

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Изучение элементов теории вероятностей в школе»

Студент	<u>Базаева 15.06.23</u> (подпись, дата)	<u>Базаева Евгения Сергеевна</u> (ФИО полностью)
Руководитель	<u>Никитина 15.06.23</u> (подпись, дата)	<u>Никитина О.Г.</u> (фамилия, инициалы)
Нормоконтролёр	<u>Журавлева 29.06.23</u> (подпись, дата)	<u>Журавлева Е.Г.</u> (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 26.06.23 № 14)

Заведующий кафедрой	<u>Паньженский 26.06.23</u> (подпись, дата)	<u>Паньженский В.И.</u> (фамилия, инициалы)
---------------------	--	--

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 13.04.23 № 1)

Секретарь ГЭК	<u>Журавлева 13.04.23</u> (подпись, дата)	<u>Журавлева Е.Г.</u> (фамилия, инициалы)
---------------	--	--

Пенза 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В 5-11 КЛАССАХ.....	5
1.1 Цели обучения элементам теории вероятностей в школьном курсе математики.....	5
1.2 Подходы к использованию элементов теории вероятностей в школьном курсе математики. Анализ учебных пособий по математике	11
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В 5-11 КЛАССАХ	19
2.1 Методика изучения элементов математической статистики в 5-9 классах	19
2.2 Методика изучения элементов теории вероятностей в 7-11 классах.....	29
2.3 Методика изучения элементов комбинаторики в 7-11 классах.....	35
ГЛАВА 3. ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ	41
3.1 Основные цели организации внеклассной работы по математике в школе	41
3.2 Факультативный курс по математике для 9 класса «Элементы теории вероятностей»	45
3.3 Апробация разработанного факультативного курса по теории вероятностей	64
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	68
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	70
ПРИЛОЖЕНИЯ	72

ВВЕДЕНИЕ

Изучение элементов статистики и теории вероятностей начинается в 7 классе. Включение в курс алгебры начальных сведений из статистики и теории вероятностей ориентировано на формирование у учащихся таких важных в современном обществе умений, как представление и толкование итогов результатов статистических исследований, обширно показанных в средствах массовой информации. В современных школьных учебниках понятие вероятности случайного события вводится с опорой на жизненный опыт и интуицию. Учащиеся должны научиться проводить исследования и подвергать обработке различную, порой противоречивую информацию, принимать аргументированные решения в ситуациях со случайными исходами, производить оценку степени риска и шансов на успех. Б.В. Гнеденко (советский математик, специалист по теории вероятностей, математической статистике, вероятностным и статистическим методам) говорил о том, что случайный характер многих явлений в реальности оказывается за границами интереса учащихся. Поэтому следует познакомить их со статистическими законами, раскрывающими многогранные связи бытия предметов и явлений.

Актуальность исследования. Комбинаторные задачи на различных олимпиадах встречаются достаточно часто и неизменно вызывают затруднения у школьников. Кроме того, всем учащимся девятых классов предстоит сдавать экзамен по математике. А среди предлагаемых заданий есть и такие, в которых необходимо отыскать вероятность некоторых событий. Так как изучение теории вероятности в школьный курс было введено не так давно, имеются определенные трудности с реализацией данного материала. В соответствии с подходами, изложенными в подавляющем большинстве литературы, считается, что основным при изучении данной темы должен стать практический опыт учащихся, то есть, решение задач.

Проблема исследования заключается в том, что для того, чтобы лучше познакомить учащихся с элементами теории вероятности, представить четкую,

ясную, и запоминающуюся картину данного раздела, необходимо организовать дополнительные занятия.

Цель исследования – разработать факультативные занятия для повторения и углубления полученных на уроках знаний по теории вероятности и актуализацией материала перед ОГЭ.

Задачи исследования.

1. Выявить цели обучения элементам теории вероятностей в школьном курсе математики.
2. Рассмотреть подходы к использованию элементов теории вероятности в школьном курсе математики, проанализировав учебные пособия.
3. Изучить методические аспекты обучения учащихся элементам теории вероятностей в 5-11 классах.
4. Разработать факультативный курс по математике для 9 класса «Элементы теории вероятностей».
5. Провести апробацию разработанного факультативного курса по теории вероятностей.

Объект исследования – изучение теории вероятностей в основной и средней школе.

Предмет исследования - процесс обучения элементам теории вероятностей на факультативных занятиях в общеобразовательной школе.

Практическая значимость ВКР состоит в разработке занятий, которые могут быть использованы при проведении факультативных уроков математики и при подготовке к ОГЭ в общеобразовательной школе.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В 5-11 КЛАССАХ

1.1 Цели обучения элементам теории вероятностей в школьном курсе математики

Чтобы адекватно функционировать в обществе, гражданам необходимо преодолеть свое детерминированное мышление и принять существование фундаментальной случайности в природе. В то же время им необходимо овладеть стратегиями и способами рассуждений, которые помогают им принимать адекватные решения в повседневных и профессиональных ситуациях, когда есть шанс.

Эта потребность в вероятностной грамотности была признана органами образования во многих странах путем включения вероятности в учебные программы на разных уровнях образования и в подготовку учителей. Однако включение темы в учебную программу не гарантирует автоматически ее правильного преподавания и изучения; специфические характеристики вероятности, такие как многогранный взгляд на вероятность или отсутствие обратимости случайных экспериментов, обычно не встречаются в других областях и создают особые проблемы для учителей и учащихся.

Исследования в области вероятностного образования пытаются ответить на вышеуказанные проблемы, и в настоящее время они хорошо зарекомендовали себя.

Период с конца 70-х гг. XX в. по настоящее время может характеризоваться широким внедрением в сферу деятельности человека такого важного раздела прикладной математики, как стохастика. Эта наука, соединяющая элементы теории вероятностей и математической статистики, нашла применение практически во всех областях знания (физика, химия, биология, геология, экономика, лингвистика, психология, социология и т.д.).

Теория вероятностей, зародившаяся в трудах математиков XVII—XVIII вв. П. Лапласа, Б. Паскаля, Я. Бернулли и др., является математической основой статистики — науки, без применения которой уже не мыслится принятие сколько-нибудь значимых решений по самым разнообразным проблемам в социокультурной, образовательной и научно-производственной сферах человеческой деятельности. Этим обусловлена актуальность изучения основ теории вероятностей и математической статистики в школьном курсе математики.

Реформирование современной школы приводит к изменению содержания школьного математического образования и к необходимости выделения в методике обучения математике вероятностно-статистической содержательно-методической линии.

Анализируя содержание отечественного школьного математического образования за последние полвека, отметим, что элементы комбинаторики были включены в содержание учебника А. Н. Колмогорова в период реформы образования 60-х гг. XX в., но ненадолго. Элементы теории вероятностей рассматривались в классах с углубленным изучением математики, но устойчивой традиции их изучения и соответствующего методического опыта не было. Вопросы математической статистики не рассматривались вовсе, если, конечно, не относить к ним изучение графиков и диаграмм, а также решение задач экономического содержания на основе пятилетних планов развития народного хозяйства СССР. Справедливости ради отметим, что по этой теме существовали факультативные курсы и качественные пособия для школьников, среди которых отдельно выделим «Факультативный курс по математике. Теория вероятностей» В. С. Лютикаса, выдержавший несколько изданий. Лишь на постсоветском этапе развития математического образования встал вопрос о систематическом изучении в школе элементов теории вероятностей и математической статистики [16].

Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) предусматривает в основной и старшей школе изучение элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей. В соответствии с ним в основной школе рассматриваются элементы комбинаторики: примеры решения комбинаторных задач на основе перебора вариантов, правило умножения. К элементам теории вероятностей относятся: частота события, вероятность, равновозможные события, подсчет их вероятности, представления о геометрической вероятности. К элементам математической статистики ФГОС относит представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков, средние значения результатов измерений. Также предусмотрено знакомство с понятием и примерами случайных событий. В результате ученики должны будут научиться работать с графиками и диаграммами, вычислять средние значения результатов измерений, решать комбинаторные задачи на основе систематического перебора вариантов и с использованием правила умножения, находить частоту и вероятность случайных событий в простейших случаях [17].

Введение любого учебного материала требует учета как индивидуальных, личностных, так и возрастных особенностей учащихся. Проблема введения вероятностно-статистической линии заключается в том, что в начальной школе вводить соответствующие понятия не представляется возможным из-за отсутствия знания необходимой математической базы, например, такой, как обыкновенные дроби. Введение же элементов комбинаторики и теории вероятностей в старших классах сопровождается формализацией знаний, что усложняет восприятие и понимание материала школьниками. Таким образом, причиной трудностей в понимании комбинаторики и теории вероятностей становится интеллектуальная неготовность учащихся к восприятию материала в форме, которую предлагают традиционно принятые методики.

Исследования психологов на предмет развития комбинаторно-вероятностного мышления у ребенка, например, таких, как Ж. Пиаже и Б. Инельдер, говорят о том, что использовать математические комбинаторные

операции и производить анализ результата возможно за счет наличия определенных логических структур, формирующихся к третьей (последней) стадии интеллектуального развития ребенка - стадии формальных операций (11-15 лет). Именно к этому возрасту, по мнению Ж. Пиаже, зарождается необходимый тип мышления, «когда субъект становится способен рассуждать гипотечно-дедуктивно, т. е. на основе одних общих посылок, без необходимой связи с реальностью или собственными убеждениями ... отдаваясь необходимости самого рассуждения в силу одной его формы» [12].

Б. Инельдер, в свою очередь, пишет: «... возможно, именно позднее появление [логических - прим.] операций и объясняет постепенный, длительный характер формирования способности к пониманию случайности и вероятности ... В течение периода, когда появляются формальные и ... комбинаторные операции, подросток приобретает способность оценивать общее число возможностей и осознавать отношения между благоприятными случаями и всей совокупностью, рассматриваемой как сумма сочетаний всех возможных случаев. Оценивание вероятности, таким образом, является результатом сравнения совместимых обратимых событий, с одной стороны, и необратимых случайных событий, с другой, в то время как лишь малая часть универсума возможных событий реализуется в действительности» [7].

Таким образом, по мнению Пиаже и Инельдер, осмысленный комбинаторный и вероятностный анализ возможен только у подростков, о чем можно судить по способности к анализу имеющегося материала, систематизации данных, осмысленному и полному рассмотрению и учету всей совокупности необходимых комбинаций [7, 12].

Многочисленные психолого-педагогические исследования подтверждают, что данный возраст наиболее благоприятен для формирования у ребенка начальных комбинаторно-вероятностных представлений.

Несмотря на факт появления у подростков необходимых для комбинаторно-вероятностного мышления структур, вне специализированного

обучения комбинаторике и теории вероятностей человек не способен достигнуть определенного уровня владения комбинаторными и вероятностными приемами и понятиями в силу сохранения бытового, житейского мышления (пример: вероятность отождествляется со случайностью).

Таким образом, обозначенный возраст - 11-15 лет, - соответствующий 5-9 классу, является наиболее подходящим для введения и последующего изучения комбинаторики и теории вероятностей с постепенной формализации получаемых учащимися знаний. Исходя из этого, можно сделать вывод, что психологические особенности учащихся старших классов тем более позволяют освоить (либо повторить и закрепить) элементы комбинаторики и теории вероятностей с учетом имеющихся у обучающихся знаний по соответствующему материалу.

В старшей школе в рамках вероятностно-статистической линии предусматривается знакомство с формулами числа перестановок, сочетаний и размещений, решение комбинаторных задач, изучение формулы бинома Ньютона и свойств биномиальных коэффициентов, рассмотрение элементарных и сложных событий, подсчет вероятности суммы событий и противоположного события, решение практических задач на основе вероятностных методов.

Исходя из сказанного выше, основные цели изучения элементов теории вероятностей и математической статистики могут быть сформулированы следующим образом:

- знакомство с элементами теории вероятностей и математической статистики как адекватным средством описания явлений реального мира путем построения и изучения их стохастических моделей;
- развитие навыков вероятностно-статистического аспекта «прикладного» мышления при решении задач по теории вероятностей и математической статистике;

- повышение уровня математической культуры учащихся на основе применения аппарата теории вероятностей в процессе обучения;
- подготовка к продолжению изучения этой линии в высшей школе.

Следует заметить, что математический аппарат теории вероятностей базируется на элементарных математических знаниях и опыте деятельности, которые должны быть у учеников сформированы. К этому моменту они умеют производить арифметические операции над действительными числами, осмысленно используют функциональную символику, имеют представление об элементарных геометрических объектах и оперируют с ними. Кроме того, в соответствии со стандартом они владеют определенными знаниями о множествах. Поэтому теория вероятностей может рассматриваться как раздел математики, при изучении которого ученики имеют возможность увидеть конкретные применения полученных ими математических знаний при изучении прикладной теории, весьма важной для практической деятельности человека.

В действующих учебниках математики для основной и старшей школы четко просматриваются два подхода к изложению материала. Первый — крупноблочный (почти весь материал по теме излагается в одном учебнике, чаще в 9-м классе), как, например, в линии учебников Ю. П. Макарычева или у Ю. М. Колягина, где все элементы статистики, в том числе и меры центральной тенденции (мода, медиана, средние) и меры изменчивости (размах, отклонение, дисперсия), сосредоточены в учебнике 9-го класса [8]. Второй — распределение материала по классам, начиная с курса математики 5-го класса (линии учебников А. Г. Мордковича, Г. К. и О. В. Муравиных) [10]. Нередко содержание материала в учебниках одного коллектива в разных классах пересекается. Один и тот же материал может быть представлен в различных классах у разных авторов. Например, формулы комбинаторики у А. Г. Мордковича вводятся в старшей школе, а у Г. К. и О. В. Муравиных — в 7-м классе. Поэтому уровень математической абстракции изучаемого материала

темы «Элементы в теории вероятностей и математической статистики» различен.

В связи со сказанным выше, не адресуясь к конкретным учебникам и к конкретным классам, мы сформулируем общие методические рекомендации по изучению основных понятий и утверждений теории вероятностей и математической статистики.

1.2 Подходы к использованию элементов теории вероятностей в школьном курсе математики. Анализ учебных пособий по математике

Проведем анализ введения темы «Теория вероятностей» в школьных учебниках, для того, чтобы иметь представление об уровне знаний и о содержании базы школьников. Основываясь на полученные знания, можно будет скорректировать содержание факультативных занятий по данной теме, что повысит их эффективность.

Рассмотрим изложение элементов теории вероятностей в учебниках нескольких авторов.

1. «Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей» 9 класс. Автор – Макарычев Ю.Н. [8].

Данное учебное пособие предназначено для учащихся 7-9 классов и дополняет учебники: Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова С.Б. «Алгебра 7», «Алгебра 8», «Алгебра 9», под редакцией Теляковского С.А.

Книга состоит из четырех параграфов, каждый из которых подразделяется на пункты, содержащие теоретические сведения и соответствующие упражнения. В конце пункта приводятся упражнения для закрепления полученных знаний. Завершением каждого параграфа являются дополнительные упражнения более высокого уровня сложности по сравнению с упражнениями, приведенными в основном пункте [8].

Согласно «Программе для общеобразовательных учреждений» на изучение темы «Теория вероятностей и статистика» в школьном курсе алгебры отводится 15 часов. Материал по данной теме приходится на 9 класс и представлен в следующих параграфах.

§3 «Элементы комбинаторики» содержит 4 пункта.

Примеры комбинаторных задач. На простых примерах демонстрируется решение комбинаторных задач методом перебора возможных вариантов. Этот метод иллюстрируется с помощью построение дерева возможных вариантов. Рассматривается правило умножения.

Перестановки. Вводится само понятие и формула подсчета перестановок.

Размещения. Понятие вводится на конкретном примере. Выводится формула числа размещений.

Сочетания. Понятие и формула числа сочетаний.

Целью данного параграфа является дать учащимся различные способы описания всех возможных элементарных событий в различных типах случайного опыта.

§4 «Начальные сведения из теории вероятностей».

Изложение материала начинается с рассмотрения эксперимента, после чего вводят понятие «случайное событие» и «относительная частота случайного события». Вводится статистическое и классическое определение вероятности. Параграф завершается пунктом «сложение и умножение вероятностей». Рассматриваются теоремы сложения и умножения вероятностей, вводятся связанные с ними понятия несовместные, противоположные, независимые события. Этот материал рассчитан на учащихся, проявляющих интерес и склонности к математике, и может быть использован для индивидуальной работы или на внеклассных занятиях с учащимися.

Методические рекомендации к данному учебнику даны в ряде статей Макарычева и Миндюк («Элементы комбинаторики в школьном курсе

алгебры», «Начальные сведения из теории вероятностей в школьном курсе алгебры»). А также некоторые критические замечания по данному учебному пособию содержатся в статье Студенецкой и Фадеевой, которая поможет не допустить ошибок при работе с данным учебником [15].

2. «Алгебра» 5-9 класс. Авторы – Дорофеев Г.В и Шарыгин И.Ф. [3].

§2 «Натуральные числа» содержит 1 пункт.

Решение комбинаторных задач. Авторы учебника начинают с комбинаторики, приводя комбинаторные задачи и примеры их решения методом перебора всех возможных вариантов. Иллюстрируется данный метод с помощью построения дерева возможных вариантов.

§2 «Таблицы и диаграммы» содержит 3 пункта.

Чтение и составление таблиц. В последней главе учебника, посвященной таблицам и диаграммам, ведется «диалог», где авторы обращаются к ученикам, к их школьному опыту, и на примерах задач, которые тесно связаны с повседневной жизнью, доносят смысл и необходимость данной темы. Школьников учат, как необходимо пользоваться таблицами, извлекать из них информацию и анализировать ее, самостоятельно строить таблицы.

Диаграммы. Рассматриваются столбчатые и частично круговые диаграммы.

Опрос общественного мнения. В данном пункте ученики самостоятельно проводят сбор данных, применяя полученные на прошлых уроках умения работать с таблицами и диаграммами.

Стоит отметить, что после каждой главы, автор предлагает школьникам рефлексию, на тему того, какими компетенциями они овладели, чему научились, что помогает в дальнейшей работе, как самим ученикам, так и учителю.

В 6 классе повторение начинается с таблиц и диаграмм, где ребята вспоминают принципы работы со столбчатыми диаграммами и более подробно рассматривают круговые, для того чтобы сформировать представление о

соотношении между частями целого. Далее идет комбинаторика. Ребята рассматривают задачи, применяя при их решении способ перебора, с которым они познакомились ещё в пятом классе. Однако, для упрощения работы, школьникам предлагают применять кодирование – замену рассматриваемых предметов на условные обозначения.

В 7 классе рассматриваются основные статистические характеристики, а именно: среднее арифметическое, мода, размах. Большинство примеров, как и в прошлых учебниках, жизненные. Далее идет параграф, посвященный решению комбинаторных задач, решаемых с помощью рассуждений. Рассматриваются перестановки, а для ребят, которых данная тема заинтересовала, предложен дополнительный параграф – круговые перестановки. Последняя глава учебника полностью отведена на частоту и вероятность. Вводится понятие случайного события, частоты случайного события и вероятности случайного события.

Материал описан с использованием жизненных примеров, хорошо проиллюстрирован, введены элементы истории, что может повысить интерес учащихся к данной теме.

Также рассматривается пункт сложение вероятностей. Несмотря на то, что авторами он помечен как «для тех, кому интересно», материал в нем излагается доступным языком, с использованием предварительно введенного термина: «несовместные события».

Последняя глава учебника за 8 класс полностью посвящена вероятности и статистике. Ученики повторяют изученные в 7 классе статистические характеристики, вводится понятие медианы, её свойства.

Также рассматривается вероятность равновозможных событий, вводится классическое определение вероятности по Лапласу. Кроме того, помимо предложенной классической модели, предлагается рассмотреть задачи со сложными экспериментами, при решении которых используются комбинаторные приемы. Геометрические вероятности рассматриваются в пункте «для тех, кому интересно».

В учебнике 9 класса снова последней главой рассматривается теория вероятностей и статистика. Дается краткая историческая справка и определение статистики, её методы. Рассматриваются примеры статистических исследований, с использованием полученных ранее знаний о случайных экспериментах, способах представления данных и статистических характеристик. Вводится ряд новых понятий: выборка, объем выборки, репрезентативность, ранжирование, генеральная совокупность. В качестве нового графического способа представления результатов используются полигоны. Вводятся понятия среднего квадратичного отклонения и выборочной дисперсии.

3. «Алгебра» за 5-6 класс. Авторы – Зубарева И. И. и Мордкович А. Г. [5].

В учебнике 5 класса последняя глава посвящена «введению в вероятность», состоит она из двух параграфов. Первый параграф рассматривает достоверные, невозможные и случайные события, раскрывая их на примере бросания игрального кубика. Во втором параграфе школьников знакомят с комбинаторными задачами, для решения которых им предложен метод перебора. Причем, для упрощения и визуализации задач предлагается составлять картинки – схемы перебора вариантов, то есть использовать древо возможных вариантов.

В учебнике за 6 класс школьников знакомят с понятием вероятности. Даются примеры, в которых определяется степень вероятности того или иного события. В качестве упражнений, школьникам предлагается самостоятельно проделать работу, приведенную в примерах, опираясь на интуицию. Дается хорошая база со множеством определений, а также свойствами событий, вводится классическое определение вероятности, часть из практических задач на вычисление вероятности решается с помощью комбинаторного правила умножения [5].

Далее мы будем рассматривать книгу Мордкович А.Г., Семенов П.В. «События, вероятности, статистическая обработка данных», так как элементы

комбинаторики и теории вероятностей более не рассматриваются в курсе основных учебников за 7 – 9 класс. Начинается книга с усвоенного школьниками материала – правила умножения и дерева вариантов, перестановок. Ребята решают простейшие комбинаторные задачи. С помощью таблиц возможных вариантов показывается принцип правила умножения. После рассматриваются деревья возможных вариантов и перестановки. Второй параграф посвящен выбору нескольких вариантов, в котором рассматриваются сочетания. Авторы постепенно вводят формулу для сочетаний: выводится формула для двух, трех, а затем n элементов. Третий параграф рассматривает случайные события и их вероятность, отрабатывается классическое определение вероятности. В четвертом параграфе идет статистика, авторы рассматривают группировку комбинаций, представляя информацию в виде таблиц. Новые термины так же даются в виде таблицы, где помимо определения дается описание терминов. Дается многоугольник распределений – графическое представление таблицы распределений, нормальное распределение. Вводятся числовые характеристики выборки: среднее арифметическое, мода и медиана. В пункте «экспериментальные данные и вероятности событий» авторы говорят о связи вероятности и экспериментальных статистических данных, после чего они вводят определение статистической вероятности. В завершении учебника автор рассматривают такие вопросы как: схема Бернулли с двумя возможными исходами, вычисление вероятности с помощью функции, закон больших чисел [14].

Каждый из параграфов раскрывается следующим образом: рассматриваются практические вопросы, приводятся примеры из жизни, дается обоснование необходимости темы в повседневной жизни, а уже после формулируются теоремы и определения. В каждом параграфе вторым пунктом собраны упражнения для классных, домашних, самостоятельных и контрольных работ.

В учебниках за 10 – 11 класс рассматриваются: статистическая обработка данных, простейшие вероятностные задачи, сочетания с размещениями, формула бинома Ньютона и случайные события, вероятности случайных событий. Хотелось бы отметить, что авторы не просто вводят определение классической вероятности, но и приводят алгоритм работы по нахождению вероятности случайного события, что облегчает работу ученикам, которые сложно понимают принцип работы на интуитивном уровне. Комбинаторные задачи рассматриваются с определенной математической строгостью, школьникам предлагают работу непосредственно с формулами, вводят ряд теорем [10].

Таким образом, анализ учебно-методических пособий позволил сделать следующие выводы.

1. В курсе школьной математики рассматриваются следующие типы комбинаторных задач:

- Задачи, в которых необходимо перечислить все решения:
- Задачи, в которых из всех возможных решений необходимо выделить одно, удовлетворяющее заданному условию
- Задачи, в которых необходимо найти количество всевозможных решений

2. Есть разные способы подсчетов решений данных задач, а именно:

- Перебор всех возможных вариантов решения
- Использование комбинаторных принципов для подсчета решений
- Непосредственное использование формул комбинаторики
- Использование «правила суммы» и «правила произведения»

Однако формулы комбинаторики в чистом виде редко применяются при решении задач из раздела теории вероятностей. Зачастую при решении задач из данного раздела используют методы решения простейших комбинаторных задач, такие как перебор всех возможных вариантов решения, дерево решений

или метод графов. Также используются принципы «правила суммы» и «правила умножения».

Изучив данный комплект учебников на предмет изучения теории вероятностей можно сделать вывод о том, что ученикам предоставлен достаточный для решения задания из раздела вероятностей формата ЕГЭ и ОГЭ объем теории и практических задач.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В 5-11 КЛАССАХ

2.1 Методика изучения элементов математической статистики в 5-9 классах

Включение в курс алгебры начальных сведений из статистики и теории вероятностей ориентированно на формирование у учащихся таких важных в современном обществе умений, как представление и толкование итогов результатов статистических исследований, обширно показанных в средствах массовой информации.

Статистика занимается методами изучения массовых объектов и явлений в пространстве или времени и их количественного или качественного анализа с точки зрения той науки, которой они принадлежат. Предмет исследования статистики определяется как статистическое сообщество. Статистика также определяется как совокупность числовых сообщений, характеризующих определенные сообщества или их группы. В статистике можно выделить два отдела: описательная статистика, иначе элементарная, и математическая статистика. Основными вопросами, которыми занимается описательная статистика, являются методы сбора и представления данных и их суммарное описание. Математическая статистика, с другой стороны, имеет дело с методами изучения свойств распределения одного или нескольких признаков в статистической совокупности на основе изучения части совокупности (так называемой выборки), случайно выбран. Основой математической статистики является исчисление вероятностей.

В последние годы произошла значительная эволюция взглядов на математику и ее преподавание. Наши знания о природе процесса обучения и понимания математики значительно обогатились. В большинстве стран при рассмотрении математики как общеобразовательного предмета подчеркивается,

что математика используется для предсказания и объяснения окружающей нас действительности, это язык взаимного общения и понимания.

Меняются и основные цели школьного образования. Главной задачей, стоящей перед школой, сейчас считается дать возможность учащимся развивать так называемые ключевые - универсальные навыки - необходимы вне зависимости от того, какие жизненные обстоятельства будут определять их дальнейшую жизнь, в том числе и профессиональную. Ключевые навыки: планирование, организация, оценка собственного обучения, эффективное общение в различных ситуациях, эффективная работа в команде, творческое решение проблем, эффективное использование калькуляторов и компьютеров. Развитие ключевых умений может происходить только через самостоятельную деятельность учащихся. Это связано с существенным изменением стиля обучения - от традиционного, дающего, к активирующему,

Важно, что основные вопросы статистики - помимо методов сбора и обработки данных - включают в себя элементы статистического мышления (выдвижение простейших гипотез, их проверка на самом элементарном уровне, формулирование выводов). Раскрывая даже самые элементарные стороны каждой из этих групп вопросов, мы можем показать учащимся специфическую методологию статистики.

Изучение темы «Статистические данные» в курсе основной школы может происходить как в классно-урочной, так и во внеклассной системах организации учебно-познавательного процесса. Формами изучения темы «Статистические данные» могут служить: урок, внеклассное мероприятие, домашняя работа.

Выбор формы обучения теме «Статистические данные» в курсе основной школы зависит от организации учебно-познавательной деятельности учащихся. При этом принципы построения методики обучения этой теме в курсе основной школы должны основываться на принципах построения методики обучения

вероятностно-статистической (стохастической) линии математики в основной школе.

И. Баландина выделяет следующие принципы обучения теме «Статистические данные» и принципы изучения вероятностно-статистической (стохастической) линии математики в основной школе [1].

1. Методика должна основываться на основных дидактических принципах обучения (доступности, наглядности, научности, практичности). Дидактические принципы формируют общую методическую основу для обучения теме «Статистические данные».

2. Тема «Статистические данные» должна выполнять пропедевтическую функцию по отношению ко всей вероятностно-статистической (стохастической) линии математики в основной школе. Это означает, что рассматриваемую тему следует изучать с самого начала, а в дальнейшем весь материал изучать на индуктивной основе.

3. Поскольку основным средством обучения математике являются задачи, то при изучении вероятностно-статистической линии необходимо рассматривать с учащимися разнообразные задачи и примеры, особо выделяя среди них задачи практического характера, устанавливающие взаимосвязь изучаемых фактов и явлений с жизнью, опытом учащихся.

Например, формулировка задачи «Дан ряд данных: 2.5, 3.6, 1.2, 3.4, 8.5, 12.3, 5.3. Необходимо найти среднее арифметическое ряда» соответствует формулировке упражнения на формирования навыка расчета среднего арифметического. В такой формулировке допущена логико-математическая ошибка: в задании представлен не ряд данных, а ряд чисел. Данные – это конкретные числовые результаты, полученные в ходе наблюдения, эксперимента и т.д. В задачах содержатся данные, в то время как в упражнениях – просто числа.

На основе принципов построения учебного материала по теме «Статистические данные» строится система применяемых при изучении темы

методов. На теоретическом уровне могут использоваться: лекции, беседы, опосредованное наблюдение, проблемное обучение, теоретическое исследование; на практическом: объяснение, беседа, диалог, консультация, конференция, составление таблиц, схем, диаграмм, графиков, непосредственное наблюдение, проблемное обучение, проектные методы, эмпирическое исследование.

Важен переход от репродуктивных к активным методам обучения. Такое переход подразумевает вовлечение как можно большего числа учащихся на уроке, а в аспекте самостоятельной работы – опирается на саморазвитие. Активизация познавательного интереса неразрывно связана с характером обучающего и воспитательного воздействия: необходимо с помощью соответствующих методов усиливать внутреннюю мотивацию к познанию. В этом плане статистика как элемент стохастической линии школьной математики обладает рядом преимуществ перед другими предметными областями, но одним из важнейших преимуществ служит практически полная приближенность к реалиям. Одно дело, когда ребенок решает, например, квадратное уравнение, другое – когда составляет список класса, отмечая в нем успевающих и неуспевающих, или составляет синоптическую карту.

В следующем примере устанавливаются различия между активными и репродуктивными методами изучения темы «Статистические данные» в курсе основной школы.

Случай первый. Дан ряд чисел: 5, 4, 3, 4, 7, 5, 6, 3, 1, 0. Требуется найти среднее арифметическое ряда. Учитель дает формулу и просит рассчитать.

Случай второй. Дан ряд чисел: 5, 4, 3, 4, 7, 5, 6, 3, 1, 0. Требуется найти среднее арифметическое ряда. Учитель дает подсказку: для расчета среднего арифметического понадобится сумма всех чисел и их количество. Как рассчитать среднее арифметическое – учащиеся пытаются увидеть самостоятельно.

В первом случае мы имеем дело с репродуктивным методом обучения, во втором – с одной из разновидностей активных методов (проблемно-развивающим).

Тема «Статистические данные» в курсе основной школы требует усиления принципа наглядности. Поэтому целесообразно использовать различные наглядные средства. Учитель заранее готовит дидактический материал к урокам: карточки с рядами данных, пустые табличные формы, диаграммы, графики. Также следует использовать новейшие информационные технологии. Изучение статистики устанавливает тесные метапредметные связи математики с информатикой. Однако не следует увлекаться программами, которые решают статистические задачи. Например, программа Excel, которая рассчитывает все статистические характеристики, должна быть предъявлена в дозированных количествах. Учащиеся должны учиться производить расчеты самостоятельно, поскольку одной из главных задач обучения математике является развитие психических функций памяти, мышления, внимания.

Изучение темы «Статистические данные» в курсе основной школы должно начинаться в 5 классе. На начальном этапе обучения статистике следует обращать внимание больше на представление статистических данных, на формирование умений читать таблицы, диаграммы, графики, а также самостоятельно оформлять эти виды представления. Работа с таблицами и диаграммами приобщает учащихся к организованности, аккуратности и четкости в изложении мыслей. Кроме того, таблицы, графики и диаграммы служат очень хорошим иллюстративным материалом.

Тема «Статистические данные» в курсе основной школы представляет для учащихся определенную сложность, поскольку им приходится работать не с одним и не с двумя числами, а с совокупностью чисел, которые, на первый взгляд, не связаны никакими закономерностями. И здесь задачи статистической науки должны пересекаться с методическими и дидактическими задачами. Учащиеся будут эффективно работать с данными, если учебно-познавательная

деятельность носит практический характер. Больше всего следует обращать внимание на данные, взятые из жизни. Статистические таблицы, аналитические диаграммы способствуют приближению учащегося к реалиям научной и образовательной деятельности. Вместе с тем учебно-познавательная деятельность должна быть внутренне мотивированной: учащемуся должно быть интересно решать статистические задачи. Для достижения такой цели необходимо разнообразить формы и методы преподнесения темы, включать в методологию игры и конкурсы.

Целесообразно направлять учебно-познавательную деятельность учащихся на исследование. Например, предлагать им провести опрос, изучить данные ученых, используя при этом дополнительную литературу. Развивать научно-исследовательский интерес можно путем создания проектов, презентаций. Поскольку научно-познавательная, исследовательская деятельности неразрывно связана с творчеством, то необходимо подбирать материал в соответствии с творческими потребностями учащихся.

Тема «Статистические данные» органически включена в систему вероятностно-статистической линии математики, что означает тесную взаимосвязь статистики с теорией вероятности, с комбинаторикой. Однако в курсе основной школы достаточно описать эту взаимосвязь на качественном уровне: учащиеся должны иметь представление о статистических данных как о случайных характеристиках и величинах, которые логически связаны вероятностной теорией.

Согласно Примерной основной образовательной программе основного общего образования учащиеся в 5-6 классах по теме «Математическая статистика» научатся на базовом уровне:

- представлять данные в виде таблиц, диаграмм;
- читать информацию, представленную в виде таблицы, диаграммы;
- на базовом и углубленном уровне оперировать понятиями: таблицы данных, столбчатые и круговые диаграммы, среднее арифметическое;

- извлекать, информацию, представленную в таблицах, на диаграммах;
- строить диаграммы на основе данных, составлять таблицы;
- извлекать. интерпретировать преобразовывать информацию. представленную в таблицах и на диаграммах, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений.

В 6 классах рассматриваются задачи, непосредственно направленные на работу с таблицами, формируются умения представлять необходимую информацию в виде таблицы. От чтения таблиц учащиеся должны перейти к заполнению таблиц.

Так, к примеру, в качестве домашнего задания учащимся можно предложить составить анкету, в которую можно включить самые разнообразные вопросы: ваши любимые фильмы, игры, конфеты, количественный состав семьи, какое количество времени тратят ученики вашего класса на выполнение домашней работы, сколько дней рождения одноклассников или друзей в каждом месяце года и т.д. Анкету оформить в виде таблицы и опросив друзей, членов семьи или одноклассников, результаты опроса занести в составленную таблицу.

В 7-9 классах вводится тема «Описательная статистика», в рамках которой ученик должен:

- Извлекать информацию из таблиц и диаграмм, выполнять вычисления по табличным данным. Определять по диаграммам наибольшие и наименьшие данные в однородном ряду, сравнивать величины.
- Организовывать информацию в виде таблиц, столбиковых и круговых диаграмм, в том числе с помощью компьютерных программ.
- Приводить примеры числовых данных, находить средние, размах, дисперсию числовых наборов.
- Приводить содержательные примеры использования средних и дисперсии для описания данных.

Рассмотрим примерные виды заданий, встречающихся в 7-9 классах по теории вероятности.

Из трёх вратарей в сборную России по хоккею нужно отобрать двоих. Решено сделать этот отбор по относительной частоте отражённых бросков, которую они показали на чемпионате. Результаты представлены в таблице (Таблица 1). Кто из вратарей будет включён в сборную?

Таблица 1 - Результаты бросков

Фамилия вратаря	Число бросков	Число отражённых бросков
Ивановский	140	100
Петайкин	120	90
Топорцев	160	110

Решение: Найдём относительную частоту отражённых бросков для каждого вратаря и сравним их.

$$\text{Ивановский: } \frac{100}{140} = \frac{5}{7}; \text{ Петайкин: } \frac{90}{120} = \frac{3}{4}; \text{ Топорцев: } \frac{110}{160} = \frac{11}{16}.$$

По результатам вычислений в сборную будут приглашены Ивановский и Петайкин.

Ответ: Ивановский и Петайкин.

Задача 2. Виктор измерял в течение недели время, которое он тратит на дорогу к другу и от друга, а результаты записывал в таблицу (Таблица 2). На сколько минут (в среднем) дорога от друга занимает у него больше времени, чем дорога к другу?

Таблица 2 - Время на дорогу, что тратит Виктор

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
Время к другу (мин)	19	20	21	17	22	24
Время от друга (мин)	28	22	20	25	24	22

Решение 1: Найдём среднее время, затраченное на дорогу к другу, на дорогу от друга, а затем их разность:

$$\frac{19+20+21+17+22+24}{6} = 20,5 \text{ мин;}$$

$$\frac{28+22+20+25+24+22}{6} = 23 \text{ мин;}$$

$$23,5 - 20,5 = 3 \text{ мин.}$$

Решение 2: Найдём для каждого из шести дней недели разность между временем, затраченным на дорогу от друга и на дорогу к другу, а затем среднее значение этих разностей:

$$\frac{9 + 2 - 1 + 8 + 2 - 2}{6} = 3 \text{ мин.}$$

Ответ: на 3 минуты.

Задача 2. Поезда прибывали на станцию метро со следующими интервалами: 2 мин 11 с; 2 мин 8 с; 2 мин 10 с; 2 мин 12 с; 2 мин 19 с. Найдите среднее значение и медиану данного ряда интервалов движения.

Решение: Для вычисления среднего значения нужно перевести временные интервалы в однородные единицы измерения (секунды). Но поскольку для всех членов ряда число минут одинаково, то можно упростить вычисления, найдя среднее только по «секундной части»:

$$\frac{11 + 8 + 10 + 12 + 19}{5} = 12$$

Среднее арифметическое для данного ряда равно 2 мин 12 с.

Для вычисления медианы нужно упорядочить: 2 мин 8 с < 2 мин 10 с < 2 мин 11 с < 2 мин 12 с < 2 мин 19 с. Медиана равна 2 мин 11 с.

Ответ: Среднее: 2 мин 12 с; медиана: 2 мин 11 с.

Задача 3. Заводской отдел контроля качества провёл исследование, связанное с надёжностью четырёх выпускаемых марок автомобилей. В исследовании участвовало около 1000 автомобилей четырёх разных марок. Регистрировался суммарный пробег и общее количество поломок каждой марки. Результаты были сведены в таблицу (Таблица 3).

Таблица 3 – Результаты исследования надёжности

Марка автомобиля	Суммарный пробег (млн. км)	Количество поломок
«Лиана»	154	4620
«Корона»	90	4500
«Вояжер»	280	5600
«Торнадо»	64	3840

По результатам исследования одну из марок решено снять с производства. Какую именно, если решающим критерием была выбрана относительная частота поломок?

Решение: с производства надо снять марку, у которой отношение числа поломок к суммарному пробегу является наибольшим. При нахождении отношения будем делить на количество миллионов, т.е. 4500 на 90, а не на 90 млн. «Корона»: $4500 : 90 = 50$; «Вояжер»: $5600 : 280 = 20$: Понятно, что для «Лианы» отношение будет меньше, чем для «Короны»; «Торнадо»: $3840 : 64 = 60$. Получается, что с продажи снимут автомобили марки «Торнадо».

Ответ: Торнадо.

Задача 4. На диаграмме (Рисунок 1) показан возрастной состав населения Бангладеш. Определите по диаграмме, население какого возраста преобладает [13].

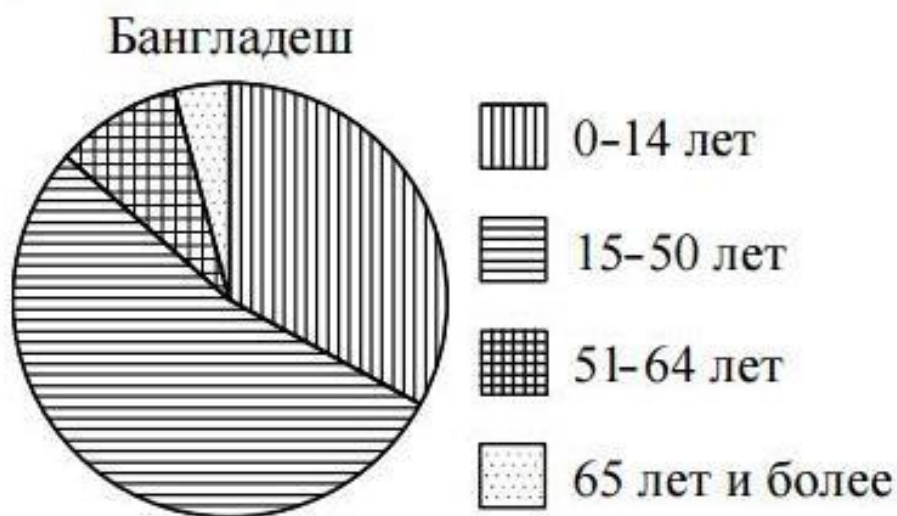


Рисунок 1 – Возрастной состав населения Бангладеш

Ответ: 15-50 лет.

Таким образом, при обучении теме «Статистические данные» в курсе основной школы не следует перегружать учащихся избытком статистических характеристик. Для данного уровня вполне достаточно понятий «среднее арифметическое», «медиана», «мода», «размах». Вместе с тем необходимо

приобщать учащихся к понятийному аппарату статистики, для чего надо постепенно отказываться от простых терминов (ряд, группа) и переходить к более сложным (генеральная совокупность, выборка, объем выборки).

2.2 Методика изучения элементов теории вероятностей в 7-11 классах

Программный материал каждой дисциплины формируется на основе этапности усвоения знаний и формирования понятий. Математика, большей частью, наука, подчиненная логике мышления и закономерности выводов и решений. Именно здесь формируется умение работать по алгоритму и понимание взаимообусловленности всех процессов в окружающем мире. И действительно, в младших и средних классах школы все задачи и упражнения подчинены правилам и умению оперировать ими. У детей постепенно развивается логическое мышление, умение анализировать, сопоставлять, делать выводы.

Однако, к концу средней школы мышление школьников уже настроено на развитие абстрактного мышления и формирование образных представлений. Они уже способны, при помощи учителя корректировать житейские представления и обобщать личный опыт, формируя правильные представления о случайном, на основе которых далее можно вводить понятие вероятности и умение решать задачи на ее основе

Теория вероятностей – это раздел математики, который позволяет обучать учащихся логике на практике. В процессе освоения теоретических фактов решается задача развития у учащихся навыков проведения логических рассуждений, способностей абстрагировать т.е. выделять в конкретной ситуации сущность вопроса, отвлекаясь от несущественных деталей. Изучая теорию вероятностей, учащиеся овладевают умениями анализировать рассматриваемый вопрос, обобщать, находить пути решения поставленной задачи. Все это формирует мышление учащихся и способствует развитию их

речи, особенно таких качеств выражения мысли, как порядок, ясность, обоснованность.

В свете требований современного общества и новых образовательных стандартов, необходимо учить детей анализировать ситуации и принимать решения в разных условиях, научить жить в вероятностной ситуации, анализировать и обрабатывать информацию, осуществлять логичные, обоснованные действия в ситуациях со случайными исходами.

Ориентация на демократические принципы мышления, на многовариантность возможного развития реальных ситуаций и событий, на формирование личности, способность жить и работать в сложном, постоянно меняющемся мире, с неизбежностью требует развития вероятностно - статистического мышления у подрастающего поколения.

Основными понятиями теории вероятности выступают:

- достоверные события;
- невозможные события;
- случайные события.

Невозможные события – это те события, которые при определенном комплексе условий определенно не наступают, если создан определенный комплекс условий. Другими словами, понимание смысла этих событий ведется методом «от обратного». Так, мы знаем, что у квадрата 4 одинаковых стороны, значит, если две стороны не равны – это не квадрат.

Случайные события – это те, вероятность наступления которых при данных условиях неопределенна. Так, при контакте с заболевшим ребенком несколько человек заболеют, а несколько – нет. То есть обязательность заражения не обусловлена наличием источника болезни.

Случайные события могут быть совместными или несовместными:

В случае несовместных событий, может наступить одно из них, но невозможно наступление двух или более.

Совместные события не исключают одновременного возникновения.

Достоверным событием является наступление хотя бы одного события из полного множества событий.

Классическое определение вероятности: Вероятностью P события A – называется отношение числа благоприятных исходов M к числу всех возможных исходов N . Для события A вероятность рассчитывается по формуле:

$$P(A)=M/N$$

Независимые, противоположные и произвольные события. События A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло ли другое событие.

Событие B состоит в том, что событие A не произошло, т.е. событие B является противоположным к событию A . Вероятность противоположного события равна единице минус вероятность прямого события.

$$P(A)+P(B)=1 \text{ или } P(A) = 1- P(B)$$

Для произвольных событий A и B вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного события, т.е.

$$P(A+B) = P(A)+P(B)- P(A \cdot B)$$

Если события A и B несовместные, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей, т.е.

$$P(A+B) = P(A)+P(B)$$

Произведением двух событий A и B называют событие AB , состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий.

Для независимых событий A и B вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей, т.е. в этом случае.

$$P(AB)= P(A) \cdot P(B)$$

Если вероятность события B вычисляется в предположении, что событие A уже произошло, то такая вероятность называется условной вероятностью события B по отношению к событию A . Обозначение: $P_A(B)$.

Теорема. Если события А и В являются зависимыми, то вероятность их произведения равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Формула полной вероятности. Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$ которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Формула Бернулли. При решении вероятностных задач часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых одно и тоже испытание повторяется многократно и исход каждого испытания независим от исходов других. Такой эксперимент еще называется схемой повторных независимых испытаний или схемой Бернулли.

Пусть в результате испытания возможны два исхода: либо появится событие А, либо противоположное ему событие. Проведем n испытаний Бернулли. Это означает, что все n испытаний независимы; вероятность появления события А в каждом отдельно взятом или единичном испытании постоянна и от испытания к испытанию не изменяется (т.е. испытания проводятся в одинаковых условиях). Обозначим вероятность появления события А в единичном испытании буквой p , т.е. $p=P(A)$, а вероятность противоположного события (событие А не наступило) - буквой $q=P(\bar{A})=1-p$. Тогда вероятность того, что событие А появится в этих n испытаниях ровно k раз, выражается формулой Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Геометрическое определение вероятности. Классическое определение вероятности оказывается эффективным для решения целого спектра задач, но с другой стороны, обладает и рядом недостатков. Даже правильнее сказать, не

недостатков, а ограничений. Одним из таких ограничений является тот факт, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. Простейший пример:

На отрезок $[0;1]$ наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что она попадёт в промежуток $[0,4; 0,7]$ (Рисунок 2)?

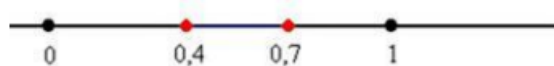


Рисунок 2 – Пример задания

Поскольку на отрезке бесконечно много точек, то здесь нельзя применить формулу $P(A)=m/n$ (ввиду бесконечно большого значения «эн») и поэтому на помощь приходит другой подход, называемый геометрическим определением вероятности.

Всё очень похоже: вероятность наступления некоторого события A в испытании равна отношению $P(A)= g/G$, где G – геометрическая мера, выражающая общее число всех возможных и равновероятных исходов данного испытания, а g – мера, выражающая количество благоприятствующих событию A исходов. На практике в качестве такой геометрической меры чаще всего выступает длина или площадь, реже – объём.

Рассмотрим событие: A – брошенная на отрезок $[0;1]$ точка, попала в промежуток $[0,4;0,7]$. Очевидно, что общее число исходов выражается длиной большего отрезка: $L=1-0=1$, а благоприятствующие событию A исходы – длиной вложенного отрезка: $l=0,7-0,4= 0,3$.

По геометрическому определению вероятности:

$$P(A) = \frac{l}{L} = \frac{0,3 \text{ ед.}}{1 \text{ ед.}} = 0,3$$

Законы вероятности во многом универсальны. Они являются основой научной картины мира. Современные естественные науки: биология, химия, физика, социология, философия, лингвистика и другие построены и развиваются на вероятностно - статистической базе.

На современном этапе российские программы школьного образования математике стараются объединить опыт ведущих стран мира, где теория вероятности давно введена в школьную программу. Однако, в различных странах существуют разные подходы к формированию основных вероятностных представлений. Чаще всего этот материал начинает изучаться в начальной школе. Однако, по мнению ведущих отечественных педагогов и психологов такой подход не эффективен, так как мышление младшего школьника не настроено на понимание закономерности случайных событий.

Достаточно перспективным видится подход поэтапного введения и расширения элементарных представлений о теории вероятности и навыков статистического анализа эмпирических данных на протяжении всего обучения. При этом усложнение материала проводится на основе возрастных особенностей и степени освоенности предыдущих понятий. Существенную роль при этом играют задачи прикладного характера, анализ реальных жизненных ситуаций.

Рассмотрим примерные виды заданий, встречающихся в 7-9 классах по теории вероятности.

Задача 1. Данные статистических исследований показали, что 2,5% девушек страдают дальтонизмом. Какова вероятность того, что случайно выбранная девушка не дальтоник?

Решение: Девушки, не имеющие данного отклонения, составляют 97,5% от общего числа, поэтому искомая вероятность равна 0,975.

Ответ: 0,975.

Задача 2. Одноклассники Игорь и Павел играют между собой партию. Статистика их состязаний показывает, что 30% партий выиграл Павел, а 50% партий закончились вничью. Каковы вероятности у Павла и Игоря одержать победу в партии?

Решение: Павел выиграл в 30% предыдущих партий и, следовательно, статистическая частота его побед ровно 0,3. Поэтому и вероятность победы

Павла в данной партии примем равной 0,3. Игорь же победил в 20% сыгранных ранее партий ($100\% - 30\% - 50\% = 20\%$), и статистическая частота его побед равна 0,2. Вероятность победы Игоря примем равной 0,2.

Ответ: 0,2.

Задача 3. Из корзины, где лежат яблоки и апельсины, вытаскивают один фрукт наугад. Какова вероятность, что достанут яблоко, если апельсины составляют 30% от общего количества фруктов в корзине.

Решение: Обозначим доставание яблока через событие А. Если апельсинов в корзине 30% от общего количества, то яблок – 70%. Пусть в корзине всего n фруктов. Количество яблок можно представить в виде:

$$m = \frac{n}{100\%} \cdot 70\% = 0,7n$$

Тогда базовое множество исходов испытания насчитывает n равновероятных исходов, из которых событию А благоприятствуют $0,7n$ исходов. Находим искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0,7n}{n} = 0,7.$$

Ответ: 0,7

Специфика решения задач по теории вероятности диктуется своеобразием вероятностно-статистического материала, его тесной связью с практической деятельностью.

Целесообразным является постоянное подкрепление операций с вероятностными законами элементами комбинаторики, усвоенными в 5-6 классах.

2.3 Методика изучения элементов комбинаторики в 7-11 классах

Комбинаторные задачи - задачи на подсчет числа различных комбинаций. Объединяются постановкой вопроса: почти во всех из них требуется ответить на вопрос «сколько?» или «сколькими способами?». А часть математики, занимающаяся решением подобных задач, называется комбинаторикой.

Некоторые сведения по комбинаторике входят в курс 10-го класса средней школы (решение задач о числе различных перестановок, размещений и сочетаний).

«Наибольшие затруднения у учащихся вызывают задачи, в которых необходимо построить математическую модель, отражающую реальные процессы и с ее помощью просчитать результаты; задания на построение и чтение графиков реальных зависимостей; задачи на процентный рост, на оценку и прикидку результатов вычислений; задачи, связанным с выдвижением и проверкой гипотез. А в условиях современной цивилизации практически каждому человеку приходится постоянно проводить элементарные подсчеты, делать оценки и прикидки, прокладывать транспортные маршруты, читать графики и диаграммы, осмысливать статистические данные и т.п.» - пишет Мохира Р. [11].

Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется комбинаторикой [9]. Комбинаторика как будущая наука возникла в 19 веке: в жизни привилегированных слоев того общества большое место занимали азартные игры - в карты и кости выигрывались или проигрывались золото и бриллианты, дворцы и имения, породистые кони и дорогие украшения; были распространены всевозможные лотереи. Понятно, что первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр - вопросов, сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, или сколькими способами можно получить двух королей в данной карточной игре.

Со временем методы комбинаторики стали тем аппаратом, с помощью которого получены замечательные результаты в теории вероятностей. Например, Я. Бернулли комбинаторными методами доказал первую

содержательную теорему теории вероятностей, которую называют закон больших чисел. Комбинаторные методы сохраняют свое значения и сегодня.

Большинство комбинаторных задач решаются с помощью двух основных правил – правила сложения и правила умножения

Правило сложения. Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B – k способами (независимо от A), то объект «либо A , либо B » можно выбрать $m+k$ способами.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. На одной полке стоит 15 книг, а на второй на 3 книги больше.

Сколькими способами можно выбрать одну книгу?

Решение: Так как на второй полке на 3 книги больше, чем на второй, то на второй $15 + 3 = 18$ книг. По правилу суммы одну книгу можно выбрать $15 + 18 = 33$ способами.

Ответ: 33.

Давайте теперь рассмотрим правило умножения.

Правило умножения. Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) k способами, то пары объектов A и B можно выбрать mk способами.

Задача 2. Используя цифры 0, 2, 4, 6, составьте все возможные трехзначные числа, в которых цифры не повторяются.

Решение: Первую цифру числа можно выбрать – 3 способами (так как на первом месте не может стоять 0), вторую – 3 способами, третью – 2. По правилу произведения всего можно составить $3 * 3 * 2 = 18$ чисел.

Ответ: 18.

Задача 3. В классе среди 25 учащихся, нужно выбрать старосту и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Старосту можно выбрать 25 способами, а заместителя 24 способами. Следовательно, по правилу умножения существует $25 * 24 = 600$ способов.

Ответ: 600

Задача 4. В турнире по шашкам участвуют 9 человек. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?

Решение: Решим задачу двумя способами. 1) В одной партии участвуют два человека. Первый участник сыграл партию с 8 противниками, второй – с 7 противниками, третий – с 6 противниками, ..., восьмой – с 1 противником, девятый – сыграл со всеми. То всего партий получается: $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$.

2) Так как в партии участвует два человека, то первого человека можно выбрать 9 способами, а второго – 8. По правилу произведения всего можно сыграть $8 * 9 = 72$ партии. Но так как здесь повторяются пары (например, если среди 9 человек есть Иванов и Петров, то партии Иванов-Петров и Петров-Иванов одни и те же), то нужно исключить лишние партии, то есть разделить на 2. Тогда получим $72 : 2 = 36$ партий.

Ответ: 36.

Задача 5. На домофоне цифры 0, 1, 2, ..., 8, 9. Каждая квартира получает код из двух цифр, например, 0 – 0, 0 – 1, 3 – 7 и т. п., позволяющий открывать входную дверь. Хватит ли кодов для всех квартир для дома, состоящего из 96 квартир?

Решение: Первую цифру кода можно выбрать 10 способами, вторую – 10 способами (так как они могут повторяться). По правилу произведения, всего двухзначных кодов: $10 * 10 = 100$. Так как $100 > 96 \Rightarrow$ хватит кодов для дома, состоящего из 96 квартир.

Ответ: хватит.

Рассмотрим комбинаторные задачи, встречающиеся в 7-9 классах.

Задача 6. Сколькими способами можно расположить 5 человек за столом?

Решение: Используем формулу количества перестановок

$$P_5 = 5! = 120$$

Ответ: 120.

Задача 7. В корзине находится 15 предметов. Сколькими способами можно взять 4 предмета?

Решение: По логике условия, предметы считаются различными – даже если они на самом деле однотипны и визуально одинаковы. В задаче речь идёт о выборке из 4 предметов, в которой не имеет значения их «дальнейшая судьба». Т.е. речь идет о сочетании. Считаем их количество:

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)! \cdot 4!} = (*)$$

Так как в подобных решениях приходится оперировать большими числами, следует не «идти напролом», а использовать преобразования, сокращать некоторые факториалы:

$$(*) = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15!}{11! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 15}{4!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 15}{24} = 1365$$

Ответ: 1365.

Задача 8. Богдан, Денис и Влад сели играть в «очко». Сколькими способами им можно сдать по одной карте? (колода содержит 36 карт)

Решение: Здесь важно не только то, какие три карты будут извлечены из набора, но и то, как они будут распределены между мальчиками. По формуле размещений:

$$A_{36}^3 = 34 \cdot 35 \cdot 36 = 42840.$$

Столькими способами можно раздать 3 карты мальчикам. Существует еще одна схема решения, которая, кажется, ещё проще:

$$C_{36}^3 = \frac{36!}{33! \cdot 3!} = 7140$$

Теперь рассмотрим, какую-нибудь одну из семи тысяч ста сорока комбинаций. Например: король пик, 9 червей, 7 червей. Выражаясь комбинаторной терминологией, эти 3 карты можно «переставить» между Богданом, Денисом и Владом шестью способами:

КП 9Ч 7Ч

КП 7Ч 9Ч

9Ч КП 7Ч

9Ч 7Ч КП

7Ч КП 9Ч

7Ч 9Ч КП

И аналогичный факт справедлив для любого уникального набора из трёх карт. А таких наборов, как мы помним, мы насчитали:

$$C_{36}^3 = 7140.$$

Найденное число сочетаний следует умножить на шесть:

$$C_{36}^3 \cdot P_3 = 7140 \cdot 6 = 42840.$$

Практика показывает, что человеку, не понявшему комбинаторные идеи в детстве, в более зрелом возрасте они даются нелегко, так как многие элементы комбинаторики, казалось бы, противоречат жизненному опыту, но с возрастом приходит опыт и они приобретает безусловный статус. А это значит, что назрела необходимость введения элементов комбинаторики в курс математики. Отметим, что введение элементов комбинаторики в виде замкнутого раздела программы по математике, который относится к «чистой», теоретической математике, ранее проводилось в условиях реформирования школьного математического образования в 60-е годы прошлого века. Так, в то время появляется большое количество работ ученых-методистов, ставящих свою цель, как разработку методики преподавания теории вероятностей в виде отдельной темы школьного курса математики. Но в 1970-х годах в следствии изолированности относительно традиционного школьного курса, такой материал был изъят из программ и учебников. Реформа 1980-х годов позволила включить элементы теории вероятностей и математической статистики в программы профильных классов, в частности, физико-математического и естественно-научного.

На сегодняшний день, произошло изменение в обществе, что акцентирует внимание на важность знаний и умений в теории вероятности.

ГЛАВА 3. ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

3.1 Основные цели организации внеклассной работы по математике в школе

В наше время глоссарий ФГОС дает такое понятие: «Внеучебная (внеклассная) деятельность учащихся – деятельностьная организация на основе вариативной составляющей базисного учебного (образовательного) плана, организуемая участниками образовательного процесса, отличная от урочной системы обучения: экскурсии, кружки, секции, круглые столы, конференции, диспуты, КВНы, школьные научные общества, олимпиады, соревнования, поисковые и научные исследования и т.д.; занятия по направлениям внеучебной деятельности учащихся, позволяющие в полной мере реализовать Требования Федеральных государственных образовательных стандартов общего образования» [17].

Внеклассная работа относится к внешним организационным формам обучения. В современной дидактике существуют различные описания концепции «организационные формы обучения».

Одной из важнейших целей проведения внеклассной работы по математике является развитие интереса учащихся к математике, привлечение учащихся к занятиям в факультативах. У учащихся имеется большое желание проверить свои силы, математические способности, умение решать нестандартные задачи. Их привлекает возможность добровольного участия.

Проведение внеклассной работы по математике является прекрасным средством повышения квалификации учителей. Одной из целей является расширение изучаемого материала курса математики, иногда такое расширение выходит за рамки обязательной программы. Рассмотрение на дополнительных занятиях таких вопросов неизбежно приводит учителя к необходимости

основательного знакомства с этим материалом и с методикой его изложения учащимся.

Главное же значение внеклассной работы по математике в том, что она содействует развитию интереса школьников к предмету. Основными результатами работы явилось: теоретически обоснованное значение внеклассной работы по математике для развития математических способностей школьников. Разработаны и проведены конспекты некоторых форм внеклассной работы по математике в школе с целью развития математического интереса учащихся. На этих внеклассных занятиях, было разобрано множество всевозможных заданий, на развитие интереса.

Таким образом, внеклассные работы по математике, направлены на то, чтобы повысить интерес детей к предмету. Дети, занимающиеся внеклассной работой, отличаются от других детей более высоким уровнем развития интересов.

По определению Т.А. Ильиной «под формой организации обучения нужно понимать специально организованную деятельность учителя и учащихся, протекающую по установленному порядку и в определенном режиме» [6].

Кроме учебны так же используются такие организационные формы обучения как занятия в кружках, факультативные занятия, элективные курсы, экскурсии, конференции, олимпиады, самостоятельная работа и другие.

На уроках математики имеется немало возможностей заинтересовать школьников содержанием этой науки. Заметим, ключевая цель занятий по математике заключается в обучении тому или иному комплексу процедур математического характера, занимательность изложения подчинена этой цели, развитие способностей учащихся происходит в рамках изучения обязательного материала.

Рассмотрим подробнее сущность одного из видов внеклассной работы, наиболее актуальных на современном этапе развития системы образования – факультативных курсах и занятиях.

Под словами факультативное занятие подразумевают развивающие занятия, которое должно способствовать: развитию познавательного интереса обучающихся к данному предмету; выявлению обучающихся, которые способны обладать дополнительными способностями, и оказанию им помощи при изучении предмета на более высоком уровне; формированию умения обучающихся самостоятельно и творчески работать с литературой, устанавливать связи между знаниями.

Таким образом существующие в данный момент программы факультативных курсов носят рекомендательный характер, учителю предоставляется самостоятельно выбирать темы таких курсов и заниматься составлением программ. Учитывая интересы обучающихся на добровольных началах проводится запись на факультативные занятия.

Факультативы способствуют развитию математического кругозора, творческих способностей обучающихся. Вызывая таким образом интерес к предмету. Мероприятия, проводимые в школе, которые имеют разовый характер, такие как: олимпиады, математические вечера, КВН, постановка математических сказок, викторины и соревнования команд, очень помогают дополнять этот интерес.

К основным формам проведения факультативных занятий по математике относятся: олимпиады конкурсы, викторины; математический кружок; математические олимпиады; неделя математики; математические дискуссии; школьная и классная математическая печать; математические экскурсии; изготовление математических моделей.

Существует очень тесная взаимосвязь учебно-воспитательной работой, проводимой на уроках, и факультативной работой: так как учебные занятия, развивают у обучающихся интерес к знаниям, то они таким образом

содействуют развитию факультативной работы, и наоборот, факультативные занятия, позволяющие обучающимся применять знания на практике, расширяют и углубляющие эти знания, повышают успеваемость обучающихся и их интерес в обучении.

Необходимо заметить, что внеклассная работа, а именно факультативный курс не должен дублировать учебную работу, иначе он станет обычным дополнительным занятием.

Имеются два вида факультативной работы по любому предмету:

- работа с обучающимися, отстающими от других в изучении материала по программе (дополнительные внеклассные занятия);

- работа с обучающимися, проявляющими к изучению предмета повышенный интерес и способности, по сравнению с другими обучающимися.

Часто встречающаяся схема занятий:

Первое занятие посвящено повторению теории по теме. За 45-90 минут учитель рассказывает наиболее важную информацию по теме. И это не просто пересказ, и «пережевывание» учебника, это, преобразование темы через личный опыт учителя, его видение истолкование темы.

На втором-третьем занятиях, учитель знакомит обучающихся с ключевыми понятиями, разбирают методы решения.

На четвертом-пятом занятии учитель вместе с обучающимися занимается укрупнением ключевых задач, используя все приемы укрупнения.

Пятое-шестое занятие, как правило проводится в виде консультации, цель которой научить обучающегося думать о проблеме, понимать какие возникли сложности при знакомстве с данной темой. И для устранения этих трудностей сформулировать вопросы, на которые он хотел бы получить ответ.

На последнем занятии целесообразно провести контрольную работу для проверки и оценки знаний, умений и навыков, обучающихся по данной теме. Программа факультативных занятий должна быть построена таким образом, чтобы быть для обучающихся увлекательной и интересной. Для этого

необходимо учитывать естественную заинтересованность обучающегося, для формирования наиболее устойчивого интереса к предмету.

3.2 Факультативный курс по математике для 9 класса «Элементы теории вероятностей»

На изучение темы «Элементы теории вероятностей» отводится недостаточное количество часов, из которых значительная часть тратится на рассмотрение теоретического материала. Это делает затруднительным формирование у обучающихся соответствующих знаний, умений и навыков. Объем информации по предмету недостаточен и требует дополнительного теоретического и практического содержания.

Так, мы разработали курс занятий по теме «Теория вероятности и элементы комбинаторики» для факультатива в 9 классе для подготовки к ОГЭ. В рамках выпускной квалификационной работы, нами представлена часть курса по теме «Теория вероятности».

Идея факультативного курса состояла в том, чтобы больший акцент делался на практическую значимость излагаемого материала. Вместе с учениками мы не придерживались строгих определений из учебника, многие понятия, в том числе и определение вероятности, были даны на основе имеющихся знаний учеников. Планировалось разобрать все типы заданий, которые ребята могут встретить на экзамене.

Уроки, представленные нами для проведения на факультативных занятиях, разработаны для девярых классов. Данные занятия предназначены для углубленного изучения теории вероятностей, а также для разбора предлагаемых на ОГЭ заданий.

Углубление школьного курса идет частично за счет усложнение предлагаемых для решения задач с технической стороны, а также за счет

расширения объема изучаемого материала. Усвоение и изучение теории идет в основном через решение и разбор соответствующих задач.

При составлении факультативных занятий по теории вероятностей было использовано методическое пособие: Федосеев В. Н. Решение вероятностных задач [18]. Тематическое планирование факультативных занятий представлено в таблице 4:

Таблица 4 - Тематическое планирование факультативных занятий

№ занятия	Название занятия	Количество часов
1	Случайные исходы и события. Вероятности случайных событий	1
2	Совместные испытания. Правило суммы вероятностей	1
3	Независимые испытания. Правило умножения вероятностей	1
4	Несколько независимых совместных испытаний. Совместное применение правил суммы и умножения вероятностей	1
5	Два зависимых совместных испытания. Несколько зависимых совместных испытаний	1
6	Элементы теории вероятностей геометрического содержания	1
7	Дидактическая игра	1
8	Контрольная работа	1
Итого		8

Общие цели факультативных занятий.

- 1) Обеспечить усвоение обучающихся теории вероятностей.
- 2) Обобщить и систематизировать знания по вышеперечисленным темам теории вероятностей.
- 3) Отработать навыки решения базовых задач и задач углубленного уровня по теории вероятностей.
- 4) Сформировать у обучающихся знание законов теории вероятностей и приемов решения задач.
- 5) Обеспечить условия для развития аналитического, логического, абстрактного мышления на занятиях.
- 6) Обеспечить ситуации, способствующие развитию умений учебного труда на занятиях.

7) Способствовать развитию волевых качеств учащихся: уверенности в своих силах, умения преодолевать трудности для достижения намеченной цели на занятиях.

8) Обеспечить условия для воспитания положительного интереса к математике и теории вероятностей в частности.

9) Способствовать воспитанию мотивов учения, положительного отношения к знаниям на занятиях.

10) Создание условий, обеспечивающих воспитание внимательности при работе с задачами по теории вероятностей.

Типы занятий на факультативном курсе:

Первое-шестое занятия представляют собой урок ознакомления с новым материалом, обобщения и систематизации знаний. Форма: лекционно-практическая.

Седьмое занятие факультативного курса – проведение дидактической игры по теме «Теория вероятностей».

Восьмое занятие в рамках факультативного курса представляет собой контрольную работу.

Методы обучения:

Занятия 1-6: монологическое изложение, учебная лекция.

Занятие 7: дидактическая игра

Занятие 8: практическое. Оборудование: доска, раздаточный материал (контрольная работа).

Занятие 1. Случайные исходы и события. Вероятности случайных событий

Цели занятия:

1. Вспомнить изученные в 7 и 8 классах основные понятия теории вероятностей: исход; случайное, достоверное, невозможное, противоположное событие; совместимые события, равновозможные события.

2. Закрепить умение находить вероятности перечисленных событий. Сформулировать два подхода к определению вероятности – частотный и классический.

3. Отработать задачи на классическое определение вероятности для подготовки к ОГЭ.

Структура факультативного занятия

1. Объяснение нового материала, разбор задач:

- испытание;
- исход испытания;
- множество исходов испытаний;
- случайные события – благоприятные исходы случайных событий, достоверное событие, невозможное событие;
- противоположные события, вероятности противоположных событий;
- совместные и несовместные события, равновозможные события;
- частота и вероятность случайного события;
- вероятность совместного осуществления случайных событий.

2. Итоги занятия.

Рассмотрим примеры задач по теории вероятности занятия №1.

Пример 1. Из урны, где лежат 9 красных и 7 зеленых шаров, достают один шар наугад. Найти вероятность того, что достанут красный шар; зеленый шар.

Решение: Заметим, что исходы испытания равновероятны. В дальнейшем мы не будем каждый раз писать о равновероятности исходов, если она очевидна.

Пусть событие A – «достали красный шар», событие B – «достали зеленый шар». Всего в урне 16 шаров, общее количество исходов – 16. Событию A благоприятствует 9 исходов, событию B – 7. Следовательно,

$$P(A) = \frac{9}{16}, P(B) = \frac{7}{16}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{9}{16}; \frac{7}{16}.$$

Пример 2. На поверхности стола лежат 18 карт четырех мастей рубашкой вверх: 4 туза, 4 короля, 4 дамы, 4 валета и две по 10 масти тревф и пики. Открывают одну карту наугад. Какова вероятность того, что откроют бубнового туза? Даму тревф? Короля? Либо 10, либо валета? Карту червовой масти?

Решение: Базовое множество исходов испытания насчитывает 18 равновероятных исходов. Пусть событие A – «открыли бубнового туза»; событие B – «открыли даму тревф»; событие C – «открыли короля»; событие D – «открыли либо 10, либо валета»; событие E – «открыли карту червовой масти».

Событию A благоприятствует 1 исход, следовательно, $P(A) = \frac{1}{18}$; событию B также благоприятствует 1 исход, следовательно, $P(B) = \frac{1}{18}$; событию C благоприятствует 4 исхода, поэтому $P(C) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$; событию D благоприятствует 2 исхода, значит, $P(D) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$; событию E благоприятствует 4 исхода, поэтому $P(E) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

Ответ: $\frac{1}{18}; \frac{1}{18}; \frac{2}{9}; \frac{1}{9}; \frac{2}{9}$.

Пример. 3. Из колоды, где лежат 4 короля и 4 дамы разных мастей, достают одну карту наугад. Событие A – «достали короля»; событие B – «достали даму пик»; событие C – «достали карту бубновой масти». Какие события являются совместными? Несовместными? Найдите вероятности наступления каждого события и вероятности совместного осуществления для каждой пары совместных событий.

Решение: Совместными являются события: A и C . Несовместными являются: A и B , B и C . Общее количество исходов испытания равно 8. Событию A благоприятствует 4 исхода, событию B – один исход, событию C – 2 исхода. Значит, $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{8}$, $P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

У событий A и C только один общий исход – достали бубнового короля. Поэтому $P(A, C) = \frac{1}{8}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$.

Пример 4. Научная конференция проводится в 7 дней. Всего запланировано 80 докладов – первые два дня по 20 докладов, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что доклад профессора А. окажется запланированным на четвертый день конференции?

Решение: В первые два дня прочтут 40 докладов. На последние 5 дней останутся $80 - 40 = 40$ докладов, в день по $40 : 5 = 8$ штук. Вероятность того, что доклад профессора А. окажется запланированным на четвертый день, равна $\frac{8}{80} = 0,1$.

Ответ: 0,1.

Итоги занятия: Данное занятие носило вводный характер. С помощью него учащиеся вспомнили знакомые им из 7 и 8 класса понятия. На уроке были повторены такие понятия, как исход; случайное, достоверное, невозможное, противоположное событие; совместимые события, равновозможные события. Также были закреплены умения находить вероятности таких событий. Введены два подхода к определению вероятности – частотный и классический.

Технологическая карта данного занятия представлена в приложении 1.

Занятие 2. Совместные события. Правило суммы вероятностей

Цели:

1. Ввести такие понятия, как: совместные события.
2. Получить формулу нахождения вероятности суммы несовместных событий.
3. Разобрать задачи для подготовки к ОГЭ.

Структура занятия

1. Объяснение нового материала, разбор типовых задач: совместные события; правило суммы вероятностей.
2. Итоги занятия

Пример 1. Бросают монету и игральный кубик. Пусть первым бросают кубик, второй – монету. Если на кубике выпадет число очков, равное 4, а монета упадет орлом вверх, то исходом совместного бросания кубика и монеты будет последовательность (4, О). Для того чтобы записать множество всех исходов испытания, составляют таблицу. Запишем множество исходов совместного бросания кубика и монеты в виде таблицы (Таблица 5):

Таблица 5 – Множество исходов совместного бросания кубика и монеты

	О	Р
1	1, О	1, Р
2	2, О	2, Р
3	3, О	3, Р
4	4, О	4, Р
5	5, О	5, Р
6	6, О	6, Р

В первом столбце таблицы выпишем исходы броска кубика: 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. В первой строке таблицы выпишем исходы бросания монеты: О или Р. Остальные клетки заполним последовательностями исходов двух бросков по принципу «строка-столбец».

Пусть событие А – «Выпала решка». Исходами события А будут: (1, Р), (2, Р), (3, Р), (4, Р), (5, Р), (6, Р).

Пусть событие В – «Выпало 6 очков». Исходами события В будут: (6, Р), (6, О).

Пусть событие С – «Выпал орел и четное число очков». Исходами события С будут: (2, О), (4, О), (6, О).

Такая таблица называется таблицей возможных исходов испытания. Преимущества составления данной таблицы в отличие от обычного перечисления исходов в том, что при ее составлении практически невозможно упустить по невнимательности какую-либо комбинацию.

Рассмотрим задание из ОГЭ по теме занятия.

Пример 2. В коробке с чаем 5 пакетиков с чёрным чаем, 5 пакетиков красного чая, а также 15 пакетиков зеленого чая. Иван наугад достаёт 1 пакетик. Найдите вероятность того, что это пакетик красного чая?

Решение: Обозначим вероятность того, что Иван достанет пакетик красного чая « $P(K)$ ». Решим уравнение:

$$P(K) = 5/(5+5+15)$$

$$P(K) = \frac{5}{25} = 0,2$$

Ответ: $P(K) = 0,2$.

Примерами задач также выступают задания, рассмотренные нами в пункте 2.2 (Задачи 1-2).

Занятие 3. Независимые испытания. Правило умножения вероятностей

Цели занятия:

1. Ввести такие понятия, как: совместные испытания, зависимые и независимые испытания, испытания по схеме с возвращением/без возвращения, зависимые и независимые события.

2. Получить формулу нахождения вероятности осуществления независимых событий.

3. Разобрать задачи с перебором вариантов для подготовки к ОГЭ.

Структура занятия

1. Объяснение нового материала, разбор типовых задач: – зависимые и независимые совместные испытания; – зависимые и независимые события; – правило умножения вероятностей.

2. Итоги занятия.

Пример 1. Пусть в коробке лежит 10 одинаковых простых карандашей. Из нее наугад достают три карандаша.

Извлечение одного карандаша является единичным испытанием.

Существует два способа извлечения карандашей. Первый способ заключается в том, что выбранный карандаш кладется обратно в коробку и далее испытание повторяется до определенного результата. Этот тип

испытаний называется испытанием по схеме с возвращением. Такие испытания являются повторными испытаниями (участвует один и тот же набор предметов). Поэтому испытания по схеме с возвращением считаются независимыми.

Во втором случае первый карандаш не возвращается обратно в коробку и число карандашей в коробке после проведения первого испытания изменяется. Такой тип испытаний называется испытанием по схеме без возвращения. Здесь условия проведения последующих испытаний обусловлены исходами предшествующих испытаний (набор предметов меняется). Поэтому испытания по схеме с возвращением считаются зависимыми.

Зависимость испытаний переносится на отношения между исходами и событиями, связанными с этими испытаниями. Т.е. в результате независимых испытаний наступают независимые события, в результате зависимых испытаний – зависимые события.

При этом в случае независимости событий вероятность наступления одного из них не меняется от того, что наступило или нет второе; в случае зависимости событий после наступления одного из событий вероятность наступления другого меняется.

Пример 2. Какие из перечисленных испытаний (событий) являются зависимыми, а какие - нет?

- В пенале лежит 5 ручек с синей пастой и 2 ручки с черной пастой. Для выполнения домашнего задания девочка берет две ручки наугад. После выполнения домашнего задания ручки возвращаются в пенал. Зависимо ли испытание «Достать из пенала 2 ручки наугад» в данных условиях? Если в ручке заканчивается паста, ее выкидывают. В одной из ручек закончилась паста. Является ли теперь испытание «Достать из пенала 2 ручки наугад» зависимым/независимым? Почему? Влияет ли количество выброшенных ручек на зависимость испытания?

Бросают игральную кость. Является ли бросок кости зависимым испытанием? При каком условии оно станет зависимым/независимым? Почему?

- В коридоре стоит два автомата с кофе. В одном из них заканчивается кофе. Является ли это событием или испытанием? Каков его характер (зависимое или нет)?

- Баскетбольный мяч бросают в корзину. В результате третьего броска мяч попал в корзину. Что из перечисленного является событием, а что - испытанием? Являются ли они зависимыми? Почему?

- Из комода наугад достали одну коричневую перчатку из 4 черных и 2 коричневых. Зависимо ли данное событие?

Пример 3. Из урны, где лежат красные и оранжевые шары, по схеме с возвращением достают три шара наугад. Событие A – «первым достают красный шар», событие B – «первым достают оранжевый шар», событие C – «вторым достают красный шар», событие D – «вторым достают оранжевый шар». Укажите пары зависимых и независимых событий.

Решение: испытания независимые. Пары независимых событий: A и C , A и D , B и C , B и D .

Пример 4. Путешественник наугад выбирает путь среди дорог (Рисунок 3). Событие A (B , C ...) – путешественник пришел в пункт A (B , C ...). Укажите все пары зависимых и независимых событий.

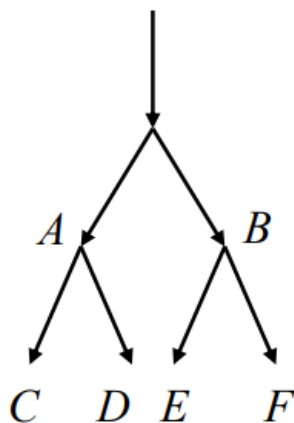


Рисунок 3 – Дерево (граф) возможных вариантов

Решение: Независимыми между собой событиями будут A и B , C и D , E и F . Выбор развилки A или B будет влиять на то, какие варианты останутся у путешественника, поэтому события A и C , A и D , B и E , B и F , A и E , A и F , B и C , B и D – пары зависимых событий.

Пример 5. Шахматный турнир проводится в 2 круга. Во встречах шахматистов Соловьева и Дьяченко шансы на победу первого из них оценивают на 70%, а второго – на 20%. За победу в партии шахматисту дается два очка, за ничью – одно очко, за поражение – ноль очков. Составить множество исходов испытания. Посчитать вероятность каждого исхода.

Решение: Составим множество исходов испытания (Таблица 6).

Таблица 6 – Множество исходов испытания (с расчетом вероятности каждого исхода)

	$\frac{Пс}{0,7}$	$\frac{Пд}{0,2}$	$\frac{Н}{0,1}$
$\frac{Пс}{0,7}$	$\frac{Пд, Пс}{0,14}$	$\frac{Пс, Пд}{0,14}$	$\frac{Пс, Н}{0,07}$
$\frac{Пд}{0,2}$	$\frac{Пд, Пс}{0,14}$	$\frac{Пд, Пд}{0,04}$	$\frac{Пд, Н}{0,02}$
$\frac{Н}{0,1}$	$\frac{Н, Пс}{0,07}$	$\frac{Н, Пд}{0,02}$	$\frac{Н, Н}{0,01}$

Под чертой запишем вероятности наступления событий: ПС – победа Соловьева, ПД – победа Дьяченко, Н – ничья. Вероятность ничьи вычислим, отняв от единицы вероятности победы Соловьева и Дьяченко. Заполним таблицу последовательностями возможных исходов, применяя правило вычисления вероятности совместного осуществления двух независимых событий.

Итоги занятия: на занятии были введены и закреплены такие понятия, как: единичные испытания, зависимые и независимые испытания, испытания по схеме с возвращением/без возвращения, зависимые и независимые события. К каждому понятию были приведены и разобраны примеры, формулы разобраны в задачах.

Занятие 4. Несколько независимых совместных испытаний. Совместное применение правил суммы и умножения вероятностей

Цели:

1. Разобрать случай нахождения вероятности нескольких независимых событий при проведении нескольких независимых совместных испытаний, сформулировать правило умножения вероятностей.

2. Разобрать составление таблицы исходов нескольких независимых совместных испытаний.

3. Разобрать задачи на независимые события и правило умножения, а также задачи на совместное применение правил суммы и умножения вероятностей, предлагаемые в ОГЭ.

Структура занятия

1. Объяснение нового материала, разбор типовых задач: – правило умножения вероятностей; – различные случаи независимых совместных испытаний, составление таблицы исходов нескольких независимых совместных испытаний.

2. Итоги занятия.

Пример 1. Подбрасывают четыре игральных кубика. Найти вероятность, что на первом кубике выпадет нечетное число очков, на втором – число очков, кратное 3, на третьем – либо 1, либо 5, на четвертом – четное число очков.

Решение: Событие A – «на первом кубике выпадет нечетное число очков». Событие B – «на втором кубике выпадет число очков, кратное трем». Событие C – «на третьем кубике выпадет либо 1, либо 5». Событие D – «на четвертом кубике выпадет четное число очков». События A, B, C, D – независимые. Следовательно, $P(A, B, C, D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D)$;

$$P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{3}; P(C) = \frac{1}{3}; P(D) = \frac{1}{2}.$$

$$P(A, B, C, D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{36}$$

Ответ: $\frac{1}{36}$.

Пример 2. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень первого стрелка равна 0,5; вероятность попадания второго – 0,7; вероятность попадания третьего стрелка равна 0,4. Найти вероятность того, что первые два стрелка попадут в мишень, а третий промахнется.

Решение: Событие A – «первый стрелок попадет в мишень». Событие B – «второй стрелок попадет в мишень». Событие C – «третий стрелок попадет в мишень». Событие $\bar{C}$ – «третий стрелок промахнется».

Вероятность того, что третий стрелок промахнется, равна: $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,4 = 0,6$. Тогда искомая вероятность по правилу умножения вероятностей равна: $P(A, B, \bar{C}) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) = 0,5 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,21$.

Ответ: 0,21.

Пример 3. Подбросили три монеты. Построить таблицу исходов данного испытания и подсчитать вероятность выпадения двух и более «решек».

Решение: Представим подбрасывание трех монет в виде двух испытаний: подбрасывание двух первых монет и подбрасывание третьей. Тогда таблица будет строиться следующим образом: построим множество исходов двух первых испытаний в виде таблицы (Таблица 7).

Таблица 7 – Множество исходов двух первых испытаний

	$\begin{matrix} 0 \\ \hline 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} P \\ \hline 0,5 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0 \\ \hline 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0 \\ \hline 0,25 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,P \\ \hline 0,25 \end{matrix}$
$\begin{matrix} P \\ \hline 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} P,0 \\ \hline 0,25 \end{matrix}$	$\begin{matrix} P,P \\ \hline 0,25 \end{matrix}$

Далее запишем получившиеся исходы в первый столбец второй таблицы. Заполним клетки второй таблицы аналогично (Таблица 8).

Таблица 8 – Множество исходов трех испытаний

	$\begin{matrix} 0 \\ \hline 0,5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} P \\ \hline 0,5 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0,0 \\ \hline 0,25 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0,0 \\ \hline 0,125 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,0,P \\ \hline 0,125 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 0,P \\ \hline 0,25 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,P,0 \\ \hline 0,125 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0,P,P \\ \hline 0,125 \end{matrix}$

Продолжение таблицы 8

$\frac{P, O}{0,25}$	$\frac{P, O, O}{0,125}$	$\frac{P, O, P}{0,125}$
$\frac{P, P}{0,25}$	$\frac{P, P, O}{0,125}$	$\frac{P, P, P}{0,125}$

Пусть событие A – «выпадение двух или более «решек». Этому событию благоприятствует 4 исхода: O, P, P ; P, O, P ; P, P, O ; P, P, P . Искомая вероятность: $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Итоги занятия: на уроке были разобраны случай проведения нескольких независимых совместных испытаний и выведена формула для нахождения вероятности нескольких независимых событий. Построены таблицы исходов для нескольких независимых совместных испытаний. Разобраны задачи на совместное применение правил сложения и умножения вероятностей.

Занятие 5. Два зависимых совместных испытания. Несколько зависимых совместных испытаний

Цели:

1. Сформулировать понятие условной вероятности.
2. Вывести формулу для расчета вероятности осуществления двух и более совместных зависимых событий.

Структура занятия

1. Объяснение нового материала, разбор типовых задач: – условная вероятность; – правило умножения вероятностей; – полная вероятность.
2. Итоги занятия.

Пример 1. Из урны, где лежат три синих и четыре красных шара, по схеме без возвращения достают два шара наугад. Найти условную вероятность, что вторым достанут красный шар, если первым достанут синий шар; красный шар.

Решение: Пусть событие A – «первым достанут красный шар». Событие B – «первым достанут синий шар». Событие C – «вторым достанут красный шар».

Если первым достанут красный шар, то в урне останется три красных шара и три синих шара. Искомая вероятность равна $P(C/A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$.

Пример 2. В партии 1000 деталей. Брак составляет 3%. Для проверки выбирают две детали наугад. Найти условную вероятность, что вторая деталь окажется бракованной, если первая деталь будет соответствовать стандартам; окажется бракованной.

Решение: Пусть событие A – «первая деталь соответствует стандартам». Событие B – «первая деталь бракованная». Событие C – «вторая деталь бракованная».

В партии из 1000 деталей бракованными могут оказаться $0,03 \cdot 1000 = 30$ деталей; не бракованными – $1000 - 30 = 970$.

Если первой достанут деталь, соответствующую стандартам, то в партии останется 969 рабочих деталей и 30 бракованных. Вероятность достать второй деталью бракованную равна: $P(C/A) = \frac{30}{999} = \frac{10}{333}$.

Если первой достанут бракованную деталь, то в партии останется 970 рабочих деталей и 29 бракованных. Вероятность достать второй деталью бракованную равна: $P(C/B) = \frac{29}{999}$.

Ответ: $\frac{10}{333}, \frac{29}{999}$.

Пример 3. В коробке лежат три карандаша: синий, красный и желтый. Из коробки без возвращения берут два карандаша наугад. Найти вероятность, что сначала достанут синий карандаш, затем – желтый.

Решение: Пусть событие A – «первым достанут синий карандаш». Тогда событие B – «вторым достанут желтый карандаш». $P(A) = \frac{1}{3}$. Когда из коробки достанут один из карандашей (синий), в коробке останутся два карандаша: красный и желтый. Поэтому вероятность достать желтый карандаш равна

$P(B/A) = \frac{1}{2}$. Тогда вероятность того, что сначала возьмут синий, а затем – желтый карандаш, равна $P(A, B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Итоги занятия: на данном занятии было введено понятие условной вероятности и рассмотрен случай осуществления двух и более зависимых совместных событий, выведена формула для расчета вероятности осуществления двух и более совместных зависимых событий.

Занятие 6. Элементы теории вероятностей геометрического содержания

Цели:

1. Сформулировать понятие геометрической вероятности.
2. Вывести формулу для расчета геометрической вероятности.
3. Закрепить ранее изученный материал по теории вероятностей и геометрии путем решения задач по теории вероятностей геометрического содержания.

Структура занятия

1. Объяснение нового материала, разбор типовых задач: – различные подходы к вероятности; – геометрическая вероятность; – решение и разбор задач.

2. Итоги занятия

Пример 1. После землетрясения на железнодорожных путях между 30-м и 60-м километрами железной дороги часть рельс деформировалась. Какова вероятность того, что деформация произошла между 40-м и 46-м километрами дороги?

Решение: Используем геометрическое определение вероятности. Общему числу исходов соответствует участок длиной $l(\Omega) = 60 - 30 = 30$ (км), благоприятствующему количеству исходов соответствует участок длиной $l(A) = 46 - 40 = 6$ (км). Получаем:

$$P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

Пример 2. Мишень имеет форму окружности радиуса 9 (Рисунок 4). Какова вероятность попадания снаряда в ее левую верхнюю четверть, если попадание в любую точку мишени равновероятно? Пропуски мимо мишени исключены.

Решение: Используем формулу для нахождения вероятности: $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$, где $S(A)$ - площадь левой верхней четверти круга, $S(\Omega)$ - площадь всего круга.

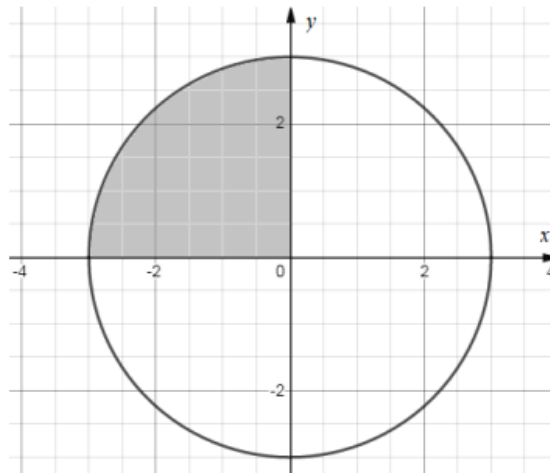


Рисунок 4 – Мишень с выделенным множеством исходов, благоприятных событию А

Очевидно, что $S(A) = \frac{S(\Omega)}{4}$, Тогда имеем: $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 3. В квадрат, сторона которого равна $a = 4$, наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшего угла квадрата не меньше, чем 2?

Решение: Пусть событие А – «расстояние от точки, брошенной наугад в квадрат, до ближайшего угла не меньше, чем 2». Изобразим квадрат (Рисунок 5).

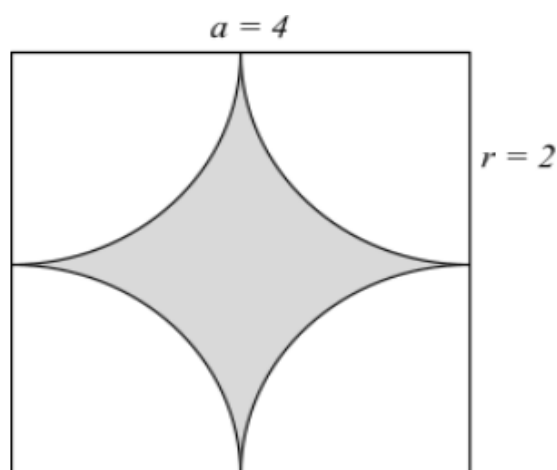


Рисунок 5 – Квадрат с выделенным множеством исходов, благоприятных событию А

Фигура, которая закрашена серым цветом, представляет собой множество исходов, благоприятных событию А - в случае попадания точки в данную область расстояние до ближайшего угла будет больше (а значит, не меньше) 2.

Действительно, не закрашенные области - четверти круга радиуса $r = 2$. Если точка попадет в одну них, то расстояние до соответствующего угла будет меньше либо равно радиусу $r = 2$, а значит, выполнится событие, противоположное данному.

Выведем формулу для нахождения вероятности, используя предыдущие рассуждения. Общему числу исходов соответствует площадь квадрата

$$S(\Omega) = a^2 = 4^2 = 16.$$

Обозначим площадь круга радиуса $r = 2$ как Sr ; тогда

$$Sr = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi.$$

Благоприятствующему числу исходов соответствует площадь закрашенной фигуры $S(A) = S(\Omega) - 4S'r$, где $S'r$ - площадь одной четверти круга. Очевидно, что $4S'r = Sr$, т. е. 4 четверти круга образуют полный круг радиуса $r = 2$. Тогда $S(A) = S(\Omega) - Sr = 16 - 4\pi$.

$$\text{Значит, } P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{16 - 4\pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0,2146.$$

$$\text{Ответ: } 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0,2146.$$

Пример 4. На окружности даны точки A , B и D , причём AD - диаметр окружности, точки B и D не совпадают. На этой же окружности выбирается точка C . Какова вероятность, что отрезок BC пересекается с диаметром AD ? Длина окружности равна L .

Решение: Пусть событие A – « BC пересекается с AD ». Проиллюстрируем возможные исходы: всего может выполняться два события - A и $\bar{A}$ (Рисунок 6).

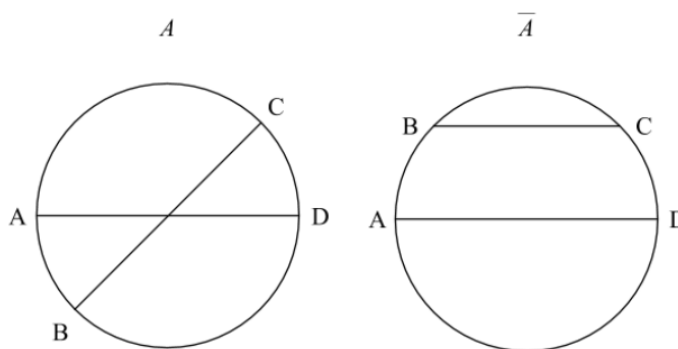


Рисунок 6 – Возможные исходы выбора точки C

Легко заметить, что событие A наступает, если точка C лежит на полуокружности DA , не содержащей точку B . Итак, общему количеству исходов соответствует длина всей окружности $l(\Omega) = L$, а благоприятствующему числу исходов соответствует длина определенной полуокружности $l(A) = \frac{L}{2}$. Тогда $P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{\frac{L}{2}}{L} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Итоги занятия: на занятии введены понятие и формула для вычисления геометрической вероятности; закреплён материал по теории вероятностей и геометрии путем разбора нескольких задач на теорию вероятностей геометрического содержания.

Занятие 7. Дидактическая игра

Цель занятия – повтор пройденного материала.

Целью игры является повышение интереса к математической науке и оказание содействия в развитии внимания, чувства товарищества, а также взаимопомощи.

Необходимое оборудование - плакат с разработанными маршрутами и набор карточек.

Структура занятия и ход игры представлены в приложении 2.

Занятие 8. Контрольная работа

Цель занятия - проверка знаний по ранее изученным темам.

Структура занятия (решение задач по следующим темам): случайные исходы и события, вероятности случайных событий; совместные испытания, правило суммы вероятностей; независимые испытания, правило умножения вероятностей; совместное применение правил суммы и умножения вероятностей; зависимые события; элементы теории вероятностей геометрического содержания.

Для проверки знаний по итогу проведения семи уроков дается контрольная работа из 6 заданий. Контрольная работа имеет два варианта, на занятие дается один из вариантов. Варианты контрольной с решением представлены в приложении 3.

3.3 Апробация разработанного факультативного курса по теории вероятностей

Апробация факультативных занятий осуществлялась в МБОУ СОШ №63 г. Пенза под руководством учителя математики Дорофеевой Людмилы Геннадьевны. Факультативные занятия посещали ученики 9 классов, всего 16 человек. Занятия проводились раз в неделю.

Занятия проводились в лекционно-практической форме, ученики проявляли активность и самостоятельность при разборе примеров. На занятиях

не всегда присутствовал полный состав обучающихся, некоторые ученики болели по 7-10 дней.

По результатам проведения факультативных занятий можно сделать вывод, что обучающиеся усвоили основные математические законы и понятия по теме «Теория вероятностей», научились использовать её при анализе и решении задач.

На занятиях не всегда хватало времени для разбора всех запланированных нами примеров, в результате чего часть примеров была роздана обучающимся для изучения дома. В дальнейшем нами было пересмотрено распределение времени на уроке.

В разделе «Теория вероятностей» некоторые правила и положения (вероятности случайных событий, правило суммы вероятностей, простейший расчет условной вероятностей) ученикам удалось вывести самостоятельно, используя примеры и подсказки (интуитивно, из бытовых представлений). Возникали затруднения при решении некоторых заданий:

- Неоднозначность в определении упорядоченности/неупорядоченности выборки; наибольшие затруднения вызвали задачи, где из некоторого количества людей выбирается несколько человек. Было решено разделить эти случаи на те, где есть «должности» (например, выбираются дежурный и его заместитель - порядок выбора важен), и те, где нет «должностей» (например, выбираются 3 человека для дежурства - порядок выбора не важен).

- Путаница в применении правил умножения и сложения вероятностей; для этого был сделан акцент на слова И (применяется правило умножения) и ИЛИ (применяется правило сложения), которые определяются в задаче по смыслу. С помощью этого большинство обучающихся смогли разделить случаи применения правил.

В конце занятий была проведена контрольная работа, состоящая из 2 вариантов, включающих 6 задач. Одному учащемуся выдавался 1 вариант. На рисунке 7 представлены результаты проверки контрольной работы.

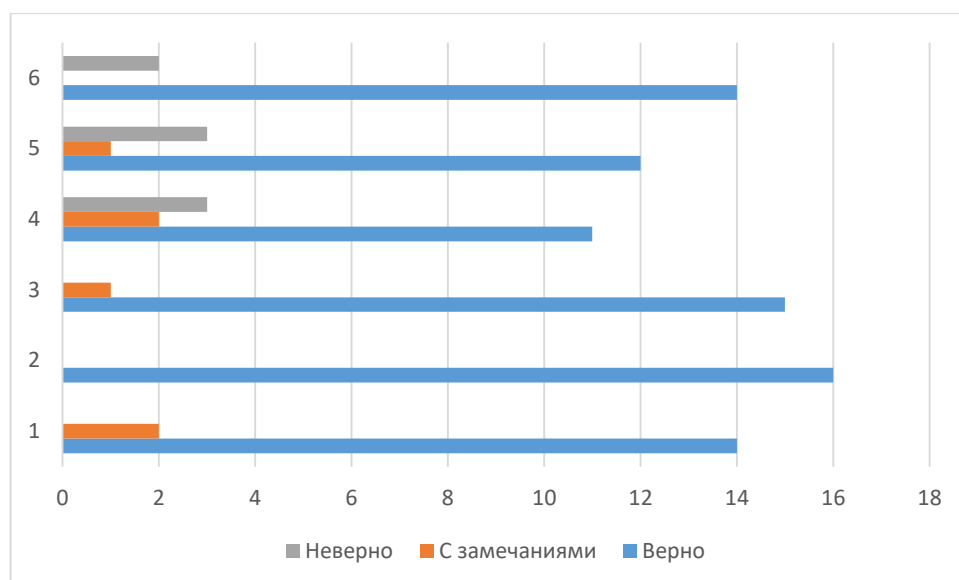


Рисунок 7 – Результаты проверки контрольной работы

При проверке контрольной работы были обнаружены следующие ошибки:

- Задание 1. Один ученик обозначил число 1 как простое, один - представил ответ в виде десятичной дроби и округлил ее до сотых.
- Задание 3. Ученик представил ответ в виде десятичной дроби и округлил ее до сотых.
- Задание 4. Трое из обучающихся перепутали, когда нужно применять правило сложения вероятностей, а когда - правило умножения вероятностей. Один учащийся допустил арифметическую ошибку при подсчете. Один представил ответ в виде десятичной дроби и округлил ее до сотых.
- Задание 5. Один обучающийся представил ответ в виде десятичной дроби и округлил ее до сотых; двое применили правило умножения вероятностей, один не успел решить задание из контрольной.
- Задание 6. Двое учеников перепутали пространство элементарных исходов с множеством благоприятствующих исходов.

Замечания и ошибки были объяснены и проработаны с учениками в индивидуальном порядке и письменной форме; нескольким обучающимся были выданы дополнительные материалы, опорные схемы, которые помогли им разобраться в теории. Был сделан упор на правильный формат записи ответа.

По результатам проверки контрольной работы и проведения нами занятий были сделаны следующие выводы:

1. Необходимо связать правило сложения вероятностей со словом ИЛИ, а правило умножения - со словом И во избежание путаницы в применении этих правил. В этом случае условие преобразуется в «ИЛИ ..., ИЛИ ...» либо «И ..., И ...» и соответственно применяется то или иное правило.

2. Необходимо акцентировать внимание на зависимости/независимости событий, подчеркнув, что в случае зависимости событий вероятности по мере наступления событий меняются.

3. При записи ответа на задачу необходимо писать точное значение, не округляя и не переводя обыкновенную дробь в десятичную, если это не указано в условии задачи. На ОГЭ все ответы записываются в формате десятичной дроби, при необходимости, округленной до определенного знака (если это указано в условии).

По результатам проведения уроков и работы над ошибками можно сделать вывод о том, что обучающимися была успешно усвоена программа, предложенная нами для занятий по теории вероятностей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что изучение теории вероятностей способствует развитию у учащихся наблюдательности, внимания и сосредоточенности, инициативы и настойчивости. Все это имеет большое значение для формирования их характера.

Очень важно сформировать у учащихся представления о случайных событиях и вероятностях, так как многие актуальные проблемы зачастую являются лишь задачами из теории вероятностей. Кроме того, задачи на комбинаторику и статистику ученикам непременно встретятся в заданиях ОГЭ.

В первой главе ВКР нами рассмотрены теоретические аспекты основ обучения элементам теории вероятностей в 5-11 классах. Выявлены цели обучения элементам теории вероятностей в школьном курсе математики. Проанализированы подходы к использованию элементов теории вероятностей в школьном курсе математики и содержание учебных пособий по математике.

Вторая глава выпускной квалификационной работы посвящена методическим аспектам обучения учеников элементам теории вероятности. Нами проанализированы методики изучения элементов математической статистики, теории вероятностей и комбинаторики.

Анализ требований к ОГЭ по теории вероятностей и УМК, входящих в Федеральный перечень, позволил сделать вывод, что все УМК, включающие в себя разделы комбинаторики и теории вероятностей, имеют необходимую базу, удовлетворяющую вышеназванным требованиям. Учебники разнятся между собой по таким критериям, как: академичность изложения материала, количество разбираемых в учебнике примеров, возможность дифференцированного обучения по предмету, предлагаемые обучающимся приемы для решения задач, наличие либо отсутствие некоторых глав по комбинаторике и теории вероятностей (не входящих в перечень требований). Кратко были описаны различия в предлагаемых для обучения программах.

Таким образом, был выявлен круг изучаемых в школе понятий и законов комбинаторики и теории вероятностей и возможных вариаций представления знаний для обучающихся.

В третьей главе нами представлены основные цели организации внеклассной работы по математике в школе. Разработан факультативный курс по математике для 9 класса «Элементы теории вероятности». Обучающимся были предложены 6 уроков для изучения и повторения материала и два занятия для проведения дидактической игры по теме и контрольного среза.

В результате происходило закрепление и углубление материала и подготовка к сдаче экзамена. Таким образом была осуществлена разработка факультативного курса по элементам теории вероятностей для подготовки к ОГЭ и углубления имеющихся у обучающихся знаний.

Апробация разработанных факультативных занятий проводилась в МБОУ СОШ № 63 в 9 классах с 10.02.2023 по 17.03.2023 под руководством учителя математики. Проведение контрольной работы показало, что в среднем у обучающихся не возникло больших проблем с усвоением материала, однако, были непонятые ими моменты. Допущенные ими ошибки были проработаны. По результатам апробации были сделаны выводы, касающиеся объяснения конкретного материала.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Баландина И. А. Стохастическая линия в средней школе: Начнем с анализа // Математика. 2009. №14. С. 12-19.
2. Головкова Л. В. О проблемах введения понятия «вероятность события» в курсе математики основной школы // Научно-технический прогресс как фактор развития современной цивилизации: сборник статей по итогам международной научно-исследовательской конференции. Магнитогорск. 2017. С. 26-29.
3. Дорофеев Г. В., Шарыгин И. Ф., Суворова С. Б. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразовательных учреждений. М. : Просвещение, 2019. 288 с.
4. Дорофеев Г. В. Математика. Серия учебников для 5 – 9 классов / Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин. М. : Просвещение, 2012. 112 с.
5. Зубарева И. И. Математика. Серия учебников для 5 – 6 классов / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. М. : Просвещение, 2009. 104 с.
6. Ильина Т. А. Педагогика: Курс лекций. М. : Просвещение, 1984. 495 с.
7. Инельдер Б. Развитие представлений о случайности и вероятности в детском возрасте [1976] // Жан Пиаже: теория, эксперименты, дискуссии : Сб. статей. М. : Просвещение, 2001. 624 с.
8. Макарычев Ю. Н. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей. Пособие для 7 – 9 классов / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк; Под редакцией С.А. Теляковского. М. : Просвещение, 2013. 78 с.
9. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум : учеб. пособие для студ. матчем. фактов пед. ун-тов. М. : Дрофа, 2007. 320 с.

10. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы (базовый уровень) : методическое пособие для учителя. М. : Мнемозина, 2010. 202 с.
11. Мохира Р. Изучение элементов комбинаторики в средней школе с использованием интересных практических задач // Педагогический журнал Башкортостана. 2019. №3(82). С. 93-94.
12. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Психология интеллекта. Генезис числа у ребенка. Логика и психология. М. : Просвещение, 1969. 659 с.
13. Решу ОГЭ: Тренировочные варианты. URL: <https://oge.sdamgia.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения 10.02.2023).
14. События. Вероятности. Статистическая обработка данных. Доп. Параграфы к курсу алгебры 7-9 классов. Мордкович А. Г., Семенов П. В. М. : Мнемозина, 2008. 112 с.
15. Студенечкая В. Н. Статистика и теория вероятностей на пороге основной школы // Математика в школе. 2004. №6. С. 64-70.
16. Факультативный курс по математике: Теория вероятностей : учеб. пособие для 9-11 кл. сред. шк. М. : Просвещение, 1990. 160 с.
17. ФГОС основного общего образование. URL: <https://fgos.ru/>. Заглавие с экрана (дата обращения 04.02.2023).
18. Федосеев В. Н. Решение вероятностных задач. 5-е изд. М. : Авангард, 2007. 200 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Технологическая карта занятия

Класс	9
Тип урока (занятия)	Комбинированный
Тема	Случайные исходы и события. Вероятности случайных событий.
Цель	Создание условий для формирования у обучающихся основных понятий по теории вероятностей: исход; случайное, достоверное, невозможное, противоположное событие; совместимые события, равновозможные события. Создание условий для закрепления умения находить вероятности перечисленных событий.
Основные термины, понятия	Теория вероятностей; исход; случайное, достоверное, невозможное, противоположное событие; совместимые события, равновозможные события.
Планируемый результат	
Предметные умения: - Знать основные понятия по теории вероятностей; - Уметь решать задачи на нахождение вероятности случайных, достоверных, невозможных, противоположных событий; на нахождение вероятности совместимых событий и равновозможных событий.	<p>Личностные: осознание математической составляющей окружающего мира.</p> <p>Регулятивные: осознание возникшей проблемы, определение последовательности и составление плана и последовательности действий для решения возникшей проблемы, внесение необходимых дополнений и коррективов в план и способ действия в случае расхождения эталона, реального действия и его результата с учётом оценки этого результата самим обучающимся, учителем, товарищами;</p> <p>Познавательные: постановка и формулирование проблемы, самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера, выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий, рефлексия способов и условий действия, контроль и оценка процесса и результатов деятельности.</p> <p>Коммуникативные: умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации; владение монологической и диалогической формами речи, умение работать индивидуально и в парах.</p>
Организация пространства	
Формы работы	Ресурсы
Фронтальная, работа в группах, индивидуальная.	-

Дидактические задачи этапов занятия

№ п/п	Этапы занятия	Дидактические задачи (цель этапа)
1	Организационный этап (2 мин)	включение учащихся в учебную деятельность на личностно значимом уровне.
2	Актуализация опорных	готовность мышления и осознание потребности к

	знаний (5 мин)	построению нового способа действия.
3	Постановка учебной проблемы (3 мин)	выявление и фиксация места и причины затруднения.
4	Формулирование проблемы, планирование деятельности (3 мин)	постановка цели учебной деятельности, выбор способа и средств ее реализации
5	Открытие нового знания (7 мин)	построение и фиксация нового знания
6	Первичная проверка понимания (9 мин)	применение нового знания в типовых заданиях.
7	Применение новых знаний (7 мин)	включение нового знания в систему знаний, повторение и закрепление ранее изученного
8	Рефлексия учебной деятельности на занятии (4 мин)	зафиксировать новое содержание занятия; организовать рефлексия и самооценку учениками собственной учебной деятельности

Технология изучения

Этапы урока	Формируемые умения	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
1. Организационный	<i>Личностные:</i> самоопределение; <i>Регулятивные:</i> целеполагание; <i>Коммуникативные:</i> планирование сотрудничества с учителем и сверстниками.	- Приветствие. Проверка готовности учащихся. Организация внимания.	- Подготовка класса к работе. Включение в деловой ритм.
2. Актуализация опорных знаний и умений	<i>Познавательные:</i> структурирование собственных знаний. <i>Коммуникативные:</i> организовывать и планировать учебное сотрудничество с учителем и сверстниками. <i>Регулятивные:</i> контроль и оценка процесса и результатов деятельности. <i>Личностные:</i> оценивание усваиваемого материала.	- Какие понятия по теории вероятностей нам уже известны? - Давайте вспомним. <i>Купив лотерейный билет, мы можем выиграть, а можем не выиграть; завтра на уроке математики вас могут вызвать к доске, а могут и не вызвать.</i> - Все эти события, можно назвать какими? - Какое событие называют случайным? <i>Буратино по совету лисы Алисы и кота Базилио решил зарыть</i>	- Случайными - Событие, которое может произойти, а может не произойти в процессе наблюдения или эксперимента, называют случайным событием.

		<p><i>свои золотые монеты на поле Чудес, чтобы из них появилось денежное дерево. Какой будет вероятность того, что из посаженных монет вырастет дерево?</i></p> <p>- Это какое событие?</p> <p><i>В очередном чемпионате мира по хоккею будет забит хотя бы один гол.</i></p> <p>- Это какое событие?</p> <p>- Приведите примеры достоверных, невозможных, случайных событий (по группам). Каким событием является:</p> <ul style="list-style-type: none"> • в январе всего 31 день - достоверный • после зимы обязательно будет лето - невозможный • после ночи наступит утро? – достоверный 	<p>- Если событие не может произойти в данном опыте, то его называют невозможным событием. Вероятность появления достоверного события равна 0.</p> <p>- Если событие при рассматриваемых условиях происходит всегда, то оно называется достоверным событием. Вероятность появления достоверного события равна 1.</p> <p>- Отвечают на вопросы учителя.</p>
3. Постановка учебной проблемы	<p><i>Познавательные:</i> анализ задачи с целью выявления существующих связей между</p>	<p>- Мы сегодня поделились на группы и проведем опыты.</p> <p><i>Группа 1:</i> Каждому подбросить монету и</p>	<p>- Учащиеся работают в группах, выводы записывают в тетрадь.</p>

	<p>данными и искомыми величинами, выбор эффективного способа решения.</p> <p><i>Регулятивные:</i> контроль и коррекция процесса и результатов деятельности.</p> <p><i>Коммуникативные:</i> умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли, опираясь на определения и теоремы.</p>	<p>записать результат в тетради. Найти вероятность того, что выпадет орел.</p> <p><i>Группа 2:</i> Каждому подбросить игральный кубик и записать результат в тетрадь. Найти вероятность того, что выпадет очко меньше 5.</p> <p><i>Группа 3:</i> В коробке лежат 5 зеленых, 5 красных и 10 черных карандашей. Каждый человек из группы наугад выньте 1 карандаш, запишите результат. Найдите вероятность того, что вынутый карандаш окажется красным.</p> <p><i>Группа 4:</i> В коробке лежат 5 желтых, 4 красных, 6 белых кругов. Наугад выньте 1 круг, результат запишите в тетрадь. Найдите вероятность того, что этот круг окажется белым.</p> <p>Обсудим эти опыты, сделаем выводы.</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ребята учились ли мы решать такого типа задачи? - У всех ли групп получилось верно решить задачи? - Какая проблема появилась перед нами при решении этой задачи? 	
<p>4. Формулирование проблемы.</p> <p>Постановка цели и задач урока.</p> <p>Мотивация учебной деятельности</p>	<p><i>Познавательные:</i> самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели.</p> <p><i>Личностные:</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> - О чем мы сегодня будем говорить? - Какова будет цель нашего занятия на протяжении урока? 	<ul style="list-style-type: none"> - Учились - Не у всех. - Нужно вспомнить, как, вычислить вероятность события и применять это в решении задач. - О случайных событиях и вероятности случайных событий. - Вспомнить, как решаются задачи на нахождение

учащихся.	самоопределение. <i>Регулятивные:</i> целеполагание. <i>Коммуникативные:</i> выражение и аргументация своих мыслей.	- Что мы получим в качестве результата нашей с вами работы в конце урока?	вероятности событий - Сформируем умение решать задачи на нахождение вероятности событий.
5. Открытие нового знания	<i>Познавательные:</i> моделирование, самостоятельное создание алгоритмов деятельности, анализ, синтез, построение логической цепи рассуждения, доказательство. <i>Коммуникативные:</i> сотрудничество в поиске и выборе способа решения возникшей проблемы. <i>Регулятивные:</i> планирование, прогнозирование.	- Давайте вспомним определение вероятности. (если ученики затрудняются, учитель задаёт наводящие вопросы или даёт определение сам) - Составим алгоритм нахождения вероятности. (Дан алгоритм с перемешанными пунктами, задача алгоритм восстановить, работая парами) Для нахождения вероятности события необходимо: • подсчитать все возможные случаи - n, • выбрать число интересующих нас случаев – m • вычислить отношение m и n. Вероятность события обозначается буквой $P = \frac{m}{n}$.	- Вероятность события А равна отношению числа исходов, благоприятствующих наступлению события А, к числу всех равновозможных исходов. - Восстанавливают алгоритм нахождения вероятности события, работая парами.
6. Первичная проверка понимания	<i>Познавательные:</i> структурирование знаний, выбор способа решения задач. <i>Регулятивные:</i> контроль, оценка, коррекция. <i>Коммуникативные:</i> выражение и аргументация	- Теперь, когда мы вспомнили, как находить вероятности события, те группы, которые не справились с решением задач такого вида в начале нашего занятия, попробуют их решить снова. - Закрепим навык вычисления вероятности	- Группы, которые не справились с решением задач в начале занятия, решают задачи в группах. (слабые ученики) - Остальные работают

	<p>своих мыслей, согласия или несогласия с мнением отвечающего.</p>	<p>случайного события, выполнив следующие задания.</p> <p>Пример 1. Из урны, где лежат 9 красных и 7 зеленых шаров, достают один шар наугад. Найти вероятность того, что достанут красный шар; зеленый шар.</p> <p>- Пример 2. На поверхности стола лежат 18 карт четырех мастей рубашкой вверх: 4 туза, 4 короля, 4 дамы, 4 валета и две по 10 масти трев и пики. Открывают одну карту наугад. Какова вероятность того, что откроют бубнового туза? Даму трев? Короля? Либо 10, либо валета? Карту червовой масти?</p>	<p>самостоятельно в тетрадах. Выполняют задания учителя. Затем объясняют решение слабым ученикам.</p> <p>- Решение: Заметим, что исходы испытания равновероятны. В дальнейшем мы не будем каждый раз писать о равновероятности исходов, если она очевидна.</p> <p>Пусть событие A – «достали красный шар», событие B – «достали зеленый шар». Всего в урне 16 шаров, общее количество исходов – 16. Событию A благоприятствует 9 исходов, событию B – 7. Следовательно, $P(A) = \frac{9}{16}$, $P(B) = \frac{7}{16}$.</p> <p>Ответ: $\frac{9}{16}$; $\frac{7}{16}$.</p> <p>- Решение: Базовое множество исходов испытания насчитывает 18 равновероятных исходов. Пусть событие A – «открыли бубнового туза»; событие B – «открыли даму трев»; событие C – «открыли короля»; событие D – «открыли либо 10, либо валета»; событие E – «открыли карту червовой масти». Событию A благоприятствует 1 исход,</p>
--	---	---	---

		<p>следовательно, $P(A) = \frac{1}{18}$; событию B также благоприятствует 1 исход, следовательно, $P(B) = \frac{1}{18}$; событию C благоприятствует 4 исхода, поэтому $P(C) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$; событию D благоприятствует 2 исхода, значит, $P(D) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$; событию E благоприятствует 4 исхода, поэтому $P(E) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$. Ответ: $\frac{1}{18}; \frac{1}{18}; \frac{2}{9}; \frac{1}{9}; \frac{2}{9}$.</p> <p>- Пример. 3. Из колоды, где лежат 4 короля и 4 дамы разных мастей, достают одну карту наугад. Событие A – «достали короля»; событие B – «достали даму пик»; событие C – «достали карту бубновой масти». Какие события являются совместными? Несовместными? Найдите вероятности наступления каждого события и вероятности совместного осуществления для каждой пары совместных событий.</p> <p>- Пример 4. Научная конференция проводится в 7 дней. Всего запланировано 80 докладов – первые два дня по 20 докладов, остальные распределены поровну между</p>	<p>Решение: Совместными являются события: A и C. Несовместными являются: A и B, B и C. Общее количество исходов испытания равно 8. Событию A благоприятствует 4 исхода, событию B – один исход, событию C – 2 исхода. Значит, $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{8}$, $P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. У событий A и C только один общий исход – достали бубнового короля. Поэтому $P(A, C) = \frac{1}{8}$. Ответ: $\frac{1}{2}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.</p> <p>- Решение: В первые два дня прочтут 40 докладов. На последние 5 дней останутся $80 - 40 = 40$ докладов, в день по $40 : 5 = 8$ штук. Вероятность</p>
--	--	---	---

		<p>оставшимися днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что доклад профессора А. окажется запланированным на четвертый день конференции?</p> <p>- Мы решили несколько задач на нахождение вероятностей, давайте попробуем еще раз сформулировать определения основных понятий теории вероятности: исход; случайное, достоверное, невозможное, противоположное событие; совместимые события, равновозможные события.</p>	<p>того, что доклад профессора А. окажется запланированным на четвертый день, равна $8 : 80 = 0,1$. Ответ: 0,1.</p> <p>- Событие – результат испытания.</p> <p>- Событие называется случайным, если в результате испытания оно может произойти или не произойти.</p> <p>- Достоверные – события, которые обязательно произойдут.</p> <p>- Невозможные события – события, которые не могут произойти в данных условиях.</p> <p>- Противоположные события – это два несовместных события, образующих полную группу событий. События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.</p> <p>- События называются равновозможными, если ни одно не является более возможным, чем другие.</p> <p>- Совместные события – два события, которые в</p>
--	--	--	--

			данных условиях могут происходить одновременно.
7. Применение новых знаний	<p><i>Личностные:</i> самоопределение.</p> <p><i>Познавательные:</i> анализ объектов с целью составления алгоритма решения задачи.</p> <p><i>Регулятивные:</i> контроль, коррекция.</p>	<p>- Ребята, скоро вас ждёт сдача экзаменов. Предлагаю решить следующие задания. Задания самостоятельной работы подобраны из сборника для подготовки к ОГЭ. На вычисление вероятности это 9-ое задание ОГЭ, и 10-ое задание ЕГЭ. Решить следующие задачи:</p> <p>1) Охарактеризуйте событие, о котором идет речь, как достоверное, невозможное или случайное.</p> <p><i>День рождения моего брата три раза в году.</i></p> <p>2) В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 2 красных, 9 желтых и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет желтое такси.</p> <p>3) В коробке 20 шаров. Из них 7 белых, 9 черных, 4 синие. Какова вероятность вытащить шар синего цвета?</p> <p>4) Найти вероятность того, что число выпавших при броске игральной кости очков четно.</p>	<p>- Учатся применять знания о нахождении вероятности в процессе индивидуальной работы. Взаимопроверка результатов работы осуществляется учащимися по критериям, записанных на экране</p>
8. Рефлексия учебной деятельности	<p><i>Личностные:</i> смыслообразование.</p> <p><i>Регулятивные:</i> оценка-осознание</p>	<p>Даёт качественную оценку работы класса и количественную оценку отдельных учащихся. Просит отдельных учеников зачитать</p>	<p>Осуществляют самооценку собственной учебной деятельности, соотносят цели и результаты, степень</p>

	уровня и качества усвоения; контроль.	алгоритм нахождения вероятности случайных событий.	их соответствия. Отвечают на вопросы учителя
--	---	--	--

Игра «Восхождение на пик знаний»

Цель: создание условий для повторения пройденного материала по теме «Теория вероятностей»; повышение интереса к математической науке и оказание содействия в развитии внимания, чувства товарищества, а также взаимопомощи.

Необходимое оборудования: плакат с разработанными маршрутами и набор карточек.

Ход занятия:

1. Сообщение темы и цели занятия.

2. Организация учащихся на проведения игры.

Учитель сообщает правила игры: игровое поле представляет собой рисунок с горным пейзажем и двумя маршрутами восхождения, на которых отмечены привалы, пронумерованные от 1 до 3. Перед началом игры формируется 2 команды, выбираются капитаны. Команды находятся на исходных позициях — «базах». В начале игры капитаны команд получают карточки с устными вопросами, на которые они отвечают коллективно. Выполнив первое задание, команда может начать двигаться по маршруту, выбрав себе номер маршрута.

Письменные задания выполняются у доски. Правильное решение задачи у доски одним из членов команды дает возможность продвинуться к «пику знаний». В противном случае команда должна оставаться на привале, пока не придут «спасатели» (члены другой команды).

В случае, если команда быстро и успешно продвигается по маршруту от привала к привалу, то учитель может объявить «спуск снежной лавины», предложив команде коллективно решить еще одну задачу.

Выигрывает команда, которая правильно выполнит все задания и достигнет «пика знаний».

3. Организация учащихся на выполнение работы.

Учитель помогает сформировать команды, раздает карточки с заданиями и следит за ходом игры.

Устные вопросы:

Задание 1 команде. Охарактеризуйте событие, о котором идет речь, как достоверное, невозможное или случайное.

Вы открыли эту книгу на любой странице и прочитали первое попавшееся существительное. Оказалось, что:

- А) в написании выбранного слова есть гласная буква;
- Б) в написании выбранного слова есть буква «о»;
- В) в написании выбранного слова нет гласных букв;
- Г) в написании выбранного слова есть «ь».

Задание 2 команде.

Для каждого из описанных событий, определите, каким оно является: невозможным, достоверным или случайным.

Бросают 2 игральные кости:

- А) на первой кости выпало 3 очка, а на второй – 5 очков;
- Б) Сумма выпавших на двух костях очков равна 1;
- В) На обеих костях выпало по 3 очка;
- Г) Сумма очков на двух костях меньше 15.

Задачи для решения на привалах

Привал 1

Задание 1 команде.

На одинаковых карточках написаны числа от 1 до 10 включительно (на каждой карточке – одно число). Карточки положили на стол, перевернули числами вниз и перемешали. Какова вероятность того, что на вынутой карточке окажется число: а) 7; б) нечетное; в) кратное 3; г) кратное 4; д) делящееся на 5; е) составное?

Задание 2 команде.

Из колоды карт (36 листов) вынимается наугад 1 карта.

Какова вероятность того, что эта карта: а) шестерка трэф; б) семерка; в) король красной масти; г) карта бубновой масти с числом; д) карта черной масти с четным числом; е) не с числом.

Привал 2

Задание 1 команде.

Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших на них очков будет равна 4?

Задание 2 команде.

Бросают три игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших на них очков будет равна 5?

Привал 3

Задание 1 команде.

Тест по теории вероятности

Вариант 1.

1. В игральной колоде 36 карт. Наугад выбирается одна карта. Какова вероятность, что эта карта – туз?

- 1) $\frac{1}{36}$ 2) $\frac{1}{35}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{36}{4}$

2. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность того, что выпадут две четные цифры?

- 1) 0,25 2) $\frac{2}{6}$ 3) 0,5 4) 0,125

3. В корзине лежат грибы, среди которых 10% белых и 40% рыжих. Какова вероятность того, что выбранный гриб белый или рыжий?

- 1) 0,5 2) 0,4 3) 0,04 4) 0,8

Задание 2 команде.

Тест по теории вероятности

Вариант 2.

1. В ящике находится 45 шариков, из которых 17 белых. Потеряли 2 не белых шарика. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик будет белым?

- 1) $\frac{17}{45}$ 2) $\frac{17}{43}$ 3) $\frac{43}{45}$ 4) $\frac{17}{45}$

2. Бросают три монеты. Какова вероятность того, что выпадут два орла и одна решка?

- 1) $\frac{3}{2}$ 2) 0,5 3) 0,125 4) $\frac{1}{3}$

3. В денежно-вещевой лотерее на 1000000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность выигрыша?

- 1) 0,02 2) 0,00012 3) 0,0008 4) 0,002

Итоги занятия:

- 1) объявляется команда победителей;
- 2) вручаются похвальных грамоты наиболее активным участникам игры;
- 3) коллективно разбираются нерешенные задачи или предлагаются другие способы решения задач.

Игра «Восхождение на пик знаний» является многоцелевой, поскольку позволяет решить комплекс дидактических задач. Устные упражнения дают возможность повторить основные понятия, факты, законы, развивают логическое мышление, речь учащихся. Письменные задания представлены на карточках и каждый ученик может выбрать оптимальный путь решения, продемонстрировав умение точно излагать математическую мысль и показать владение материалом.

Ответы:

Разминка:

1. д,с,н,с

2. с,н,с,д

1 этап:

1. 0,1;0,5;0,3;0,2;0,2;0,5

2. $\frac{1}{36}; \frac{1}{9}; \frac{1}{13}; \frac{5}{36}; \frac{1}{6}; \frac{4}{9}$

2 этап:

1. $\frac{1}{72}$

2. $\frac{1}{36}$

3 этап:

1. 3;1;1

2. 2;3;4

Контрольная работа

Вариант 1

1. На столе лежат пронумерованные карточки номерами вниз. Количество карточек равно 15, номера карточек – с 1 до 15. Переворачивают одну карточку наугад. Какова вероятность того, что карточка имеет номер 7? Что номер карточки кратен 3?

Решение: Запишем подряд числа от 1 до 15 для наглядности: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Вероятность того, что карточка имеет номер 7, равна $\frac{1}{15}$.

Исходы, благоприятствующие событию «номер карточки кратен 3»: 3, 6, 9, 12, 15. Всего исходов 5. Следовательно, вероятность того, что номер карточки кратен 3, равна $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

2. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Логарифмы», равна 0,3. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,48. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение: События, описываемые в задаче, являются несовместными, поэтому вероятность суммы событий равна сумме вероятностей: $0,3 + 0,48 = 0,78$.

3. Бросают два игральных кубика. Найти вероятности того, что на первом кубике выпадет четное число очков, а на втором – нечетное; на первом кубике выпадет от одного до четырех очков, а на втором – от пяти до шести очков.

Решение: Стороны кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность выпадения какого-либо числа очков на одном кубике равна $\frac{1}{6}$.

Вероятность того, что на первом кубике выпадет четное число очков, равна $\frac{1}{2}$. Вероятность того, что на втором кубике выпадет нечетное количество очков, равна $\frac{1}{2}$. Вероятность совместного осуществления этих событий равна $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Вероятность того, что на первом кубике выпадет от одного до четырех очков, равна $\frac{2}{3}$. Вероятность того, что на втором кубике выпадет от пяти до шести очков, равна $\frac{1}{3}$. Вероятность совместного осуществления этих событий равна $\frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

4. Бросают два игральных кубика. Найти вероятности того, что на первом кубике выпадет либо 5, либо 2 очка, а на втором кубике – либо 3, либо 6 очков.

Решение: Стороны кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность выпадения какого-либо числа очков на одном кубике равна $\frac{1}{6}$.

Вероятность того, что на первом кубике выпадет либо 5 очков, либо 2 очка, равна сумме вероятностей того, что на первом кубике выпадет 5 очков и того, что на первом кубике выпадет 2 очка и равна $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Вероятность того, что на втором кубике выпадет либо 3, либо 6 очков, также равна $\frac{1}{3}$. Вероятность совместного осуществления этих событий равна $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

5. В классе четыре отличника, тринадцать хорошистов и восемь троечников. Новый учитель наугад вызывает к доске двух учеников. Найти условные вероятности, что:

- вторым вызовут хорошиста, если первым вызвали отличника;
- вторым вызовут троечника, если первым вызвали отличника.

Решение: Всего в классе $4 + 13 + 8 = 25$ учеников. Вероятность того, что первым вызовут отличника, равна $\frac{4}{25}$. Тогда вероятность того, что вторым вызовут хорошиста, равна $\frac{13}{24}$.

Вероятность того, что первым вызовут отличника, равна $\frac{4}{25}$. Тогда вероятность того, что вторым вызовут троечника равна $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

6. В квадрат, сторона которого равна $a = 8$, наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшего угла квадрата меньше, чем 3?

Решение: Пусть событие A – «расстояние от точки, брошенной наугад в квадрат, до ближайшего угла меньше, чем 3».

Общему числу исходов соответствует площадь квадрата

$$S(\Omega) = a^2 = 8^2 = 64.$$

Обозначим площадь круга радиуса $r = 3$ как Sr ; тогда

$$Sr = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi.$$

Благоприятствующему числу исходов соответствует площадь закрашенной фигуры $S(A) = 4S'r$, где $S'r$ - площадь одной четверти круга. Очевидно, что $4S'r = Sr$, т. е. 4 четверти круга образуют полный круг радиуса $r = 3$. Тогда $S(A) = Sr = 9\pi$.

$$\text{Значит, } P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{9\pi}{64} \approx 0,418.$$

Вариант 2

1. На столе лежат пронумерованные карточки номерами вниз. Количество карточек равно 15, номера карточек – с 1 до 15. Переворачивают одну карточку наугад. Какова вероятность того, что номер карточки выражается нечетным числом? Что номер карточки – простое число?

Решение: Запишем подряд числа от 1 до 15 для наглядности: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. Исходы, благоприятствующие событию «номер карточки выражается нечетным числом»: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Всего исходов 8. Следовательно, вероятность того, что номер карточки выражается нечетным числом, равна $\frac{8}{15}$

Исходы, благоприятствующие событию «номер карточки – простое число»: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Всего исходов 6. Следовательно, вероятность того, что номер карточки – простое число, равна $\frac{6}{15}$.

2. На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Решение: События, описываемые в задаче, являются несовместными, поэтому вероятность суммы событий равна сумме вероятностей: $0,2 + 0,35 = 0,55$.

3. Бросают два игральных кубика. Найти вероятности того, что на первом кубике выпадет одно очко, а на втором – четное число очков; на обоих кубиках выпадет четное число очков.

Решение: Стороны кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность выпадения какого-либо числа равна $\frac{1}{6}$.

Вероятность того, что на первом кубике выпадет одно очко, равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что на втором кубике выпадет четное число очков, равна $\frac{1}{2}$. Вероятность совместного осуществления этих событий равна $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Вероятность того, что на первом кубике выпадет четное число очков, равна $\frac{1}{2}$. Вероятность того, что на втором кубике выпадет четное количество очков, также равна $\frac{1}{2}$. Вероятность совместного осуществления этих событий равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

4. Бросают два игральных кубика. Найти вероятности того, что на первом кубике выпадет либо 5, либо 2 очка, а на втором кубике – либо 3, либо 6 очков.

Решение: Стороны кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность выпадения какого-либо числа очков на одном кубике равна $\frac{1}{6}$.

Вероятность того, что на первом кубике выпадет либо 5 очков, либо 2 очка, равна сумме вероятностей того, что на первом кубике выпадет 5 очков и того, что на первом кубике выпадет 2 очка и равна $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Вероятность того, что на втором кубике выпадет либо 3, либо 6 очков, также равна $\frac{1}{3}$. Вероятность совместного осуществления этих событий равна $\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

5. В классе четыре отличника, тринадцать хорошистов и восемь троечников. Новый учитель наугад вызывает к доске двух учеников. Найти условные вероятности, что:

- вторым вызовут отличника, если первым вызвали отличника;
- вторым вызовут троечника, если первым вызвали троечника.

Решение: Всего в классе $4 + 13 + 8 = 25$ учеников.

Вероятность того, что первым вызовут отличника, равна $\frac{4}{25}$. Тогда вероятность того, что вторым вызовут отличника, равна $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

Вероятность того, что первым вызовут троечника, равна $\frac{8}{25}$. Тогда вероятность того, что вторым вызовут троечника, равна $\frac{7}{24}$.

6. Точку наудачу бросили на отрезок $[0; 2]$. Какова вероятность ее попадания в отрезок $[0,5; 1,4]$?

Решение Пространство элементарных исходов - весь отрезок $\Omega = [0; 2]$. Множество благоприятствующих исходов $A = [0,5; 1,4]$, при этом длины этих отрезков равны $l(\Omega) = 2$ и $l(A) = 0,9$ соответственно.

$$\text{Поэтому } P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)} = \frac{0,9}{2} = 0,45.$$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой

« 20 » 09 2022 г.
 Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Базаевой Евгении Сергеевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение элементов теории вероятностей в школе»

Утверждена приказом по Университету от « 28.09. » 2022г. № 809/О

Срок сдачи студентом законченной работы « 15 » 06 2023 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1	Выявить цели обучения элементам теории вероятностей в школьном курсе математики.	Октябрь – ноябрь 2022 г.	<i>выполнено</i>
2	Рассмотреть подходы к использованию элементов теории вероятности в школьном курсе математики, проанализировав учебные пособия.	Декабрь 2022 г.	<i>выполнено</i>
3	Изучить методические аспекты обучения учащихся элементам теории вероятностей в 5-11 классах.	Январь 2023 г.	<i>выполнено</i>
4	Разработать факультативный курс по математике для 9 класса «Элементы теории вероятностей».	Февраль – март 2023 г.	<i>выполнено</i>
5	Провести апробацию разработанного факультативного курса по теории вероятностей.	Апрель 2023 г.	<i>выполнено</i>
6	Оформление текста работы	Май – июнь 2023 г.	<i>выполнено</i>
7	Подготовка презентации и выступления	Июнь 2023 г.	<i>выполнено</i>

Дата выдачи задания «20» 09 2022 г.

Руководитель *Никитина* Никитина О.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

Базаева Базаева Е.С.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Базаевой Евгении Сергеевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Базаева Евгения Сергеевна, студент(ка) 5 курса заочной формы
Ф.И.О. студента
обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с
использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему
«Изучение элементов теории вероятностей в школе», выполненной мной
самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а
также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ,
кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная
квалификационная работа обучающихся по образовательным программам
высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета
и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата
является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из
университета.

Базаева
подпись
14.05.23
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 14.05.2023
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  О.Г. Никитина
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему: «Изучение элементов теории вероятностей в школе» студентки 5 курса Базаевой Евгении Сергеевны направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Ольга Геннадьевна Никитина



Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Базаева Евгения Сергеевна
Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://pnzgu.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 76
Начало загрузки: 14.05.2023 09:15:16
Длительность загрузки: 00:00:10
Имя исходного файла: БазаеваЕС_Изучение элементов теории вероятностей (оригинальность).docx
Название документа: БазаеваЕС_Изучение элементов теории вероятностей (оригинальность).docx
Размер текста: 102 кБ
Символов в тексте: 134270
Слов в тексте: 12639
Число предложений: 607

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 14.05.2023 09:28:45
Длительность проверки: 00:01:40
Комментарий: не указан
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: основная часть с. 1,3-68, содержание с. 2
Модули поиска: Сводная коллекция ЭБС, Интернет Плюс⁴, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), ИПС Адилет, Библиография, Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), Переводные заимствования издательства Wiley, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация, Медицина, Диссертации НБС, Коллекция НБС, Перефразирование по eLIBRARY.RU, Перефразирование по СПС ГАРАНТ: аналитика, Перефразирование по Интернету, Перефразирование по Интернету (En), Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ПГУ", СМИ России и СНГ, Шаблонные фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования



СОВПАДЕНИЯ
33,52%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
2,99%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
63,12%

14.05.2023

ДД.ММ.ГГГГ

подпись

О.Г. Никитина

И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Изучение элементов теории вероятностей в школе»
студентки Базаевой Евгении Сергеевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 183ФПМ51

Выпускная квалификационная работа Базаевой Евгении Сергеевны посвящена вопросам изучения теории вероятностей в школе.

Актуальность данной темы состоит в том, что изучение теории вероятности в школьный курс было введено не так давно, поэтому имеются определенные трудности с реализацией данного материала. Кроме того комбинаторные задачи достаточно часто встречаются на различных олимпиадах и неизменно вызывают затруднения у школьников.

Целью работы является разработка факультативных занятий для повторения и углубления полученных на уроках знаний по теории вероятности и актуализации материала перед ОГЭ.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения, списка литературы и приложения. Основная часть состоит из трех глав.

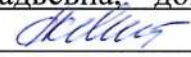
Первая глава работы посвящена теоретическим основам обучения элементам теории вероятностей в 5-11 классах. В ней рассмотрены цели обучения элементам теории вероятностей в школьном курсе математики и основные подходы к использованию элементов теории вероятностей в школе.

Вторая глава посвящена методическим аспектам обучения школьников элементам комбинаторики и теории вероятностей.

В третьей главе приведен разработанный факультативный курс по математике для 9 класса «Элементы теории вероятности». Подобран материал для проведения шести уроков для изучения и повторения материала. Также разработана дидактическая игра по соответствующей теме и задания для контрольного среза. В приложении приведена, кроме того, технологическая карта одного из занятий.

Работа Базаевой Е.С. является самостоятельным исследованием. Практическая значимость её исследования в том, что результаты работы могут быть использованы при проведении факультативных уроков математики и при подготовке к ОГЭ в общеобразовательной школе.

Выпускная квалификационная работа Базаевой Евгении Сергеевны заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна, доцент кафедры
«Математическое образование», к.ф.-м.н. 
(ФИО полностью, место работы, должность, ученое звание, степень) (подпись)