x)$). Но тогда график не может «разрываться» в *M*, т. е. функция обязана быть непрерывной в точке *x*.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то выполняется приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. Если в этом равенстве Δx устремить к нулю, то и Δy будет стремиться к нулю, а это и есть условие непрерывности функции в точке.

Итак, *если функция дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке.*

Обратное утверждение неверно. Например, функция $y = |x|$непрерывна везде, в частности, в точке $x = 0$ (рисунок 7), но касательная к графику функции в точке $(0;\ 0)$ не существует. Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке не существует производная.

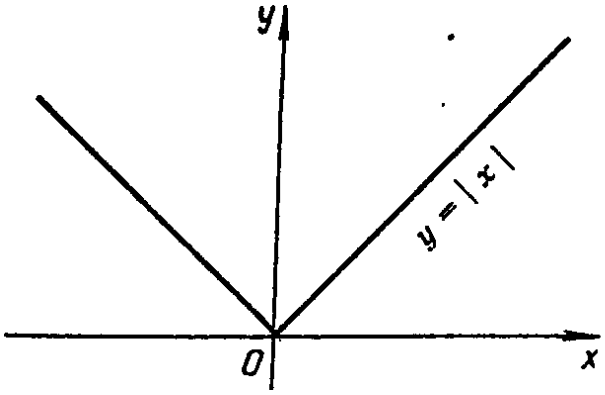


Рисунок 7

График функции $y = |x|$

Еще один пример, более тонкий.

На рисунке 8 изображен график кусочной функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, \text{если} x < 0; \\ \sqrt{x}, \text{если} x \geq 0. \end{cases}$$

Функция непрерывна на всей числовой прямой, в том числе в точке *x = 0*. И касательная к графику функции существует в любой точке, в том числе в точке $x = 0$. Но в точке $x = 0$ касательная совпадает с осью y , т. е. перпендикулярна

оси абсцисс, ее уравнение имеет вид $x = 0$, углового коэффициента у такой прямой нет, значит, не существует и $f'(0)$.

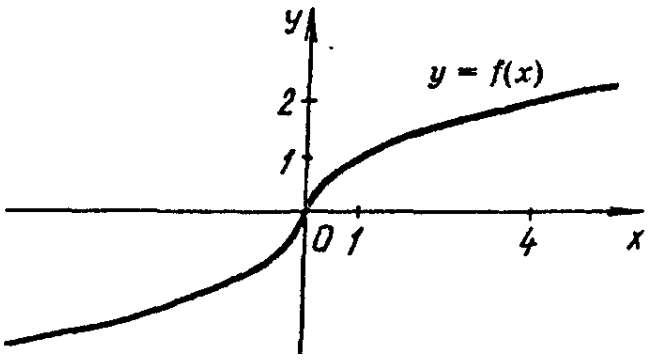


Рисунок 8

График функции $y = f(x)$

По графику мы можем сделать вывод о дифференцируемости функции.

Если в некоторой точке к графику функции можно провести касательную, не перпендикулярную оси абсцисс, то в этой точке функция дифференцируема. Если в некоторой точке касательная не существует или она перпендикулярна оси абсцисс, то в этой точке функция не дифференцируема. Так, по графику функции, изображенному на рисунке 9, можно сделать такой вывод:

- функция непрерывна всюду, кроме точки $x = a$;
- функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = a$(здесь функция имеет разрыв), $x = b$ (здесь касательная не существует), $x = c$(здесь касательная параллельна оси у).

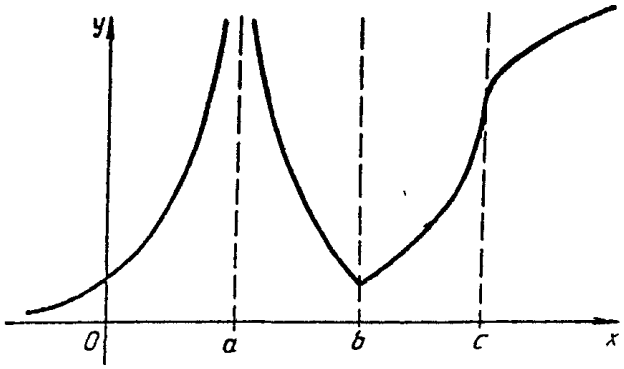


Рисунок 9

График функции $y = f(x)$

Вычисление производных. Формулы дифференцирования.

В пример можем привести следующие формулы:

- $C' = 0$;
- $x' = 1$;
- $(kx + m)' = k$;
- $(xn)' = n \cdot x^{n-1}$;
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\sin x)' = \cos x$;
- $(\cos x)' = -\sin x$.

Пример 1. Найдите значение производной данной функции в данной точке:

а) $y = 3x + 5, x = 4$; б) $y = x^2, x = -1$; в) $y = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{2}$;

г) $y = \sqrt{x}, x = 4$; д) $y = \sin x, x = 0$; е) $y = \cos x, x = \frac{\pi}{6}$.

Решение.

а) Имеем: $(3x + 5)' = 3$, значит, производная равна 3 в любой точке x, в частности, в заданной точке $x = 4$.

Итак, производная функции $y = 3x + 4$ в точке $x = 4$ равна *3*; на математическом языке это удобнее записывать так: $f'(4) = 3$.

б) Имеем: $(x^2)' = 2x$, то $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$.

в) Имеем: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, то $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{2}^2} = -4$

г) Имеем: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

д) Имеем: $(\sin x)' = \cos x$, то $f(0) = \cos(0) = 1$.

е) Имеем: $(cosx)' = -\sin x$, то $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

Пример 2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

Решение.

Уравнение касательной, как уравнение всякой прямой, имеет вид $y = kx + m$. Найдем сначала k – угловой коэффициент касательной, который, как мы знаем, равен $f'(1)$.

Имеем: $(x^2)' = 2x, \text{значит}, f'(1) = 2 \cdot 1 = 2.$

Итак, $k = 2$, т. е. уравнение касательной надо искать в виде $y = 2x + m$.

Осталось найти значение коэффициента m. Для этого воспользуемся тем, что касательная проходит через точку на параболе $y = x^2$ с абсциссой $x = 1$, т. е. через точку $(1; 1)$. Имеем:

$1 = 2 \cdot 1 + m,$

$m = -1.$

Итак, уравнение касательной имеет вид $y = 2x - 1$. На рисунке 10 изображена парабола $y = x^2$ и построена прямая $y = 2x - 1$; чертеж наглядно демонстрирует, что эта прямая касается параболы в точке *(1; 1)*.

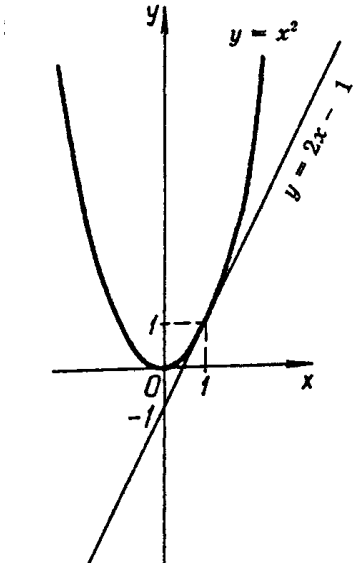


Рисунок 10

График функций $y = x^2$ и $y = 2x - 1$

Ответ: $y = 2x - 1$.

Правила дифференцирования.

1. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке *x*, то и их сумма имеет производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных:

$$\big(f\,(x) + \,g\,(x)\big)' = \,f\,'(x) + \,g'(x)$$

Естественно, что на практике это правило формулируют короче: производная суммы равна сумме производных, причем речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций.

Например, $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x.$

2. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = k \cdot f(x)$ имеет производную в точке *x*, причем

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f(x)$$

На практике это правило формулируют короче: постоянный множитель можно вынести за знак производной.

Например, $(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x.$

3. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) \; + \; f(x) \cdot g'(x)$$

На практике это правило формулируют так: производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

Например,

$$((3x - 5) \cdot cosx)' = \; (3x - 5)' \cdot \cos\, x \; + \; (3x - 5) \cdot (cosx)' =$$

$$= \; x \cdot cos\, x + (3x - 5) \cdot sinx.$$

4. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, причем в этой точке $g(x) \; \neq \; 0$, то и частное $\frac{f\,(x)}{g\,(x)}$ имеет производную в точке x, причем: $\frac{f\,(x)}{g\,(x)} = \;\; \frac{f'(x) \cdot g\,(x) - f\,(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Например, $\left(\frac{x^3-2}{6x+3}\right)' = \frac{(x^3-2)'(6x+3)-(x^3-2)(6x+3)'}{(6x+3)} = \frac{3x^2(6x+3)-(x^3-2)6}{(6x+3)^2} = \frac{12x^3+9x^2+12}{(6x+3)^2}$.

Пример 3. Найти производную функции $y = 2x^2 - 3x + 1.$

Решение. Имеем:

$y' = (2x^2 - 3x + 1)' = (2x^2)' - (3x - 1)' = 2(x^2)' - 3 = 2 \cdot 2x - 3 = 4x - 3.$

Пример 4. Найти производную функции: а) $y = x^3$; б) $y = x^4$; в) $y = x^5$.

Решение.

а) $(x^2)' = 2 \cdot x$

б) $(x^6)' = 6 \cdot x^5$

в) $(x^7)' = 7 \cdot x^6$

Пример 5. Найти точки, в которых касательная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ параллельна оси x.

Решение. Имеем: $y = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$.

Если касательная параллельна оси x, то ее угловой коэффициент равен нулю. Но, с другой стороны, угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Значит, нам нужно найти точки, в которых производная обращается в нуль. Имеем:

$3x^2 - 3 = 0;$

$x_1 = 1, x_2 = -1.$

Далее, $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0;$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4.$

Итак, касательная, проведенная к графику функции $y = x^3 - 3x + 2$ в точке $(1; 0)$ или в точке $(-1; 4)$, будет параллельна оси x. На рисунке 11 дана геометрическая иллюстрация полученного результата.

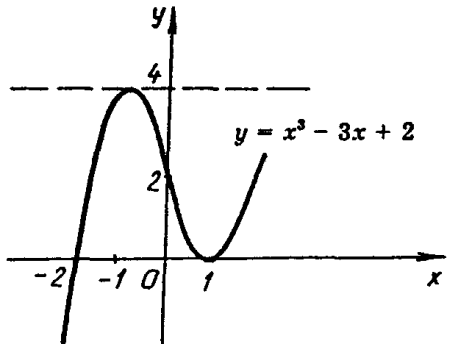


Рисунок 11

График функции $y = x^3 - 3x + 2$

Пример 6. Необходимо найти производную функции: а) $y = tgx$; б) $y = ctgx$.

Решение.

а) Воспользуемся тем, что $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$,

и правилом дифференцирования частного:

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

б) Рассуждая аналогично

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Дифференцирование обратной и логарифмической функций.

1. $y = \log_a x$.

Зададим приращение аргументу $x \to x + \Delta x$, что даст $y \to y + \Delta y$. Так как $y = \log_a x$, а $y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)$, то $\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$.

Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{x}{x}} = \log_a e^{\frac{1}{x}} =$$

$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$, то есть $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

2. $y = \ln x$.

Для того, чтобы вычислить производную, можно использовать предыдущую формулу, в которой $a = e$: $(\ln x)' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$. Значит, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3. $y = a^x$.

Зададим приращение аргументу $x \to x + \Delta x$, что даст $y \to y + \Delta y$. Так как $y = a^x$, а $y + \Delta y = a^{x+\Delta x}$, то $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x \ln a$, то есть $(a^x)' = a^x \ln a$.

Здесь была использована формула для одного из следствий из второго замечательного предела.

4. $y = e^x$.

Для вычисления производной воспользуемся предыдущей формулой, в которой положим $a = e$: $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$. Значит, $(e^x)' = e^x$.

Прежде чем перейти к вычислению производных от обратных тригонометрических функций, рассмотрим вопрос о дифференцировании обратных функций вообще. Для каждого взаимно однозначного отображения существует обратное отображение, то есть если $y = f(x)$, то $x = g(y)$.

Теорема. Если для некоторой функции $y = f(x)$ существует обратная ей $x = g(y)$, которая в точке y имеет производную не равную нулю, то в точке $x = g(y)$ функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ равную $\frac{1}{g'(y)}$, то есть $y'_x = \frac{1}{x'_y} y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Доказательство. Рассмотрим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$. Так как функция $x = g(y)$ имеет производную, то она непрерывна, то есть $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$, откуда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}$. Значит, $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Воспользуемся данной теоремой для вычисления производных обратных тригонометрических функций.

5. $y = arcsin\, x$.

В данном случае обратной функцией будет $x = sin\, y$. Для нее $x'_y = cos\, y$. Отсюда $y'_x = \frac{1}{cos\, y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то есть $(arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. $y = arccos\, x$.

Так как $arccos\,x = \frac{\pi}{2} - arcsin\,x$, то $(arccos\,x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. $y = arctg\,x$.

В данном случае обратной функцией будет $x = tg\,y$. Для нее $x'_y = \frac{1}{cos^2 y}$.

Отсюда $y'_x = cos^2 y = \frac{cos^2 y}{1} = \frac{cos^2 y}{cos^2 y + sin^2 y} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$, то есть $(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

8. $y = arcctg\,x$.

Так как $arcctg\,x = \frac{\pi}{2} - arctg\,x$, то $(arcctg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Производная сложной функции.

Пусть дана функция $y = f(u)$ и при этом $u = \phi(x)$. Тогда исходную функцию можно представить в виде $y = f[\phi(x)]$. Функции такого типа называются сложными. Например, $y = ln(sin\,x)$.

В выражении $y = f(u)$ аргумент u называется промежуточным аргументом. Установим правило дифференцирования сложных функций, так как они охватывают практически все виды существующих функций.

Теорема. Пусть функция $u = \phi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную в соответствующей точке $u = \phi(x)$. Тогда сложная функция $y = f[\phi(x)]$ в точке x также будет иметь производную равную производной функции y по промежуточному аргументу умноженной на производную промежуточного аргумента по x, то есть $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Если функция $y = f(x)$ имеет не один, а два промежуточных аргумента, то есть ее можно представить в виде $y = f(u)$, где $u = \phi(v)$, а $v = \psi(x)$, или $y = f\{\phi[\psi(x)]\}$, то, соответственно, $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$ и так далее.

Теоретический материал для выполнения задания 7 из профильного ЕГЭ по математике.

Физический и геометрический смыслы производной.

Пусть материальная точка движется по прямой так, что ее координата зависит от времени следующим образом: $x = x(t)$.

В таком случае скорость этой точки будет определяться выражением: $v(t) = x'(t)$,

Соответственно ускорение будет найдено по формуле: $a(t) = v'(t)$

Пусть задан график некоторой функции: $y = x(t)$.

Попробуем определить в выбранной точке x_0 касательную в данной точке и вспомним, что касательная – это предельное положение секущей.

Уравнение касательной будет выглядеть следующим образом: $y = kx + b$, где $k = f'(x_0) = tg\alpha$.

Пользуясь этой формулой, с одной стороны, мы можем по самой функции, зная точку, определять угловой коэффициент, с другой – умея определять угловой коэффициент, мы можем находить значение производной в некоторой точке.

Тем самым, зная одну из величин (угловой коэффициент, значение производной в точке или тангенс угла наклона), мы можем находить любую другую.

Основные задачи или сформулированы в виде графика функции с требованием найти значение производной в некоторой точке, или подразумевают нахождение касательной в некоторой точке к данной функции.

Применение производной к исследованию функции.

a) Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$ и требуется ответить на ряд вопросов о поведении этои функции.

b) Пусть дан график производной некоторой функции $f(x)$ и требуется ответить на вопросы о поведении функции $f(x)$.

Для решения всех подобных задач нам нужно будет анализировать график некоторой дифференцируемой и непрерывной функции, заданной на каком-то числовом промежутке.

Предполагая функцию непрерывной и дифференцируемой, воспользуемся следующими утверждениями:

- если производная функции положительная на некотором промежутке, то сама функция возрастает на этом промежутке;
- если производная функции отрицательная на некотором промежутке, то сама функция убывает на этом промежутке;
- если производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет точку минимума;
- если производная меняет знак с плюса на минус, то функция имеет точку максимума.

Например, пользуясь следующими утверждениями, мы можем:

- указывать количество точек минимума или максимума, а также находить сами эти минимумы и максимумы;
- определять наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке
- говорить о том, в каких точках касательная к графику функции обладает теми или иными свойствами.

Теоретический материал для выполнения задания 12 из профильного ЕГЭ по математике.

В данном пункте обычно рассматриваются задачи на определение точек экстремума и нахождения значения функции в точках экстремума.

Для решения подобных задач необходимо знать, что для поиска точек экстремума необходимо решить уравнение $y'(x) = 0$.

Для поиска значения функции в точке экстремума необходимо найти значение $y'(x_0)$, где x_0 и есть точка экстремума.

Раздел второй. Самостоятельная работа.

Определение производной. Задачи, приводящие к понятию производной.

1. Скорость точки в момент времени *t* называют…A…

Выберете предложенный вариант:

a) Мгновенной скоростью

b) Средней скоростью

c) Относительной скоростью

d) Абсолютной скоростью

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

2. Сопоставьте следующие термины с задачами, в которых они использовались.

a) Угловой коэффициент касательной

b) Мгновенная скорость

c) Ускорение

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

Задача о касательной	Задача о скорости	Не использовался

3. Какие задачи рассматривались в данном разделе?

a) Задача о скорости

b) Задача об ускорении

c) Задача о давлении

d) Задача о касательной

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

4. Верно ли следующее утверждение: в обеих задачах речь идет о пределе отношения приращения аргумента к приращению функции.

a) Да

b) Нет

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

5. В задаче о касательной число $k = tg\alpha$ называют $\ldots A \ldots B \ldots$ касательной.

Впишите 2 слова в графу ответов.

Определение производной.

1. В выражении $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\,\Delta x$ мы называем $\ldots A \ldots B \ldots$ в точке x_0.

Выберете предложенный вариант:

a) Приращением

b) Производной

c) Значением функции

d) Аргументом

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

2. Вычислите следующие производные в точке x_0 и расставьте их по убыванию.

a) $(x^{\alpha})', x_0 = 2;$

b) $(2^x)', x_0 = e;$

c) $(\sin x)', x_0 = 0;$

d) $(\lg x)', x_0 = 1000;$

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

3. Дана функция $f(x)$. В каких видах можно записать ее производную в точке x_0?

a) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

b) $f'(x)$

c) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

d) Все вышеперечисленное верно

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

4. Соотнесите функции и их производные:

a) $(x^{\alpha})'$

b) $(a^{x})'$

c) $(kx + b)'$

d) $(C)'$

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

x	$\alpha x^{\alpha-1}$	0	$a^x \ln x$

5. Какое из следующих утверждений неверное:

a) У функции $y = sinx$ нет производной;

b) Производную можно записать в виде предела отношения приращения функции к приращению аргумента;

c) Производная может равняться нулю;

d) Все утверждения верны.

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

Вычисление производных. Формулы дифференцирования.

1. Формулы дифференцирования нужны для отыскания …A… конкретных функций.

a) Первообразных

b) Производных

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

2. Соотнесите функции и их производные:

a) $y = 5$

b) $y = 4x + 1$

c) $y = x^3$

d) $y = \sqrt{x}$

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

4	$3x^2$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{x}$

3. Найдите значение производной функции $y = \sqrt[5]{x^2}$ в точке $x_0 = 32$:

a) $\frac{1}{20}$

b) 4

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

4. Соотнесите функции и уравнения их касательных в точке $x_0 = 4$:

a) $y = 5x + 7$

b) $y = \frac{1}{x}$

c) $y = \sqrt{x}$

d) $y = x^2$

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

$-\frac{x}{16} + \frac{1}{2}$	$5x + 7$	$8x - 16$	$\frac{x}{4} + 1$

Правила дифференцирования.

1. Выберете неверное утверждение:

a) Производная суммы равна сумме производных

b) Постоянный множитель нельзя вынести за знак производной

c) Производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых; первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции

d) Все пункты неверны

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

2. Найдите производную функции $y = x^7 + 3\sqrt{x}$.

a) $7x^6 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $x^7 + 3\sqrt{x}$

c) $7x^2 + \frac{3\sqrt{x}}{2}$

d) $8x^2 + 3x \cdot \sqrt{x}$

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

3. Соотнесите функции и их производные в точке $x_0 = 9$.

a) $7x^6 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $x^7 + 3\sqrt{x}$

c) $7x^2 + \frac{3\sqrt{x}}{2}$

d) $8x^2 + 3x \cdot \sqrt{x}$

Впишите букву своего вариант ответа в таблицу:

$7x^6 + 3/2x^{\frac{1}{2}}$	$14x + 3/4\sqrt{x}$	$42x^5 - 3\ /\ 4x^{\frac{3}{2}}$	$16x + 9\sqrt{x}\ /\ 2$

Дифференцирование обратной и логарифмической функции.

1. Найдите производные следующих функций:

а) $y = \frac{(arcsin\, x)\cdot\sqrt{x}}{log_7 x}$

b) $y = \frac{\log_2 x - 2^x}{x^2}$

Решение запишите на отдельном листе и сдайте преподавателю на следующем занятии.

Производная сложной функции.

Вашему вниманию представлена дифференцированная работа для самостоятельного закрепления материала по теме «Производная сложной функции».

Уровень А

Необходимо выполнить предложенное задание, после выполнения отметить правильный вариант ответа.

1. Найдите производную функции в точке x_0:

$f(x) = \frac{2}{x} + 1; x_0 = -1$

а) 2 б) -2 в) -1 г) 3

2. Найдите производную функции $f(x) = 2x^2 - x + 1$:

а) $4x - 1$ б) $2x - 1$ в) $2x^2 + 1$ г) $4x + 1$

3. Найдите производную функции $f(x) = x\, sin\, x$:

а) $x \sin(x) - \cos(x)$ б) $x \sin(x) + \cos(x)$

в) $\sin(x) - x \cos(x)$ г) $x \cos(x) + \sin(x)$

Уровень В

В ответе укажите номер формулы и букву, под которой расположен соответствующий график функции.

Укажите пары: «функция – график производной этой функции».

График функции / $f(x)$	а	б	в	г	д
1. $y = 2x - x^3$					
2. $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x$					
3. $y = (\frac{x}{2} + \frac{1}{2})(3 - x)$					
4. $y = -2x + \frac{1}{2}x^2$					

Уровень С

Выполните задание, в номерах 1 и 2 укажите правильный вариант ответа, в номере 3 запишите свой ответ самостоятельно.

1. Найдите производную функции:

$f(x) = cos\,4\,x\,cos\,3\,x + sin\,4\,x\,sin\,3\,x - x$

а) $sin(x) - 1$ б) $cos(x) + 1$ в) $-\ sin(x) + 1$ г) $-\ sin(x) - 1$

2. Найдите производную функции $f(x) = (x+1)^2(x-1)$:

а) $3x^2 + 2x - 1$ б) $2x^3 + 3x + 1$ в) $3x^2 - 2x + 1$ г) $3x^2 + 2x + 1$

3. По данной производной определите исходную функцию и запишите свой ответ: $y' = 4x + cosx$.

Практический материал для выполнения задания 7 из профильного ЕГЭ по математике. Физический смысл производной.

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время. в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

2. Материальная точка движется прямолинейно по по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 2$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 6$ с.

3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -x^4 + 6x^3 + 5t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 6$ с.

4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = x^2 - 13t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$ (где x- расстояние от точки отсчета в метрах, t- время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с.

6. Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График (рисунок 12) показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем.

На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s.

Необходимо определить сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль.

Заметьте, что начало и конец движения учитывать не нужно.

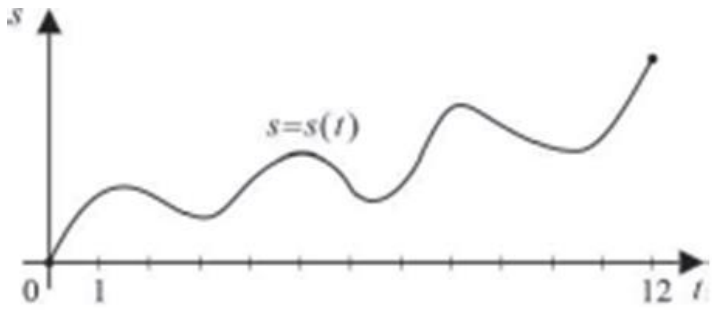


Рисунок 12

График движения материальной точки

Геометрический смысл производной, касательная.

1. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = -\frac{5}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

2. Тангенс угла наклона касательной к параболе $y = ax^2 + 3x - 7$ в точке $x = -2$ равен 15. Найдите a.

3. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = 2x^2 - \ln x$ параллельна прямой $y = 7{,}5x + 11$.

4. Касательная к графику функции имеет вид $y = kx + b$.

Найдите значение b, если касательная проведена к кривой $y = \sqrt{3x - 2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3; 2)$. На рисунке изображен график производной этой функции. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ имеет наибольший угловой коэффициент (рисунок 13).

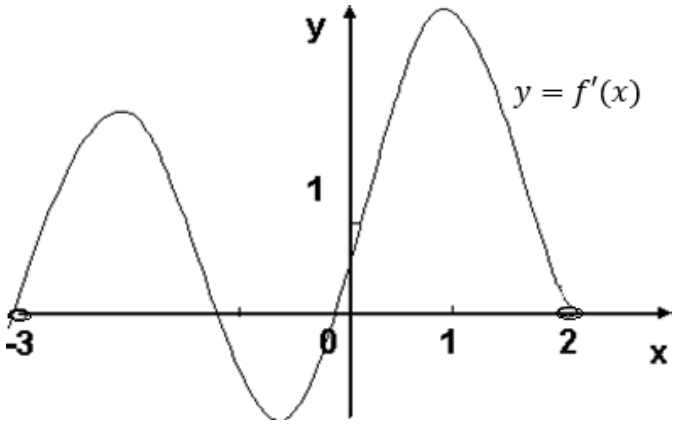


Рисунок 13

График производной функции $y = f'(x)$

6. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 4)$. На рисунке изображен график производнои этои функции. К графику функции провели касательные во всех точках, абсциссы в которых целые числа. Укажите количество точек графика функции, в которых проведенные касательные имеют положительный угловой коэффициент (рисунок 14).

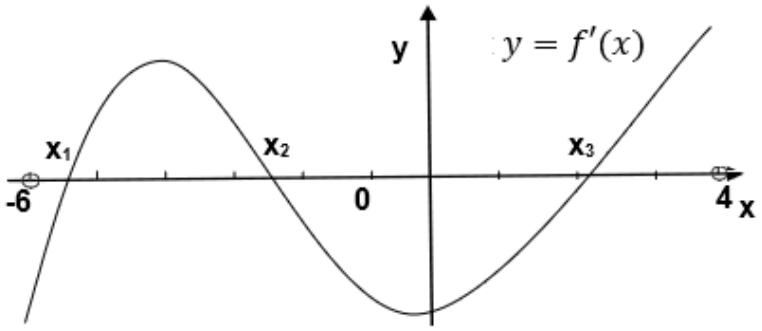


Рисунок 14

График производной функции $y = f'(x)$

7. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 5)$. На рисунке 15 изображен график производной этой функции. Найдите количество точек графика функции, в которых касательные наклонены под углом 120° к положительному направлению оси абсцисс.

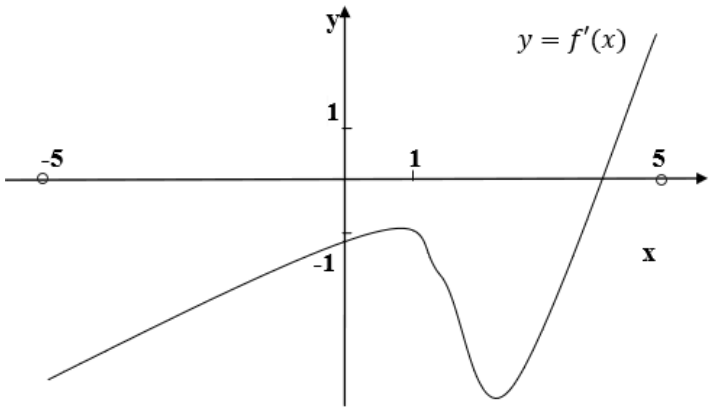


Рисунок 15

График производной функции $y = f(x)$

Практический материал для выполнения задания 12 из профильного ЕГЭ по математике.

Требуется найти наименьшее и наибольшее значение данной функции на указанном отрезке:

1.	$y = x^3 - 6x^2 + 9$ на $[-1; 2]$
2.	$y = (x-2)^2(x+1)^3$ на $[0; 3]$
3.	$y = x - 2\ln x$ на $\left[\frac{3}{2}; b\right]$
4.	$y = 2\sin 2x + \cos 4x$ на $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$
5.	$y = tgx + ctg2x$ на $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$
6.	$y = x^3 - 2x\lvert x-2\rvert$ на $[0; 3]$
7.	$y = \lvert x^2 + x\rvert$ на $[-2; 1]$
8.	$y = \sqrt{-x^3 - x^2 - x}$ на $[-2; 0]$
9.	$y = b^{-x}(x^2 + x - 5)$ на $[-4; 4]$
10.	$y = \frac{x^4+1}{x^2+1}$ на $[-1; 1]$

Раздел третий. Контрольно-измерительные материалы.

Предлагаем вам выполнить контрольную работу по изученному материалу.

Решение необходимо сдать в отдельной тетради до указанного преподавателем срока.

Задание распределено между двумя вариантами, где левый столбец – 1 вариант, а правый – 2 вариант.

<u>Уровень А</u>

1. Найти производные функций:

$0{,}4x^5 - 6\sqrt{x} + 3\mathrm{e}^x$	$0{,}5x^4 + 4 \,/\, x - 3\,ln\,x$
$2\,cos\,x + \frac{1}{3}sin\,x - ln\,x + 5$	$3\,sin\,x - \frac{1}{2}cos\,x + 2\mathrm{e}^x - 3$
$\sqrt[3]{6x+1} - 8\sin(x \,/\, 4)$	$\sqrt{4x-1} + 4\cos(x \,/\, 2)$

$2x^2 \cdot (x-3)$	$3x \cdot (x^2+4)$
$\frac{x-3}{x+2}$	$\frac{x-2}{x+3}$

2. Решить уравнение $f'(x) = 0$, если:

f (x) = $\frac{1}{2}$x + cos(x – $\frac{\pi}{3}$)	f (x) = – $\frac{1}{2}$x + sin(x – $\frac{\pi}{6}$)
f (x) = 2x^3 – 3x2 + 1	f (x) = x^3 + 1,5x2 – 1

3. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

f (x) = x^2 + 2x, x_0 = – 2	f (x) = x^2 – 3x, x_0 = 3

4. Найти f'(x) и f'(0,25), если

$f(x) = (1+2x) \cdot (2x-1)$	$f(x) = (3+2x) \cdot (2x-3)$

5. В какой точке графика функции $y = \sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом α?

$\alpha = 60$	$\alpha = 30$

6. Найдите острый угол, который образует с осью ординат касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, если:

$f(x) = \sqrt{x^2+2}, x = 1$	$f(x) = \sqrt{x^2+2}, x = 3$

<u>Уровень В</u>

7. Найти производные функций:

$cos^2 3x$	$sin^2 \frac{x}{2}$
$\frac{sin\, x}{2x+1}$	$\frac{cos\, x}{1-x}$
$(x+3)^2 \cdot (x-4)^2$	$(x-3)^2 \cdot (x+4)^2$
$ln \frac{x^2+3x}{2-3x^2}$	$ln \frac{2-3x^2}{3x+x^2}$
$(sin\, x)^{\frac{1}{2}}$	$cos(1+e^x)$
$ln(x^2+3x)$	$cos^3 x$

8. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$, параллельной прямой $y = 6x$.

9. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{2x+3}$, проходящей через точку $(-2; 0)$.

10. Прямая касается гиперболы $y = \frac{4}{x}$ в точке $(1; 4)$. Найти площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат.

Уровень С

11. Написать уравнение общих касательных к графикам функций.

А) $y = x^2 + x$ и $y = x^2 - 3x$;

Б) $y = x^2$ и $y = x^3$.

12. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(0{,}5; 2)$, касающейся графика $y = -0{,}5x^2 + 2$ и пересекающей в двух точках график функции $y = \sqrt{4 - x^2}$.

Заключение

В ходе проведенной работы получены следующие основные результаты:

1. Поскольку анализ научной и учебно-методической литературы по проблеме исследования, показал, что существует проблема недостаточного развития умений критически мыслить у учащихся в процессе преподавания конкретного учебного предмета, то необходима целенаправленная специальная работа по их формированию.

2. Эффективным средством формирования у студентов умений критически мыслить на занятиях по математике выступает специально организованная деятельность, соответствующая структурной взаимосвязи умений критически мыслить и математической задачи.

3. Выделены уровни сформированности у учащихся умений критически мыслить.

4. Разработан фрагмент рабочей тетради по теме «Производная» в школьном курсе математики.

5. Составлена проверочная система задач по теме «Производная» для учащихся 11 классов общеобразовательных школ.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что поставленные задачи исследования в основе своей решены, цель работы достигнута.

Список литературы

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень / Ш. А. Алимов [и др.]; 7-е изд., М.: Просвещение, 2019. 464 с.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Колмогоров А. Н. [и др.]; под ред. А. Н. Колмогорова. 26-е изд., М.: Просвещение, 2018. 384 с. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. ср. шк. 2-е изд., М.: Просвещение, 1992. 351 с.
3. Балл Г.А. О психологическом содержании понятия «задача» // Вопросы психологии. 1970. №6. С. 17-22.
4. Башмаков М. И. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. ср. шк. 2-е изд., М.: Просвещение, 1992. 351 с.
5. Богомолов Н. В. Практические занятия по математике: учебное пособие для средних профессиональных учебных заведений. 9-е изд., М.: Высшая школа, 2008. 495 с.
6. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох [и др.]; сост. В. И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. 416 с.
7. Вся математика в одном месте. URL: http://www.allmath.ru. (Дата обращения 14.02.2014).
8. Гнеденко Б. В. Развитие мышления и речи при изучении математики // Математика в школе. 1991. № 4. С. 3-9.
9. Гусев В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: Вербум-М, Академия, 2012. 432 с.
10. Журавлева Е. Г. О формировании приемов критического мышления у студентов физико-математических факультетов педагогических ВУЗов / Е. Г. Журавлева // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы,

перспективы материалы всеросс. науч –практ. конф. - Пенза ГТГПУ, 2007. С. 238-241.

11. Журавлева Е. Г. Формирование критического мышления учащихся на уроках математики / Е. Г. Журавлева // Образование концепции, методики, технологии сб. тр. по материалам Ш междунар. науч. конф. «Математика Образование Культура», г. Тольятти, 2007. С. 405 – 410.

12. Матюшкин А. М. Мышление, обучение, творчество. М.: Изд-во Моск. психол.-соц. ин-та, 2003. 719 с.

13. Методика преподавания математики. URL: http://www.methmath.chat.ru. (Дата обращения 15.02.2014).

14. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч.1: учебник для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый уровень). 14-е изд., М.: Мнемозина. 2013. 400 с.

15. Сайт Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) URL: http://www.mccme.ru. (Дата обращения 10.02.2014).

16. Сборник задач по математике: учеб. пособие / В. А. Подольский [и др.]; М.: Высшая школа. 2005. 495 с.

17. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. Ч. 1: математические задачи как средство обучения и развития учащихся. М.: Просвещение, 1977. 110 с.

18. Крупич В. И. Теоретические основы обучения решению школьников математических задач: дис. д-ра. пед. наук. М.: Прометей, 1995. 395 с.

19. Фридман Л. М. Сюжетные задачи по математике: история, теория, методика.: учеб. пособие для учителей и студентов пед. вузов и колледжей, М.: Шк. Пресса, 2002. 208 с.

Приложение

Проверочная система задач по теме «Производная» для учащихся 11 классов общеобразовательных школ.

Обязательная часть.

Задача 1. Верны ли следующие высказывания:

1. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).
2. Производная от константы равна 1.
3. $(f - g)' = f' - g'$
4. $(f + g)' = f' + g'$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g+fg'}{g^2}$

Задача 2. Найти производную функции:

1. $y = x^3 + cosx - lnx$
2. $y = x^5 \cdot cosx$
3. $y = \frac{4x-1}{3x+5}$
4. $y = \log_a x$
5. $y = a^3$

Задача 3. Найдите ошибку в формулировке теоремы:

Пусть функция $g(x)$ имеет производную в точке x, а функция $f(z)$ имеет производную в точке $z = g(x)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x, причем $F'(x) = f'(z) \cdot g(x)$.

Задача 4. Найти производную сложной функции:

a) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 17}$

b) $b)\ y = tg^2x$

Задача 5. Вычислите значение производной функции $f(x) = x^2 - 3x + e^x + \frac{3-x}{x+2}$ при $x = 0$.

Задача 6. Найдите и исправьте ошибку в решении задачи, если она имеет место там быть.

Найти производную функции $f(x) = \sqrt{cosx}$.

Решение По правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$f'(x) = \frac{(cosx)'}{\sqrt{cosx}} = \frac{sinx}{\sqrt{cosx}}$.

Задача 7. Необходимо вывести уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой x_0.

Задача 8. Материальная точка движется прямолинейно по по закону $x(t) = t^4 - 2t^2$ (где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 3$ с.

Задача 9. Согласны ли вы со следующими утверждениями:

1. Наименьшее значение функции достигается либо на одном из концов данного отрезка, либо в такой внутренней точке, которая является точкой максимума;
2. Наибольшее значение функции достигается либо на одном из концов данного отрезка, либо в такой внутренней точке, которая является точкой минимума?

Задача 10. Найдите ошибку в решении задачи.

Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3sinx + 5$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

Решение:

1. Функция $y = 15x - 3sinx + 5$ определена при всех действительных значениях x.
2. Производная $y' = 15 - 3cosx$.

$15 - 3cosx = 0$.

Очевидно, что это уравнение не имеет решений, и производная при всех значениях x положительна. Следовательно, функция возрастает и принимает наибольшее значение в левом конце промежутка, то есть при $x = -\frac{\pi}{2}$.

3. $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{11\pi}{2}$.

Дополнительная часть.

Задача 11. В какой точке касательная к графику функции $y = 3x^2 - 12x + 11$ параллельна оси абсцисс?

Задача 12. Исследовать на максимум и минимум функцию $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

Задание 13. Верно ли построен график функции $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$ (рисунок 1)? Обоснуйте свой ответ.

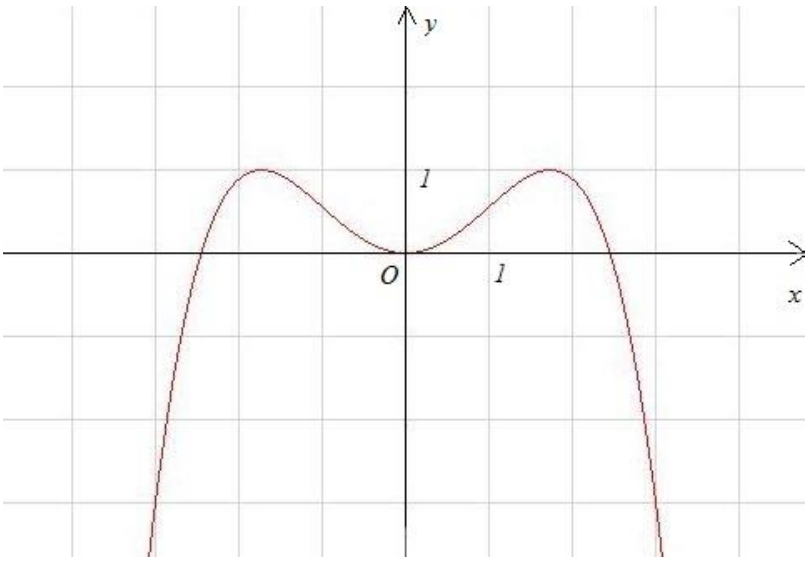


Рисунок 1

График функции $y = f(x)$

Задание 14. Касательная к графику функции $y=(x-1)^2x$ параллельна оси 0x, но не совпадает с ней. Найдите координаты точки касания.

a	b	c	d
$\left(\frac{1}{3};\frac{4}{27}\right)$	$\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{27}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{27}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{2}{\sqrt{27}}\right)$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» августа 2019 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Жирновой Даниэлы Константиновны

(ФИО полностью)

Тема работы **«Особенности изучения темы «Производная» в старших классах общеобразовательной школы при формировании критического мышления»**

Утверждена приказом по Университету от «29 10» 2019 г. № 1183а/0

Срок сдачи студентом законченной работы «23» июня 2020 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение методической литературы по теме исследования.	Октябрь-ноябрь, 2019	Выполнено
2.	Анализ школьных учебников.	Декабрь, 2019	Выполнено
3.	Рассмотреть особенности формирования критического мышления на уроках математики в старших классах	Январь, 2020	Выполнено
4.	Математические задачи как средство формирования критического мышления	Февраль, 2020	Выполнено
5.	Разработка рабочей тетради по теме «Производная»	Март, 2020	Выполнено
6.	Оформление текста работы.	Март-Апрель, 2020	Выполнено
7.	Подготовка презентации и выступления.	Май-июнь, 2020	Выполнено

Дата выдачи задания «23» сентября 2019 г.

Руководитель _____ Журавлева Е.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
_____ Жирнова Д.К.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного
университета А.Д. Гулякову
Студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Жирновой Даниэлы
Константиновны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Жирнова Даниэла Константиновна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Особенности изучения темы «Производная» в старших классах общеобразовательной школы при формировании критического мышления», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

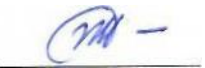
Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования– программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись

25.06.2020 г.
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 26.06.2020 г.
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР  Е.Г. Журавлева
подпись

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»

выпускной квалификационной работы на тему: «**Особенности изучения темы «Производная» в старших классах общеобразовательной школы при формировании критического мышления**»

студентки 4 курса **Жирновой Даниэлы Константиновны** направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Журавлева Екатерина Геннадьевна

АНТИПЛАГИАТ
ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: Журавлёва Екатерина Геннадьевна
guravleva_eg@mail.ru / ID: 1559
Проверяющий: Журавлёва Екатерина Геннадьевна (guravleva_eg@mail.ru / ID: 1559)
Организация: Пензенский государственный университет

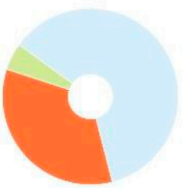
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- http://pnzgu.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 51
Начало загрузки: 26.06.2020 21:36:59
Длительность загрузки: 00:00:20
Имя исходного файла: -72568571.docx
Название документа: Жирнова Д.К.
Размер текста: 1 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 73894
Слов в тексте: 10029
Число предложений: 606

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 26.06.2020 21:37:19
Длительность проверки: 00:01:29
Комментарии: не указано
Модули поиска: Модуль поиска общеупотребительных выражений, Модуль поиска перефразирований eLIBRARY.RU, Коллекция eLIBRARY.RU, Модуль поиска перефразирований Интернет, Коллекция РГБ, Цитирование, Модуль поиска "Интернет Плюс", Сводная коллекция ЭБС, Модуль поиска переводных заимствований, Кольцо вузов, Модуль выделения библиографических записей, Модуль поиска ИПС "Адилет", Модуль поиска переводных заимствований по elibrary (EnRu), Модуль поиска переводных заимствований по интернет (EnRu), Коллекция ГАРАНТ, Коллекция Медицина, Диссертации и авторефераты НББ, Коллекция Патенты



ЗАИМСТВОВАНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
33,77%	0%	4,88%	61,35%

Дата 26 июня 2020г. _____ (Журавлева Е. Г.)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Особенности изучения темы «Производная» в старших классах общеобразовательной школы при формировании критического мышления»
студентки Жирновой Даниэлы Константиновны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль «Математика», гр. 16ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Жирновой Д.К. «Особенности изучения темы «Производная» в старших классах общеобразовательной школы при формировании критического мышления» состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы.

Во введении отмечается актуальность темы исследования и обозначаются степень ее разработанности, а также цели и задачи исследования, его теоретическая и практическая основа.

В первой главе рассматриваются теоретические вопросы по формированию критического мышления на уроках математики в старших классах. Проведен анализ школьных учебников, выделены особенности формирования критического мышления на уроках математики. Во второй главе выделены методические аспекты по изучению темы «Производная» в старших классах общеобразовательной школы при формировании критического мышления. В частности, выделены математические задачи, способствующие формированию умений критически мыслить, разработана рабочая тетрадь для учащихся старших классов по теме работы. В заключении формулируются основные выводы, к которым пришел автор в ходе исследования.

Практическая значимость результатов полученных в ходе выполнения работы состоит в том, что разработанное методическое обеспечение может быть использовано для формирования критического мышления у учащихся 10-11 классов в практической работе учителями математики, студентами старших курсов математических специальностей при прохождении производственной практики (педагогической), а также учащимися при подготовке к ЕГЭ.

Выпускная квалификационная работа Жирновой Д.К. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным работам. Работа носит творческий характер и заслуживает оценки "отлично".

Руководитель, к.п.н, доцент кафедры
«Математическое образование» Е.Г. Журавлева