

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Изучение иррациональных уравнений и неравенств в школе»

Студент

Патеева 25.05.26 Патеева Олеся Рустямовна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

Никитина 25.05.26 Никитина О. Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева 30.06.25 Журавлева Е. Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.2026 № 10)

И.о. заведующего кафедрой

Паньженский 01.06.26 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 08.07.26 № 8)

Секретарь ГЭК

Журавлева 08.07.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ	6
1.1 Исторический аспект развития понятия «иррациональность»: роль и место иррациональных уравнений и неравенств в школьном курсе алгебры	6
1.2 Анализ содержания школьных учебников по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»	9
1.3 Методы решения иррациональных уравнений и неравенств	13
1.4 Иррациональные уравнения и неравенства в задачах ОГЭ и ЕГЭ	23
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ.....	28
2.1 Выявление типичных ошибок и затруднений учащихся при решении иррациональных уравнений и неравенств	28
2.2 Разработка методических рекомендаций и системы многоуровневых упражнений по теме решения иррациональных уравнений и неравенств на уроках алгебры и факультативных занятиях	39
2.3 Разработка урока изучения иррациональных уравнений и неравенств	44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	54
ПРИЛОЖЕНИЯ	57

ВВЕДЕНИЕ

Иррациональные уравнения и неравенства занимают важное место в школьном курсе математики, являясь неотъемлемым компонентом алгебры и начал математического анализа. Знания и навыки, полученные при работе с иррациональными выражениями, являются фундаментом для успешного освоения последующих тем курса алгебры, а также высшей математики, физики и многих других дисциплин. Кроме того, задачи на решение иррациональных уравнений и неравенств часто встречаются в материалах Основного государственного экзамена (ОГЭ) и Единого государственного экзамена (ЕГЭ), что подчеркивает их практическую значимость и необходимость понимания и усвоения учащимися на высоком уровне.

Изучение иррациональных уравнений и неравенств способствуют во многом также развитию логики, формированию навыков анализа и обобщения информации, а также умению грамотно применить теоретические знания. Однако, практика показывает, что изучение данной темы зачастую вызывает у школьников определённые затруднения. Эти трудности в большей степени связаны с логикой преобразования выражений, с выбором подходящего метода решения, с необходимостью учета области допустимых значений (ОДЗ), с риском потери решений или, наоборот, с риском появления посторонних корней. Часто ученики усваивают тему на уроках формально, можно даже сказать поверхностно, не понимая сути проводимых преобразований и действий, что приводит к появлению типичных ошибок при решении иррациональных уравнений и неравенств.

Помимо этого, стоит отметить, что в настоящее время, с ведением федеральных государственных стандартов (ФГОС) и ориентацией образования на формирование практико-ориентированных компетенций, во многом возросла необходимость в совершенствовании методики обучения данной темы, в разработке новейших приёмов и методов, способствующих глубокому

и осознанному усвоению учебного материала школьниками общеобразовательной школы.

Проблема исследования данной работы состоит в поиске актуальных методических подходов и приёмов, направленных на формирование у учащихся глубоких знаний и навыков решения иррациональных уравнений и неравенств.

На сегодняшний день материал данной темы, представленный в учебниках школьного курса алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы в большей степени не систематизирован и зачастую рассмотрен поверхностно, что и вызывает определенные трудности её понимания и усвоения большинством учащихся. А поскольку роль и важность данной темы достаточно велика, то её изучению целесообразно уделять особое внимание, рассматривая её не только на уроках, но и на факультативных занятиях или консультациях.

Цель исследования выпускной квалификационной работы состоит в разработке методических рекомендаций и системы многоуровневых упражнений, направленных на повышение эффективности обучения решению иррациональных уравнений и неравенств на уроках алгебры и дополнительных (факультативных) занятиях.

Задачи выпускной квалификационной работы включают в себя следующие аспекты.

1) изучить исторический аспект развития понятия иррациональности и определить место иррациональных уравнений и неравенства в школьном курсе алгебры.

2) провести анализ содержания школьных учебников по теме «Иррациональные уравнения и неравенства».

3) систематизировать методы решения иррациональных уравнений и иррациональных неравенств.

4) выявить наиболее распространённые ошибки и затруднения учащихся, возникающие при решении иррациональных уравнений и неравенств.

5) разработать методические рекомендации для учителя и систему разноуровневых заданий по теме решения иррациональных уравнений и неравенств, применимых на уроках алгебры и факультативных занятиях.

6) разработать конспект урока, посвященного решению иррациональных уравнений и неравенств с использованием разработанной системы многоуровневых заданий.

Объект исследования – процесс изучения алгебры в общеобразовательной школе.

Предмет исследования – методические аспекты изучения иррациональных уравнений и неравенств в школьном курсе алгебры.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что результаты данного исследования могут использоваться для совершенствования методики преподавания алгебры в любой общеобразовательной школе, а также при разработке учебных и методических материалов по данной теме.

Практическая значимость работы состоит в том, что разработанные рекомендации для учителя и система многоуровневых упражнений, в частности, могут быть использованы в практической работе учителями математики для повышения качества обучения решению иррациональных уравнений и неравенств, а также при подготовке будущих педагогов математики в учебных заведениях.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ

1.1 Исторический аспект развития понятия «иррациональность»: роль и место иррациональных уравнений и неравенств в школьном курсе алгебры

«Иррациональность» - понятие важное как для философии, так и для математики, хотя обозначают они совершенно разные, но при этом взаимосвязанные концепции. И в первом, и во втором случае термин указывает на нечто, что выходит за пределы рационального знания или предоставления.

В философии иррациональным называют всё то, что не поддается рациональному объяснению, то, что не может быть никак логически обосновано или измерено с помощью рациональных приёмов и инструментов.

В математической науке же термин «иррациональность» применим к числам, которые не могут быть представлены в виде отношения двух целых чисел, т. е. дроби m/n , где m, n – целые числа.

Обнаружение иррациональных чисел, таких как, например, корень квадратный из 2 ($\sqrt{2}$) вызвало настоящую революцию в математике. Доказательство несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, которой приписывается Пифагорейцам, стало целым потрясением для древнегреческих математиков, веривших в рациональную и гармоничную структуру мира.

Сама теория иррациональных чисел сложилась только во второй половине 19 века, тогда же была выстроена и классификация иррациональных чисел, подразделяющая их на алгебраические числа (т. е. те, которые являются корнями многочлена с целыми коэффициентами) и трансцендентные (не являющиеся алгебраическими, например, числа π и e) [11].

Проникновение иррациональности в математику, как и любое другое открытие, было продиктовано практическими запросами жизни. Со временем иррациональные числа стали предметом изучения не только профессиональных деятелей и учёных, но и предметом изучения школьного образования.

В России широкое знакомство с иррациональными числами в школьном курсе началось в 18 веке. Отправной точкой стала «Арифметика» Магницкого Л. Ф., изданная в 1703 году по указу Петра 1. Именно этот труд заложил основы преподавания темы: в нем рассматривались правила работы с корнями применительно к военно-морскому делу. Магницкий Л. Ф. впервые перенес правила извлечения корней, ранее излагаемых в геометрических рукописях, в арифметику, сохранив при этом след происхождения этих понятий их геометрии и адаптировав их для широкого круга читателей. По арифметике Магницкого училось несколько поколений[11].

В 1914 году советский педагог Галанин Д. Д. выпускает двухтомное исследование, посвященное трудам Магницкого, где подробно разбирает алгебраические и логические аспекты чисел, в том числе операции извлечения корня.

Весомый вклад в развитие иррациональности внес Аглоблин В.Н. – преподаватель Московского дворянского института, составитель книги о квадратном корне «Арифметика», которая была издана в 1846 году в Москве. Так, в главе «О квадратах и кубах» автор не только вводит понятие квадратного корня, как действия обратного возведению в степень, но и дает важное пояснение, что, если корень из целого числа не является целым, его нельзя точно выразить и дробью. Далее приводится доказательство данного утверждения и краткое определение иррационального числа. Кроме того, в книге описан метод приближенного вычисления квадратного и кубического корня из числа и правила работы с дробями.

Следующим витком в систематизации знаний стал труд русского педагога-математика Извольского Н. А. «Курс элементарной алгебры» 1924

года издания. Автор расширяет рамки темы и рассматривает корни различных степеней и общий случай извлечения корня n -ой степени[11].

На сегодняшний день иррациональные уравнений и неравенства являются важной частью школьного курса алгебры, играя существенную роль в развитии математического мышления учащихся и логики, подготовки их к дальнейшему успешному изучению математики и смежных с ней дисциплин. Они занимают промежуточное положение между базовым алгебраическими понятиями и более сложными математическими конструкциями, такими как математический анализ.

Изучение иррациональных уравнений и неравенств тесно связано с расширением числовой области, в частности, с введением понятия иррационального числа, поэтому в начале изучения тем «Иррациональные уравнения» и «Иррациональные неравенства» в основной школе вводятся понятия иррационального числа и арифметического корня. Учащиеся знакомятся с числами, которые не могут быть представлены в виде конечной или периодической десятичной дроби, что способствует формированию более глубокого понимания числовой системы. Понятие иррационального числа завершает процесс формирования понятия числа в основной школе и получает развитие в старшей школе в виде иррациональных уравнений и неравенств.

1.2 Анализ содержания школьных учебников по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»

Учебный материал, связанный с решением таких уравнений и неравенств, предоставляет собой значимый раздел школьного курса алгебры и начал математического анализа. Фундамент для изучения данной темы закладывается в 8–9 классах, а её углубленное освоение происходит в старшей школе в 10–11 классах.

Для анализа рассмотрим основные учебники «Алгебры» за 8–9 классы и «Алгебры и начала математического анализа» за 10–11 классы, как базового, так и профильного уровня, утвержденные приказом Минпросвещения России от 26.06.2025 N 495 «Об утверждении федерального перечня учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, и установлении предельного срока использования исключенных учебников и разработанных в комплекте с ними учебных пособий» [5]:

1) Учебник Ю. Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой «Алгебра» для 8 и 9 классов – традиционно базовый уровень, ориентированный на классический, последовательный подход изложения материала[14,15].

В 8–9 классе Ю. Н. Макарычевым вводится арифметический квадратный корень и его свойства, функция $y = \sqrt{x}$ и её график.

При изучении раздела "Квадратные корни" автором рассматриваются простейшие уравнения вида $\sqrt{x} = a$, $x^2 = a$, которые решаются с использованием определения арифметического квадратного корня из неотрицательного числа.

Автор на данном этапе не называет эти уравнения «иррациональными», а лишь показывает, что, используя введённое определение арифметического квадратного корня, можно решать уравнения, содержащие квадратные корни и предлагает для самостоятельного решения простейшие уравнений на нахождение корня после возведения в квадрат.

Например, $\sqrt{5x - 1} = 7$.

Из определения арифметического квадратного корня следует, что

$$5x - 1 = 7^2,$$

$$5x - 1 = 49,$$

$$5x = 50,$$

$$x = 10.$$

Причем, следует отметить, что задачи на ОДЗ (область допустимых значений) для корня автором формулируются косвенно (подкоренное выражение должно быть неотрицательным).

Иррациональные неравенства в учебнике Ю. Н. Макарычева не вводятся и задачи на них не рассматриваются.

2) Учебник Ш. А. Алимова, Ю. М. Колягина, М. В. Ткачёва и др. «Алгебра и начала математического анализа» 10—11 классы [1].

Перед изучением темы «Иррациональные уравнения и неравенства» в главе 2 «Степенная функция», автор вводит тему «Равносильные уравнения и неравенства», где детально рассматривает ключевые понятия, необходимые для дальнейшего изучения темы: равносильные уравнения (неравенства), уравнения-следствия, посторонние корни, потеря корней, приводит объяснение, почему при возведении в четную степень могут появляться посторонние корни. А уже затем отдельно рассматриваются иррациональные уравнения в параграфе 9, а в следующем ж параграфе 10 - иррациональные неравенства (параграф со звездочкой).

При рассмотрении темы «Иррациональные уравнения» в параграфе 9 автором даётся определение и рассматриваются такие способы решения

иррациональных уравнений, как возведение в степень, замена переменной, разложение на множители. При этом стоит заметить, что автором анализируются случаи равносильных и неравносильных преобразований при возведении в четную и нечетную степень. Делается акцент на проверке корней, на введении ОДЗ (область допустимых значений) и четкого прописывания условий. Также автором немного затрагивается графический метод, упоминаемый больше для иллюстрации количества найденных корней.

Параграф 10 в учебнике Ш. А. Алимова - тема «Иррациональные неравенства». Этот параграф является логическим продолжением предыдущих и считается более сложным, так как проверка подстановкой здесь невозможна.

При изучении темы «Иррациональные неравенства» параграф автор начинает с задач, в ходе которых вводится определение иррациональных неравенств и в конце параграфа даются примеры

Основной метод решения — сведение к равносильным системам. В учебнике разбираются стандартные схемы (для корней четной степени). Рассматриваются ситуации, когда правая часть — число. Это позволяет применять более простые логические рассуждения, опираясь на знак числа и не отрицательность корня[1].

Анализ двух школьных учебников по темам «Иррациональные уравнения» и «Иррациональные неравенства» показывает принципиальную разницу не только в объеме материала, но и в самом подходе к его изучению. Эта разница обуславливается тем, что учебники предназначены для разных этапов обучения: 8–9 классы (базовый уровень) и 10–11 классы (базовый и углубленный уровни).

Учебник Ю. Н. Макарычева закладывает фундамент для дальнейшего успешного изучения темы: знакомит с простейшими иррациональными уравнениями на том этапе, когда у учеников только сформировалось понятие квадратного корня. Учебник Ш. А. Алимова надстраивает на этом фундаменте полноценное здание. Он рассматривает иррациональные уравнения как часть

общей теории уравнений и неравенств, вводит важные теоретические понятия (равносильность) и дает методы для решения широкого класса задач, включая неравенства, необходимые для итоговой аттестации в 11 классе.

Следовательно, эти учебники не столько противоречат, сколько логично дополняют друг друга.

Наглядно представим проведённый анализ в таблице 1.

Таблица 1 - Анализ учебников Макарычева Ю. Н. (8–9 классы) и Алимова Ш. А. (10–11 классы)

Критерий анализа	Макарычев Ю. Н. (Алгебра, 8–9 классы)	Алимов Ш. А. (Алгебра и начала математического анализа, 10–11 классы)
Авторы	Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков С. Б. Суворова под ред. С.А.Теляковского	Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва и др.
Класс	8–9 классы	10–11 классы
Место тему в учебнике	8 класс. Глава «Квадратные корни. Действительные числа»	10 класс. Глава «Степенная функция» - тема выделена в отдельные параграфы (Равносильные уравнения и неравенства; Иррациональные уравнения; Иррациональные неравенства)
Объем и глубина изучения темы (иррациональные уравнения)	Базовый уровень. Изучаются простейшие уравнения, решаемые возведением в квадрат с обязательной проверкой. Основной упор – связь с квадратными уравнениями.	Системное изучение темы. Вводится понятие равносильности, рассматриваются уравнения с корнями любой степени, рассматриваются различные методы решения иррациональных уравнений.
Объем и глубина изучения темы (иррациональные неравенства)	В базовом учебнике тема иррациональных неравенств не рассматривается, может выноситься на факультативные занятия.	Изучаются в полном объеме. Рассматриваются как отдельный класс неравенств с системным подходом к решению (через равносильные переходы, с учётом ОДЗ и знака обеих частей)
Теоретическая база	Опора на определение арифметического квадратного корня и свойства квадратных уравнений.	Введение понятий «равносильные уравнения» до начала изучения тем, что позволяет четко объяснить появление посторонних корней.
Методы решения	Основной метод - возведение в квадрат с проверкой.	- Возведение в степень (с проверкой или переходом к равносильной системе); - Метод введения новой переменной; - Метод разложения на множители; - использование свойств функций

Продолжение таблицы 1

		П(монотонность) -Графический метод.
Подход к проверке корней	Обязательная проверка корней подстановкой в исходное уравнение	Чёткое разграничение: при возведении в нечетную степень проверка не требуется (равносильное преобразовании), при возведении в четную – обязательна проверка или переход к равносильной системе.
Уровень сложности	Базовый уровень общеобразовательной школы	Базовый и углублённый уровни общеобразовательной школы
Цель изучения темы	Первое знакомство с уравнениями, содержащими переменную под знаком корня, отработка навыка решения простейших иррациональных уравнений.	Формирование системных знаний о методах решения иррациональных уравнений и неравенств , подготовка к профильному уровню ЕГЭ и дальнейшему изучению математики.

1.3 Методы решения иррациональных уравнений и неравенств

Иррациональными принято называть уравнения, в которых переменные или рациональные функции помещены под знак корня [8].

Примерами таких уравнений могут служить следующие уравнения:

$$\sqrt{3x - 8} = 5,$$

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} = 2,$$

$$\sqrt{x + 1} = \sqrt{x + 10}.$$

Понятие корня уравнения и его решения для иррациональных уравнений ничем не отличаются от соответствующих понятий для рациональных уравнений.

Любое уравнение, содержащее переменную под знаком корня, с помощью простейших преобразований можно привести к рациональному алгебраическому виду. При решении иррациональных уравнений применяются все известные приемы преобразования иррациональных выражений:

1. Разложение выражения на множители.

2. Освобождение знаменателя от иррациональности путем домножения и числителя и знаменателя на сопряжённое знаменателю выражение.

3. Введение новых переменных, позволяющие свести исходное иррациональное уравнение к рациональному.

4. Выделение полного квадрата двучлена и др.

Однако, важно помнить, что полученное в результате преобразований рациональное уравнение не всегда будет равносильно исходному иррациональному. В частности, у него могут появиться «посторонние» корни, которые не будут удовлетворять первоначально данному уравнению. Именно поэтому после решения необходимо обязательно осуществлять проверку найденных корней подстановкой в исходное уравнение либо заранее определять область допустимых значений (ОДЗ) и учитывать её в ходе алгебраических преобразований.

ОДЗ обычно для данного типа уравнений определяется следующими условиями:

1. Выражения под корнем четной степени должны быть неотрицательными, т.е. $f(x) \geq 0$, если $\sqrt{f(x)}$;

2. Знаменатель не может равняться нулю (если корень есть в знаменателе).

Рассмотрим теперь подробнее основные методы решения иррациональных уравнений[3,8,12,16,18]:

А) Метод возведения обеих частей уравнения в степень, соответствующую показателю корня. Этот метод предполагает следующий алгоритм действий:

1. Если в уравнении присутствует несколько членов, нужно сначала «уединить» радикал, т.е. перенести его в одну сторону, а все остальные члены – в другую. В итоге получим выражение вида: $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

2. Возводим левую и правую части уравнения в степень, равную показателю корня. Так, если корень квадратный, то имеем: $\sqrt{f(x)}^2 = (g(x))^2 \Rightarrow f(x) = g^2(x)$, если корень кубический, то: $\sqrt[3]{f(x)}^3 = (g(x))^3 \Rightarrow f(x) = g^3(x)$ и т.п.

3. Решаем полученное уравнение.

4. Осуществляем проверку найденных корней, особенно если возведение производилось в четную степень, так как возможно появление посторонних корней.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 1$.

Решение.

1) находим ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \rightarrow x \geq 1$.

2) возводим обе части уравнения в степень, равную показателю корня, а данном случае возводим в квадрат:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^2 &= 1^2, \\ x + 2\sqrt{x(x-1)} + x - 1 &= 1, \\ 2\sqrt{x(x-1)} &= 2 - 2x, \\ \sqrt{x(x-1)} &= 1 - x. \end{aligned}$$

Можно заметить, что рассмотренный случай требует повторного возведения обеих частей уравнения в квадрат, не забывая при этом о дополнительном условии ОДЗ для нового уравнения: $1 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 1$:

$$\begin{aligned} x(x-1) &= 1 - 2x + x^2, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Проверяем: найденное значение $x = 1$. Оно удовлетворяет нашему основному ограничению ОДЗ ($x \geq 1$) и дополнительному ОДЗ ($x \leq 1$). Следовательно, это и есть решение примера 1.

Б) Метод переменных («подстановка»). Он включает в себя:

1. Выбор замены. Часто заменяют сам радикал: $t = \sqrt{f(x)}$ или более сложные выражения, содержащие радикалы.

2. Выражение исходной переменной x через новую введенную переменную t .

3. Решение полученного уравнения относительно новой переменной t .

4. Обратная замена к исходной переменной x , подставив найденные значения t .

5. Решение полученных уравнений.

5. Проверка корней (при необходимости).

Рассмотрим данный метод на примере 2.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} = 2$.

Введем замену: $t = \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$, тогда исходное уравнение примет следующий вид: $t + \frac{1}{t} = 2$.

Решаем получившееся, уже известное нам дробно – рациональное уравнение:

$$\frac{t^2 - 2t + 1}{t} = 0,$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0,$$

$$(t - 1)^2 = 0,$$

$$t = 1.$$

Осуществляем обратную замену (возврат) к исходной переменной x :

$$\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = 1,$$

$$\frac{3-x}{x-1} = 1,$$

$$\frac{3-x-x+1}{x-1} = 0,$$

$$x = 2.$$

Ответ: $x = 2$

Таким образом, этот метод лучше применять для иррациональных уравнений, содержащих радикалы различных степеней, или одинаковые

многочлены под знаком корня и за знаком корня, или взаимнообратные выражения под знаком корня.

В) Использование равносильных переходов основан на замене иррационального уравнения равносильной ему системой или совокупностью систем. При решении данным способом удобно и полезно использовать следующие наиболее встречающиеся утверждения таблицы 2 [7].

Таблица 2 - Равносильные уравнения

Вид иррационального уравнения	Равносильная система /совокупность систем
$\sqrt{f(x)} = g(x)$	$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ Выбирается система, в которой легче неравенство
$\sqrt{f(x)} * g(x) = 0$	$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) - \text{определена} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) = 0 \end{cases} \end{cases}$

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{2x+3} = 6-x$.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} = 6-x &\leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = (6-x)^2 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \\ \begin{cases} 2x+3 = 36-12x+x^2 \\ x \leq 6 \end{cases} &\leftrightarrow \begin{cases} x=3; x=11 \\ x \leq 6 \end{cases} \leftrightarrow x=3. \end{aligned}$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x^2+3x-4} = \sqrt{2x+2}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+3x-4} = \sqrt{2x+2} &\leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 = 2x+2 \\ 2x+2 \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \\ \begin{cases} x^2+x-6 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases} &\leftrightarrow \begin{cases} x=2; x=-3 \\ x \geq -1 \end{cases} \leftrightarrow x=2. \end{aligned}$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 5. Решить уравнение $(x^2-4)\sqrt{x+1} = 0$.

$$(x^2-4)\sqrt{x+1} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} x+1=0, \\ x+1 \geq 0 \\ x^2-4=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ x \geq -1 \\ x=-2; x=2 \end{cases}.$$

Ответ: $x = -1$; $x = 2$.

Решая иррациональные уравнения данным методом, необходимо чётко понимать в каких случаях ставится знак системы, а в каких – совокупности. Ввиду громоздких записей и разнообразных сочетаний у учащихся часто возникают ошибки в использовании данного метода. Тем не менее стройная логическая последовательность преобразований и равносильных переходов являются бесспорно главным плюсом данного метода.

Г) Графический метод. Данный метод применяется обычно в двух случаях:

- 1) когда не видно другого, более простого способа решения с использованием других методов;
- 2) когда функции, образующие соответственно левые и правые части уравнения просты для построения их графиков.

Суть графического метода заключается в решении уравнения посредством нахождения абсцисс точек пересечения графиков правой и левой частей уравнения. Данные абсциссы и будут являться корнями уравнения. Однако стоит отметить, что без специальных компьютерных программ невозможно добиться высокой точности в построении графиков. Поэтому все результаты, полученные графическим методом, будут считаться лишь приближенными. В этом заключается главная особенность данного метода.

Алгоритм решения графическим методом.

1. В одной прямоугольной системе координат строим графики функций, соответствующие левой и правой частям исходного уравнения.
2. Находим точки пересечения графиков: если их нет - уравнение корней не имеет, если они есть переходим к следующему шагу алгоритма.
3. Находим абсциссы всех точек пересечения – это и есть приближенные значения корней исходного уравнения.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4$.

Введем и рассмотрим графики функций, отвечающие левой и правой частям уравнения.

$$\sqrt{2x-3} = 4 - \sqrt{4x+1},$$

$$f(x) = \sqrt{2x-3}; g(x) = 4 - \sqrt{4x+1}.$$

1. Функция $f(x) = \sqrt{2x-3} = (2x-3)^{\frac{1}{2}}$ – степенная возрастающая функция.

Область определения функции: $(D(f)): 2x - 3 \geq 0 \leftrightarrow x \geq 1,5 \leftrightarrow D(f) \in [1,5; +\infty)$.

Составим таблицу значений x и $f(x)$, результаты представим в таблице 3.

Таблица 3 - Таблица значений функции $f(x)$

x	1,5	2	2,5
$f(x)$	0	1	2

2. Функция $g(x) = 4 - \sqrt{4x+1} = 4 - (4x+1)^{\frac{1}{2}}$ – степенная убывающая функция.

Область определения функции: $(D(g)): 4x + 1 \geq 0 \leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4} \leftrightarrow D(g) \in \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Составим таблицу значений x и $g(x)$, результаты представим в таблице 4.

Таблица 4 - Таблица значений функции $g(x)$

x	0	2	6
$f(x)$	3	1	-1

Построим графики этих функций в одной системе координат, результаты представим на рисунке 1. По рисунку можно заметить, что графики функций пересекаются в точке абсциссой $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

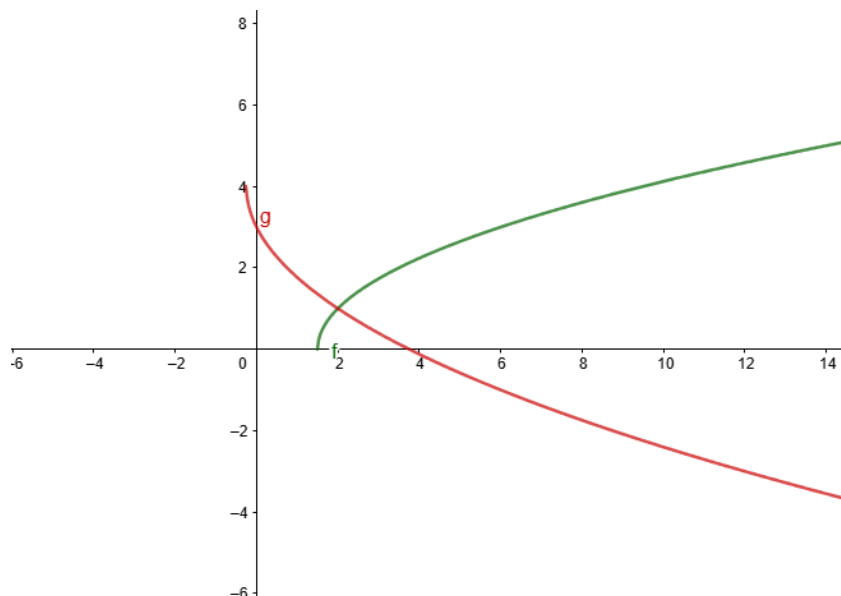


Рисунок 1 - Графики функций $f(x)$ и $g(x)$

Таким образом, можно сделать вывод, что графически метод решения иррациональных уравнений отличается хорошей наглядностью и позволяет быстро определить количество корней. Однако, применять его рекомендуется лишь в тех случаях, когда графики соответствующих функций несложно поостроить, а ответ получается точным. Если ответ ожидается приближенным, лучше обратиться к другому методу решения.

Далее остановимся на методах решения иррациональных неравенств.

Неравенство будет называться иррациональным в том случае, если оно будет содержать переменную под знаком корня. ОДЗ для неравенств определяется аналогично уравнениям: подкоренное выражение должно быть неотрицательным [8].

Ключевым моментом в решении иррациональных неравенств является учет знаков обеих частей неравенства. Это определяет необходимость возведения в степень и направление знака неравенства.

Поскольку проверка решения иррациональных неравенств невозможна, все преобразования должны быть равносильными. Неравенство заменяется равносильной системой или совокупностью систем.

Рассмотрим основные случаи.

1. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$.

При решении данного типа неравенств, аналогично уравнениям, потребуется операция возведения в степень. Однако здесь важно обязательно учесть условие $g(x) > 0$. Если этот момент упустить, можно получить посторонние решения, поскольку корень в левой части не может быть отрицательным. Кроме того, нельзя забывать и про ОДЗ: исходное выражение будет иметь смысл только при не отрицательности подкоренного выражения, т. е. $f(x) > 0$. Учитывая оба условия, можно спокойно возводить неравенство в квадрат. В итоге получаем равносильную систему следующего вида:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}.$$

Если в исходном неравенстве стоит знак «строго меньше», то меняется условие на правую часть: она должна быть строго положительной (корень не может быть меньше нуля), и по смыслу меняется знак второго неравенства системы, т. е.:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}.$$

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 8x + 12} < x - 5$.

$$f(x) = x^2 - 8x + 12, \quad g(x) = x - 5,$$

$$\sqrt{x^2 - 8x + 12} < x - 5$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 12 \geq 0 \\ x - 5 > 0 \\ x^2 - 8x + 12 < (x - 5)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (x - 6)(x - 2) \geq 0 \\ x > 5 \\ x^2 - 8x + 12 < x^2 - 10x + 25 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [6; +\infty] \\ x > 5 \\ x < 6,5 \end{cases}.$$

Ответ: $x \in [6; 6,5)$.

2. Неравенства вид $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$.

Несмотря на принципиальное сходство с первым типом неравенства, оно существенно отличается от него. Как правило, решение данного типа неравенств разбивается на два возможных случая – в зависимости от знака вырождения в правой части:

1. Если $g(x) < 0$, то неравенство – верно, поскольку корень всегда больше любого отрицательного числа. Однако при этом необходимо учитывать область допустимых значений $f(x) > 0$

2. Если $g(x) > 0$, то обе части неравенства неотрицательны и их можно возвести в квадрат. В итоге приходим к следующей равносильной системе:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases}$$

В случае знака «строго больше» в исходном неравенстве меняется только второе неравенство второй системы:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Пример 8. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3 &\leftrightarrow \begin{cases} x+3 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 > (x+3)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ (x-2)(x-1) \geq 0 \\ x \geq -3 \\ x^2 - 3x + 2 > x^2 + 6x + 9 \end{cases} \\ &\leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \\ x \geq -3 \\ x < -\frac{7}{9} \end{cases} \leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{7}{9}\right] \end{aligned}$$

Нередко встречаются задачи, где комбинируются неравенства видов 1 и 2

3. Неравенство вида $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$.

В данном неравенстве обе части заведомо неотрицательны, поэтому их можно возводить в квадрат. Учет ОДЗ, разумеется, необходим, но здесь есть важная особенность: достаточно потребовать только $g(x) > 0$. Дело в том, что по условию левая часть (корень) всегда не меньше правой, а если правая часть

неотрицательна, то левая часть тем более не может оказаться отрицательной. В итоге получаем следующий равносильный переход:

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Если же исходное неравенство строгое, т.е. $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$, то и в системе первое неравенство становится строгим:

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

1.4 Иррациональные уравнения и неравенства в задачах ОГЭ и ЕГЭ

В ОГЭ иррациональные уравнения и неравенства встречаются редко, они, если и встречаются, то обычно представлены в наиболее базовом виде. Это могут быть уравнения, сводящиеся к линейным или квадратным после освобождения от радикала, или простые неравенства, решаемые методом возведения в квадрат.

Такие уравнения могут встретиться в задании №9 (первая часть, с кратким ответом) и в задании №20 (вторая часть, с развернутым решением).

В заданиях №9 может быть предложено простейшее уравнение, решаемое в 1–2 действия.

Например, $\sqrt{3x - 5} = 4$

Проверка корней для таких уравнений либо вовсе не требуется (ОДЗ очевидна), либо выполняется элементарно.

В задании №20 уже предлагаются уравнения посложнее, часто сводящиеся к квадратным после возведения в квадрат. В таких упражнениях от учащихся требуется уметь возводить в квадрат, решать квадратные уравнения, выполнять обязательную проверку корней (особенно во второй части, где это требуется по критериям).

Пример 9. $\sqrt{x + 1} = x - 5$.

ОДЗ: $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.

Возведение в квадрат: $(\sqrt{x+1})^2 = (x-5)^2 \Rightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25$.

Решение квадратного уравнения: $x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow x_1 = 3$ и $x_2 = 8$.

Проверка:

$x_1 = 3$: $\sqrt{3+1} = 2$, $3-5 = -2$. $\Rightarrow 2 \neq -2$ (не подходит).

$x_2 = 8$: $\sqrt{8+1} = 3$, $8-5 = 3$. $\Rightarrow 3 = 3$ (подходит).

Ответ: $x = 8$.

Иррациональные неравенства в заданиях ОГЭ практически не встречаются в явном виде. Формально они могут появиться, например, при нахождении области определения функции в задании с графиками, но как отдельный объект для решения — крайне редки. Это в большей степени связано с тем, что метод интервалов для иррациональных неравенств считается задачей повышенной сложности, не соответствующей базовому уровню аттестации за 9 класс.

Таким образом, чтобы успешно справиться с заданиями данной темы на ОГЭ, учащимся достаточно владеть базовым знаниями и алгоритмом: возвести в квадрат $\rightarrow$ решить получившееся уравнение $\rightarrow$ сделать проверку подстановкой в исходное.

В ЕГЭ иррациональные уравнения и неравенства встречаются в задачах более высокого уровня сложности, и часто требуют комплексного подхода, комбинирования методов и глубокого понимания равносильных переходов. Они могут быть частью более сложной задачи (например, в задачах на оптимизацию, параметрические задачи). Данная тема в задачах ЕГЭ является одной из основных "проверочных" на глубину понимания и умение работать с системными условиями.

Задание №6 (первая часть, профильный уровень ЕГЭ). Здесь предлагаются более сложные уравнения (с несколькими корнями, заменами), по сравнению с заданиями ОГЭ.

Приведём некоторые основные типы зданий №6 из открытого банка заданий ФИПИ на 2025–2026 учебный год по теме «Иррациональные уравнения» [10]:

Пример 1. $\sqrt{9x - 47} = 4$.

Пример 2. $\sqrt[3]{x + 3} = 3$.

Пример 3. $\sqrt{\frac{6x}{4x-54}} = \frac{1}{7}$.

Пример 4. $\sqrt{-72 - 17x} = -x$.

Задание №13 (вторая часть, профильный уровень ЕГЭ). Здесь предлагаются уравнения повышенной сложности с развернутым решением и критериями оценивания. Здесь уже не просто $\sqrt{f(x)} = g(x)$, а часто $\sqrt{(ax + b)} = \sqrt{(cx + d)}$, уравнения с суммами корней, требующие двойного возведения в квадрат. А под корнем может стоять логарифмическое или тригонометрическое выражение. Простая проверка корней в конце здесь уже часто не подходит, так как приводит к громоздким вычислениям. Эффективное решение требует ведения ОДЗ с самого начала и применения равносильных переходов (систем или совокупностей), отбора корней.

Приведём некоторые основные типы зданий №13 из открытого банка заданий ФИПИ на 2025–2026 учебный год по теме «Иррациональные уравнения» [10].

А) Решить уравнение.

Б) Найти все корни, принадлежащие отрезку.

Пример 1. А) $\sqrt{x^4 + 8x^3 + -1 + 2x^2} = \sqrt{x^4 + 2x^2}$ Б) $[\log_3 0,5; \log_3 2]$.

Пример 2. А) $x - 3 = \sqrt{x - 1} + 1 = 0$ Б) $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.

Пример 3. А) $\sqrt{29 - 10x + x^3 - 4x^2} = 3 - x$ Б) $-[\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

Пример 4. А) $\sqrt{x + 4} = x^2 - 4$ Б) $[-2; 3]$.

Пример 5. А) $\sqrt{x + 4\sqrt{x + 4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} = 4$ Б) $[2\sqrt{3} + 1; 10]$.

Иррациональные неравенства – это задание №15 (вторая часть, профильный уровень ЕГЭ). Одно из самых сложных заданий экзамена. Решение строится на строгих равносильных переходах. Часто встречаются неравенства с двумя квадратными корнями, требующие аккуратного определения ОДЗ и точек, где корни извлекаются. В таких заданиях требуется не только найти ответ, но и грамотно, логически обоснованно записать решение. Решение "методом интервалов с проверкой" может не получить полный балл, если не обоснована равносильность.

Приведём некоторые основные типы заданий №15 из открытого банка заданий ФИПИ на 2025–2026 учебный год по теме «Иррациональные неравенства» [10]:

Пример 1. $(x^2 - x - 6) * \sqrt{8 - x} \leq 0.$

Пример 2. $\sqrt{x^3 - 2x^2 + 4x - 2} \geq x.$

Пример 3. $(2x - 3 - \frac{5}{x})(\frac{14}{x+1} + 2 + (\sqrt{-1 - 2x})^2) \geq 0.$

Пример 4. $\frac{\sqrt{18-7x-x^2}}{2x+9} \geq \frac{\sqrt{18-7x-x^2}}{x+8}.$

Пример 5. $(x + \frac{3}{x}) (\frac{-1 + \sqrt{9-6x+x^2}}{\sqrt{5-x}-1})^2 \geq 4(\frac{-1 + \sqrt{9-6x+x^2}}{\sqrt{5-x}-1}).$

Кроме того, иррациональные выражения могут возникать в задании с параметром (задание №18, вторая часть, профильный уровень ЕГЭ) как часть условия или полученного в процессе решения уравнения или неравенства. В задании на исследование функции (задание №11, первая часть, профильный уровень ЕГЭ) может потребоваться найти область определения, содержащую корень [13].

Приведём некоторые основные типы заданий №18 из открытого банка заданий ФИПИ на 2025–2026 учебный год по теме «Иррациональные уравнения» [10,13]:

Пример 1. Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(4x - x^2)^2 - 32\sqrt{4x - x^2} = a^2 - 14a$ имеет хотя бы одно решение.

Пример 2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ имеет единственный корень.

Пример 3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x + \sqrt{x - a} = \sqrt{4x^2 - (4a + 2)x + 2a}$ имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Сводную таблицу по заданиям темы «Иррациональные уравнения и неравенства» в заданиях ОГЭ и ЕГЭ представим в таблице 5.

Таблица 5 - Иррациональные уравнения и неравенства» в ОГЭ и ЕГЭ

Критерий	9 класс (ОГЭ)	11 класс (ЕГЭ – профильный уровень)
№ задания	№9 (краткий ответ), №20 (развернутое)	№6 (краткий ответ), №13 (уравнение), №15 (неравенство), №18 (задачи с параметрами)
Уровень сложности	Базовый и повышенный	Высокий и очень высокий
Ключевой метод	Возведение в квадрат с последующей проверкой	Равносильные переходы, системы, анализ ОДЗ и условий
Роль ОДЗ	Часто не выписывается явно, заменяется проверкой	Критически важна, является частью решения с первого шага
Комбинации с др. темами	Редко, простые	Часто с модулями, логарифмами, тригонометрией, параметрами
Что проверяет	Владение базовым алгоритмом	Глубину понимания, логику, умение работать с абстракциями
Достаточный учебник	Макарычева Ю. Н. (базовые навыки)	Алимов Ш. А. (базовый и профильный уровни)

Таким образом, задачи с иррациональными уравнениями и неравенствами в ОГЭ и ЕГЭ важны для:

1. Проверки и закрепления ключевых математических навыков.
2. Развития логического и алгоритмического мышления.
3. Подготовки к дальнейшему обучению.
4. Формирования математической культуры.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

2.1 Выявление типичных ошибок и затруднений учащихся при решении иррациональных уравнений и неравенств

В ходе изучения иррациональных уравнений и неравенств школьники нередко сталкиваются с определёнными сложностями, которые ведут в последствии к типичным и систематическим ошибкам. Глубокое понимание причин этих затруднений и умение их диагностировать – необходимое условие для эффективного преподавания.

Рассмотрим наиболее частые ошибки и затруднения учеников, возникающие при решении иррациональных уравнений и неравенств на уроках алгебры [4,6,9].

1) Ошибки, связанные с ОДЗ (область допустимых значений).

Учащиеся не всегда учитывают ограничения, накладываемые радикалами четной степени (подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Это приводит к получению решений, не являющихся корнями исходного уравнения или неравенства.

Например, при решении уравнения $\sqrt{x-3} = -2$ ученик возводит обе части в квадрат и получает $x - 3 = 4$, $x = 7$. Однако, не учитывает, что корень квадратный не может быть отрицательным. Правильный ответ: решений нет. (При возведении в чётную степень обязательно учёт знаков $g(x)$).

Формы проявления ошибок, связанных с ОДЗ.

1. Отсутствие ОДЗ в оформлении решения ученика.
2. Неверное определение ОДЗ (ошибки при решении неравенства).
3. Игнорирование ОДЗ при отборе корней.

Для большей наглядности представим типичные ошибки данного вида в таблице 6.

Таблица 6 - Ошибки, связанные с ОДЗ

Тип ошибки	Описание	Пример	Возможная причина	Способ предотвращения
Не учитывают ОДЗ при решении уравнения	Забывают указать, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным (для корней четной степени).	$\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x-2}} = 0$ (решают, не указывая $x > 2$). Получают $x=2$ и $x=3$, не проверяя условия $x > 2$	Непонимание необходимости учета ограничений, накладываемых радикалом.	Акцентировать внимание на определении ОДЗ перед началом решения. Тренировочные упражнения на нахождение ОДЗ сложных выражений.
Неправильное определение ОДЗ для иррациональных неравенств	Некорректно определяют ОДЗ при решении неравенств.	$\sqrt{x+2} < x$ (определяют ОДЗ как $x > 0$, забывая про $x \geq -2$)	Смешивают условия для уравнений и неравенств. Недостаточное понимание метода интервалов.	Подробное объяснение условий равносильности для иррациональных неравенств. Четкое формулирование шагов решения: ОДЗ, преобразования, учет ОДЗ на последнем этапе
Игнорирование ОДЗ при отборе решений	Получив несколько решений, не проверяют их принадлежность ОДЗ.	$\sqrt{x+1} = x - 5$ (получают $x = 3$ и $x = 8$, но не проверяют, что $x = 3$ не является решением)	Недостаточная внимательность. Непонимание, что не все полученные значения являются решениями.	Внедрить правило обязательной проверки решений после преобразований. Ввести оценочный критерий, снижающий оценку за отсутствие проверки.

2. Ошибки, связанные с равносильными преобразованиями

Если при решении уравнений или неравенств обе части возводят в чётную степень, не принимая во внимание знаки выражений, то это может привести к появлению посторонних корней или потере решений.

Например, решая уравнение $\sqrt{x+1} = x - 1$ ученик возводит обе части в квадрат, получая $x + 1 = x^2 - 2x + 1$, откуда $x^2 - 3x = 0$, $x = 0$ и $x = 3$. Затем ученик игнорирует, что при $x = 0$, $\sqrt{0+1} = 1$, а $0 - 1 = -1$, т.е. не выполняет проверку. Правильно было бы равносильно перейти:

$$\begin{cases} x + 1 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Формы проявления ошибок, связанных с равносильными преобразованиями:

- 1.Отсутствие проверки после возведения в чётную степень;
- 2.Незнании либо не корректное использование условий равносильности при решении иррациональных уравнений и неравенств;
- 3.Ошибки в алгебраических преобразованиях.

Для большей наглядности представим ошибки данного вида в таблице 7.

Таблица 7 - Ошибки, связанные с равносильными преобразованиями

Тип ошибки	Описание	Пример	Возможная причина	Способ предотвращения
Возведение в четную степень без учета знаков	Возводят обе части в четную степень, не рассматривая случай, когда одна из частей отрицательна.	$\sqrt{x+3} = -x + 1$ (возводят в квадрат сразу, без анализа знака правой части)	Непонимание, что возведение в четную степень сохраняет равенство только для неотрицательных выражений.	Подробное объяснение, что возведение в четную степень - не всегда равносильное преобразование. Анализ каждой ситуации. Использование равносильных переходов с учетом знаков $g(x)$ если $\sqrt{f(x)} = g(x)$.
Неправильное применение условий равносильности	Неправильно применяют условия равносильности для иррациональных неравенств (например, вида	$\sqrt{x+2} > x$ (не учитывают, что при $x < 0$ неравенство всегда верно)	Непонимание, какие условия нужно наложить, чтобы преобразование было равносильным.	Детальный разбор каждого типа иррациональных неравенств. Использование блок-схем с указанием всех условий.

Продолжение таблицы 7

	$\sqrt{f(x)} < g(x)$ или $\sqrt{f(x)} > g(x)$.			большого количества примеров с разными случаями.
Неправильное раскрытие скобок при возведении в степень	Допускают ошибки при возведении двучлена в квадрат или другую степень.	$(\sqrt{x} - 2)^2 = x - 4$ (ошибка, так как правильный ответ $x - 4\sqrt{x} + 4$)	Слабые навыки алгебраических преобразований.	Повторение формул сокращенного умножения. Дополнительная практика в раскрытии скобок, особенно с иррациональными выражениями.

3. Ошибки, связанные с выбором метода решения.

У учеников чаще всего возникают сложности при выборе подходящей замены, а также при возврате к исходной переменной. А также сюда же можно отнести ошибки при решении получившегося в ходе замены вспомогательного квадратного или другого вида уравнения.

Например, в уравнении $\sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt[4]{x} = 3$ ученик не замечает, что $\sqrt{x} = (\sqrt[4]{x})^2$, и не делает замену $t = \sqrt[4]{x}$, чтобы свести уравнение к квадратному.

Формы проявления ошибок, связанных с выбором метода решения уравнения или неравенства:

1. Ученики не могут увидеть, что можно «заменить».
2. Ошибки при выражении исходной переменной через новую.
3. Неправильное решение уравнения относительно новой переменной.
4. Ученики забывают о том, что $t > 0$.

Для большей наглядности также представим типичные ошибки данного вида в таблице 8.

Таблица 8 - Ошибки, связанные с выбором метода решения

Тип ошибки	Описание	Пример	Возможная причина	Способ предотвращения
Выбор иррационального метода	Используют сложный метод решения, когда можно применить более простой.	Решают уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ графически, хотя можно решить алгебраически.	Недостаточное знакомство с разными методами решения.	Обучение анализу уравнения перед началом решения. Обсуждение преимуществ и недостатков разных методов. Предложение учащимся решать одну и ту же задачу разными способами.
Неумение увидеть замену переменных	Не замечают, что уравнение можно упростить заменой переменной.	$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ (пытаются решить без замены $t = \sqrt{x}$)	Недостаточный опыт в применении метода замены.	Демонстрация большого количества примеров на использование замены. Акцентирование внимания на том, какие признаки указывают на возможность применения замены (например, наличие $\sqrt{x}$ и x в уравнении). Специальные упражнения на отработку метода замены.

4. Ошибки, связанные с применением графического метода.

К такому типу ошибок можно отнести - неточное построение графиков, неправильная интерпретация точек пересечения, игнорирование ОДЗ при построении графика.

Например, ученик строит графики $y = \sqrt{x}$ и $y = x - 2$, но из-за неаккуратного построения неверно определяет координаты точки пересечения, или забывает, что $\sqrt{x}$ определен только при неотрицательных x ,

Формы проявления ошибок, связанных с применением графического метода при решении иррациональных уравнений и неравенств:

1. Неточные графики.

2. Неверное определение точек пересечения или областей, где один график выше другого.

3. Игнорирование области определения функции.

4. Слабые навыки в алгебраических преобразованиях

Для большей наглядности также представим типичные ошибки данного вида в таблице 9.

Таблица 9 - Ошибки, связанные с применением графического метода

Тип ошибки	Описание	Пример	Возможная причина	Способ предотвращения
Неумелое применение графического метода	Неточно строят графики, неправильно интерпретируют точки пересечения.	Решают $\sqrt{x} = x - 2$, строя графики неаккуратно, и неверно определяют точку пересечения.	Слабые навыки построения графиков функций.	Повторение материала по построению графиков. Использование графических калькуляторов или программ для построения графиков. Подробный анализ графиков и их взаимосвязи с решениями уравнений и неравенств.

5. Другие распространённые виды ошибок.

К таким ошибкам можно отнести ошибки в арифметических операциях, при возведении в степень, приведении подобных членов, при раскрытии скобок, разложении на множители и т. п.

Формы проявления данных видов ошибок.

1. Арифметические просчеты.

2. Неправильное применение формул сокращенного умножения.

3. Ошибки при решении квадратных уравнений (дискриминант, теорема Виета).

Сюда же можно отнести ошибки в решении неравенств методом интервалов, когда ученики забывают учитывать выколотые точки или неправильно определяют знаки на получившихся интервалах.

Для наглядности представим ошибки данного вида в таблице 10.

Таблица 10 - Другие распространённые ошибки, возникающие при решении иррациональных уравнений и неравенств

Тип ошибки	Описание	Пример	Возможная причина	Способ предотвращения
Алгебраические ошибки	Ошибки в арифметических операциях, приведении подобных членов, разложении на множители и т. п.	$\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+1} = 2$ (пишут, что это равно $\sqrt{x+1} = 2/2$)	Слабые навыки алгебраических преобразований.	Повторение основных алгебраических правил и формул. Увеличение количества тренировочных упражнений на упрощение выражений. Включение алгебраических упражнений в каждый урок.
Ошибки в решении неравенств методом интервалов	Забывают учитывать выколотые точки, неправильно определяют знаки на интервалах.	$(x-1)\sqrt{x+1} > 0$ (не учитывают, что $x = -2$ – выколотая точка, и делят числовую ось только на интервалы $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$).	Слабые навыки решения неравенств методом интервалов.	Повторение метода интервалов. Акцентирование внимания на выколотых точках (точки разрыва) и их учете при определении интервалов. Решение разнообразных примеров на метод интервалов.

Для своевременного и эффективного выявления проблем, возникающих у учащихся при изучении иррациональных уравнений и неравенств, необходимо использовать разнообразные методы диагностики, позволяющие оценить как индивидуальные затруднения, так и типичные ошибки, свойственные большинству учеников в классе.

Основные методы выявления ошибок и затруднений представим в таблице 11.

Таблица 11 - Методы выявления ошибок и затруднений

Метод выявления	Описание метода
Анализ контрольных и самостоятельных работы	Внимательное изучение работ учащихся позволяет выявить наиболее типичные и индивидуальные ошибки и затруднения учащихся. Важно обращать внимание не только на правильность ответа, но и на ход решения, чтобы понять, где именно возникают затруднения.
Проведение диагностических работ	Специальные диагностические работы, направленные на проверку понимания основных понятий и методов решения, помогают выявить пробелы в знаниях. Такие работы должны включать задания разного уровня сложности, проверяющие различные аспекты темы (знание теории, умение применять «подходящие» методы, понимание ОДЗ и т. д.)
Проведение устных опросов и обсуждений	В ходе устных опросов и обсуждений учащиеся могут сами озвучить свои затруднения по теме или задать интересующие вопросы. Учителю важно создать на уроках такую атмосферу, в которой ученики не будут бояться признаться в своем непонимании и трудностях. Для этого можно использовать индивидуальные беседы, фронтальные опросы класса, работу в парах и группах и т. п.
Наблюдение за работой учащимся на уроке	Наблюдение за тем, как учащиеся работают на уроке и какие вопросы задают, также позволяет выявить индивидуальные затруднения. Здесь можно обратить внимание на скорость выполнения задания, на частоту ошибок, тип задаваемых вопросов, проявление неуверенности или затруднений при ответе у доски, постоянное списывание с доски и т. п.
Проведение индивидуальных собеседований с учащимися	Индивидуальные собеседования позволяют более глубоко понять причины затруднений и разработать индивидуальный план помощи. В ходе таких бесед можно задавать вопросы, направленные на выявление пробелов в знаниях, непонимание концепций, неумения применять методы решения и т. п.

Далее представим для примера разработанный бланк базовых диагностических заданий, который можно использовать на уроках алгебры и факультативных занятиях, с целью выявления затруднений учащихся на начальных этапах освоения данной темы:

Задание 1. Упростить выражение $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + 2\sqrt{ab}$ (задание на проверку навыков проведения алгебраических преобразований).

Задание 2. Найти область определения функции: $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)}$ (задание на проверку понимания ОДЗ и учета наложения нескольких ограничений).

Задание 3. Решить уравнение: $\sqrt{x+1} = x - 5$ (задание на проверку понимания необходимости проверки корней и решения иррационального уравнения).

Задание 4. Решить неравенство: $\sqrt{x-2} > x - 4$ (задание на проверку понимания условий равносильности при решении иррациональных неравенств, учёта ОДЗ, решении самого неравенства).

Задание 5. Решить уравнение наиболее удобным методом $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$ (проверка применения методов решения иррациональных уравнений).

Шкала оценивания ответов.

1. Ответ дан правильно и приведено корректное объяснение решения - 2 балла.
2. Ответ дан правильно, но решение не объяснено или содержит незначительные ошибки – 1 балл.
3. Задание не выполнено или решение содержит серьезные ошибки – 0 баллов.

После проведения подобной диагностической работы, также как и после проведения любой самостоятельной или контрольной работы, важно разобрать все допущенные ошибки вместе с учениками, поскольку работа над ошибками – это не просто исправление помарок, а важнейший этап обучения, превращающий контрольную работу из инструмента оценки в инструмент обучения.

Разберем подробнее, как может быть проведен анализ ошибок на уроке алгебры по теме «Решение иррациональных неравенств».

Предположим, что после самостоятельной работы учитель анализирует решения учеников и видит, что многие в классе допустили ошибки при решении неравенства $\sqrt{x+1} < x + 3$.

Сценарий урока в таком случае может выглядеть следующим образом.

Этап 1. Актуализация знаний (5 минут).

Учитель: «Ребята, на прошлых уроках мы с вами разбирали различные методы решения иррациональных неравенств. Давайте вспомним что такое ОДЗ для иррационального неравенства? Какие методы решения иррациональных неравенств вы запомнили? Для чего необходимо проверять корни при решении неравенств? Всегда ли это нужно делать? Если нет, то в каких случаях это нужно делать?» (Задаются вопросы классу для актуализации знаний).

Этап 2. Представление примера (5 минут).

Учитель: «Многие из вас допустили ошибки при решении неравенства $\sqrt{x+1} < x+3$. Давайте вместе разберем решение и посмотрим, где же кроются ваши ошибки».

Учитель записывает ошибочное решение ученика на доске:

Возводит обе части неравенства в квадрат: $x+1 < (x+3)^2$.

Упрощает: $x+1 < x^2+6x+9 \rightarrow x^2+5x+8 > 0$.

Решает уравнение, находит дискриминант: $D = 25-32 = -7$.

Делает вывод, что нет решений, так как дискриминант отрицательный.

Этап 3. Анализ ошибок (10 минут).

Учитель: «Что вы можете сказать об этом решении? Где допущена ошибка?» (Необходимо направить учеников на поиск ошибки, а не показать готовую ошибку).

Ученик 1: «Не указана область допустимых значений» (Ученики высказывают свои точки зрения).

Учитель: «Правильно. А какая должна быть ОДЗ для данного неравенства? (Направляем учеников к пониманию, что $x+1 \geq 0$, то есть $x \geq -1$).

Ученик 2: «Неверный вывод об отсутствии решения, основанный на отрицательном дискриминанте» (Ученики высказывают свои точки зрения).

Учитель: «Почему этот вывод будет неверным? Что можно сказать о выражении $x^2+5x+8 > 0$ (Подводим к пониманию, что парабола $y = x^2+5x+8$

лежит выше оси X , следовательно, неравенство $x^2 + 5x + 8 > 0$ справедливо для всех x).

Этап 4. Коррекция решения (10 минут).

Учитель: «Давайте решим и запишем правильное решение данного неравенства, учитывая все названные нюансы».

На доке записывается корректное решение:

ОДЗ: что $x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$

Так как $\sqrt{x+1}$ всегда неотрицательно, то при $x + 3 < 0$, решений не будет

При $x \geq -3$, $\sqrt{x+1} < x+3$ заменяется следующей системой:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \\ x + 1 < (x + 3)^2 \end{cases}$$

Решаем систему, учитывая ОДЗ и записываем окончательный ответ $x \geq -1$

Этап 5. Закрепление (10 минут).

Учитель: «Теперь предлагаю вам самостоятельно решить похожие неравенства, обращая внимание на ОДЗ и условия равносильности» (Предлагает несколько неравенств для самостоятельного решения).

Во время самостоятельной работы важно наблюдать за учащимися и консультировать их при возникновении трудностей и контролировать ход решения.

Таким образом, рассмотренная часть сценария урока показывает, как детальный разбор ошибки на конкретном примере позволяет ученикам увидеть свои недочеты и понять, как правильно решать иррациональные неравенства, чтобы впредь не допускать таких ошибок. Учитель не просто указывает на ошибку, а помогает ученику самому её найти и прийти к правильному решению, задавая наводящие вопросы и акцентируя внимание на ключевых моментах.

2.2 Разработка методических рекомендаций и системы многоуровневых упражнений по теме решения иррациональных уравнений и неравенств на уроках алгебры и факультативных занятиях

С целью повышения эффективности обучения решению иррациональных уравнений и неравенств в ходе написания данной работы была разработана система , включающая методические рекомендации для учителя и система многоуровневых заданий для учащихся.

Методические рекомендации для учителя основаны на базе учебника «Алгебра и начала математического анализа» 10–11 классы Алимов А. Ш. и др., а также невыявленных ранее в работе типичных ошибках учащихся, допускаемых при решении иррациональных уравнений и неравенств.

Цель данных рекомендаций – помочь педагогу эффективно организовать процесс обучения, обеспечить дифференцированный подход, сформировать у учащихся глубокое понимание темы и подготовить их к государственной итоговой аттестации и олимпиадам различного уровня.

Рекомендации включают в себя следующие основные пункты.

1. Обязательное акцентирование внимания на теоретических знаниях и основах.

Во–первых, начинать изучение темы необходимо с повторения свойств корней, степеней, методов решения рациональных уравнений и неравенств из материала прошлых тем и классов.

Далее, особое внимание следует уделить определению ОДЗ (области допустимых значений). Ученикам необходимо подробно разъяснить что такое ОДЗ, почему необходимо его учитывать и как правильно находить ОДЗ для различных типов иррациональных выражений. Можно привести примеры, когда игнорирование ОДЗ приводит к неверным решениям. При объяснении данного материала следует не ограничиваться простым определением ОДЗ, а формировать у учащихся понимание ограничений, накладываемых

квадратными корнями и другими радикалами четной степени, подчеркивать, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

2. Объяснение геометрического смысла иррациональных уравнений и неравенств.

При решении уравнений важно демонстрировать, что корень уравнения – это абсцисса точки пересечения графиков функций, стоящих в левой и правой частях уравнения.

При решении неравенств следует объяснять, что решение неравенства – это множество значений x , где графики функции лежат выше или ниже графика другой. Например, при решении неравенство $\sqrt{x} > x - 2$, следует показать графически область, где графики $y = \sqrt{x}$ находится выше графика $y = x - 2$.

Следовательно, графики функции удобно использовать для наглядной иллюстрации решения уравнений и неравенств.

3. Демонстрирование различных методов решения уравнений и неравенств.

При изучении данной темы важно показывать не только стандартные алгоритмы и методы (возведение в степень, замена переменной), но и рассматривать нестандартные приёмы, развивающие математическую логику и интуицию.

Правильнее всего, представлять разные подходы к решению одной и той же задачи, чтобы учащиеся могли выбирать наиболее рациональный способ для решения той или иной задачи, а не действовать «по шаблону». Кроме того, учителю следуют обсудить с классом преимущества и недостатки каждого метода и рациональность их использования для конкретной задачи на конкретном примере.

4. Развитие навыков анализа и синтеза.

Учитель должен научить учащихся анализировать условие любой задачи, выявлять ограничения, определять рациональность применения метода

решения, развивать навыки синтеза, когда учащиеся комбинируют различные методы и приемы для решения более сложных задач.

5. Применение средств наглядности на уроках и ИКТ.

При объяснении данной темы классу учителю целесообразно использовать графики функций, построенных вручную на доске или с помощью компьютерных программ, для визуализации решения уравнений и неравенств, внедрять интерактивные модели и компьютерные программы для динамического представления учебного материала, применять презентации и видеоуроки для пояснения теоретических понятий и методов решения.

6. Организация дифференцированного обучения.

Ученикам следует предлагать для решения задачи разного уровня сложности, чтобы каждый мог работать в своём темпе. При необходимости учитель может проводить индивидуальные консультации или дополнительные занятия для учащихся, испытывающие затруднения в усвоении материала[2].

7. Организация контрольных и самостоятельных работ, устных опросов с целью оценки уровня усвоения материала классом и выявлении пробелов на начальных этапах освоения темы.

8. Грамотная разработка домашних заданий, требующих самостоятельного применения и закрепления полученных знаний на уроках.

Далее рассмотрим разработанную систему многоуровневых упражнений для учащихся по теме «Решение иррациональных уравнений и неравенств», применимых на уроках алгебры при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ и факультативных занятиях.

Цель разработки такой системы упражнений заключается в создании такого дидактического инструментария, который позволит организовать процесс обучения, максимально учитывающий индивидуальные особенности уровня подготовки каждого ученика в классе, как в рамках обязательных уроков алгебры в школе, так и на факультативных занятиях.

Данная система упражнений построена с учётом принципа постепенного усложнения. Задачи разделены на несколько уровней сложности, чтобы учащиеся могли постепенно осваивать материал и развивать свои навыки:

1. Базовый уровень — это задачи на применение стандартных алгоритмов и формул (найти ОДЗ простых выражений, освободится от радикала, решить простейшие неравенства и уравнения). Цель – формирование первичных навыков решения простейших иррациональных уравнений и неравенств по образцу.

2. Повышенный уровень — это задачи, требующие применения различных методов решения как уравнений, так и неравенств и их комбинирования, применения алгебраических преобразований. Цель – развитие умения применять полученные знания базового уровня в более сложных задачах.

3. Высокий и очень высокий (олимпиадный) уровень – это сложные и нестандартные задачи, требующие не только глубоких знаний по теме, но и творческого подхода, анализа условий, использования свойств функций. Цель – развитие математического мышления, подготовка к олимпиадам и экзаменам.

Задачи олимпиадного уровня на уроках в общеобразовательных школах обычно не рассматриваются и, как правил, выносятся на рассмотрение на факультативных занятиях для желающих учеников. Поэтому факультативные занятия должны быть направлены на углубленное изучение темы, развитие интереса к предмету, подготовку к олимпиадам и экзаменам, подробнее рассмотрение свойств функций, применяемых при решении уравнений и неравенств, разбор олимпиадных задач и задач повышенной сложности, организацию исследовательских проектов, применения компьютерных программ для решения задач, моделирования и др.

Методические рекомендации по использованию приложенной системы многоуровневых упражнений включает в себя следующие принципы:

1. Принцип дифференциации. Система позволяет организовать разноуровневое обучение.

1) Базовый (минимальный) уровень – обязателен для усвоения всеми учениками.

2) Повышенный уровень – для учащихся, освоивших базовый уровень и планирующих сдавать ОГЭ и ЕГЭ на средние и высокие баллы.

3) Высокий и очень высокий(олимпиадный) уровень- для мотивированных учащихся, участников олимпиад, обычно в рамках факультатива или спецкурса.

2. Принцип доступности и посильной трудности, который означает что каждый ученик должен работать на своем уровне, постепенно повышая сложность.

3. Принцип систематичности и последовательности, который означает, что переход к следующему уровню возможен только после полного освоения предыдущего.

Интеграция данной системы в учебный процесс может осуществлять одним из трех способов:

Модель 1. Линейная – последовательное прохождение уровней всем классом. Подходит для классов с однородным составом.

Модель 2. Дифференцированная – класс делится на группы по уровню подготовки. Каждая группа получает задания своего уровня. Учитель работает с каждой группой по очереди или привлекает ассистентов (наиболее сильных учеников).

Модель 3. Индивидуальная траектория - каждый ученик получает индивидуальный план освоения темы. Работа ведется в основном самостоятельно, с консультациями учителя. Эффективно при наличии электронной образовательной среды.

Реализации на уроках данной системы упражнений позволит не только эффективно усвоить тему, но и сформирует у учащихся метапредметные

навыки: умение учиться работать с информацией, оценивать себя и свои результаты, выбирать стратегию деятельности. Это в полной мере соответствует требованиям ФГОС и современным вызовам образования

2.3 Разработка урока изучения иррациональных уравнений и неравенств

Составим конспект урока алгебры, посвященного решению иррациональных уравнений и неравенств.

Тема урока: «Решение иррациональных уравнений и неравенств».

Тип урока: урок комплексного применения знаний (урок-практикум подготовки к ЕГЭ).

Класс: 11 класс общеобразовательной школы

Цель урока: создание условий для повторения и систематизации способов решения иррациональных уравнений и неравенств через организацию дифференцированной работы, направленной на успешную сдачу ЕГЭ профильного уровня.

Задачи урока:

1.Образовательные: актуализировать знания об основных методах решения иррациональных уравнений и неравенств, сформировать умение выбирать рациональный метод решения в зависимости от типа уравнения или неравенства.

2.Развивающие: развивать логическое и аналитическое мышление, математическую грамотность, умение адекватно оценивать свои способности и выстраивать индивидуальную траекторию обучения.

3.Воспитательные: воспитывать ответственное отношение к подготовке к экзаменам, математическую грамотность, умение работать в условиях ограниченного времени и, самое главное, умение адекватно оценивать свои способности и выстраивать индивидуальную траекторию обучения.

Продолжительность: 90 минут (спаренный урок) или факультативные занятия для желающих учеников.

Форма организации: индивидуально -дифференцированная работа.

За урок до проведения данного занятия учащиеся получают входной тест базового уровня на 10–15 минут. Входной тест представим в таблице 12.

Таблица 12 - Входной тест

Вариант 1	Вариант 2
1.Найдите ОДЗ выражения $f(x) = \sqrt{3x - 6}$	1.Найдите ОДЗ выражения $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$
2. Решите уравнение $\sqrt{x - 2} = 3$	2.Решите уравнение $\sqrt{x + 3} = 2$
3. Решите уравнение $\sqrt{x + 1} = x - 1$	3. Решите уравнение $\sqrt{2x - 1} = x - 2$
4.Решите неравенство $\sqrt{2x + 1} > -2$	4.Решите неравенство $\sqrt{x - 2} < 3$
5. Решите неравенство $\sqrt{x + 4} > x - 2$	5. Решите неравенство $\sqrt{3 - x} > x - 1$

Обработка результатов теста:

- 5 баллов – готов к повышенному и высокому уровню;
- 4 балла – необходимо закрепление базового уровня с перспективной повышения;
- 3 балла и менее – требуется работа на базовом уровне.

На основе диагностики проведенной работы учитель рекомендует учащимся их уровень, но окончательный выбор и осознание своего уровня остается за учеником (с правом коррекции в ходе урока).

Ход урока:

1.Организационный этап (2 минуты).

«Здравствуйте, ребята! Сегодня у нас важное занятие- Мы будем готовиться к ЕГЭ, решая иррациональные уравнения и неравенства. Каждый из вас будет работать в своем темпе, на своем уровне сложности. У вас на столах лежат карточки разных цветов .Выберите карточку того цвета, который соответствует уровню вашей готовности:

1. Зеленый – базовый уровень;
2. Синий – повышенный уровень;

3. Красный – высокий уровень;
4. Золотой – очень высокий (олимпиадный) уровень.

Если в процессе работы вы поймете, что выбрали не тот уровень, можно подойти и поменять карточку. Можно взять карточку нескольких цветов.

2. Актуализация знаний (5 минут).

Учитель проводит фронтальный опрос (с использованием подготовленной презентации) для актуализации знаний и подготовки учащихся к самостоятельной работе по карточкам:

1. Какое уравнение называется иррациональным?
2. Что такое ОДЗ, зачем её находить и как ей найти для выражения $\sqrt{x-3}$?
3. Как решить уравнение $\sqrt{x} = 5$?
4. Как решить неравенство $\sqrt{x} < 3$?
5. Как решить уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$? Какие условия нужно проверить?
6. Как решить неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$?
7. В чем отличие решения неравенств $\sqrt{f(x)} < g(x)$ и $\sqrt{f(x)} > g(x)$?
8. Когда применяется метод замены переменной?

Далее учитель предлагает устные задачи на нахождение ошибок в уже готовых решениях. На слайде представлены решения иррациональных уравнений и неравенств с типичными ошибками (забыли ОДЗ, не сделали проверку, потеряли корень и др.). Учащиеся должны найти ошибку и объяснить, как правильно нужно было решить (5–7 минут).

3. Инструктаж по работе на уроке (2 минуты). Учитель кратко поясняет, что нужно делать на каждом уровне, приводит критерии оценивания (таблица 13).

Таблица 13 - Критерии оценивания входного теста

Уровень	Оценка «3»	Оценка «4»	Оценка «5»
Базовый	3 задания	4 задания	5 заданий
Повышенный	3 задания	4 задания	5 заданий
Высокий	1 задание	2–3 задания	4 задания
Олимпиадный	1 задание	2 задания	3 задания

4. Самостоятельная работа (30–45 минут).

Ученики разбирают карточки и начинают решать задания. Карточки составлены из примеров, содержащихся в предложенной ранее в работе системе многоуровневых упражнений (приложение 1).

Карточки базового уровня сложности представим в таблице 14.

Таблица 14 - Карточки базового уровня сложности

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
1. Найти ОДЗ: $f(x) = \sqrt{5-2x}$	1. Найти ОДЗ: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2}-3}$	1. Найти ОДЗ: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$	1. Найти ОДЗ: $f(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}$	1. Найти ОДЗ: $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$
2. Решить уравнение: $\sqrt{x^2-9} = 4$	2. Решить уравнение: $\sqrt[3]{x+2} = -2$	2. Решить уравнение: $\sqrt{2x+1} = 7$	2. Решить уравнение: $\sqrt{5-2x} = 1$	2. Решить уравнение: $\sqrt{x-3} = 0$
3. Решить уравнение: $x - 4\sqrt{x} - 5 = 0$	3. Решить уравнение: $x + 5\sqrt{x} - 6 = 0$	3. Решить уравнение: $3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5$	3. Решить уравнение: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$	3. Решить уравнение: $x - 3\sqrt{2x} + 4 = 0$
4. Решить неравенство: $\sqrt{x-2} < 3$	4. Решить неравенство: $\sqrt{x^2+x+1} < 1$	4. Решить неравенство: $\sqrt{2x-7} < 3$	4. Решить неравенство: $\sqrt{2x+1} > -2$	4. Решить неравенство: $\sqrt{x^2+x-2} > 2$
5. Решить неравенство: $\sqrt{x^2-3x+2} \leq x-1$	5. Решить неравенство: $\sqrt{x+5} > x-1$	5. Решить неравенство: $\sqrt{2x+3} \leq x$	5. Решить неравенство: $\sqrt{5-x^2} < x-2$	5. Решить неравенство: $\sqrt{-x+16} < x+4$

Карточки повышенного уровня сложности представим в таблице 15.

Таблица 15 - Карточки повышенного уровня сложности

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
1.Найти ОДЗ: $\sqrt{\frac{(x-2)}{(x+3)}} = 1$	1.Найти ОДЗ: $\sqrt{4 - \sqrt{x}} = 0$	1.Найти ОДЗ: $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 5$	1.Найти ОДЗ: $\frac{1}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{5-x} = 0$	1.Найти ОДЗ: $\sqrt{\sqrt{(x+1)} - 2} = 0$
2.Решить уравнения: $\sqrt{x+6} = x$ $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$	2.Решить уравнения: $\sqrt{2x+3} = 6-x$ $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{3x}$	2.Решить уравнения: $\sqrt{x-1} = x-3$ $\sqrt{x^2-5x+6} = \sqrt{2x-4}$	2.Решить уравнения: $\sqrt{2x+5} = x+1$ $\sqrt{x+4} = \sqrt{x^2-2}$	2.Решить уравнения: $\sqrt{3x+1} = 2x-1$ $\sqrt{x^2+2x} = \sqrt{3x+6}$
3.Решить уравнения: $\frac{x^2+3x}{\sqrt{x^2+3x}} = 2$	3.Решить уравнения: $\sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} = 7$	3.Решить уравнения: $\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} = \sqrt{x^2-1}$	3.Решить уравнения: $(x^2-4x+4)\sqrt{x-3} = 0$	3.Решить уравнения: $2\sqrt[3]{x^2+5} + \sqrt[6]{x^2} - 18 = 0$
4.Решить неравенство: $\sqrt{x+3} > \sqrt{7-x}$	4.Решить неравенство: $\sqrt{x+2} > \sqrt{4-x}$	4.Решить неравенство: $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} < 1$	4.Решить неравенство: $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x+3}} \leq 5$	4.Решить неравенство: $\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{5-x}} > 4$
5.Решить неравенства: $\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1} < 0$ $(x^2-4)\sqrt{x+2} \geq 0$	5.Решить неравенства: $\frac{\sqrt{x+1}}{x-3} \geq 0$ $(x^2-5x+6)\sqrt{x+2} \leq 0$	5.Решить неравенства: $\frac{1}{\sqrt{x-2}} \leq 2$ $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}(x-2) + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}(x-3) \geq 0$	5.Решить неравенства: $\frac{x^2+4x+3+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} \geq 5$ $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}{3} > \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}{3}$	5.Решить неравенства: $\sqrt{\frac{(x+1)}{(x-1)}} + \sqrt{\frac{(x-1)}{(x+1)}} \geq \frac{5}{2}$ $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

Карточки высокого уровня сложности представим в таблице 16.

Таблица 16 - Карточки высокого уровня сложности

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
1.Найти ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 2 \end{cases}$	1.Найти ОДЗ: $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$	1.Найти ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+y} = x-y \\ \sqrt{x-y} = 3 \end{cases}$	1.Найти ОДЗ: $f(x) = \sqrt{ x -3} + \sqrt{5- x }$	1.Найти ОДЗ: $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{y-2}} = 1 \\ x+y = 10 \end{cases}$
2.Решить уравнение: $\frac{\sqrt{2^x+1}}{\sqrt{2^x-1}} = 2$	2.Решить уравнение: $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y} = 12 \\ x-y+\sqrt{x-y} = 6 \end{cases}$	2.Решить уравнение: $\frac{\sqrt{\log_2 x+1}}{\sqrt{\log_2 x-1}} = 2$	2.Решить уравнение: $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 3 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{y-1} = 1 \end{cases}$	2.Решить уравнение: $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{ x-2 } = 4$
3.Решить неравенство: $\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2} > 3$	3.Решить неравенство: $\frac{1}{\sqrt{ x+1 -2}} \leq \frac{1}{9+x}$	3.Решить неравенство: $\frac{\sqrt{5x-1}}{\sqrt[4]{13-2x}} \leq 4$	3.Решить неравенство: $\frac{\sqrt{3-\log_2 x}}{2-\log_2 x} > 0$	3.Решить неравенство: $\log_2(3-\sqrt{x-1}) \leq 1$
5.Решить неравенство: $\frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}} > 2$	5.Решить неравенство: $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x+1} > \sqrt[3]{2x}$	5.Решить неравенство: $\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{\sqrt{2x^2-3x+5}} > 3x$	5.Решить неравенство: $\frac{\sqrt{5x-1}}{\sqrt[4]{13-2x}} \leq 4$	5.Решить неравенство: $\frac{1}{2} \sqrt{x^2-2x-3} > 2^{x-3}$

Карточки олимпиадного уровня сложности представим в таблице 17.

Таблица 17 - Карточки олимпиадного уровня сложности

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1. Придумайте уравнение, ОДЗ которого является одна точка $x = 3$.	1. Придумайте уравнение, ОДЗ которого является: а) отрезок $[2; 5]$	1. Составьте неравенство, для которого ОДЗ совпадает с множеством всех действительных чисел, кроме $x = 2$ и $x = -2$.	1. Придумайте уравнение, ОДЗ которого является: объединение двух промежутков $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$
2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = a$ имеет ровно одно решение.	2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+a} = x-1$ имеет единственное решение?	2. Найдите все значения a , при которых уравнение $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = a$ имеет ровно два корня.	2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x-a} = x-2$ имеет единственное решение?
3. При всех значениях параметра a решите неравенство $\sqrt{x-a} \geq x$.	3. Найдите все значения a , при которых неравенство $\sqrt{x+a} < x+2$ имеет хотя бы одно решение.	3. При каких a неравенство $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > a$ выполняется для всех x из области определения?	3. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $\sqrt{3x-a} > 2-x$ выполняется для всех $x \in [0; 1]$.

Учащиеся разбирают карточки и выполняют задания в тетради. Учитель консультирует в случае возникновения трудностей. После того, как большинство учеников справилось, на доску проецируются эталоны ответов для сверки. Учащимся предлагается забрать свои работы домой, проанализировать ошибки и попробовать самим сделать работу над ошибками. На следующем уроке (факультативном занятии) обязательно проводится урок, на котором разбираются типичные ошибки с учителем.

После проведения подобной работы учитель проводит анализ результатов класса для коррекции дальнейшей работы по изучению темы.

Цель урока можно считать достигнутой, если:

- 1) учащиеся смогли правильно определить тип уравнения или неравенства и решить его наиболее подходящим способом;
- 2) большинство класса справилось с заданиями своего уровня (успешность более 60–70%);
- 3) в листах рефлексии ученики указали, что поняли свои пробелы и знают над чем работать дома.

Следовательно, такая подборка дифференцированных заданий для урока позволяет каждому ученику работать в своем темпе, постепенно переходя от простых алгоритмов к более сложным задачам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе написания данной работы было проведено комплексное исследование, посвященное изучению темы иррациональных уравнений и неравенств в рамках школьного курса алгебры. Актуальность данной темы обусловлена её высокой значимостью, поскольку знания и навыки, полученные при работе с иррациональными выражениями, являются фундаментом для успешного освоения многих тем курса алгебры, а также высшей математики, физики и многих других дисциплин. Кроме того, задачи на решение иррациональных уравнений и неравенств часто встречаются в материалах Основного государственного экзамена (ОГЭ) и Единого государственного экзамена (ЕГЭ), что еще раз подчеркивает их практическую значимость и необходимость понимания и усвоения учащимися на высоком уровне.

В рамках данной работы были успешно решены следующие задачи.

1. Рассмотрены философские истоки понятия иррациональности, продемонстрирована взаимосвязь философии и математики в аспекте противопоставления рационального и иррационального.

2. Проведен сравнительный анализ различных учебно – методических комплексов (УМК), выявлены особенности подачи теоретического материала, преобладающие типы задач и методы решения иррациональных уравнений и неравенств.

3. Подробно рассмотрены основные методы решения уравнений и неравенств: возведение в степень, замена переменных, метод равносильных переходов, графический и другие методы. Описаны особенности применения каждого метода, рассмотрены примеры.

4. Выделены наиболее распространённые ошибки, допускаемые учениками, такие как игнорирование ОДЗ, ошибки при возведении в степень, ошибки с применением равносильных переходов и другие.

5. Разработаны и предложены конкретные методические рекомендации для педагогов по организации процесса обучения решению иррациональных уравнений и неравенств.

6. Разработана система упражнений различной сложности для учащихся, направленная на формирование устойчивых навыков решения задач различной сложности.

7. Составлен план урока, посвященного решению иррациональных уравнений и неравенств на основе разработанной системы многоуровневых упражнений.

В заключении следует отметить, что изучение иррациональных уравнений и неравенств играет важную роль в формировании не только устойчивых знаний и навыков по данной теме, но и способствует развитию математической культуры, логики, мышления учащихся, готовит их к дальнейшему изучению математики и смежных с ней дисциплин.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алимов Ш. А. Алгебра и начала математического анализа: 10-11-е классы: базовый и углубленный уровни: учебник / Ш. А. Алимов [и др.] ; 13-е изд., стер. М. : Просвещение, 2025. 463 с.
2. Аммосова Н. В. Обучение решению иррациональных уравнений и неравенств девятиклассников в условиях уровневой дифференциации // Актуальные проблемы современного образования. Симметрии: теоретический и методический аспекты : Сборник материалов X Международной научно-практической конференции: Астраханский государственный университет имени В. Н. Татищева, 2024. С. 136–141.
3. Анисова Т. Л. О необходимости изучения различных методов решения иррациональных уравнений в курсе алгебры средней школы // Международный журнал экспериментального образования. 2017. № 9. С. 5–9.
4. Базарбаева М. К. Проблемные места при решении иррациональных уравнений в школе // Вопросы науки и образования. 2017. №4. С.32-35.
5. Батуева К. С. Иррациональные уравнения и неравенства в школьном курсе математики // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2017. № 19. С. 204-208.
6. Беляева Е. Р. Анализ типичных ошибок в решении уравнений, предлагаемых в контрольно-измерительных материалах ОГЭ // Международный научный вестник. 2021. № 2.
7. Боташева З. Х. Развитие мышления школьников при обучении решению иррациональных уравнений и неравенств // Современные проблемы математического образования : Сборник научных статей. Карачаевск : Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева, 2025. С. 29-33.

8. Глебова М. В., Осьминина Н. А., Пичугина П. Г. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства : учеб. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. 100 с.
9. Гринищенко Т. Е. Неравенства: типичные ошибки и проблемы их устранения / Т. Е. Гринищенко, О. М. Горностаев. // Молодой ученый. 2020. № 25 (315). С. 75–79.
10. ЕГЭ 2025. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий / И. В. Ященко [и др.]; М. : Экзамен. 2025. 160 с.
11. Жидкова Л. С. История введения в школьный курс математики темы «Иррациональные числа» // Вестник науки. 2023. №12. С. 692–696.
12. Звягинцева В. В. Практическое применение основных методов решения иррациональных уравнений и неравенств / В. В. Звягинцева // Наука. Образование. Технологии: Тенденции современного развития : Сборник статей III Международной научно-практической конференции. Петрозаводск. 2024. С. 73-83.
13. Колобов А. Н. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами // материалы Всероссийской научно-методической конференции (с международным участием), Оренбург, 25–27 января 2021 года. Оренбург : Оренбургский государственный университет, 2021. С. 1640–1647.
14. Математика. Алгебра : 8-й класс : базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. 17-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 319с.
15. Математика. Алгебра : 9-й класс : базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. 15-е изд., стер. М. : Просвещение. 2023. 255с.
16. Нетрадиционные методы решений иррациональных уравнений / Исакова М. М [и др.] // Вестник ЮУрГГПУ. 2018. №3.С.54-56.

17. Нуруллин Н. И. Иррациональные уравнения в основной // Непрерывность образования: от школы к вузу : материалы 5-й Всероссийской научно-методической школы-семинара, Ульяновск, 30 сентября 2021 года. Ульяновск : Ульяновский государственный технический университет, 2022. С. 43-47.
18. Соловьев С. П. Методы решения иррациональных уравнений и неравенств. М. : ИЛЕКСА, 2021. 220с.
19. Элементарная математика. Иррациональные уравнения и неравенства: учебное пособие / А.В. Фирер [и др.]; Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2021. 114 с.
20. Шахмейстер А. Х. Иррациональные уравнения и неравенства / А. Х. Шахмейстер. Санкт-Петербург ; Москва : Петроглиф [и др.], 2018. 214 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уровень сложности	Цель задания	Пример задания	Проверяемые / развиваемые навыки
Задание - нахождение ОДЗ (область допустимых значений)			
Базовый уровень	Научиться находить ОДЗ для простейших выражений с одним радикалом и целыми выражениями под ним.	$f(x) = \sqrt{5 - 2x}$ $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2} - 3}$ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$	1.Понимание определения арифметического квадратного корня (подкоренное выражение ≥ 0). 2.Умение решать линейные и квадратные уравнения и неравенства. 3.Навык записи ответа в виде промежутка или неравенства. 4.Понимание отличия корней четной и нечетной степени (для нечетной степени ОДЗ — все действительные числа).
Повышенный уровень	Научиться находить ОДЗ для более сложных выражений (несколько условий, дробно-рациональные выражения под корнем, пересечение областей, вложенные радикалы), ОДЗ в неравенствах.	$\sqrt{x + 3} + \sqrt{2x - 1} = 5$ $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 4} = \sqrt{2x + 5}$ $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}} = 1$ $\frac{1}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{5-x} = 0$ $\sqrt{4 - \sqrt{x}} = 0$ $\sqrt{\sqrt{(x+1)} - 2} = 0$ $\sqrt{x^2 - 3x} < x + 2$ $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x - 4$	1.Составление системы неравенств из нескольких условий (каждое подкоренное выражение ≥ 0) . 2.Решение систем методом пересечения промежутков 3. Учет двойного условия: подкоренное выражение ≥ 0 и знаменатель дроби $\neq 0$. 4.Последовательный учет условий, начиная с самого внутреннего радикала . 5.Решение систем с вложенными условиями. 6.Понимание, что в неравенствах ОДЗ находится до начала решения. 7.Учет того, что условия из ОДЗ входят в итоговую систему решения.

Высокий уровень	Научиться находить ОДЗ в системах уравнений и неравенств.	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+y} = x-y \\ \sqrt{x-y} = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{y-2}} = 1 \\ x+y = 10 \end{cases}$	1. Определение множества допустимых пар (х, у) как пересечения ОДЗ каждого уравнения системы.
	Научиться работать с комбинированными ограничениями (иррациональные, логарифмические, тригонометрические, дробные).	$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$ $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{\sin x}}$ $f(x) = \sqrt{ x -3} + \sqrt{5- x }$ $f(x) = \sqrt{ x -2} + \frac{1}{\sqrt{3- x+1 }}$ $f(x) = \arcsin(\sqrt{x})$ $f(x) = \sqrt{\sin(\pi x)}$	1. Учет одновременно иррациональных, логарифмических, тригонометрических ограничений. 2. Понимание специфики каждого типа ограничений.
Очень высокий (олимпиадный) уровень	Научиться анализировать структуру ОДЗ при наличии параметра.	При каких значениях параметра а ОДЗ уравнения $\sqrt{x-a} + \sqrt{2x+1} = 0$ состоит ровно из одной точки? Найдите эту точку. Найдите все значения параметра а, при которых ОДЗ неравенства $\sqrt{x^2-a^2} < x-1$ является пустым множеством.	1. Работа с параметрами в составе условий ОДЗ. 2. Аналитическое исследование систем неравенств, содержащих параметр. 3. Выделение критических значений параметра, при которых структура ОДЗ меняется.

	Развитие творческого мышления и глубокого понимания структуры ОДЗ.	Придумайте уравнение, ОДЗ которого является: а) отрезок $[2; 5]$; б) объединение двух промежутков $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$; в) одна точка $x = 3$. Составьте неравенство, для которого ОДЗ совпадает с множеством всех действительных чисел, кроме $x = 2$ и $x = -2$.	<p>1. Конструирование выражений с заданными свойствами.</p> <p>2. Понимание взаимосвязи между аналитической записью и геометрической интерпретацией ОДЗ.</p> <p>3. Исследовательские навыки: анализ, синтез, обобщение.</p> <p>4. Способность к математическому творчеству</p>
Задание - решение иррационального уравнения			
Базовый уровень	Отработка базового алгоритма: возведение в квадрат (если правая часть неотрицательна) и проверка (или учет ОДЗ).	$\sqrt{x-3} = 0$ $\sqrt{2x+1} = 7$ $\sqrt{x^2-9} = 4$ $\sqrt{5-2x} = 1$ $\sqrt{x+5} = 0$ $\sqrt{2x-1} = -3$ $\sqrt[3]{x+2} = -2$	<p>1. Умение определять, когда уравнение имеет решение ($a \geq 0$ для $\sqrt{f(x)} = a$).</p> <p>2. Возведение в квадрат обеих частей.</p> <p>3. Решение линейных и квадратных уравнений.</p> <p>4. Проверка корней на выполнение условия $f(x) \geq 0$ (или подстановка в исходное уравнение).</p> <p>5. Понимание разницы между корнями четной и нечетной степени (для четной степени требуется проверка, для нечетной — нет) .</p>
	Познакомиться с методом введения новой переменной для упрощения простейших иррациональных уравнений.	$x - 4\sqrt{x} - 5 = 0$ $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$ $x - 3\sqrt{2x} + 4 = 0$ $3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5$	<p>1. Умение распознавать структуру, позволяющую ввести замену (квадратичная относительно $\sqrt{x}$).</p> <p>2. Правильный учет ограничений для новой переменной ($t \geq 0$) .</p> <p>3. Возврат к исходной переменной после нахождения t.</p>

Повышенный уровень	<p>Научиться использовать равносильные переходы для исключения посторонних корней без громоздкой проверки.</p>	<p>Метод равносильных систем (уравнения вида $\sqrt{A} = B$):</p> $\begin{aligned}\sqrt{x+6} &= x \\ \sqrt{2x+3} &= 6-x \\ \sqrt{x-1} &= x-3 \\ \sqrt{2x+5} &= x+1 \\ \sqrt{4-x} &= x-2 \\ \sqrt{3x+1} &= 2x-1\end{aligned}$ <p>Метод равносильных систем (уравнения вида $\sqrt{A} = \sqrt{B}$):</p> $\begin{aligned}\sqrt{x+1} &= \sqrt{2x-3} \\ \sqrt{x^2-4} &= \sqrt{3x} \\ \sqrt{x^2+2x} &= \sqrt{3x+6} \\ \sqrt{x^2-5x+6} &= \sqrt{2x-4} \\ \sqrt{x+4} &= \sqrt{x^2-2}\end{aligned}$	<p>1. Знание условий равносильности: $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \{B \geq 0, A = B^2\}$, отбор корней по условию $B \geq 0$.</p> <p>2. Знание условий: $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \{A = B, A \geq 0\}$.</p> <p>3. Нахождение ОДЗ каждого радикала.</p> <p>4. Решение полученных уравнений и отбор корней.</p>
	<p>Отработать применение замены переменной в более сложных уравнениях, в том числе с уединением корней.</p>	$\begin{aligned}x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x} &= 2 \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{20-x} &= 7 \\ 2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 &= 0\end{aligned}$	<p>1. Умение выделять повторяющееся выражение для замены.</p> <p>2. Правильный учет ограничений для новой переменной.</p> <p>3. Навык последовательного возведения в квадрат при наличии двух радикалов</p>

Повышенный уровень	Научиться использовать свойство произведения, равного нулю, при наличии радикалов.	$(x - 3) \sqrt{x + 2} = 0$ $(x^2 - 4x + 4) \sqrt{x - 3} = 0$ $(\sqrt{36x^2 + 7} - \sqrt{35x^2 + 16}) \sqrt{2 - x} = 0$	<p>1. Учет ОДЗ каждого множителя.</p> <p>2. Решение уравнений, полученных из каждого множителя.</p> <p>3. Отбор корней, удовлетворяющих ОДЗ.</p>
	Познакомиться с уравнениями, содержащими радикалы разных степеней, и методом приведения к общему показателю	$2 \sqrt[3]{x^2 + 5} \sqrt[6]{x^2} - 18 = 0$ $\sqrt[3]{2x + 3} = \sqrt{x + 2}$ $(\sqrt{x^2 + 32} - 2\sqrt[4]{x^2 + 32}) = 3$	<p>1. Приведение радикалов к общему показателю.</p> <p>2. Замена переменной с учетом свойств степеней.</p> <p>3. Возведение в степень для исключения радикалов.</p>
	Познакомиться с методом домножения на сопряженное выражение для упрощения уравнений с разностью корней.	$\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3} = 1$ $\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} = \sqrt{x^2 - 1}$ $\sqrt{3x^2 - 5x + 2} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 2x$	<p>1. Умение домножать левую и правую часть на сопряженное выражение.</p> <p>2. Использование формулы $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.</p> <p>3. Учет ОДЗ при умножении.</p> <p>4. Решение полученных более простых уравнений.</p>

Высокий уровень	Познакомиться с методом использования монотонности функций для решения иррациональных уравнений	$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = 5$ $\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = 3$ $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$	<p>1. Исследование функции на монотонность (возрастание/убывание).</p> <p>2. Понимание, что монотонная функция принимает каждое свое значение ровно один раз.</p> <p>2. Подбор корня (часто целого или простого) и доказательство его единственности.</p>
	Решение систем, содержащих иррациональные выражения, методом замены переменных или почленного сложения/вычитания.	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 12 \\ x - y + \sqrt{x-y} = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 3 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{y-1} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$	<p>1. Введение вспомогательных переменных ($u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$) с учетом $u, v \geq 0$.</p> <p>2. Решение полученных систем рациональных уравнений.</p> <p>3. Возврат к исходным переменным и проверка ОДЗ.</p>
	Показать применение методов решения иррациональных уравнений к уравнениям, содержащим не только алгебраические, но и трансцендентные выражения.	$\sqrt{2^x + 1} + \sqrt{2^x - 1} = 2$ $\sqrt{\log_2 x + 1} + \sqrt{\log_2 x - 1} = 2$ $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = \sqrt{2}$ $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + x - 2 = 4$ $\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 + \sin x} = 2 \cos x $	<p>1. Применение методов к сложным составным выражениям.</p> <p>2. Учет дополнительных ограничений (логарифмических, тригонометрических).</p> <p>3. Комбинирование методов из разных разделов математики.</p>

Очень высокий (олимпиадный)	Сформировать навык решения иррациональных уравнений с параметрами, требующих анализа ОДЗ и условий существования решений.	<p>При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x-a} = x-2$ имеет единственное решение?</p> <p>Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = a$ имеет ровно два корня.</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Исследование области допустимых значений в зависимости от параметра. 2. Аналитическое и графическое исследование уравнений. 3. Определение критических значений параметра. 4. Запись ответа в зависимости от параметра
Задание - решение иррационального неравенства			
Базовый уровень	Формирование устойчивого навыка решения простейших иррациональных неравенств стандартными методами с использованием ОДЗ и возведения в квадрат.	$\sqrt{x-2} < 3$ $\sqrt{2x+1} > -2$ $\sqrt{x^2+x-2} > 2$ $\sqrt{2x-1} < x$ $\sqrt{x+5} > x-1$ $\sqrt{x^2-3x+2} \leq x-1$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень и нахождение ОДЗ. 2. Решение стандартного линейного неравенства вида $f\sqrt{x} < g(x)$, $f\sqrt{x} > g(x)$ 3. Решение квадратных неравенств, строгий учет не отрицательности правой части при знаке «$\leq$», аккуратность при работе с нестрогими неравенствами.

Повышенный уровень	Освоение более сложных методов решения иррациональных неравенств. Понимание структуры неравенства и умение выбирать наиболее рациональный путь.	<p>Неравенства с несколькими радикалами</p> $\sqrt{x+3} > \sqrt{7-x}$ $\sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4$ $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+3} \leq 5$ $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} < 1$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Умение уединять один из радикалов. 2. Многократное возведение в квадрат с контролем знаков. 3. Умение решать системы и совокупности неравенств.
		<p>Дробно – иррациональные неравенства:</p> $\frac{1}{\sqrt{x-2}} \leq 2$ $\frac{\sqrt{x+1}}{x-3} \geq 0$ $\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-1} < 0$ $\frac{2}{\sqrt{3-x}} > 1$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Умение учитывать все ограничения (ОДЗ корня и знаменателя). 2. Применение метода интервалов для иррациональных выражений. 3. Умение работать с дробно-рациональными неравенствами.
		<p>Вынесение общего множителя:</p> $(x^2 - 4) \sqrt{x+2} \geq 0$ $(x^2 - 5x + 6) \sqrt{x+2} \leq 0$ $\sqrt{x-1} (x-2) + \sqrt{x-1} (x-3) \geq 0$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Метод интервалов для произведения, учёт ОДЗ, внимательность к граничным точкам.

Повышенный уровень	Освоение более сложных методов решения иррациональных неравенств. Понимание структуры неравенства и умение выбирать наиболее рациональный путь.	Замена переменной: $\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 + 2\sqrt{x^2 + 4x + 5} &\geq 5 \\ 2x^2 + 3x\sqrt{x^2 + 3x + 9} &> 33 \\ \sqrt{x + 5} + \sqrt{20 - x} &\leq 7 \\ \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} &\geq \frac{5}{2} \\ \sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 4x + 2} &\geq \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 5}} \end{aligned}$	1.Выделение повторяющегося выражения. 2.Учет ограничений на новую переменную (не отрицательность корня) 3.Возврат к исходной переменной.
		Домножение на сопряженное выражение: $\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}} &> \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} \\ \sqrt{2x+1} - \sqrt{x} &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} &< 1 \end{aligned}$	1.Избавление от иррациональности в знаменателе или числителе.
Высокий уровень	Преобразование сложных конструкций, выделение полных квадратов.	$\begin{aligned} \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} &> 2 \\ \sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} &> 3x \end{aligned}$	1.Навыки тождественных преобразований. 2.Снятие модуля после извлечения корня из квадрата.

Высокий уровень	Решение систем, содержащих иррациональные неравенства, нахождение пересечения решений.	$\begin{cases} \sqrt{x-1} < 2 \\ \sqrt{x+3} > 1 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y-1} \leq 3 \\ x + y = 5 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq 1 \\ \sqrt{x+1} > 2 \end{cases}$	1. Решение каждого неравенства системы 2. Нахождение пересечения полученных множеств 3. Учет ОДЗ для всех выражений
	Применение свойств возрастания/убывания функций для оценки количества решений и угадывания корня	$\begin{aligned} \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2} &> 3 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} &< 9 \\ \sqrt{5x-1} + \sqrt[4]{13-2x} &\leq 4 \\ \sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x+1} &> \sqrt[3]{2x} \end{aligned}$	Определение монотонности левой части (обычно она возрастает на ОДЗ) Нахождение корня соответствующего уравнения (часто подбором)
	Научиться работать с комбинированными неравенствами (иррациональные, логарифмические, показательные, с модулями и др.)	$\begin{aligned} \log_2(3 - \sqrt{x-1}) &\leq 1 \\ \frac{1}{2} \sqrt{x^2-2x-3} &> 2^{x-3} \\ \sqrt{3 - \log_2 x} &> 2 - \log_2 x \\ \frac{1}{\sqrt{ x+1 -2}} &\leq \frac{1}{9+x} \end{aligned}$	1. Комплексный анализ ОДЗ (с модулями, дробями, иррациональностями) 2. Применение нескольких методов в одной задаче (замена, оценка, возведение в квадрат, выделение полного квадрата)

<p>Очень высокий (олимпиадный) уровень</p>	<p>Исследование решений в зависимости от значений параметра, анализ граничных случаев</p>	<p>При всех значениях параметра a решите неравенство $\sqrt{x-a} \geq x$.</p> <p>Найдите все значения a, при которых неравенство $\sqrt{x+a} < x+2$ имеет хотя бы одно решение.</p> <p>При каких a неравенство $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} > a$ выполняется для всех x из области определения?</p>	<p>1. Умение проводить логический анализ условий. 2. Рассмотрение случаев: совпадение границ, пустое множество решений, бесконечные серии. 3. Владение графическим методом (полупарабола и прямая).</p>
--	---	--	---

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 12 » 09 2025 г.
 Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Патеевой Олеси Рустямовны

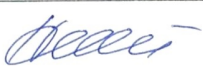
(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение иррациональных уравнений и неравенств в школе»

Утверждена приказом по Университету от « 25.09 » 2025 г. № 1102/0

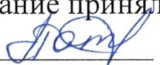
Срок сдачи студентом законченной работы « 25 » 05 2026 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1	Выбор темы, определение цели, задач, объекта предмета исследования	25.09.2025 01.10.2025	Выполнено 
2	Подбор и изучение литературы по теме исследования	01.10.2025 01.11.2025	Выполнено 
3	Подготовка введения и теоретической главы ВКР	01.11.2025 01.01.2026	Выполнено 
4	Анализ школьных учебников по теме исследования, изучение различных методов решения иррациональных уравнений и неравенств	01.01.2026 01.02.2026	Выполнено 
5	Выявление типичных ошибок и затруднений учащихся при решении иррациональных уравнений и неравенств	01.02.2026 01.03.2026	Выполнено 
6	Разработка методических рекомендаций и системы многоуровневых упражнений по теме решения иррациональных уравнений и неравенств на уроках алгебры и факультативных занятиях	01.03.2026 01.05.2026	Выполнено 
7	Подготовка второй главы ВКР, заключения, списка литературы и приложений	01.05.2026 01.06.2026	Выполнено 
8	Устранение замечаний, подготовка к защите ВКР	01.06.2026 30.06.2026	Выполнено 

Дата выдачи задания « 14 » 09 2025.

Руководитель  Никитина О. П.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению  Степанов О. Р.
(подпись) (Ф.И.О.)

И.о ректора Пензенского
государственного университета
Артамонову Д.В.
студентки 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Патеевой Олеси Рустямовны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Патеева Олеся Рустямовна, студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Изучение иррациональных уравнений и неравенств в школе», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

ПОДПИСЬ

12.05.2026

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 12.05.2026

ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР

подпись

Намикина О.В.

И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему:

«Изучение иррациональных уравнений и неравенств в школе»

студентки 5 курса Патеевой Олеси Рустямовны

И.О. Фамилия

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

профиля «Математика»

Руководитель ВКР Ольга Геннадьевна Никитина

И.О. Фамилия



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://npsgu.antiplagiar.ru>



Отчет о проверке

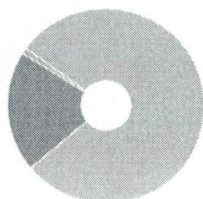
Автор: Патеева Олеся Рустямовна

Название документа: ВКР_Изучение иррациональных уравнений и неравенств в школе

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
19,62%

Оригинальность:
78,97%

ИИ-контент:
12,37%

Цитирования:
1,41%

Самоцитирования:
0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 80,32% текста документа, исключено из проверки: 19,68% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография, Приложение, Таблицы

- Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиографии; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 135

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 12.05.2026 16:33:39

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 56

Символов в тексте: 91883

Слов в тексте: 12544

Число предложений: 2278

12.05.2026

дд.мм.гггг.

подпись

О.Г. Никитина
И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Изучение иррациональных уравнений и неравенств в школе»
студентки Патеевой Олеси Рустямовны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика», гр. 213ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Патеевой Олеси Рустямовны посвящена вопросам изучения иррациональных уравнений и неравенств в школе.

Актуальность темы исследования состоит в том, что иррациональные уравнения и неравенства занимают важное место в школьном курсе математики, их изучение способствует развитию логики, формированию навыков анализа и обобщения информации, а также умению грамотно применить теоретические знания. Однако практика показывает, что изучение данной темы зачастую вызывает у школьников определённые затруднения. Эти трудности в большей степени связаны с логикой преобразования выражений, с выбором подходящего метода решения, с необходимостью учета области допустимых значений, с риском потери решений или, наоборот, с риском появления посторонних корней. Часто ученики усваивают тему на уроках формально, можно даже сказать поверхностно, не понимая сути проводимых преобразований и действий, что приводит к появлению типичных ошибок при решении иррациональных уравнений и неравенств.

Цель работы состоит в разработке методических рекомендаций и системы многоуровневых упражнений, направленных на повышение эффективности обучения решению иррациональных уравнений и неравенств на уроках алгебры и дополнительных (факультативных) занятиях.

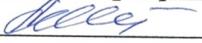
Выпускная квалификационная работа Патеевой О.Р. состоит из введения, основной части, заключения, списка литературы и приложений.

Основная часть состоит из двух глав. Первая глава посвящена теоретическим основам изучения иррациональных уравнений и неравенств в школе. В частности, рассмотрены основные методы решения иррациональных уравнений и неравенств, а также проведён сравнительный анализ учебников различных авторов.

Во второй главе проведён анализ основных ошибок, допускаемых учащимися при решении иррациональных уравнений и неравенств, разработана система многоуровневых упражнений по данной теме, приведен конспект одного из уроков по данной теме.

Работа Патеевой О.Р. является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Патеевой Олеси Рустямовны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР доцент кафедры «Математическое образование»,
к.ф.-м.н.  Никитина Ольга Геннадьевна