

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

**Факультет физико-математических и
естественных наук**

**Кафедра «Математическое
образование»**

**Курсовая работа
по дисциплине «Математический анализ»
на тему «Уравнение Лапласа в
цилиндрических координатах. Решение
задачи Дирихле для кольца с постоянными
значениями искомой функции на
внутренней и внешней окружностях»**

Направление подготовки – 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки – Математика

Выполнил студент: _____ **Игумнов Д.С.**
(подпись, дата) (Ф.И.О.)

Группа: **18ФПМ1**

Руководитель:
д.п.н., профессор каф. МО _____ **Яремко Н.Н.**
(подпись, дата) (Ф.И.О.)

Работа защищена с оценкой _____

Преподаватели _____

Дата защиты _____

Задание КР

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое
образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«_____» _____ 20__ г.

Задание

По КР студента Игумнова Даниила Сергеевича

(ФИО полностью)

Тема работы Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Решение задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях

Распоряжение по кафедре от «_____» 20__ г. № _____

Срок сдачи студентом законченной работы «_____» _____ 20__ г. Перечень
подлежащих разработке вопросов

Вывод уравнения Лапласа в цилиндрических координатах, Решение Задачи Дирихле для

кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях

Решение задач, связанных с уравнением Лапласа и задачей Дирихле

Дата выдачи задания «__» _____ 20__ г.

Руководитель _____ / _____
(подпись) Ф.И.О.

Задание принял к исполнению _____ / _____
(подпись) Ф.И.О.

Содержание

Содержание.....	3
Введение.....	4
Глава 1. Вывод уравнения Лапласа в цилиндрических координатах, Решение Задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях.	6
1.1 Уравнение Лапласа. Оператор Лапласа.....	6
1.2. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах.	10
1.3. Задача Дирихле.....	11
1.4. Решение Задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях.	16
Глава 2. Решение задач, связанных с уравнением Лапласа и задачей Дирихле	18
2.1. Решение конкретной задачи на уравнение Лапласа в цилиндрических координатах	18
2.2 Решение задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями функции на внутренних и внешних радиусах	20
Вывод.....	23
Приложение 1	24
Список литературы	25

Введение.

Лаплас – автор фундаментальных работ по математике и математической физике, прежде всего – трактата Аналитическая теория вероятностей (*Théorie analytique des probabilités*, 1812), в котором можно обнаружить многие позднейшие открытия теории вероятностей, сделанные другими математиками. В нем рассмотрены некоторые вопросы теории игр, теорема Бернулли и ее связь с интегралом нормального распределения, теория наименьших квадратов; вводится «преобразование Лапласа», которое позже стало основой операционного исчисления. Широко известно уравнение Лапласа в частных производных, применяющееся в теории потенциала, тепло- и электропроводности, гидродинамике.

Именно на уравнение Лапласа мы и остановимся в рамках данной курсовой работы.

Для начала рассмотрим сферы в которых применяется данное уравнение.

Уравнение Лапласа возникает во многих физических задачах механики, теплопроводности, электростатики, гидравлики. Большое значение оператор Лапласа имеет в квантовой физике, в частности в уравнении Шрёдингера.

Все это говорит нам о важности данного уравнения, причем не только в математическом анализе или в математике.

Сфера применения гораздо шире.

Несмотря на то, что уравнение Лапласа является одним из самых простых в математической физике, его решение сопряжено с трудностями. Особенно трудным бывает численное решение из-за нерегулярности функций и наличия особенностей.

Краевым условием для уравнения Лапласа является задача Дирихле, когда искомая функция задана на ограниченной области и известны её значения на границе. Существует большое количество частных случаев, а также решений данных задач и уравнений в разных системах координат.

Сегодня мы подробно остановимся на следующем: Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Решение задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях

Многое, относящееся к данной теме уже было изучено ранее, однако следует связать все это воедино.

В связи с этим, целью курсовой работы является последовательное изложение материала, а также необходимость логически упорядочить материал, выявив и рассмотрев подробно все аспекты, относящиеся к теме.

Объектом исследования является рассмотрение уравнения Лапласа и задачи Дирихле.

Предметом исследования будут являться частные случаи, как уравнения Лапласа, так и самой задачи Дирихле.

В связи с этим, мы поставили перед собой следующие задачи:

- Определить теоретические основы оператора Лапласа и его уравнения, рассмотреть решение в цилиндрических координатах.

- Выявить взаимосвязь уравнения Лапласа с задачей Дирихле.

- рассмотреть и обосновать решение задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях

Глава 1. Вывод уравнения Лапласа в цилиндрических координатах, Решение Задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях.

1.1 Уравнение Лапласа. Оператор Лапласа.

Говоря про уравнения Лапласа, нельзя не упомянуть самого ученого.

Пьер-Симон, маркиз де Лаплас – именно так звали выдающегося ученого, внесшего свой вклад во многие науки, среди которых: математика, физика, астрономия, механика.

Однако сейчас, нам больше интересен его вклад в область математики.

При решении прикладных задач Лаплас разработал методы математической физики, широко используемые и в наше время. Особенно важные результаты относятся к теории потенциала и специальным функциям. Его именем названо преобразование Лапласа и уравнение Лапласа. Это не говорит о том, что это весь вклад ученого в математику, напротив. Но мы остановимся только на этом.

Давайте теперь рассмотрим подробнее уравнение Лапласа.

Уравнение Лапласа – дифференциальное уравнение в частных производных.

Дифференциальное уравнение это уравнение, содержащее неизвестные функции нескольких переменных и их частные производные. В трёхмерном пространстве уравнение Лапласа имеет разные записи, в зависимости от учебников и прочего, но стандартный вид записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Стоит упомянуть, что оно является частным случаем уравнения Гельмгольца.

Уравнение Гельмгольца – это эллиптическое уравнение в частных производных $(\Delta + k^2)U = f$

Где $\Delta = \nabla^2$ – это оператор Лапласа (о котором сегодня тоже пойдет речь), а неизвестная функция U определена в $\mathbb{R}^n$ (на практике уравнение Гельмгольца применяется для $n = 1,2,3$)

Более подробно останавливаться на нем -мы не будем.

Возвращаясь к уравнению Лапласа: раннее, нами уже было отмечено, что уравнение записывается для трехмерного пространства, однако оно будет справедливым и для двумерного и одномерного пространства, так в двумерном пространстве, оно будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Также и для n -мерного пространства. В этом случае нулю приравняется сумма n вторых производных.

С помощью дифференциального оператора:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \dots$$

Оператор Лапласа – уравнение записывается одинаково, причем, не важно, о какой размерности идет речь:

$$\Delta u = 0$$

Стоит подробнее рассмотреть, что такое оператор Лапласа и как он выражается в цилиндрических координатах.

Оператор Лапласа является естественным обобщением на функции нескольких переменных обычной второй производной функции одной переменной. В самом деле, если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 непрерывную вторую производную $f''(x)$, то, как следует из формулы Тейлора

$$f(x_0 + r) = f(x_0) + rf'(x_0) + \frac{r^2}{2} f''_{(x_0)+0}(r^2), \text{ при } r \rightarrow 0,$$

$$f(x_0 - r) = f(x_0) - rf'(x_0) + \frac{r^2}{2} f''_{(x_0)+0}(r^2), \text{ при } r \rightarrow 0,$$

Вторая производная есть предел

$$f''(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{f(x_0 + r) + f(x_0 - r)}{2} - f(x_0) \right) \right\}$$

Если, переходя к функции F от k -переменных, поступить таким же образом, то есть для заданной точки $M_0(X_1^0, X_2^0, \dots, x_k^0)$)

Рассматривать ее k -мерную шаровую окрестность Q_r радиуса r и разность между средним арифметическим.

$$\frac{1}{\sigma(s_r)} \int_{s_r} F d\sigma$$

Функции F на границе s_r такой окрестности с площадью границы $\sigma(s_r)$ и значением $F(M_0)$, то в случае непрерывности частных производных функции F в окрестности точки M_0 значение лапласиана ΔF в этой точке есть предел

$$\Delta F(M_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2k}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sigma(s_r)} \int_{s_r} F(M) d\sigma - F(M_0) \right\}$$

Одновременно с предыдущим представлением для оператора Лапласа функции F , имеющей непрерывные вторые производные, справедлива формула

$$\Delta F(M_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2(k+2)}{r^2} \left\{ \frac{1}{\omega(Q_r)} \int_{Q_r} F(M) d\omega - F(M_0) \right\}$$

Где $\omega(Q_r)$ – объём скорости Q_r

Эта формула выражает непосредственную связь лапласиана функции с её объёмными средними в окрестности точки.

Можно было бы доказать описанные выше формулы, однако подробно вдаваться в доказательство я не буду, так как, они уведут нас от исходной темы курсовой работы.

Вышеизложенные пределы, во всех случаях, когда они существуют, могут служить определением Лапласа функции F . Такое определение предпочтительнее обычного определения лапласиана, предполагающего существование вторых производных рассматриваемых функций, и совпадает с обычным определением в случае непрерывности этих производных.

Или, другими словами:

Оператор Лапласа или лапласиан -дифференциальный оператор, который задается дивергенцией от градиента в виде функции на евклидовом пространстве . Обычно его обозначают символами $\nabla \cdot \nabla, \nabla^2$ (где ∇ - оператор набла) или Δ . В декартовой системе координат лапласиан задается суммой вторых частных производных функции по каждой независимой переменной. В других системах координат, таких как цилиндрические и сферические координаты, лапласиан также имеет полезную форму. Неформально, лапласиан $\Delta f = p$ функции f в точке p измеряет, насколько среднее значение f по маленьким сферам или шарам с центром в p отклоняется от $f(p)$.

Разобравшись с понятием оператора Лапласа, стоит отметить, что он может выражаться в различных криволинейных системах координат. Нас же, в рамках курсовой работы, будет интересовать его вид в цилиндрических координатах:

Вне прямой $r=0$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \left(r * \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} * \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

При использовании других координат представление оператора Лапласа меняется, и, исходя из этого, меняется и запись самого уравнения. Стоит отметить, что и уравнение Лапласа, описанное нами ранее, было рассмотрено именно в декартовых координатах.

Уравнение Лапласа относится к эллиптическому виду. Функции, являющиеся решениями уравнения Лапласа, называются гармоническими функциями. Неоднородное уравнение Лапласа называется уравнением Пуассона.

И в рамках данной курсовой работ, одной из наших задач является рассмотрение решения уравнения Лапласа в цилиндрических координатах.

1.2. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах.

Пусть, $u(x,y,z)$ - гармоническая функция трех переменных.

Гармоническая функция – вещественная функция U , определенная и дважды непрерывно дифференцируема на евклидовом пространстве ∂ (или его открытом подмножестве), удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0$$

$$\text{Где } \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Тогда, как уже отмечалось раньше:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Для дальнейшего удобства, обозначим данное уравнение за (1)

Введем в рассмотрение цилиндрические координаты

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

И образуют правую тройку:

$$\begin{cases} \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_r \end{cases}$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_r + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

Закон преобразования координат от цилиндрических к декартовым

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi; z = z$$

Откуда не сложно выразить, что:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg \frac{y}{x}, z = z$$

Обозначим за (2)

Заменяя независимые переменные x, y и z на r, φ и z , придем к функции u^* :

$$u(x, y, z) = u^*(r, \varphi, z)$$

Найдем уравнение, которому будет удовлетворять $u^*(r, \varphi, z)$, как функция аргументов r, φ и z

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u^*}{\partial r} * \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} * \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} * \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial u^*}{\partial r} * \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{2 \partial^2 u^*}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} * \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \end{aligned}$$

Обозначим за (3)

Аналогично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} * \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial u^*}{\partial r} * \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{2 \partial^2 u^*}{\partial r \partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} * \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2};$$

Обозначим за (4)

кроме того

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}$$

Выражения для $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial y^2}$ находим из равенства

(2). Складывая правые части равенств (3) - (5) и приравнявая сумму нулю (так как сумма левых частей этих равенств равна нулю в силу (1)), получаем:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} * \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} * \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} = 0$$

Обозначим за (6)

Итак, мы пришли к уравнению Лапласа в цилиндрических координатах.

Если функция не зависит от z и зависит от r и φ , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} * \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} * \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} = 0$$

Обозначим за (7)

Где r и φ - полярные координаты на плоскости.

Подробнее, мы рассмотрим решение конкретной задачи в главе 2.

Основными краевыми задачами для уравнения Лапласа являются первая краевая задача, или задача Дирихле

1.3. Задача Дирихле

Ио́ганн Пе́тер Гу́став Лежён Дирихле́ (нем. Johann Peter Gustav Lejeune d'irichlet; 13 февраля 1805, Дюрен, Французская империя, ныне Германия — 5 мая 1859, Гёттинген, королевство Ганновер, ныне Германия) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел.

Дирихле принадлежит ряд крупных открытий в самых разных областях математики, а также в механике и математической физике.

В анализе и математической физике он ввёл понятие условной сходимости ряда и дал признак сходимости. Доказал разложимость в ряд Фурье всякой монотонной кусочно-непрерывной функции. Высказал плодотворный принцип Дирихле. Существенно продвинул теорию потенциала.

В теории чисел он доказал теорему о прогрессии: последовательность $\{a + nb\}$, где a, b — взаимно простые целые числа, содержит бесконечно много простых чисел.

Задача Дирихле — вид задач, появляющийся при решении дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Названа в честь вышеупомянутого Петера Густава Дирихле.

Постановка задачи Дирихле описывается следующим образом.

Пусть D - открытая область в R^2 , Γ -граница области D .

Оператор Лапласа – линейный равномерно эллиптический оператор:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Задача Дирихле: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, удовлетворяющее следующему условию:

$$u|_{\Gamma} = \varphi$$

Или, иначе

$$u|_{\partial\Omega} = g(x)$$

Такая задача называется внутренней задачей Дирихле или первой краевой задачей. Сами условия называются условиями Дирихле или первыми краевыми условиями. Второе название может трактоваться шире, обозначая любую задачу решения дифференциального уравнения, когда известно значение искомой функции на всей границе области. В случае, когда надо найти значения функции вне области Ω задача называется внешней задачей Дирихле.

Существует теорема, связанная с задачей Дирихле, а именно:

Теорема.

Решение задачи Дирихле, внутренней или внешней, единственно

Аналитически задача Дирихле может быть решена с помощью теории потенциала. Решение однородного уравнения можно представить в виде

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} g(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} dx$$

Где $G(x, y)$ – функция Грина для оператора Лапласа области Ω

Или, существует численные решения

Построение аналитического выражения для функции Грина в сложных областях может вызвать затруднения, поэтому для решения таких задач приходится пользоваться численными методами. Для каждого метода есть свои особенности учёта первых краевых условий:

в методе конечных разностей для узлов на границе области записывается уравнение $q_i = g(x_i)$, где i - номер, соответствующего узла

в методе конечных элементов такие краевые условия называют главными краевыми условиями и они учитываются на этапе сборки матрицы; для всех весов, связанных с границей, уравнения заменяются на уравнения вида

$$g_i = g(x_i)$$

И далее, выполняем несколько шагов метода Гаусса, чтобы полученная матрица была симметричной

И, напоследок, физическая интерпретация задачи Дирихле:

Физическая интерпретация условий Дирихле — поведение искомой величины на границе:

- температуры, если рассматривается уравнение теплопроводности;
- поля скорости, если рассматривается уравнение Стокса;
- магнитное или электрическое поля, если рассматривается некоторое уравнение, получаемое из уравнений Максвелла (тогда краевые условия называют магнитными или электрическими краевыми условиями, соответственно).

Мы не будем подробно рассматривать отдельно каждую из позиций, способов решения и так далее, а остановимся на решении задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях.

1.4. Решение Задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях.

Возвращаясь к обозначениям главы 1.2 продолжим.

Найдем теперь решение уравнения Лапласа в области ∂ (кольце), которая ограничена окружностями $K_1: x^2 + y^2 = R_1^2$ и $K_2: x^2 + y^2 = R_2^2$,

Принимающие следующие граничные значения, которые мы обозначим за (8) и (9):

$$u|_{K_1} = u_1$$

$$u|_{K_2} = u_2$$

Где u_1 и u_2 – постоянные.

Будем решать задачу в полярных координатах. Очевидно, что целесообразно искать решение, которое не будет зависеть от φ . Уравнение (7) в таком случае примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} * \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Проинтегрируем данное уравнение

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = C_1 \Leftrightarrow \partial u = \frac{C_1 \partial r}{r} \Leftrightarrow$$

Из этого следует, что

$$u = C_1 \ln(r) + C_2$$

Обозначим за (10)

Определим C_1 и C_2 из условий (8) и (9):

$$u_1 = C_1 \ln(R_1) + C_2, u_2 = C_1 \ln(R_2) + C_2$$

Откуда несложно найти

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}, C_2 = u_1 - \frac{(u_2 - u_1) \ln R_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{u_1 \ln(R_2) - u_2 \ln(R_1)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в формулу (10), окончательно получаем

$$u = u_1 + \frac{\ln(\frac{r}{R_1})}{\ln(\frac{R_2}{R_1})} * (u_2 - u_1) = \frac{u_2 \ln(\frac{r}{R_1}) - u_1 \ln(\frac{r}{R_2})}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$$

Обозначим за (11)

Фактически мы решили следующую задачу: найти функцию u , удовлетворяющую уравнению Лапласа в области, ограниченной поверхностями (в цилиндрических координатах):

$r = R_1, r = R_2, z = 0, z = H$, и следующим граничным условиям:

$$u|_{r=R_1} = u_1 \quad u|_{r=R_2} = u_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=H} = 0$$

Задача Дирихле-Неймана. Очевидно, что искомое решение зависит ни от z , ни от φ и дается формулой (11).

Глава 2. Решение задач, связанных с уравнением Лапласа и задачей Дирихле

2.1. Решение конкретной задачи на уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

Задание:

Найдите поле между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами r_1 и r_2 , разность потенциалов между которыми равна ΔU

Рисунок будет в приложении 1

Решение:

Запишем уравнение Лапласа в цилиндрических координатах с учетом аксиальной симметрии:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

Оно имеет решение $\varphi = -A \ln(r) + B$

Выберем нулевой потенциал на наружном цилиндре, найдем, получим:

$$\varphi(r_2) = 0 = -A \ln r_2 + B$$

Следовательно

$$B = A \ln r_2$$

$$\varphi(r_1) = \Delta U = -A \ln r_1 + B$$

Получим:

$$A = \frac{\Delta U}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}$$

В результате имеем:

$$\varphi(r) = -\frac{\Delta U}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln(r) + \frac{\Delta U}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln r_2$$

Ответ: Поле между двумя коаксиальными цилиндрами задаётся функцией

$$\varphi(r) = -\frac{\Delta U}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln(r) + \frac{\Delta U}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \ln r_2$$

2.2 Решение задачи Дирихле для кольца с постоянными значениями функции на внутренних и внешних радиусах

Задача:

Решить внутреннюю задачу Дирихле для кольца $a \leq p \leq b$

Если

$$U|_{p=a} = f(\varphi), \text{ и } U|_{p=b} = F(\varphi),$$

То

$$u(p)\varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n p^n + \frac{B_n}{p^n} \right) \cdot \cos n\varphi + \left(C_n p^n + \frac{D_n}{p^n} \right) \sin n\varphi \right] + B_0 \ln p + A_0$$

Где

$$A_n = \frac{b^n F_n^{(1)} - a^n f_n^{(1)}}{b^{2n} - a^{2n}}$$

$$B_n = \frac{[b^n f_n^{(1)} - a^n F_n^{(1)}] a^n b^n}{b^{2n} - a^{2n}}$$

$$A_0 = \frac{f_0^{(1)} - F_0^{(1)}}{\ln \frac{a}{b}}$$

$$C_n = \frac{b^n F_n^{(2)} - a^n f_n^{(2)}}{b^{2n} - a^{2n}}$$

$$D_n = \frac{[b^n f_n^{(2)} - a^n F_n^{(2)}] a^n b^n}{b^{2n} - a^{2n}}$$

$$B_0 = \frac{F_0^{(1)} \ln a - f_0^{(1)} \ln b}{\ln \frac{a}{b}}$$

Причем $f_n^{(1)}, f_n^{(2)}, F_n^{(1)}, F_n^{(2)}$ — коэффициенты Фурье функций $f(\varphi)$ и $E(\varphi)$, равные

$$f_0^{(2)} = \frac{1}{2n} \int_0^{2n} f(\varphi) \partial \varphi,$$

$$f_0^{(1)} = \frac{1}{n} \int_0^{2n} f(\varphi) \cos n\varphi \partial \varphi, (n=1,2,\dots),$$

$$f_0^{(2)} = \frac{1}{n} \int_0^{2n} f(\varphi) \sin n\varphi \partial \varphi,$$

Аналогичные выражения имеют место для F_n

Решение:

Требуется найти решение Лапласа внутри кольца $a \leq p \leq b$

При краевых условиях $U_{p=a}$ и $U_{p=b} = F(\varphi)$ на его границе. Действуя методом разделения переменных и полагая

$$u(p, \varphi) = R(r)\phi(\varphi),$$

Получим:

$$R_n(p) = A_n p^n + \frac{B_n}{p^n}$$

$$R_0(p) = A_0 + B_0 \ln p$$

В отличие от задачи для круга здесь следует сохранить оба слагаемых, так как точка $p = 0$ находится вне кольца. В результате мы получим частные решения вида

$$u_0(p, \varphi) = A_0 + B_0 \ln p$$

$$u_0(p, \varphi) = \left(A_n p^n + \frac{B_n}{p^n} \right) \cdot \cos n\varphi + \left(C_n p^n + \frac{D_n}{p^n} \right) \sin n\varphi$$

Составляя затем общее решение и требуя удовлетворения краевым условиям при $p = a$ и $p = b$, будем иметь:

$$A_0 + B_0 \ln a = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n p^n + \frac{B_n}{a^n} \right) \cdot \cos n\varphi + \left(C_n a^n + \frac{D_n}{a^n} \right) \sin n\varphi \right] = f(\varphi),$$

$$A_0 + B_0 \ln b = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n p^n + \frac{B_n}{b^n} \right) \cdot \cos n\varphi + \left(C_n b^n + \frac{D_n}{b^n} \right) \sin n\varphi \right] = F(\varphi),$$

Откуда и получаем уравнения для определения A_n, B_n, C_n, D_n

$$A_n a^n + \frac{B_n}{a^n} = f_n^{(1)}$$

$$C_n a^n + \frac{D_n}{a^n} = f_n^{(2)}$$

$$A_0 + B_0 \ln C = f_0^{(1)}$$

$$A_n b^n + \frac{B_n}{b^n} = F_n^{(1)}$$

$$C_n b^n + \frac{D_n}{b^n} = F_n^{(2)}$$

$$A_0 + B_0 \ln b = F_0^{(1)}$$

Вывод

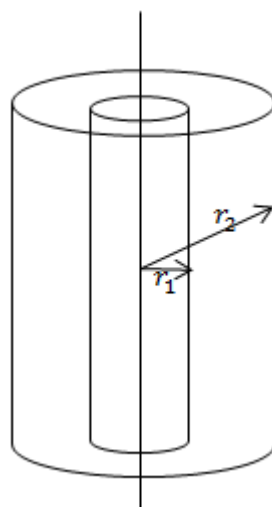
Нами была проделана работа по рассмотрению теоретических аспектов:

Уравнения Лапласа, оператора Лапласа, уравнения Лапласа в цилиндрических координатах, а также подробный вывод каждого из вышеперечисленных пунктов.

После этого мы разобрали частный случай уравнения Лапласа, а именно задачу Дирихле, после чего рассмотрели задачу Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях, а также рассмотрели ее решение.

После чего на практических задачах и конкретных примерах, нами были рассмотрены и решены типовые задачи по уравнению Лапласа в цилиндрических координатах, а также задача Дирихле для кольца с постоянными значениями искомой функции на внутренней и внешней окружностях.

Приложение 1



Список литературы

1. -Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. 2-е изд., стереотип. Учебник для вузов. М. ФИЗМАТЛИТ. 2004. 400 с.
2. -Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике Учебное пособие для вузов / Под ред. Е. С. Пятницкого. — 3-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 264 с
3. -Горюнов, А. Ф. Методы математической физики в примерах и задачах: Учебное пособие: В 2 томах Том 1 / Горюнов А.Ф. - Москва :ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 872 с.
4. -Горюнов, А. Ф. Методы математической физики в примерах и задачах. В 2 т. Т. II: Учебное пособие / Горюнов А.Ф. - Москва :ФИЗМАТЛИТ, 2015. - 772 с
5. -Джексон Дж. Классическая электродинамика. Перевод с английского Г. В. Воскресенского и Л. С. Соловьева. Под редакцией Э. Л. Бурштейна. Изд "Мир" Москва 1965. - 703 с.
6. М.: Наука, 1964. - 104 с.
7. Москва: Техносфера, 2002. - 320 с.
8. -Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка
9. -Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э. и др. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач
10. Учебное пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. — 896 с.
11. -Шарма Дж. Н., Сингх К. Уравнения в частных производных для инженеров